

数理統計学2022

すべてをまとめたPDF:

- [Statistics2022.pdf](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/Statistics2022.pdf) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/Statistics2022.pdf>) [[download](https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/Statistics2022.pdf) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/Statistics2022.pdf>)]
- [Statistics2022handwritten.pdf](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/handwritten/Statistics2022handwritten.pdf) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/handwritten/Statistics2022handwritten.pdf>) [[download](https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/handwritten/Statistics2022handwritten.pdf) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/handwritten/Statistics2022handwritten.pdf>)]

これはおまけで作っているPDFファイルなので更新は遅れる予定. 以下の個別のPDFファイルの方が常に新しいバージョンになっている.

このファイルのipynb版とpdf版:

- [Jupyter notebook](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/00-0%20README.ipynb) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/00-0%20README.ipynb>) [[nbviewer](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/00-0%20README.ipynb) (<https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/00-0%20README.ipynb>)]
- [pdf](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/00-0%20README.pdf) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/00-0%20README.pdf>) [[download](https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/00-0%20README.pdf) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/00-0%20README.pdf>)]

記号法については次のメモも参照せよ:

- [Memo.md](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/Memo.md) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/Memo.md>)
- [Jupyter notebook](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/00-1%20Memo.ipynb) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/00-1%20Memo.ipynb>) [[nbviewer](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/00-1%20Memo.ipynb) (<https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/00-1%20Memo.ipynb>)]
- [pdf](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/00-1%20Memo.pdf) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/00-1%20Memo.pdf>) [[download](https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/00-1%20Memo.pdf) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/00-1%20Memo.pdf>)]

目標

- 確率変数の扱い方
- 大数の法則と中心極限定理
- よく使われる確率分布に関する知識
- 尤度と推定と要約統計
- 検定と信頼区間を表裏一体のものとして理解すること
- P値関数について理解すること
- 簡単な場合について具体的な数値の計算を行えるようになること(重要!)

資料

[Jupyter](https://jupyter.org/) (<https://jupyter.org/>) notebook をオンラインで読むなら [nbviewer](https://nbviewer.org/) (<https://nbviewer.org/>) 経由の閲覧がおすすめです。オフラインでも読めるようにするためには pdf ファイルをダウンロードしてください。

[Julia言語](https://julialang.org/) (<https://julialang.org/>)を使って数値の計算やグラフの作画を行っています。必要最小限の使い方については次の資料を見て下さい:

- 07-2 [Julia言語を使った統計学の勉強の仕方](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-2%20How%20to%20use%20Julia%20language%20for%20learning%20statistics.ipynb) (<https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-2%20How%20to%20use%20Julia%20language%20for%20learning%20statistics.ipynb>)

[WolframAlpha](https://www.wolframalpha.com/) (<https://www.wolframalpha.com/>)も併用しています。

明らかな誤りをまだ大量に含んでいるものと思われます。ごめんなさい。適切に訂正しながら読んでください。随時訂正更新しています。

01 Bernoulli試行と関連確率分布

- [Jupyter notebook](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/01%20Bernoulli%20trial%20and%20related%20distributions.ipynb) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/01%20Bernoulli%20trial%20and%20related%20distributions.ipynb>) [[nbviewer](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/01%20Bernoulli%20trial%20and%20related%20distributions.ipynb) (<https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/01%20Bernoulli%20trial%20and%20related%20distributions.ipynb>)]
- [pdf](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/01%20Bernoulli%20trial%20and%20related%20distributions.pdf) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/01%20Bernoulli%20trial%20and%20related%20distributions.pdf>) [[download](https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/01%20Bernoulli%20trial%20and%20related%20distributions.pdf) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/01%20Bernoulli%20trial%20and%20related%20distributions.pdf>)]
- [hand-written note](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/handwritten/%E6%95%B0%E7%90%86%E7%B5%B1%E8%A8%88%80%E6%95%B0%E7%90%86%E7%B5%B1%E8%A8%88%80.pdf) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/handwritten/%E6%95%B0%E7%90%86%E7%B5%B1%E8%A8%88%80%E6%95%B0%E7%90%86%E7%B5%B1%E8%A8%88%80.pdf>)

[illegible]

- (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/handwritten/%E6%95%B0%E7%90%86%E7%B5%B1%E8%A8%88%>)

[illegible]

