二項分布、負の二項分布、ベータ分布　nは正の整数であるとし, $0 < p \le 1$ であるとする.

$T_1, T_2, T_3, \ldots$ は各々が一様分布 $\mathrm{Uniform}(0,1)$ にしたがう独立同分布確率変数列であるとする.

$K_{n,p} = (T_1, T_2, \ldots, T_n$ の中で p 以下のものの個数$)$ とおく. このとき,

$$K_{n,p} \sim \mathrm{Binomial}(n,p).$$

以下 $k \ge 1$ と仮定する.

$N_{k,p} = (T_1, T_2, \ldots, T_n$ の中で p 以下のものの個数がちょうど k 個になる $n)$ とおく. このとき

$$M_{k,p} := N_{k,p} - k \sim \mathrm{NegativeBinomial}(k,p).$$

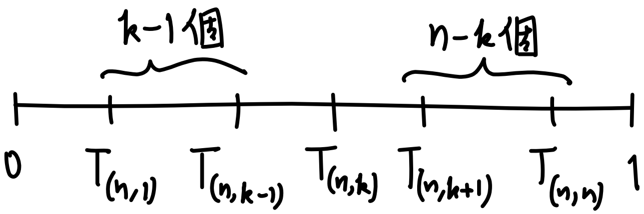
このとき, 自明に $K_{n,p} \ge k \iff N_{k,p} \le n$ なので

$$\mathrm{ccdf}(\mathrm{Binomial}(n,p), k-1) = \mathrm{cdf}(\mathrm{NegativeBinomial}(k,p), n-k). \qquad (\mathrm{ccdf} := 1 - \mathrm{cdf})$$

$T_1, T_2, \ldots, T_n$ を小さな順に並べた結果を $T_{(n,1)} \le T_{(n,2)} \le \cdots \le T_{(n,n)}$ と表すことにする. このとき,

$$T_{(n,k)} \sim \mathrm{Beta}(k, n-k+1).$$

これは少し非自明 (ここではみとめて使う.)



このとき, 自明に $K_{n,p} \ge k \iff T_{(n,k)} \le p \iff N_{k,p} \le n$ なので

$$\mathrm{cdf}(\mathrm{Beta}(k, n-k+1), p)$$

$$= \mathrm{ccdf}(\mathrm{Binomial}(n,p), k-1) = \mathrm{cdf}(\mathrm{NegativeBinomial}(k,p), n-k).$$

前ページの結論で $T_{(n,k)} \sim \mathrm{Beta}(k, n-k+1)$ のみがまだ示されていない。

$\boxed{T_{(n,k)} \sim \mathrm{Beta}(k, n-k+1) \text{ の証明1}}$ $T_{(n,k)} =$ (0〜1の一様乱数達 $T_1, T_2, \dots, T_n$ の中で k 番目に小さいもの) であった。

$T_{(n,k)} \in [t, t+dt]$ となる確率は、dt について2次以上の項を無視すると次のように近似される:

$$P\left(T_{(n,k)} \in [t, t+dt]\right) \approx \underbrace{\frac{n!}{(k-1)!\,1!\,(n-k)!}} \underbrace{t^{k-1}\,dt\,(1-t)^{n-k}}_{\wr\wr \; P(T_1, \dots, T_{k-1} < t < T_k < t+dt < T_{k+1}, \dots, T_n)}$$

n個のT_iを

$\underline{k-1\text{個}}$と$\underline{1\text{個}}$と$\underline{n-k\text{個}}$

$T_{(n,k)}$より小　$= T_{(n,k)}$　$T_{(n,k)}$より大

に分割する方法の数

そして、
$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n-k+1)} = \frac{1}{B(k, n-k+1)}.$$

ゆえに、$T_{(n,k)}$ の確率密度函数は $\dfrac{t^{k-1}(1-t)^{n-k}}{B(k, n-k+1)} = \left(\begin{array}{l}\mathrm{Beta}(k, n-k+1)\text{の}\\ \text{確率密度函数}\end{array}\right)$ $\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{T_{(n,k)} \sim \mathrm{Beta}(k, n-k+1) \text{ の証明2}}$ $0 < t < 1$ であるとする。

$$T_{(n,k)} \leq t \iff T_1, T_2, \dots, T_n \text{ の中で } t \text{ 以上のものが } k \text{ 個以上}$$

なので $P(T_{(n,k)} \leq t) = \displaystyle\sum_{i \geq k} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$. ゆえに $T_{(n,k)}$ の確率密度関数は

$$\frac{d}{dt} P(T_{(n,k)} \leq t) = \sum_{i \geq k} \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \sum_{i \geq k} \frac{n!}{i!\,(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-i)!} t^{k-1} (1-t)^{n-k} = \frac{t^{k-1}(1-t)^{n-k}}{B(k, n-k+1)} = \left(\begin{array}{l}\mathrm{Beta}(k, n-k+1)\text{の}\\ \text{確率密度関数}\end{array}\right).$$ $\boxed{\text{q.e.d.}}$

