① 確率変数 X が確率密度函数 $p(x)$ を持つ　←　$X \sim p(x)$

$$\iff \quad E[f(X)] = \int f(x)\,p(x)\,dx \quad (\text{定積分})$$

$X_1, \dots, X_n \sim p(x_1, \dots, x_n)$

② 確率変数達 $X_1, \dots, X_n$ が(同時)確率密度函数 $p(x_1, \dots, x_n)$ を持つ

$$\iff \quad E[f(X_1, \dots, X_n)] = \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n)\, p(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \quad (\text{定積分})$$

そのときの X_i 単独の確率密度函数 $p_i(x_i)$ は次になる:

$$p_i(x_i) = \int \cdots \int p(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n \quad (\widehat{dx_i}\ \text{は}\ dx_i\ \text{を除くという意味}).$$

(同時)確率質量函数についても同様

さらに,

③ $X_1, \dots, X_n$ は独立である　←　$X_i \sim p_i(x_i)$ and $X_1, \dots, X_n$ are independent.

$$\iff \quad p(x_1, \dots, x_n) = p_1(x_1) \cdots p_n(x_n)$$

$$\iff \quad E[f_1(X_1) \cdots f_n(X_n)] = E[f_1(X_1)] \cdots E[f_n(X_n)]$$

←　確率変数の独立性はこの形で使う.

④ 確率変数の列 $Y_1, Y_2, \dots$ の分布が確率変数 Y_∞ の分布に収束する(分布収束)

$$\iff \quad \lim_{n \to \infty} E[f(Y_n)] = E[f(Y_\infty)].$$

分布の収束 $\iff$ 確率変数の函数の期待値の収束

$\boxed{\text{例}}$ 試行回数 n, 成功確率 p の Bernoulli 試行の分布にしたがう確率変数 $X_1, \dots, X_n$ について,

$$E[f(X_1,\dots,X_n)] = \sum_{x_1=1,0} \cdots \sum_{x_n=1,0} f(x_1,\dots,x_n) \underbrace{\prod_{i=1}^{n}\left(p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}\right)}_{\text{積の形}}$$

なので, $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$ かつ $X_1,\dots,X_n$ は独立である.

$\boxed{\text{例}}$ $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha,1)$, $Y \sim \mathrm{Gamma}(\beta,1)$ で X と Y は独立

$$\Longleftrightarrow\ E[f(X,Y)] = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) \underbrace{\frac{e^{-x}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-y}y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}}_{\text{積の形}} \,dx\,dy$$

このとき,

$$E\left[g\left(X+Y, \frac{X}{X+Y}\right)\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty g\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) \frac{e^{-x}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-y}y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \,dx\,dy$$

ガンマ函数とベータ函数の関係

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^1 g(z,t) \underbrace{\frac{e^{-z}z^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}}_{\text{積の形}} \,dt\right) dz.$$

ゆえに, $X+Y \sim \mathrm{Gamma}(\alpha+\beta,1)$, $\dfrac{X}{X+Y} \sim \mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$ かつ $X+Y$ と $\dfrac{X}{X+Y}$ は独立.

$\boxed{\text{例}}$ $X_i \sim \mathrm{Normal}(\mu,\sigma)$ かつ $X_1,\dots,X_n$ は独立

$$\Longleftrightarrow\ E[f(X_1,\dots,X_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_n) \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) dx_1 \cdots dx_n.$$

例 (二項分布のPoisson分布への収束) ← 後で説明する予定

$$K_n \sim \mathrm{Binomial}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right),\ K_\infty \sim \mathrm{Poisson}(\lambda) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} E[f(K_n)] = E[f(K_\infty)]$$

例 (負の二項分布のガンマ分布への収束) pの小さな負の二項分布はガンマ分布で近似される。

$$M_L \sim \mathrm{NegativeBinomial}\left(\alpha, \frac{1}{L\theta}\right),\ T_L = \frac{M_L + k}{L},\ T_\infty \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \theta) \Rightarrow \lim_{L\to\infty} E[f(T_L)] = E[T_\infty].$$

例 (二項分布の中心極限定理) ← 後で解説する予定

$$K_n \sim \mathrm{Binomial}(n, p),\ Z_n = \frac{K_n - np}{\sqrt{n}},\ Z_\infty \sim \mathrm{Normal}(0, p(1-p)) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} E[f(Z_n)] = E[f(Z_\infty)].$$

例 (ガンマ分布の中心極限定理) ガンマ分布はαが大きいとき正規分布で近似される。

$$X_\alpha \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \theta),\ Z_\alpha = \frac{X_\alpha - \alpha\theta}{\sqrt{\alpha\theta^2}},\ Z_\infty \sim \mathrm{Normal}(0,1) \Rightarrow \lim_{\alpha\to\infty} E[f(Z_\alpha)] = E[f(Z_\infty)].$$

例 (ベータ分布の正規分布近似) $0 < p < 1$とする。 ベータ分布はパラメータが大きいとき正規分布で近似される。

$$T_n \sim \mathrm{Beta}(np, n(1-p)),\ Z_n = \frac{\sqrt{n}\,(T_n - p)}{p(1-p)},\ Z_\infty \sim \mathrm{Normal}(0,1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} E[f(Z_n)] = E[f(Z_\infty)].$$

例 (一般の中心極限定理) X_iたちは同じ分布にしたがい独立であるとし、$E[X_i] = \mu$が定義され、$E[(X_i - \mu)^2] = \sigma^2 < \infty$、$E[|X_i - \mu|^3] < \infty$であるとする。このとき、

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma},\ Z_\infty \sim \mathrm{Normal}(0,1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} E[f(Z_n)] = E[f(Z)].$$

後で解説する。