定義された確率分布

- **カテゴリカル分布**: Categorical(p_1, \dots, p_n)
- 成功確率 p の **Bernoulli分布**: Bernoulli(p)
- 試行回数 n , 成功確率 p の **Bernoulli試行の分布**: Bernoulli(p) ^{n}
- 試行回数 n , 成功確率 p の **二項分布**: Binomial(n, p) (n 回のBernoulli試行での成功回数の分布)
- 成功回数 k , 成功確率 p の **負の二項分布**: NegativeBinomial(n, p) = NegBin(n, p) (Bernoulli試行をちょうど k 回成功するまで続けたときの失敗の回数の分布)
- 成功確率 p の **幾何分布**: Geometric(p) = NegativeBinomial(1, p) (Bernoulli試行を成功するまで続けたときの失敗の回数の分布)
- 0から1のあいだの **一様分布**: Uniform(0, 1) (コンピュータでの一様乱数函数 rand() のモデル化)
- 試行回数 n の **一様乱数生成の繰り返しの分布**: Uniform(0, 1) ^{n}
- 平均 μ , 分散 σ^2 (標準偏差 σ)の **正規分布**: Normal(μ, σ)
- **標準正規分布**: Normal() = Normal(0, 1)
- 分布 D の **アフィン変換**: $aD + b$
- 分布 D の **スケール変換**: aD ($a > 0$)
- 分布 D の **平行移動**: $D + b$
- 分布 D の **逆数**: $1/D$

02 Gauss積分, ガンマ関数, ベータ関数

- <https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/02%20Gaussian%20integrals%2C%20Gamma%20and%20Beta%20fu>

<https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/02%20Gaussian%20integrals%2C%20Gamma%20and%20Be>

- <https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/02%20Gaussian%20integrals%2C%20Gamma%20and%20Beta%20fu>

<https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/02%20Gaussian%20integrals%2C%20Gamma%20and%20Beta%20fu>

- [\(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/handwritten/%E6%95%B0%E7%90%86%E7%B5%B1%E8%A8%88%\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/handwritten/%E6%95%B0%E7%90%86%E7%B5%B1%E8%A8%88%)

[illegible]

- [\(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/handwritten/%E6%95%B0%E7%90%86%E7%B5%B1%E8%A8%88%\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/handwritten/%E6%95%B0%E7%90%86%E7%B5%B1%E8%A8%88%)

[illegible]

定義された確率分布

- 正規分布 (再): $\text{Normal}(\mu, \sigma) = \mu + \sigma \text{Normal}(0, 1)$
- 形状 α , スケール θ の **ガンマ分布**: $\text{Gamma}(\alpha, \theta) = \theta \text{Gamma}(\alpha, 1)$ (平均的なイベント発生間隔が θ のときにちょうど α 回イベントが生じるまでにかかる時間の分布)
- 平均 θ の **指数分布**: $\text{Exponential}(\theta) = \text{Gamma}(1, \theta)$ (平均的なイベント発生間隔が θ のときにイベントが発生するまでにかかる時間の分布)
- 中央値 a , スケール b の **Laplace分布**: $\text{Laplace}(a, b)$
- 形状 α , スケール θ の **逆ガンマ分布**: $\text{InverseGamma}(\alpha, \theta) = 1/\text{Gamma}(\alpha, 1/\theta)$
- 自由度 ν の **χ^2 分布**(カイ二乗分布): $\text{Chisq}(\nu) = \text{Gamma}(\nu/2, 2)$
- 形状 α , スケール θ の **Weibull分布**: $\text{Weibull}(\alpha, \theta)$
- パラメータ α, β の **ベータ分布**: $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ ($\alpha + \beta - 1$ 個の一樣乱数の中で α 番目に小さな($= \beta$ 番目に大きな)値の分布)
- 自由度 ν の **t分布**: $\text{TDist}(\nu)$ (平均 0 の正規分布で分散の逆数が $\text{Chisq}(\nu)/\nu$ に従う場合, $\text{BetaPrime}(1/2, \nu/2)$ と密接に関係)
- パラメータ α, β の **ベータプライム分布**: $\text{BetaPrime}(\alpha, \beta)$ (確率 t に関するベータ分布 $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ をオッズ $u = t/(1 - t) = 1/(1 - t) - 1$ に関する分布に変換したもの)
- 自由度 ν_1, ν_2 の **F分布**: $\text{FDist}(\nu_1, \nu_2) = (\nu_2/\nu_1) \text{BetaPrime}(\nu_1/2, \nu_2/2)$
- **Dirichlet分布**: $\text{Dirichlet}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ($n = 2$ の場合がベータ分布と一致)