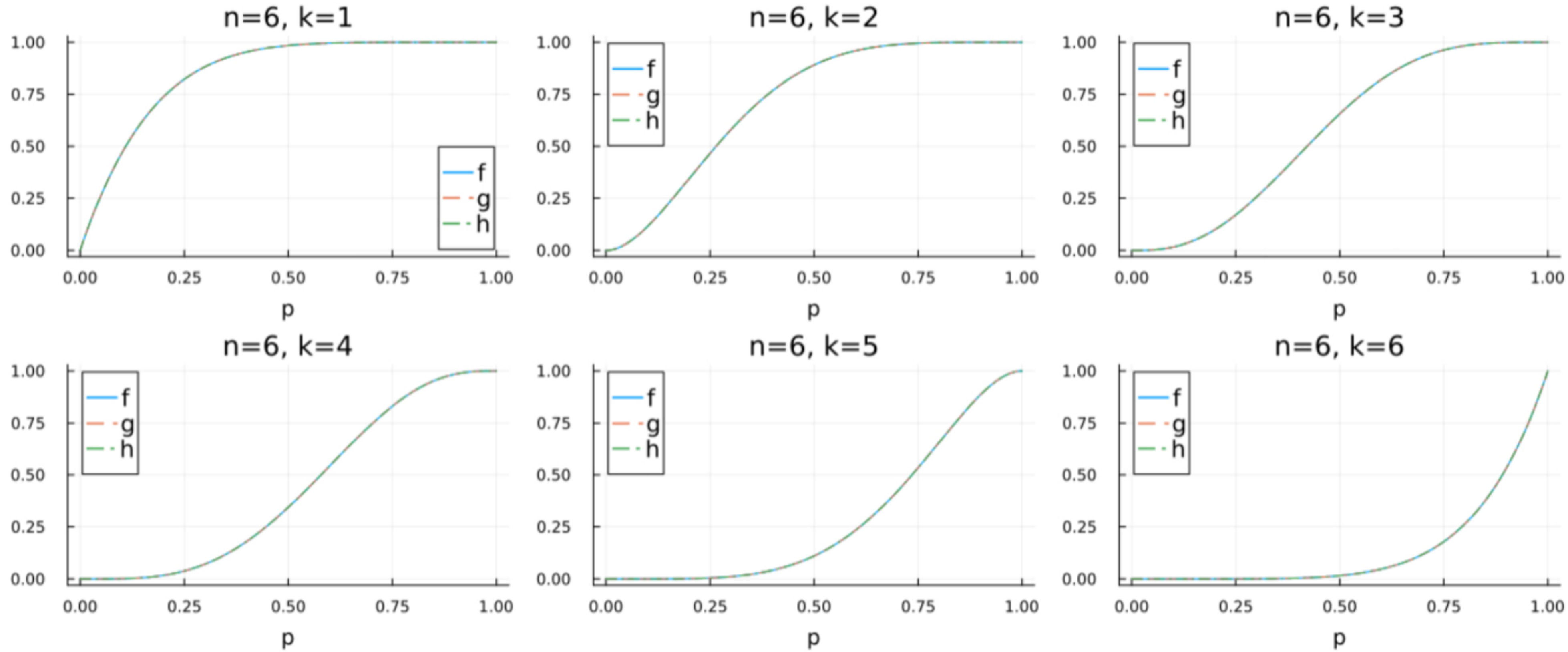
$$\mathrm{cdf}(\mathrm{Beta}(k, n-k+1), p)$$

$$\mathrm{ccdf}(\mathrm{Binomial}(n, p), k-1) = \mathrm{cdf}(\mathrm{NegativeBinomial}(k, p), n-k)$$ の数値的確認

```julia
using Distributions, Plots; default(fmt=:png, legendfontsize=12)

f(n, k, p) = ccdf(Binomial(n, p), k-1)
g(n, k, p) = cdf(NegativeBinomial(k, p), n-k)
h(n, k, p) = cdf(Beta(k, n-k+1), p)

n = 6; PP = []
for k in 1:6
    P = plot(title="n=$n, k=$k", xguide="p", bottommargin=6Plots.mm)
    for (F, ls) in zip((f, g, h), (:solid, :dash, :dashdot))
        plot!(p -> F(n, k, p), eps(), 1; label="$F", ls)
    end
    push!(PP, P)
end
plot(PP...; size=(1200, 500))
```



$$\mathrm{ccdf}(\mathrm{Binomial}(n,p),\, k-1) = \sum_{i \geq k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

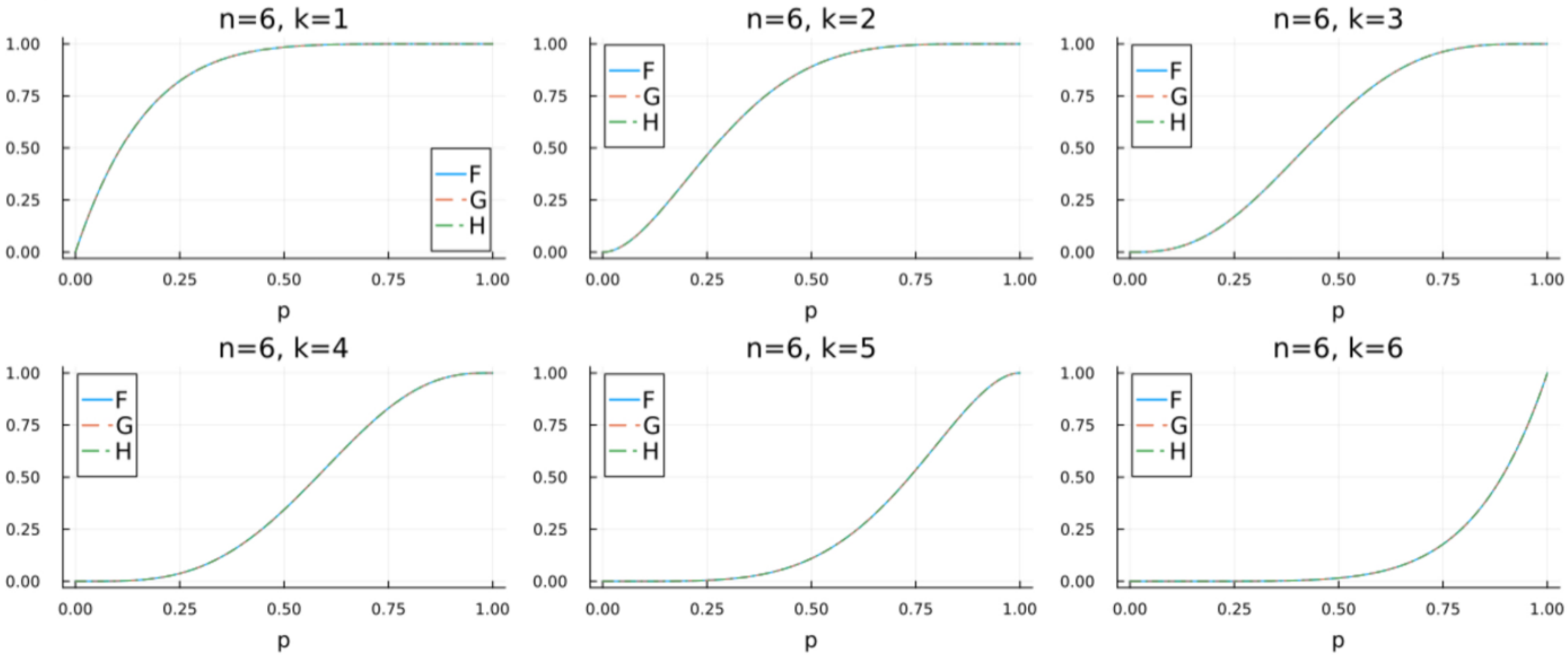
$$\mathrm{cdf}(\mathrm{NegativeBinomial}(k,p),\, n-k) = \sum_{j \leq n} \binom{j-1}{k-1} p^k (1-p)^{j-k}$$

