

$SU(2)$ から Kac-Moody 代数に至る道

黒木玄

2017 年 6 月 1 日 (木)

<https://mathtod.online/@genkuroki/204074>

1 May 31, 2017 10:56am

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

<https://mathtod.online/@7shi/203900>

四元数と 3 次元の回転の関係は「Lie 群 $SU(2)$ の随伴表現」. i, j, k を正規直交基底とする 3 次元 Euclid 空間に i, j, k 軸を中心とする角度 2θ の回転がそれぞれ

$$\begin{aligned} a &\mapsto e^{i\theta} a e^{-i\theta}, \\ a &\mapsto e^{j\theta} a e^{-j\theta}, \\ a &\mapsto e^{k\theta} a e^{-k\theta} \end{aligned}$$

で作用している. Lie 群 $SU(2)$ の四元数体 \mathbb{H} を使った実現の仕方は

$$SU(2) = \{g \in \mathbb{H} \mid |g| = 1\}.$$

これらの Lie 代数が

$$\mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k.$$

$SU(2)$ の $\mathfrak{su}(2)$ への随伴表現の特殊化が上で示した式.

2 May 31, 2017 9:31pm

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

複素数 (実数と i から生成される) を実 2 次正方行列によって

$$i \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と実現できることはよく知られている. 四元数 (実数と i, j から生成される) も次によって複素 2 次正方行列で実現できる:

$$\begin{aligned} i &\mapsto \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \\ j &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

すなわち複素数 z, w に対して

$$z + jw \mapsto \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix}.$$

四元数はこの形の複素 2 次正方行列のことだと思ってよい.

3 May 31, 2017 9:46pm

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

複素 n 次正方行列全体の集合を $M_n(\mathbb{C})$ と書く. 行列の積に関する群 $SU(n)$ は

$$SU(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^* A = AA^* = E, |A| = 1 \}$$

と定義される. $SU(2)$ については

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}.$$

この式から $SU(2)$ は絶対値が 1 の四元数全体のなす群と同一視できることや, $SU(2)$ は 3 次元球面 $|z|^2 + |w|^2 = 1$ になっていることもわかります.

四元数, 複素 2 次正方行列, 3 次元球面などなどの風景は基本的かつ様々に一般化されるので一度は見ておいて損がないです.

4 May 31, 2017 10:06pm

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

行列群 $SU(n)$ の Lie 代数 $\mathfrak{su}(n)$ の定義はその単位元 E での接空間です. 計算すると

$$\mathfrak{su}(n) = \{ X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0, \text{tr } X = 0 \}.$$

接空間の定義を知らない人はこれを定義だと思ってよいです. そして $X, Y \in \mathfrak{su}(n)$ ならば

$$[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{su}(n),$$

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} X^n / n! \in SU(n)$$

となることも容易に確認できます. $\mathfrak{su}(2)$ が実数体上の次の基底を持つことも簡単な計算でわかります:

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \\ J &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ K &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ゆえに $\mathfrak{su}(2)$ は純虚な四元数全体と同一視できる.

5 May 31, 2017 10:11pm

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

I, J, K は Pauli 行列の $\pm i$ 倍になっています. だから, パウリ行列を扱うことは本質的に $\mathfrak{su}(2)$ を扱っていることになります.

6 May 31, 2017 10:34pm

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

ここまでは行列で実現できる Lie 群と Lie 代数の典型例としての $SU(2)$ と $\mathfrak{su}(2)$ に関する説明です.

群や Lie 代数の話をしたら, その次にそれらの表現の話をしなければいけません.

Lie 群と Lie 代数の一般論を性急にさせて勉強しようとせずに, 行列の計算をきちんとやっておくことが大事なことだと思います.

何をやっているか理解できない一般論をやった後にそれを使って特殊な世界に降りて来ることになるのは, 数学を理解できなくなるための有力な手段の一つだと思います.

特殊な場合を知って, 残りは「以下同様」で理解できればものすごく効率が良くなります.

一を聞いて, 十を知る

という言葉がある.

7 May 31, 2017 10:45pm

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

群 G の体 K 上のベクトル空間 V での表現とは群 G から V の可逆な一次変換全体のなす群への群の準同型写像のことです. 群の表現とはざくっと言ってしまうと, 群の元を一次変換で表現することです.