03 確率分布達の解釈

- (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/03%20Interpretation%20of%20probability%20distributions.ipynb>)

<https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/03%20Interpretation%20of%20probability%20distributions.ipynb>

-

05 大数の法則と中心極限定理

- Jupyter notebook (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/05%20Central%20limit%20theorem.ipynb>)
[nbviewer (<https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/05%20Central%20limit%20theorem.ipynb>)]
- pdf (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/05%20Central%20limit%20theorem.pdf>) [[download](#)
(<https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/05%20Central%20limit%20theorem.pdf>)]
- hand-written note
(<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/handwritten/%E6%95%B0%E7%90%86%E7%B5%B1%E8%A8%88%>)
[[download](#)
(<https://qithub.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/handwritten/%E6%95%B0%E7%90%86%E7%B5%B1%E8%A8%88%>)]

大数の法則の数値例

- $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$ の分布
 - Bernoulli試行
 - 正規分布の標本分布
 - ガンマ分布 $\text{Gamma}(2, 3)$ の標本分布

大数の法則が成立しない場合の数値例

- Cacy分布の標本分布
- Pólvaの壺 = 事前分布がベータ分布のBernoulli試行

ランダムウォークの数値例

- $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ の分布
 - Bernoulli試行
 - 正規分布の標本分布
 - ガンマ分布 $\text{Gamma}(2, 3)$ の標本分布
 - Cacy分布の標本分布
 - Pólyaの壺 = 事前分布がベータ分布のBernoulli試行

中心極限定理の数値例

- 対称な分布
 - 二項分布
 - 一様分布の標本分布
 - ベータ分布 $\text{Beta}(0.5, 0.5)$
 - Bernoulli試行 $p = 0.5$
 - Laplace分布の標本分布
- 非対称な分布
 - ガンマ分布 $\text{Gamma}(3, 1)$ の標本分布
 - Bernoulli試行 ($p = 0.25$) の標本分布
 - Poisson分布 (期待値1) の標本分布
 - 指数分布 (期待値1) の標本分布
 - χ^2 分布 (自由度1) の標本分布
 - 混合正規分布の標本分布
 - 対数正規分布の標本分布

正規分布で近似される確率分布の数値例

- デルタ法の応用
 - 自由度が大きな χ^2 分布の逆数
 - 自由度が大きな χ^2 分布の対数
 - 2つのパラメータが両方とも大きなベータ分布
- 適当なパラメータ領域において正規分布で近似される分布
 - 二項分布
 - 負の二項分布
 - Poisson分布
 - ガンマ分布
 - χ^2 分布
 - 逆ガンマ分布
 - ベータ分布
 - t分布
 - ベータプライム分布
 - F分布
 - 超幾何分布
 - ベータ二項分布
 - ベータ負の二項分布

06 条件付き確率分布, 尤度, 推定, 記述統計

- [illegible]

演習用サンプル

- Datasaurusの例 (データサウルスの例). (<http://www.thefunctionalart.com/2016/08/download-datasaurus-never-trust-summary.html>)
 - [csv file \(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/data/Datasaurus_data.csv\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/data/Datasaurus_data.csv), [raw version \(https://raw.githubusercontent.com/genkuroki/Statistics/master/2022/data/Datasaurus_data.csv\)](https://raw.githubusercontent.com/genkuroki/Statistics/master/2022/data/Datasaurus_data.csv)
 - [x座標のみ \(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/data/Datasaurus_X.txt\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/data/Datasaurus_X.txt), [y座標のみ \(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/data/Datasaurus_Y.txt\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/data/Datasaurus_Y.txt)
 - [x座標のみコンマ付き \(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/data/Datasaurus_X_with_commas.txt\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/data/Datasaurus_X_with_commas.txt), [y座標のみコンマ付き \(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/data/Datasaurus_Y_with_commas.txt\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/data/Datasaurus_Y_with_commas.txt)

この例に関する詳しい解説が次の場所にある:

- Justin Matejka, George Fitzmaurice. Same Stats, Different Graphs: Generating Datasets with Varied Appearance and Identical Statistics through Simulated Annealing. Honourable Mention, ACM SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems, 2017 [[link \(https://www.autodesk.com/research/publications/same-stats-different-graphs\)](https://www.autodesk.com/research/publications/same-stats-different-graphs)]

関連の情報が [datasaurus same stats を検索 \(https://www.google.com/search?q=datasaurus+same+stats\)](https://www.google.com/search?q=datasaurus+same+stats) すれば得られる。

定義された確率分布

- **2変量正規分布:** $MvNormal(\mu, \Sigma)$ (多変量正規分布 でも同じ記号を使う.)
- **2×2の分割表の分布**
 - 4つのPoisson分布の積
 - 四項分布
 - 2つの二項分布の積
 - Fisherの非心超幾何分布

07 例

07-1 例：ベータ関数と二項分布の関係とその応用

- [Jupyter notebook \(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-1%20Relationship%20between%20beta%20and%20binomial%20distributions.ipynb\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-1%20Relationship%20between%20beta%20and%20binomial%20distributions.ipynb) [[nbviewer \(https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-1%20Relationship%20between%20beta%20and%20binomial%20distributions.ipynb\)](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-1%20Relationship%20between%20beta%20and%20binomial%20distributions.ipynb)]
- [pdf \(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-1%20Relationship%20between%20beta%20and%20binomial%20distributions.pdf\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-1%20Relationship%20between%20beta%20and%20binomial%20distributions.pdf) [[download \(https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/07-1%20Relationship%20between%20beta%20and%20binomial%20distributions.pdf\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/07-1%20Relationship%20between%20beta%20and%20binomial%20distributions.pdf)]

07-2 Julia言語を使った統計学の勉強の仕方

- [Jupyter notebook \(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-2%20How%20to%20use%20Julia%20language%20for%20learning%20statistics.ipynb\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-2%20How%20to%20use%20Julia%20language%20for%20learning%20statistics.ipynb) [[nbviewer \(https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-2%20How%20to%20use%20Julia%20language%20for%20learning%20statistics.ipynb\)](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-2%20How%20to%20use%20Julia%20language%20for%20learning%20statistics.ipynb)]
- [pdf \(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-2%20How%20to%20use%20Julia%20language%20for%20learning%20statistics.pdf\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/07-2%20How%20to%20use%20Julia%20language%20for%20learning%20statistics.pdf) [[download \(https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/07-1%20Relationship%20between%20beta%20and%20binomial%20distributions.pdf\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/07-1%20Relationship%20between%20beta%20and%20binomial%20distributions.pdf)]

08 検定と信頼区間(1) 一般論

- [Jupyter notebook](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/08%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20General%20theory.ipynb)
(<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/08%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20General%20theory.ipynb>) [[nbviewer](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/08%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20General%20theory.ipynb)
(<https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/08%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20General%20theory.ipynb>)]
- [pdf](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/08%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20General%20theory.pdf)
(<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/08%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20General%20theory.pdf>) [[download](https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/08%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20General%20theory.pdf)
(<https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/08%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20General%20theory.pdf>)]

P値関数 の概念が最も重要である。

この一連のノートでは **信頼区間は常に対応するP値関数を使って定義される** ことになる。

関連講義動画

- 京都大学大学院医学研究科 聴講コース
臨床研究者のための生物統計学「仮説検定とP値の誤解」
佐藤 俊哉 医学研究科教授
<https://youtu.be/vz9cZnB1d1c> (<https://youtu.be/vz9cZnB1d1c>)

この講義動画は「[P値に関するASA声明](https://www.biometrics.gr.jp/news/all/ASA.pdf) (<https://www.biometrics.gr.jp/news/all/ASA.pdf>)」の考え方の非常に良い解説になっている。

09 検定と信頼区間(2) 比率

- [Jupyter notebook](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/09%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Proportion.ipynb)
(<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/09%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Proportion.ipynb>) [[nbviewer](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/09%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Proportion.ipynb)
(<https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/09%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Proportion.ipynb>)]
- [pdf](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/09%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Proportion.pdf)
(<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/09%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Proportion.pdf>) [[download](https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/09%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Proportion.pdf)
(<https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/09%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Proportion.pdf>)]