$$\mathrm{cdf}(\mathrm{Beta}(k,\, n-k+1),\, p) = \int_0^p \frac{t^{k-1}(1-t)^{n-k}}{B(k,\, n-k+1)}\, dt$$

これらが等しいことの数値的確認

```julia
F(n, k, p) = sum(binomial(n, i) * p^i * (1-p)^(n-i) for i in k:n)
G(n, k, p) = sum(binomial(j-1, k-1) * p^k * (1-p)^(j-k) for j in 1:n)
H(n, k, p) = cdf(Beta(k, n-k+1), p)

n = 6; PP = []
for k in 1:6
    P = plot(title="n=$n, k=$k", xguide="p", bottommargin=6Plots.mm)
    for (fun, ls) in zip((F, G, H), (:solid, :dash, :dashdot))
        plot!(p -> fun(n, k, p), eps(), 1; label="$fun", ls)
    end
    push!(PP, P)
end
plot(PP...; size=(1200, 500))
```



$$\boxed{\text{Bernoulli試行}} \xrightarrow[L \to \infty]{t = n/L} \boxed{\text{連続時間極限}}$$

$$\text{n回中平均np回} \qquad \xrightarrow{n = L} \qquad \text{単位時間に平均λ回}$$

$$K \sim \mathrm{Binomial}(n, p) \qquad \xrightarrow{p = \frac{\lambda}{L}} \qquad K \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$$

$$p \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta) \downarrow \uparrow \begin{array}{l} \alpha = \frac{p}{1-p}\beta \\ \beta \to \infty \end{array} \qquad \begin{array}{l} \alpha = \frac{\lambda}{\theta} \\ \theta \searrow 0 \end{array} \uparrow \downarrow \lambda \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \theta)$$

$$K \sim \mathrm{BetaBinomial}(n, \alpha, \beta) \xrightarrow[\beta = \frac{L}{\theta}]{n = L} K \sim \mathrm{NegativeBinomial}\left(\alpha, \frac{1}{1+\theta}\right)$$

Pólya's urn: $p = \alpha/(\alpha+\beta)$で

当たりが出ると $(\alpha, \beta) \to (\alpha+1, \beta)$

はずれが出ると $(\alpha, \beta) \to (\alpha, \beta+1)$

$$N - k \sim \mathrm{BetaNegativeBinomial}(k, \alpha, \beta) \xrightarrow{\beta = \frac{L}{\theta}} T \sim \frac{1}{\theta}\mathrm{BetaPrime}(k, \alpha)$$

$$p \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta) \uparrow \downarrow \begin{array}{l} \alpha = \frac{p}{1-p}\beta \\ \beta \to \infty \end{array} \qquad \begin{array}{l} \alpha = \frac{\lambda}{\theta} \\ \theta \searrow 0 \end{array} \downarrow \uparrow \lambda \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \theta)$$

$$N - k \sim \mathrm{NegativeBinomial}(k, p) \xrightarrow[p = \frac{\lambda}{L}]{N = LT} T \sim \mathrm{Gamma}\left(k, \frac{1}{\lambda}\right)$$

ちょうどk回イベントが起こるまでN回 　　ちょうどk回イベントが起こるまでの時間がT

$$\boxed{\text{Bernoulli試行}} \xrightarrow[\text{単位時間にL回試行}]{L \to \infty} \boxed{\text{連続時間極限}}$$

ベータ二項分布、ベータ負の二項分布

$\alpha, \beta > 0$ であるとする.