たとえば, $SU(2)$ は複素 2×2 行列ですでに実現されているので, 自然に縦ベクトルの空間 \mathbb{C}^2 での表現を持ちます. これをよく $SU(2)$ のベクター表現と呼んだりします.

任意の Lie 群にはその Lie 代数における随伴表現が定義されます.

$SU(n)$ の場合にその随伴表現は $g \in SU(n)$ に対して, $\mathfrak{su}(n)$ の一次変換 Ad_g を $\text{Ad}_g X = gXg^{-1}$, $X \in \mathfrak{su}(n)$ と定めることによって定義されます.

$SU(2)$ の随伴表現は実 3 次元ベクトル空間 $\mathfrak{su}(2)$ での表現になります.

8 May 31, 2017 10:54pm

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

$SU(2)$ の随伴表現は四元数を使った実現の方で見るとわかりやすいです. $SU(2)$ の元 g は絶対値が 1 の四元数だと思えます.

$SU(2)$ の Lie 代数は純虚な四元数全体のなす 3 次元の実ベクトル空間と同一視できる.

$SU(2)$ の随伴表現は

$$ix + iy + kz \mapsto g(ix + iy + iz)g^{-1}$$

と書けます。これが座標 (x, y, z) を持つ 3 次元実 Euclid 空間の回転を実現していることが単なる計算だけでチェックできるわけです。

$SU(2)$ は複素 2 次正方行列で実現できるので、行列の積によって縦ベクトルの空間 \mathbb{C}^2 におけるベクター表現を自明に持つのですが、それだけではなく、3 次元実 Euclid 空間を回転させる表現も持っているわけです。

「 $SU(2)$ の表現を全部分類できないだろうか？」という問いに至れば表現論への入り口に立ったことになります。

実ベクトル空間での表現は複素化して複素ベクトル空間における表現にしてしまっても、複素ベクトル空間における表現を分類する問題にしてしまった方が色々楽になります。

9 May 31, 2017 11:03pm

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

$SU(2)$ の表現から $\mathfrak{su}(2)$ の表現が微分することによって得られ、逆に $\mathfrak{su}(2)$ の表現から $SU(2)$ の表現が \exp することによって得られます。($SU(2)$ が単連結であることの帰結。)

だから、 $SU(2)$ の表現の分類と $\mathfrak{su}(2)$ の表現の分類は同じことになります。

$\mathfrak{su}(2)$ の表現の話にしてしまうと、表現の分類が代数的に綺麗に整理できます。

ただし、すでに述べたように複素ベクトル空間での表現 (複素表現) を分類する方が楽です。

その理由は、 $\mathfrak{su}(2)$ の複素表現は $\mathfrak{su}(2)$ の複素化の表現の複素表現と同一視でき、 $\mathfrak{su}(2)$ の複素化

$$\mathbb{C}I + \mathbb{C}J + \mathbb{C}K$$

と非常に扱い易い Lie 代数

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{ X \in M_2(\mathbb{C}) \mid \text{tr } X = 0 \}$$

が一致するからです。これも簡単な計算の話。

10 May 31, 2017 11:10pm

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

どうして $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ が非常に扱い易いのか。

それは、所謂「昇降演算子」の方法をその表現論で利用可能だからです。既約表現のベクトルを「昇降演算子」の作用ですべて構成可能になる。

「昇降演算子」による計算で楽をしてうれしかった経験のある人であれば「なるほど、いつものあの方法が使えるのか！うれしい」と感じるようなことができるのです。

そのためには複素 3 次元の Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の基底を I, J, K から

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

に置き換えることが必要になります.

E, F が「昇降演算子」の役目を果たします.

11 May 31, 2017 11:17pm

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

E, F, H の基本関係式は

$$[H, E] = 2E,$$

$$[H, F] = -2F.$$

$$[E, F] = H.$$

重要なのはこの関係式で 2×2 行列での表現は重要ではありません. $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ に対して $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の $\lambda + 1$ 次元ベクトル空間 $L(\lambda)$ における表現を次のように構成できます.

- $L(\lambda)$ は

$$v, Fv, F^2v, \dots, F^\lambda v$$

を基底に持つベクトル空間であるとする.