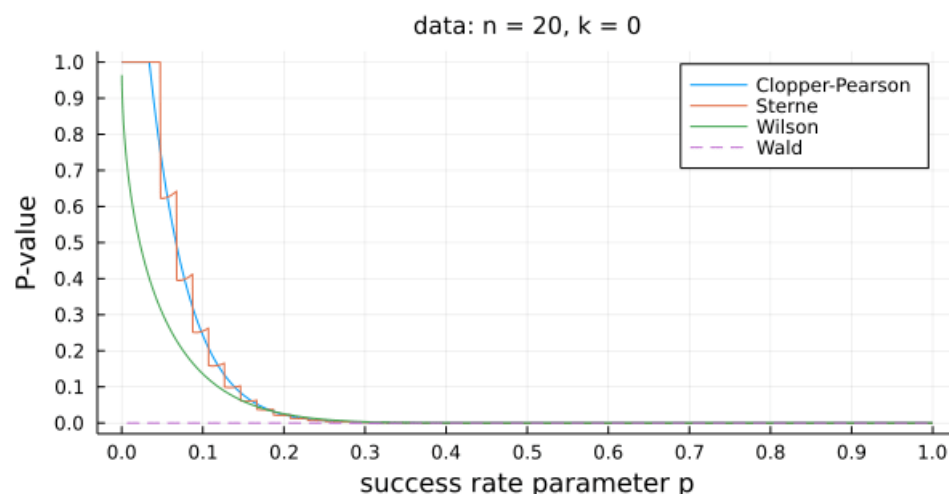
定義された信頼区間

二項検定に付随する4種の信頼区間

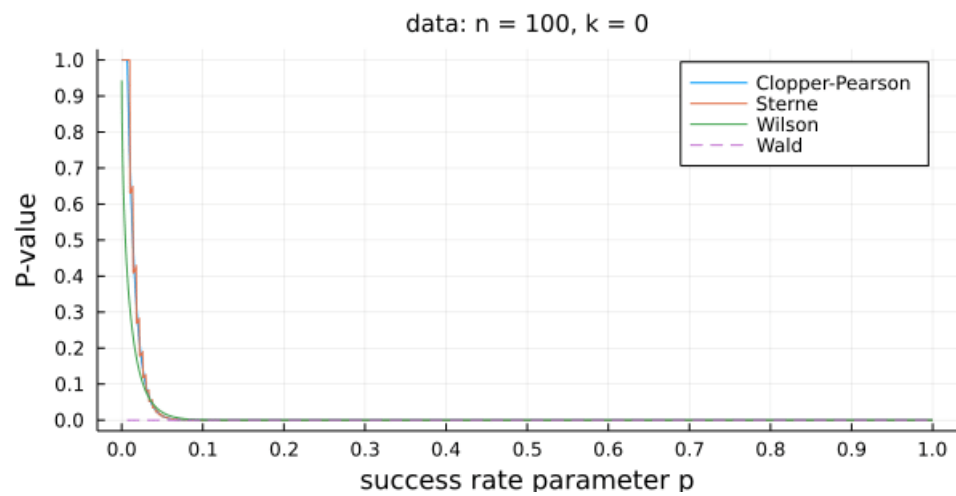
- Clopper-Pearsonの信頼区間
- Sterneの信頼区間
- Wilsonの信頼区間
- Waldの信頼区間

作成された動画

[n=20の二項分布モデルのP値関数](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/images/pvaluefunction20.gif) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/images/pvaluefunction20.gif>)



[n=100の二項分布モデルのP値関数](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/images/pvaluefunction100.gif) (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/images/pvaluefunction100.gif>)



10 検定と信頼区間(3) 平均

- [Jupyter notebook](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/10%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Mean.ipynb)
[\[nbviewer\]](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/10%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Mean.ipynb)
[\[https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/10%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Mean.ipynb\]](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/10%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Mean.ipynb)
- [pdf](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/10%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Mean.pdf)
[\[download\]](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/10%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Mean.pdf)
[\[https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/10%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Mean.pdf\]](https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/10%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Mean.pdf)