ベータ二項分布とベータ負の二項分布の確率質量関数の定義はそれぞれ以下の通り:

$$k \mapsto \int_0^1 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\,dp = \binom{n}{k} \frac{B(k+\alpha, n-k+\beta)}{B(\alpha,\beta)} \qquad (n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

$$m \mapsto \int_0^1 \binom{m+k-1}{m} p^k (1-p)^m \frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\,dp = \binom{m+k-1}{m} \frac{B(k+\alpha, m+\beta)}{B(\alpha,\beta)} \qquad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

(ここの k は $k \in \mathbb{R}_{>0}$ でよい)

$$\left(n = k+m \text{ で } k \text{ が正の整数のとき } = \binom{n-1}{k-1} \frac{B(k+\alpha, n-k+\beta)}{B(\alpha,\beta)} \right).$$

そして, $k, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき,

$$\frac{B(k+\alpha, m+\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(m+\beta)}{\Gamma(k+m+\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\cdot\beta(\beta-1)\cdots(\beta-m+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\cdots(\alpha+\beta-(k+m)+1)},$$

これは α, β が大きいとき, $\dfrac{\alpha^k \beta^m}{(\alpha+\beta)^{k+m}} = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^k \left(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^m$ で近似される.

つまり, ベータ二項分布とベータ負の二項分布はそれぞれ二項分布と負の二項分布の拡張になっている,

$\boxed{\text{ベータ二項分布の連続時間極限}}$ $n=L,\ p=\frac{\lambda}{L},\ \beta=\frac{L}{\theta}$ とおくと, $L\to\infty$ のとき, $\beta\to\infty$ となり,

$$\beta^\alpha B(\alpha,\beta)=\beta^\alpha\int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}\,dp \overset{p=x/\beta}{=\!=\!=} \int_0^\beta x^{\alpha-1}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{\beta-1}dx \longrightarrow \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx=\Gamma(\alpha),$$

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{L(L-1)\cdots(L-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{L}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{L}\right)^{L-k}\longrightarrow\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\left(\begin{matrix}\text{Poisson}(\lambda)\text{の}\\ \text{確率質量関数}\end{matrix}\right),$$

$$\frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}dp=\frac{1}{B(\alpha,L/\theta)}\left(\frac{\lambda}{L}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{\lambda}{L}\right)^{\frac{L}{\theta}-1}\frac{d\lambda}{L}=\frac{1}{\theta^\alpha(L/\theta)^\alpha B(\alpha,L/\theta)}\lambda^{\alpha-1}\left(1-\frac{\lambda}{L}\right)^{\frac{L}{\theta}-1}d\lambda$$

$$\longrightarrow\frac{1}{\theta^\alpha\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda/\theta}\,d\lambda=\left(\begin{matrix}\text{Gamma}(\alpha)\text{の}\\ \text{確率密度関数}\end{matrix}\right).$$

ゆえに

$$\int_0^1\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}dp\longrightarrow\int_0^\infty\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\frac{\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda/\theta}}{\theta^\alpha\Gamma(\alpha)}d\lambda$$

$$\lambda+\frac{\lambda}{\theta}=\lambda\frac{1+\theta}{\theta}=\lambda\Big/\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{k!\,\theta^\alpha\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{\alpha+k}\Gamma(\alpha+k)=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\,\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^\alpha\left(1-\frac{1}{1+\theta}\right)^k$$

$$=\binom{\alpha+k-1}{k}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^\alpha\left(1-\frac{1}{1+\theta}\right)^k=\left(\begin{matrix}\text{Negative Binomial}(\alpha,1/(1+\theta))\text{の}\\ \text{確率質量関数}\end{matrix}\right).$$

$\boxed{\text{ベータ負の二項分布の連続時間極限}}$ $m = Lt$, $p = \dfrac{\lambda}{L}$, $\beta = \dfrac{L}{\theta}$ とおき, $L \to \infty$ とすると,

$$\binom{m+k-1}{m} p^k (1-p)^m \, dm = \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m+1)\Gamma(k)} p^k (1-p)^m \, dm = \frac{1}{m B(k,m)} p^k (1-p)^m \, dm$$

$$= \frac{1}{Lt\, B(k, Lt)} \left(\frac{\lambda}{L}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{L}\right)^{Lt} L\, dt = \frac{\cancel{L^{k-1}}\, t^{k-1}}{\underbrace{(Lt)^k B(k, Lt)}} \frac{\cancel{L}}{\cancel{L^k}} \lambda^k \left(1-\frac{\lambda}{L}\right)^{Lt} dt$$

$$\lim_{\beta\to\infty} \beta^\alpha B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)$$

$$\longrightarrow \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\lambda t} dt = \left(\begin{array}{c}\text{Gamma}(k, 1/\lambda) \text{の}\\ \text{確率密度関数}\end{array}\right).$$

注 $n = k+m = Lt$ としても同じ結果が得られる.

前ページより, $\dfrac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} dp \longrightarrow \dfrac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda/\theta} d\lambda = \left(\begin{array}{c}\text{Gamma}(\alpha)\text{の}\\ \text{確率密度関数}\end{array}\right)$. ゆえに,

$$\int_0^1 \binom{m+k-1}{m} p^k (1-p)^m \frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} dp\, dm \to \int_0^\infty \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)} \frac{\lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda/\theta}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} d\lambda$$

$$t + \frac{1}{\theta} = \frac{1+\theta t}{\theta}$$

$$= \frac{t^{k-1} dt}{\Gamma(k)\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \times \int_0^\infty \lambda^{k+\alpha-1} e^{-\lambda/\left(\frac{\theta}{1+\theta t}\right)} d\lambda = \frac{t^{k-1} dt}{\Gamma(k)\theta^\alpha\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\theta}{1+\theta t}\right)^{k+\alpha} \Gamma(k+\alpha)$$

$$\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{B(k,\alpha)}$$

$$= \frac{1}{B(k,\alpha)} \frac{(\theta t)^{k-1}}{(1+\theta t)^{k+\alpha}} d(\theta t) = \left(\begin{array}{c}\frac{1}{\theta}\text{BetaPrime}(k,\alpha)\text{の}\\ \text{確率密度関数}\end{array}\right).$$

$P \sim \text{Beta}(\alpha,\beta)$ のとき $U = \dfrac{P}{1-P} \sim \text{BetaPrime}(\alpha,\beta)$ をベータプライム分布の定義だとみなしてよい.