- $Ev = 0, Hv = \lambda v, F^{\lambda+1}v = 0$ という関係式を課す.
- E, F, H の $L(\lambda)$ への作用は E, F, H の基本関係式を用いて自然に定める.

$L(\lambda)$ たちは $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ のすべての有限次元規約表現の同型類の代表元になっています. 有限次元規約表現の分類が完了した!

12 May 31, 2017 11:26pm

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

昇降演算子のアイデアが利用できるようにしたら, 有限次元規約表現の分類が 500 文字で完了してしまっただ!

同様のことが可能な Lie 代数のより広いクラスが, Kac-Moody 代数です.

Kac-Moody 代数は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の一般化に過ぎないので、「Kac-Moody」のような聞き慣れない言葉が出て来てもびびる必要はありません。昇降演算子の話をより一般的にするだけです。

Kac-Moody 代数は $\mathfrak{su}(n)$ の複素化 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ も含んでおり、任意の有限次元半単純 Lie 代数を含んでいます。そして、それだけではなく、無限次元のアフィン Lie 代数も含んでいるところがとてもうれしい。

Kac-Moody 代数の表現論はアフィン Lie 代数のような無限次元 Lie 代数であっても、 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の場合と同様に昇降演算子のアイデアで表現達を分類できることを主張しています。

びびらずに

以下同様

で行こう！

13 May 31, 2017 11:34pm

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

2×2 行列の計算をがんばって大量にした人が次にすべきことは、 3×3 行列の計算です。

$SU(3)$ の Lie 代数の複素化はトレースが 0 の複素 3 次正方行列全体のなす 8 次元の複素ベクトル空間になります (これも計算で解決できる)。

(i, j) 成分だけが 1 で他の成分が 0 の 3 次正方行列を E_{ij} と書くと、 $SU(3)$ の Lie 代数の複素化の基底として次が取れます。

$$\begin{aligned} H_1 &= E_{11} - E_{22}, \\ H_2 &= E_{22} - E_{33}, \\ E_{12}, \quad E_{23}, \quad E_{13}, \\ E_{21}, \quad E_{32}, \quad E_{31}. \end{aligned}$$

これらは $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の場合の H, E, F の一般化になっています。

$SU(3)$ の随伴表現の複素化はこれらを基底に持つ 8 次元の複素ベクトル空間における $SU(3)$ の表現になります。

14 May 31, 2017 11:40pm

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

$SU(3)$ の 8 次元表現を随伴表現としてさらっと構成しましたが、 $SU(3)$ の 8 次元表現はクォークの理論的発見に繋がるハドロンの「八道説」による分類の話そのものになっています。

[「クォークモデル」に関するウィキペディアを参照](#)

その辺の話は Edward Frenkel さんも数学ミステリー白熱教室第 4 回で説明していました。多分、表現論の話をするときには定番の話題だと思います。

[ツイッターにおける私の解説](#)

図 1

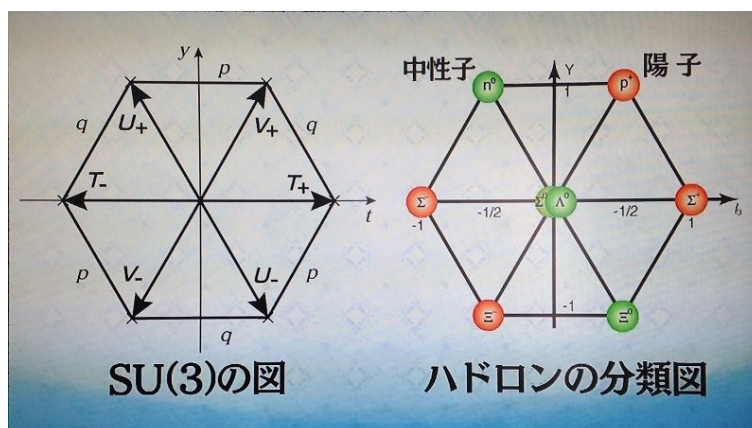
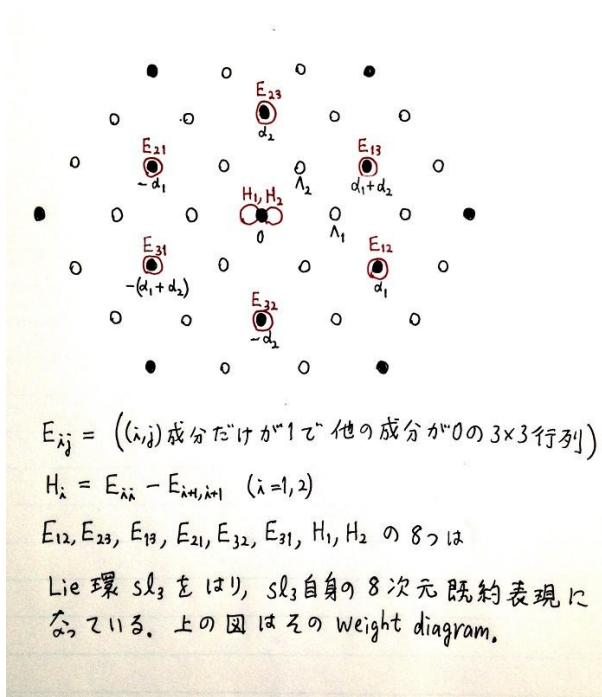