定義された信頼区間

平均の信頼区間

- 標準正規分布を使って計算される信頼区間
- t分布を使って計算される信頼区間

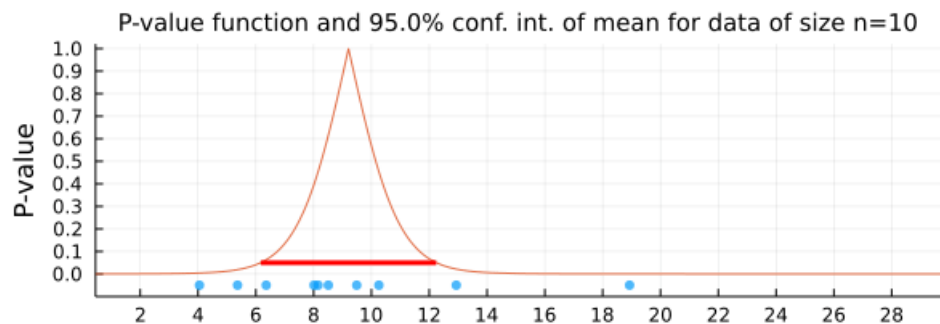
後者のみを使用する.

定義された確率分布

- 自由度 ν の χ 分布: $\text{Chi}(\nu) = \sqrt{\text{Chisq}(\nu)}$

作成された動画

$n \rightarrow \infty$ でのP値関数と信頼区間の挙動 (https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/images/confint_of_mean.gif).



11 検定と信頼区間(4) 比率の違い

- [Jupyter notebook](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/11%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Two%20proportions.ipynb)
[\[nbviewer\]](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/11%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Two%20proportions.ipynb)
[\[https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/11%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Two%20proportions.ipynb\]](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/11%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Two%20proportions.ipynb)
- [pdf](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/11%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Two%20proportions.pdf)
[\[download\]](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/11%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Two%20proportions.pdf)

<https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/11%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20-%20Two%20proportions.pdf>]

定義された信頼区間

オッズ比の信頼区間

- Wald型の信頼区間
- Pearsonの χ^2 検定に付随する信頼区間
- Fisher検定に付随する信頼区間
 - Sterne型
 - Clopper-Pearson型

リスク比の信頼区間

- Wald型の信頼区間
- Pearsonの χ^2 検定に付随する信頼区間

比率の差の信頼区間

- Wald型の信頼区間

定義された確率分布

- Fisherの非心超幾何分布: $\text{FisherNoncentralHypergeometric}(m, n, r, \omega)$

関連講義動画

- 聴講コース 臨床研究者のための生物統計学 (<https://ocw.kyoto-u.ac.jp/course/328/>)
 - 佐藤俊哉, ランダム化ができないとき, 2018/10/25, 長さ 1:02:31) [<https://youtu.be/tUkyjZXU1vc>] (<https://youtu.be/tUkyjZXU1vc>)
 - 佐藤俊哉, 交絡とその調整, 2018/12/20, 長さ 1:00:52) [<https://youtu.be/ybdkQFEEdCPM>] (<https://youtu.be/ybdkQFEEdCPM>)
 - 佐藤俊哉, 回帰モデルと傾向スコア, 2019/02/21, 長さ 1:04:44) [<https://youtu.be/cOHN444kBlo>] (<https://youtu.be/cOHN444kBlo>)

「検定と信頼区間(4) 比率の違い」のノートブックの内容をJulia言語で直接実行するためのヒント

「検定と信頼区間(4) 比率の違い」のノートブック

(<https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/11%20Hypothesis%20testing%20and%20confidence%20interval%20Two%20proportions.ipynb>) の中の

```
a, b, c, d = 49, 965, 26, 854
@show a, b, c, d
 $\chi^2 = (a+b+c+d)*(a*d-b*c)^2/((a+b)*(c+d)*(a+c)*(b+d))$ 
@show  $\chi^2$ 
pvalue = ccdf(Chisq(1),  $\chi^2$ )
 $\alpha = 0.05$ 
@show  $\alpha$ 
confint = find_zeros(0.5, 3.0) do  $\omega$ 
    A, B, C = 1- $\omega$ , a+d+ $\omega*(b+c)$ , a*d- $\omega*b*c$ 
     $\delta = 2C/(B + \sqrt{B^2 - 4A*C})$ 
     $\chi^2 = \delta^2 * (1/(a-\delta) + 1/(b+\delta) + 1/(c+\delta) + 1/(d-\delta))$ 
    ccdf(Chisq(1),  $\chi^2$ ) -  $\alpha$ 
end
@show confint;

(a, b, c, d) = (49, 965, 26, 854)
 $\chi^2 = 4.368235947209686$ 
pvalue = ccdf(Chisq(1),  $\chi^2$ ) = 0.03661487827607113
 $\alpha = 0.05$ 
confint = [1.031778110800563, 2.6957054358850328]
```