$u = \dfrac{p}{1-p}$ すなわち $p = \dfrac{u}{1+u} = 1 - \dfrac{1}{1+u}$ とおくと, $p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} dp = \left(\dfrac{u}{1+u}\right)^{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{1+u}\right)^{\beta-1} \dfrac{du}{(1+u)^2} = \dfrac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}} du$ より,

ベータプライム分布の確率密度関数は $u \longmapsto \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} \dfrac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}}$ であることがわかる.

負の二項分布に関するより詳しい説明

$k \in \mathbb{R}_{>0}$, $0 < p \leq 1$ であるとする.

分布 NegativeBinomial(k, p) は次の確率質量関数によって定義される離散分布であると定める:

$$m \mapsto \binom{k+m-1}{m} p^k (1-p)^m \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

$$\binom{k+m-1}{m} = \frac{k(k+1)\cdots(k+m-1)}{m!} = (-1)^m \frac{(-k)(-k-1)\cdots(-k-m+1)}{m!} = (-1)^m \binom{-k}{m}$$ なので

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m} p^k (1-p)^m = p^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-k}{m} (-(1-p))^m = p^k (1-(1-p))^{-k} = p^k p^{-k} = 1$$

$M \sim$ NegativeBinomial(k, p), $N = k + M$ とする. このとき, M, N の期待値と分散は以下のように求まる.

$$E[M] = p^k \sum_{m=0}^{\infty} m \binom{-k}{m} (-(1-p))^m = p^k \sum_{m=1}^{\infty} (-k) \binom{-k-1}{m-1} (-(1-p)) (-(1-p))^{m-1} = \frac{k(1-p)}{p}$$

$= p^{-k-1}$

$$E[N] = k + E[M] = \frac{k}{p}$$

$= p^{-k-2}$

$$E[M(M-1)] = p^k \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) \binom{-k}{m} (-(1-p))^m = p^k \sum_{m=2}^{\infty} (-k)(-k-1) \binom{-k-2}{m-2} (-(1-p))^2 (-(1-p))^{m-2} = \frac{k(k+1)(1-p)^2}{p^2}$$

$$\mathrm{Var}(M) = E[M^2] - E[M]^2 = E[M(M-1)] + E[M] - E[M]^2 = \frac{k(k+1)(1-p)^2}{p^2} + \frac{k(1-p)}{p} - \frac{k^2(1-p)^2}{p^2}$$

$$= \frac{k(1-p)}{p^2} \left((k+1)(1-p) + p - k(1-p) \right) = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

$k\in\mathbb{Z}_{>0}$ の場合の Negative Binomial(k,p) の解釈

$k\in\mathbb{Z}_{>0}$ のとき，Negative Binomial(k,p) の確率質量関数は次のように書ける：

$$m \longmapsto \binom{k+m-1}{m} p^k (1-p)^m = \binom{m+k-1}{k-1} p^k (1-p)^m \quad (m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

これは確率 p であたりが出るルーレットをあたりがちょうど k 回出るまで回し続けたときに出たはずれの回数が m 回である確率である．

k 個の ○ と m 個の × の右端が ○ になるような並べ方の数 $=\binom{m+k-1}{k-1}$

$$\overbrace{\times\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \times\ \times\ \times\ \bigcirc\ \times\ \times\ \times\ \times}^{m+k-1\,\text{個}}\ \bigcirc \qquad \leftarrow k=5,\ m=8$$

$$p^{k-1}(1-p)^m \times p = p^k(1-p)^m \ \leftarrow \text{これが} \binom{m+k-1}{k-1} \text{通り}$$

幾何分布を Geometric(p) = Negative Binomial$(1,p)$ とおく．

$M_1,\dots,M_k \sim$ Geometric(p) (独立) のとき，$M_1+\cdots+M_k \sim$ Negative Binomial(k,p) であることも分かる．

$$\times\ \bigcirc \mid \bigcirc \mid \bigcirc \mid \times\ \times\ \times\ \bigcirc \mid \times\ \times\ \times\ \times\ \bigcirc \mid \qquad \leftarrow k=5,\ m=8$$

$$\begin{array}{cccccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_1+\cdots+M_5 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 8 \end{array}$$

$$\begin{cases} E[M_i] = \dfrac{1-p}{p} \\ \mathrm{var}(M_i) = \dfrac{1-p}{p^2} \end{cases} \text{から} \begin{cases} E[M_1+\cdots+M_k] = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E[M_i] = \dfrac{k(1-p)}{p}, \\ \mathrm{var}(M_1+\cdots+M_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{var}(M_i) = \dfrac{k(1-p)}{p^2} \end{cases} \text{が得られる．}$$

$\boxed{\text{NegativeBinomial}(k,p) \text{ と } \text{Gamma}(k,1/\lambda) \text{ の関係}}$ $k\in\mathbb{R}_{>0}$, $0<p\leq 1$, $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$, $L\geq\lambda$ とする.