図 2



15 June 1, 2017 12:02am

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

$SU(3)$ の Lie 代数の複素化 $sl_3(\mathbb{C})$ は以下を生成元に持ちます:

$$H_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1},$$

$$E_i = E_{i,i+1},$$

$$F_i = E_{i+1,i}.$$

ここで $i = 1, 2$ です.

そして、それらは次を満たします:

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \\ [H_i, E_j] &= a_{ij} E_j, \\ [H_i, F_j] &= -a_{ij} F_j, \\ [E_i, F_j] &= \delta_{ij} H_i, \\ (\operatorname{ad} E_i)^{1-a_{ij}} E_j &= 0 \quad (i \neq j), \\ (\operatorname{ad} F_i)^{1-a_{ij}} F_j &= 0 \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} (\operatorname{ad} A)B &= [A, B], \\ [a_{ij}] &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

この証明も単なる行列の易しい計算です.

16 June 1, 2017 12:09am

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

以上の計算をがんばってすることの御利益は Kac-Moody 代数の定義をすぐに理解できるようになることです. 一つ前の発言の行列 $[a_{ij}]$ を

- サイズは ℓ とする.
- 対角成分はすべて 2 であるとする.
- 非対角成分は非負の整数で, $i \neq j$ について $a_{ij} = 0$ と $a_{ji} = 0$ は同値であるとする.

と一般化しましょう.

生成元 H_i, E_i, F_i ($i = 1, \dots, \ell$) と一つ前の発言に書いた形の関係式で定義される Lie 代数が型 $[a_{ij}]$ の Kac-Moody 代数の定義です. たったこれだけ!

「八道説」の $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ での随伴表現による解釈を知っていて, その関係式も実際に自分の手で計算してよく知っていれば, Kac-Moody 代数の定義は典型的に「以下同様」のスタイルになっていることを理解できるわけです.

数学は基本的にこういうみもふたもない話なので, 聞き慣れない数学用語に何か「権威」を感じている場合にはほぼ確実に誤解していることになると思います.

17 June 1, 2017 1:50am

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

補足: $(\operatorname{ad} A)B = [A, B] = AB - BA$ なので

$$(\operatorname{ad} A)^2 B = [A, [A, B]]$$

です. これは

$$[A, [A, B]] = A^2B - 2ABA + BA^2$$

とも書けます. Kac-Moody 代数の定義関係式の最も複雑な部分は

$$[A, [A, [\dots, [A, B] \dots]] = 0$$

この形をしていて, Serre 関係式と呼ばれています.

交換子をしつこく繰り返すといつかは 0 になるという関係式.

この Serre 関係式をパラメーター q を含む関係式に置き換えて, $[E_i, F_i]$ の部分も少し変えと Drinfeld-Jimbo の量子展開環の定義も得られます.

だから, 量子展開環も「昇降演算子」のアイデアを一般化したものになっています. こんな感じの話になっているので, 量子群の勉強をしたい人にとっても, $SU(n) \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow H_i, E_i, F_i$ という経路の計算をしておくことは結構大事です.