の部分 directly Julia ([download \(https://julia-lang.org/downloads/\)](https://julia-lang.org/downloads/))で実行するためには以下のようにすればよい。

2群の平均の差の信頼区間

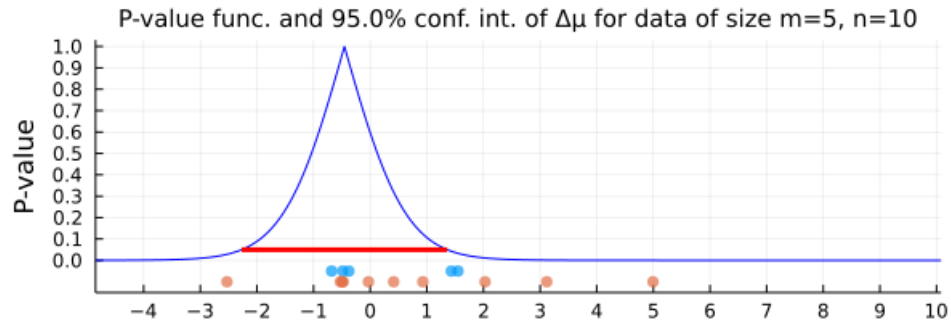
- Welchのt検定に付随する信頼区間

Studentのt検定は使用しない。

作成された動画

データサイズを大きくしたときのP値関数と信頼区間の挙動

(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/images/confint_of_diffmeans.gif)



13 誤用を避けるための注意

- [Jupyter notebook \(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/13%20How%20to%20avoid%20misuse.ipynb\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/13%20How%20to%20avoid%20misuse.ipynb) [[nbviewer \(https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/13%20How%20to%20avoid%20misuse.ipynb\)](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/13%20How%20to%20avoid%20misuse.ipynb)]
- [pdf \(\)](#) [[download \(\)](#)]

P値に関する誤用を避けるために最初に読むべき基本文献は

- [統計的有意性とP値に関するASA声明 \(https://www.biometrics.gr.jp/news/all/ASA.pdf\)](https://www.biometrics.gr.jp/news/all/ASA.pdf)

である。ただし、以下の部分の「データ」は「統計モデル内でランダムに生成された仮想的なデータ」の意味であると解釈する必要がある。（「現実において観察されたデータ」であると解釈してはいけない。）

2. P 値とは？

おおざっぱにいうと、P 値とは特定の統計モデルのもとで、データの統計的要約（たとえば、2 グループ比較での標本平均の差）が観察された値と等しいか、それよりも極端な値をとる確率である。

一連のノート群では、通常の統計学入門の教科書とは違って、「統計モデル」という用語を多用した。このP値の定義の具体例については他のノートで詳しく説明した。

14 回帰

- [Jupyter notebook \(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/14%20Regression.ipynb\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/14%20Regression.ipynb) [[nbviewer \(https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/14%20Regression.ipynb\)](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/14%20Regression.ipynb)]
- [pdf \(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/14%20Regression.pdf\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/14%20Regression.pdf) [[download \(https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/14%20Regression.pdf\)](https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/14%20Regression.pdf)]

定義された信頼推定

線形回帰の場合:

- 回帰関数の値の信頼区間
- 回帰関数 + 残差の予測区間

ロジスティック回帰の場合:

- $t_* = \beta_0 + \beta_1 x_*$ の信頼区間
- $p_* = \text{logistic}(\beta_0 + \beta_1 x_*)$ の信頼区間
- $x_* = 0$ の場合から β_0 の信頼区間が得られる。
- β_1 の信頼区間