Gamma$(k,1/\lambda)$ の確率密度関数: $x \longmapsto \dfrac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x}$.

$$\begin{cases} E[N_{k,p}] = \dfrac{k}{p} \\ Var(N_{k,p}) = \dfrac{k(1-p)}{p^2} \end{cases}$$

$M_{k,p} \sim$ NegativeBinomial(k,p), $X_{k,\lambda} \sim$ Gamma$(k,1/\lambda)$ と仮定し,

$$\begin{cases} E[X_{k,\lambda}] = \dfrac{k}{\lambda} \\ Var(X_{k,\lambda}) = \dfrac{k}{\lambda^2} \end{cases}$$

$N_{k,p} = k + M_{k,p}$, $p = \dfrac{\lambda}{L}$ とおく. このとき,

(1) $E[L^{-1}N_{k,p}] = E[X_{k,\lambda}]$, $Var(L^{-1}N_{k,p}) = \left(1-\dfrac{\lambda}{L}\right) Var(X_{k,\lambda})$

(2) $L\to\infty$ のとき, $N_{k,p}/L$ の分布 $\longrightarrow$ Gamma$(k,1/\lambda)$ の分布.

$\boxed{\text{証明}}$ (1) $E[N_{k,p}/L] = \dfrac{1}{L}\dfrac{k}{\lambda/L} = \dfrac{k}{\lambda} = E[X_{k,\lambda}]$, $Var(N_{k,p}/L) = \dfrac{1}{L^2}\dfrac{k(1-\lambda/L)}{\lambda^2/L^2} = \left(1-\dfrac{\lambda}{L}\right) Var(X_{k,\lambda})$,

(2) $N_{k,p}$ の確率質量関数は $N \longmapsto \dbinom{N-1}{N-k} p^k (1-p)^{N-k}$ $(N\in k+\mathbb{Z}_{\geq 0})$,

$p=\lambda/L$, $x=N/L$ とおくと, $\dbinom{N-1}{N-k} = \dfrac{\Gamma(N)}{\Gamma(N-k+1)\Gamma(k)} = \dfrac{1}{(N-k)B(k,N-k)} = \dfrac{(N-k)^{k-1}}{(N-k)^k B(k,N-k)}$

$$\binom{N-1}{N-k} p^k (1-p)^{N-k}\, dN = \frac{(Lx-k)^{k-1}}{(Lx-k)^k B(k,Lx-k)} \left(\frac{\lambda}{L}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{L}\right)^{Lx-k} L\,dx$$

$$= \frac{\lambda^k}{(Lx-k)^k B(k,Lx-k)} (x-k/L)^{k-1} \left(1-\frac{\lambda}{L}\right)^{Lx-k} dx \xrightarrow[L\to\infty]{} \underbrace{\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x}}_{\text{Gamma}(k,1/\lambda)\text{の密度関数}} dx.$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{k\in\mathbb{Z}_{>0} \text{ の場合の } \mathrm{Gamma}(k, 1/\lambda) \text{ の解釈}}$

$k\in\mathbb{Z}_{>0}$, $1<p\le 1$, $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$, $p=\dfrac{\lambda}{L}$ と仮定する.

$N_{k,p}=$ (あたりが確率 p で出るルーレットをあたりがちょうど k 回出るまでに回した回数) $\sim \mathrm{NegativeBinomial}(k,p)$.

ルーレットを単位時間あたり L 回まわしたとすると,

$\lambda = Lp =$ (単位時間で出るあたりの回数の期待値),

$L^{-1}N_{k,p} =$ (あたりがちょうど k 回出るまでの時間).

$L\to\infty$ で $L^{-1}N_{k,p}$ の分布 $\to X_{k,\lambda}$ の分布 となるので, $X_{k,\lambda}$ の次の解釈が得られる:

$X_{k,\lambda} =$ (単位連続時間あたり平均 λ 回おこるイベントがちょうど k 回出るまでの時間) $\sim \mathrm{Gamma}(k, 1/\lambda)$.

$L\to\infty$ で $L^{-1}N_{k,p}$ の分布 $\to X_{k,\lambda}$ の分布となるので,

$$P(N_{k,p}\le Lt) = \sum_{k\le N\le Lt}\binom{N-1}{N-k}p^k(1-p)^{N-k}$$

$$\Big\downarrow\ L\to\infty \qquad p=\frac{\lambda}{L},\ N=Lx$$

$$P(X_{k,\lambda}\le t) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}\int_0^t x^{k-1}e^{-\lambda x}\,dx.$$

$$\binom{N-1}{N-k} = \frac{1}{(N-k)B(k,N-k)} = \frac{(N-k)^{k-1}}{(N-k)^k B(k,N-k)}$$

この分母は $L\to\infty$ で $\Gamma(k)$ に収束する

$$\lim_{L\to\infty}(Lx-k)^k B(k, Lx-k) = \Gamma(k).$$

これを使えば左の収束を示せる.

$\boxed{\text{Binomial}(n,p) \text{ と Poisson}(\lambda t) \text{ の関係}}$ $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $0 < p \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $p = \frac{\lambda}{L}$ と仮定する。

Poisson(λt)の確率質量関数: $k \mapsto e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$.

$K_{n,p} \sim \text{Binomial}(n,p)$, $K_{\lambda t} \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ と仮定し, $p = \frac{\lambda}{L}$, $n = Lt$ とおく。このとき,

(1) $E[K_{n,p}] = E[K_{\lambda t}]$, $\text{var}(K_{n,p}) = \left(1 - \frac{\lambda}{L}\right)\text{var}(K_{\lambda t})$.

(2) $L \to \infty$ のとき, $K_{n,p}$ の分布 $\longrightarrow$ $K_{\lambda t}$ の分布 $(\text{Binomial}(Lt, \lambda/L) \to \text{Poisson}(\lambda t))$.

$\boxed{\text{証明}}$ (1) $E[K_{n,p}] = Lt\frac{\lambda}{L} = \lambda t = E[K_{\lambda t}]$, $\text{var}(K_{n,p}) = np(1-p) = \lambda t\left(1 - \frac{\lambda}{L}\right) = \left(1 - \frac{\lambda}{L}\right)\text{var}(K_{\lambda t})$.

(2) $$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{Lt(Lt-1)\cdots(Lt-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{L}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{L}\right)^{Lt-k}$$

$$= \frac{t\left(t-\frac{1}{L}\right)\cdots\left(t-\frac{k-1}{L}\right)}{k!}\lambda^k\left(1-\frac{\lambda}{L}\right)^{Lt-k} \xrightarrow{L\to\infty} \frac{t^k}{k!}\lambda^k e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{Poisson}(\lambda t)\text{の解釈}}$ $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $0 < p \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $p = \dfrac{\lambda}{L}$, $n = Lt$ と仮定する.

$K_{n,p}$ = (あたりが確率 p で出るルーレットを n 回まわしたときに出たあたりの回数).

ルーレットを単位時間あたり L 回まわしたとすると, $p = \dfrac{\lambda}{L}$ と $n = Lt$ より,

$\lambda = Lp$ = (単位時間で出るあたりの回数の期待値),

$K_{n,p}$ = (t 単位時間ルーレットをまわしたときに出たあたりの回数).

$L \to \infty$ のとき, $K_{n,p}$ の分布 $\to$ $K_{\lambda t}$ の分布なので,

$K_{\lambda t}$ = (単位連続時間あたり平均 λ 回イベントがおこるとき, t 単位連続時間のあいだにおこるイベントの回数) $\sim$ Poisson(λt).

$L \to \infty$ のとき, $K_{n,p}$ の分布 $\to$ $K_{\lambda t}$ の分布なので,

$$P(K_{n,p} \leq k) = \sum_{i \leq k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\Big\downarrow L \to \infty \quad p = \frac{\lambda}{L},\ n = Lt$$

証明は前ページの(2)の証明と同じ.

$$P(K_{\lambda t} \leq k) = e^{-\lambda t} \sum_{i \leq k} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

$\boxed{\text{cdfたちの関係1}}$

$k\in\mathbb{Z}_{>0}$, $0<p\le 1$, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$, $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$, $p=\dfrac{\lambda}{L}$, $n=Lt$ と仮定する.

$K_{n,p}\sim\mathrm{Binomial}(n,p)$, $N_{k,p}-k\sim\mathrm{NegativeBinomial}(k,p)$,

$K_{\lambda t}\sim\mathrm{Poisson}(\lambda t)$, $X_{k,\lambda}\sim\mathrm{Gamma}(k,1/\lambda)$ と仮定する.

$L\to\infty$ のとき, $K_{n,p}$ の分布 $\to K_{\lambda t}$ の分布, $L^{-1}N_{k,p}$ の分布 $\to X_{k,\lambda}$ の分布.

最初のn回中あたりはk回以上 $\iff$ ちょうどk回あたりが出るまでの回数はn以下 より

$$P(K_{n,p}\ge k)=P(N_{k,p}\le n)=P(L^{-1}N_{k,p}\le t)$$

← 自明 ← この自明な等式から残りの非自明な等式がすべて得られる.

$$\Big\downarrow\ L\to\infty,\quad p=\frac{\lambda}{L},\ n=Lt$$

$$P(K_{\lambda t}\ge k)=\!=\!=\!=\!=P(X_{k,\lambda}\le t)$$

← 一応非自明

$K_{\lambda t}$ と $X_{k,\lambda}$ の解釈を使うことをゆるせば以下を使って自明になる:

時刻tまでにイベントがk回以上おこる

$\Updownarrow$

ちょうどk回イベントがおこるまで時間がt以上かかる

すなわち,

$$\sum_{k\le K\le n}\binom{n}{K}p^K(1-p)^{n-K}=\sum_{k\le N\le n}\binom{N-1}{N-k}p^k(1-p)^{N-k}$$

← 一応非自明

$$\Big\downarrow\ L\to\infty,\quad p=\frac{\lambda}{L},\ n=Lt$$

$$e^{-\lambda t}\sum_{K\ge k}\frac{(\lambda t)^K}{K!}=\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}\int_0^t x^{k-1}e^{-\lambda x}\,dx.$$

← 一応非自明

$\boxed{\mathrm{Beta}(\alpha,\beta) \text{ と } \mathrm{Gamma}(\alpha) \text{ の関係}}$　$\alpha>0,\ \beta>0,\ t>0,\ \beta = Lt-\alpha$ と仮定する

$P_{\alpha,\beta} \sim \mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$, $Y_{\alpha,t} \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, 1/t)$ と仮定する. このとき,

(1) $E[LP_{\alpha,\beta}] = E[Y_{\alpha,t}]$, $\mathrm{Var}(LP_{\alpha,\beta}) = \dfrac{Lt-\alpha}{Lt+1}\mathrm{Var}(Y_{\alpha,t})$.

(2) $L\to\infty$ のとき, $LP_{\alpha,\beta}$ の分布 $\to$ $Y_{\alpha,t}$ の分布.

$$\begin{cases} E[P_{\alpha,\beta}] = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \mathrm{Var}(P_{\alpha,\beta}) = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[Y_{\alpha,t}] = \dfrac{\alpha}{t} \\ \mathrm{Var}(Y_{\alpha,t}) = \dfrac{\alpha}{t^2} \end{cases}$$

$\boxed{\text{証明}}$ (1) $E[LP_{\alpha,\beta}] = \dfrac{L\alpha}{Lt} = E[Y_{\alpha,t}]$.　$\mathrm{Var}(LP_{\alpha,\beta}) = \dfrac{L^2\alpha(Lt-\alpha)}{(Lt)^2(Lt+1)} = \dfrac{Lt-\alpha}{Lt+1}\mathrm{Var}(Y_{\alpha,t})$.