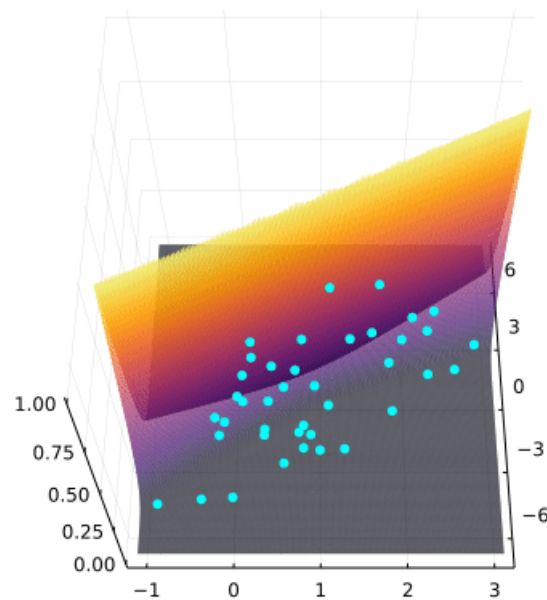
定義された確率分布

- 多変量正規分布: $\text{MvNormal}(\mu, \Sigma)$
- ロジスティックモデル: $\text{LogisticModel}(x, \beta)$

作成された動画

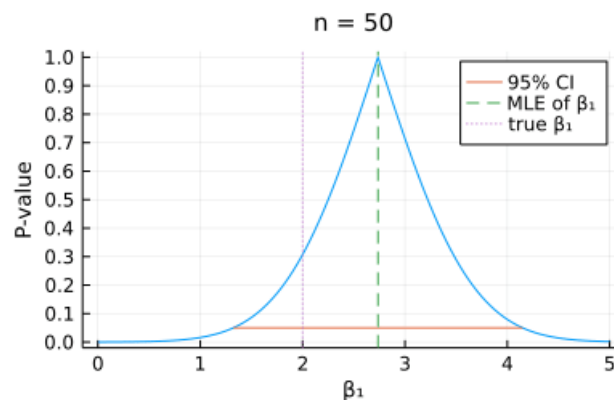
線形回帰の信頼区間に対応するP値関数

(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/images/anim_linreg_confint_pvalfunc_3d.gif) (x軸は-2から2まで)



ロジスティック回帰の β_1 の信頼区間に対応するP値関数

(https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/images/anim_logisticreg_beta1_confint_pvalfunc.gif)



15 まとめ

- Jupyter notebook (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/15%20Summary.ipynb>) [nbviewer (<https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/15%20Summary.ipynb>)]
- pdf (<https://github.com/genkuroki/Statistics/blob/master/2022/15%20Summary.pdf>) [download (<https://github.com/genkuroki/Statistics/raw/master/2022/15%20Summary.pdf>)]

1. 二項分布モデルでのClopper-Pearsonの信頼区間
2. P値関数について
3. Welchの t 検定について
4. 数学的な補足: 大数の法則と中心極限定理について

参考資料

以上で解説できなかったことに関するノート

- Kullback-Leibler情報量とSanovの定理 (2016-2018) [pdf (<https://genkuroki.github.io/documents/20160616KullbackLeibler.pdf>)]
- ガンマ分布の中心極限定理とStirlingの公式 (2016-2018) [pdf (<https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf>)]
- 一般化されたLaplaceの方法 (2016) [pdf (<https://genkuroki.github.io/documents/20161014GeneralizedLaplace.pdf>)]

- 最尤法とカイ二乗検定の基礎 (2017-2020) [[pdf \(https://genkuroki.github.io/documents/IntroMLE.pdf\)](https://genkuroki.github.io/documents/IntroMLE.pdf)]
- 確率論入門 (2017) [[pdf \(https://genkuroki.github.io/documents/IntroProbability.pdf\)](https://genkuroki.github.io/documents/IntroProbability.pdf)]
- ベイズ統計入門 (手書きのノート, 2019) [[pdf \(https://genkuroki.github.io/documents/2019-09-03_BayesianStatistics.pdf\)](https://genkuroki.github.io/documents/2019-09-03_BayesianStatistics.pdf)]
- ベイズ統計の枠組みと解釈について (2019) [[Jupyter notebook \(https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/Introduction%20to%20Bayesian%20Statistics.ipynb\)](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/Introduction%20to%20Bayesian%20Statistics.ipynb)]
- Kullback-Leibler情報量と記述統計 (2019-2020) [[Jupyter notebook \(https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/KL%20information%20and%20descriptive%20statistics.ipynb\)](https://nbviewer.org/github/genkuroki/Statistics/blob/master/KL%20information%20and%20descriptive%20statistics.ipynb)]