(2) $\beta = Lt-\alpha$, $P = \dfrac{Y}{L}$ とおくと,

$$\frac{1}{B(\alpha,\beta)} P^{\alpha-1}(1-P)^{\beta-1}\,dP = \frac{1}{B(\alpha, Lt-\alpha)}\left(\frac{Y}{L}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{Y}{L}\right)^{Lt-\alpha+1}\frac{dY}{L}$$

$$= \frac{t^\alpha}{(Lt)^\alpha B(\alpha, Lt-\alpha)} Y^{\alpha-1}\left(1-\frac{Y}{L}\right)^{Lt-\alpha+1} dY \xrightarrow{L\to\infty} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} Y^{\alpha-1} e^{-tY}\,dY.$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{注意}}$ $\beta = Lt-\alpha+c$ とおいても, $L\to\infty$ で $LP_{\alpha,\beta}$ の分布 $\to$ $Y_{\alpha,t}$ の分布 となる.

cdfたちの関係2 $T_1, T_2, T_3, \dots$ は各々が Uniform$(0,1)$ にしたがう独立同分布確率変数列であるとする。

$T_{(n,k)} = (T_1, \dots, T_n$ の中で k 番目に小さいもの$)$ とおく。 $T_{(n,k)} \sim \mathrm{Beta}(k, n-k+1)$ となる。

$K_{n,p} = (T_1, \dots, T_n$ の中で p 以下のものの個数$)$ とおく。 $K_{n,p} \sim \mathrm{Binomial}(n, p)$ となる。

$p = \frac{\lambda}{L}$, $n = Lt$ とおく。 $K_{\lambda t} \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$, $Y_{k,t} \sim \mathrm{Gamma}(k, 1/t)$ と仮定する。

$L \to \infty$ のとき、 $K_{n,p}$ の分布 $\to K_{\lambda t}$ の分布、 $LT_{(n,k)}$ の分布 $\to Y_{k,t}$ の分布となる。

$T_1, \dots, T_n$ の中で p 以下のものが k 個以上 $\Leftrightarrow$ $T_1, \dots, T_n$ の中で k 番目に小さいものが p 以下 より、

$$P(K_{n,p} \geq k) = P(T_{(n,k)} \leq p) = P(LT_{(n,k)} \leq \lambda) \quad \longleftarrow \text{ほぼ自明}$$

$$\Big\downarrow\, L \to \infty \quad p = \frac{\lambda}{L},\ n = Lt$$

$$P(K_{\lambda t} \geq k) = P(Y_{k,t} \leq \lambda). \quad \longleftarrow \text{一応非自明}$$

すなわち、

$$\sum_{k \leq K \leq n} \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} = \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^p P^{k-1} (1-P)^{n-k}\, dP. \quad \longleftarrow \text{一応非自明}$$

$$\Big\downarrow\, L \to \infty \quad p = \frac{\lambda}{L},\ P = \frac{Y}{L},\ n = Lt$$

$$e^{-\lambda t} \sum_{K \geq k} \frac{(\lambda t)^K}{K!} = \frac{t^k}{\Gamma(k)} \int_0^\lambda Y^{k-1} e^{-tY}\, dY. \quad \longleftarrow \text{一応非自明}$$

$\boxed{\text{cdfたちの関係3}}$ $T_1, T_2, T_3, \ldots$ は各々が Uniform$(0,1)$ にしたがう独立同分布確率変数列であるとする。

$T_{(n,k)} = (T_1, \ldots, T_n$ の中で k 番目に小さいもの$)$ とおく。 $T_{(n,k)} \sim \mathrm{Beta}(k, n-k+1)$ となる。

$N_{k,p} = (T_1, \ldots, T_r$ が p 以下のものを k 個含む r で最小のもの$)$ とおく。 $N_{k,p} - k \sim \mathrm{NegativeBinomial}(k, p)$ となる。

$p = \dfrac{\lambda}{L}$, $n = Lt$ とおく。 $X_{k,\lambda} \sim \mathrm{Gamma}(k, 1/\lambda)$, $Y_{k,t} \sim \mathrm{Gamma}(k, 1/t)$ と仮定する。

$L \to \infty$ のとき, $L^{-1} N_{k,p}$ の分布 $\to X_{k,\lambda}$ の分布, $LT_{(n,k)}$ の分布 $\to Y_{k,t}$ の分布 となる。

$T_1, \ldots, T_n$ の中で k 番目に小さいものが p 以下 $\iff$ $N_{k,p} \le n$ より

$$P(L^{-1} N_{k,p} \le t) = P(N_{k,p} \le n) = P(T_{(n,k)} \le p) = P(LT_{(n,k)} \le \lambda)$$ ← ほぼ自明

$$\Big\downarrow \; L \to \infty \quad p = \frac{\lambda}{L},\ n = Lt$$

$$P(X_{k,\lambda} \le t) = P(Y_{k,t} \le \lambda)$$ ← 一応非自明

すなわち,

$$\sum_{k \le N \le n} \binom{N-1}{N-k} p^k (1-p)^{N-k} = \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^p P^{k-1} (1-P)^{n-k} \, dP$$ ← 一応非自明

$$\Big\downarrow \; L \to \infty \quad p = \frac{\lambda}{L},\ P = \frac{Y}{L},\ n = Lt,\ N = LX$$

$$\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_0^t X^{k-1} e^{-\lambda X} \, dX = \frac{t^k}{\Gamma(k)} \int_0^\lambda Y^{k-1} e^{-tY} \, dY.$$ ← $x = \lambda X$, $y = tY$ とおけば自明