ガンマ分布の中心極限定理とStirlingの公式

黒木玄

2016年5月1日作成*

https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf

目 次

---

*最新版は下記 URL からダウンロードできる．飽きるまで継続的に更新と訂正を続ける予定である．2016 年 5 月 1 日 Ver.0.1． ((中略)) **2016 年** 6 月 30 日 Ver.0.22: 細かな訂正と追記．第 9.6 節を大幅に書き直した．7 月 1 日 Ver.0.23(89 頁): 第 9.7 節を追加した．7 月 4 日 Ver.0.24: 第 7.3 節の凡ミスを訂正した．7 月 4 日 Ver.0.25(91 頁): 不偏分散の直交変換による取り扱いに関する第 9.5 節を追加した．7 月 30 日 Ver.0.26(94 頁): 多項分布と Pearson のカイ 2 乗統計量と多次元正規分布に関する第 9.3 節を追加した．8 月 27 日 Ver.0.27(94 頁): 細かい修正と追加．9 月 11 日 Ver.0.28(96 頁): 第 3.1 節の誤りを修正した．9 月 12 日 Ver.0.29(96 頁): この更新記録を大幅に削った．更新の歴史については公開した古い版を参照して欲しい．9 月 12 日 Ver.0.29a: 微修正．10 月 4 日 Ver.0.30(97 頁): 第 9.11 節を書き直した．**2017 年** 1 月 22 日 Ver.0.31(98 ページ): 「Taylor の定理に証明の仕方」となっていたのを直した (第 11 節)．「関数」を「函数」に統一した．Riemann-Lebesgue の定理の説明を詳しくした (第 5.3 節)．1 月 23 日 Ver.0.32(98 ページ): 第 11 節を微修正．たとえば最初の式で微分を意味する $'$ が欠けていたのを追加．5 月 5 日 Ver.0.33(98 ページ): 第 7.6 節を微修正．このファイルのリンク先を GitHub に変えた．5 月 18 日 Ver.0.34(99 ページ): mathtodon における解説を第 8.5 節と第 8.6 節に収録した．6 月 11 日 Ver.0.34a(99 頁): リンク先を変えた．7 月 20 日 Ver.0.35(101 頁): Dirichlet 積分に関する第 5.5 節を設けた．7 月 21 日 Ver.0.35a: 微修正．10 月 1 日 Ver.0.35b: 微修正．

古い版 このノートの古い版が次の場所で公開されている:

https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula/

最初の Ver.0.1 は 3 ページしかなかった.

続編 このノートの続編が次の場所で公開されている:

https://genkuroki.github.io/documents/20160616KullbackLeibler.pdf

この続編では Kullback-Leibler 情報量 (相対エントロピーの -1 倍) と Sanov の定理を扱っており, Sanov の定理から, Boltzmann 因子 ($e^{-\beta E_i}$), Gibbs 分布 (カノニカル分布, $e^{-\beta E_i}q_i/Z$) が経験分布として自然に現われることを示している.

0 はじめに

Stirling の公式とは

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \qquad (n\to\infty)$$

という階乗の近似公式のことである. ここで $a_n \sim b_n$ $(n\to\infty)$ は $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)=1$ を意味する. より精密には

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \qquad (n\to\infty)$$

が成立している[1]. このノートではまず最初にガンマ分布に関する中心極限定理から Stirling の公式が “導出” されることを説明する. その後は様々な方法で Stirling の公式を導出する. 精密かつ厳密な議論はしない.

このノートの後半の付録群では関連の基礎知識の解説を行なう. このノートの全体は学生向けの Gauss 積分入門, ガンマ函数入門, ベータ函数入門, Fourier 解析入門になることを意図して書かれた雑多な解説の寄せ集めである. 前の方の節で後の方の節で説明した結果を使うことが多いので読者は注意して欲しい. 基本的な方針として易しい話しか扱わないことにする.

表 0.1: Stirling の公式による階乗の近似

n	$n!$	$A_n = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$	(誤差/$n!$)	$A_n(1+1/(12n))$	(誤差/$n!$)
1	1	$0.92\cdots$	(7.78%)	$0.9989\cdots$	(0.10%)
3	6	$5.836\cdots$	(2.73%)	$5.998\cdots$	(0.028%)
10	3628800	$3598695.6\cdots$	(0.83%)	$3628684.7\cdots$	(0.0032%)
30	$2.6525\cdots\times 10^{32}$	$2.6451\cdots\times 10^{32}$	(0.28%)	$2.6525\cdots\times 10^{32}$	(3.7×10^{-6})
100	$9.3326\cdots\times 10^{157}$	$9.3248\cdots\times 10^{157}$	(0.08%)	$9.3326\cdots\times 10^{157}$	(3.4×10^{-7})

表 0.1 を見ればわかるように, $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ による $n!$ の近似の誤差は, $n=3$ の段階ですでに 3% を切っており, $n=10$ の段階では 1% を切っている. さらに $1/(12n)$ で補正すると誤差は劇的に小さくなり, $n=1$ の段階ですでに近似の誤差が 0.1% 程度と相当に小さい:

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{e}\left(1+\frac{1}{12}\right) = 0.9989\cdots \approx 1.$$

このように Stirling の公式は階乗の近似公式として非常に優秀である[2].

1 ガンマ分布に関する中心極限定理からの “導出”

ガンマ分布とは次の確率密度函数で定義される確率分布のことである[3]:

$$f_{\alpha,\tau}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/\tau}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\tau^\alpha} & (x>0), \\ 0 & (x \leqq 0). \end{cases}$$

[1]第 3 節を見よ.

[2]Gergö Nemes, New aymptotic expansion for the $\Gamma(z)$ function, 2007 に階乗の様々な近似公式の比較がある. たとえば Nemes の公式

$$n! = \left[\left(n+\frac{1}{12n-\frac{1}{10n+\cdots}}\right)\frac{1}{e}\right]^n\sqrt{2\pi n} = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{1440n^4}+\cdots\right)^n$$

は極めて優秀な近似公式である.

[3]ガンマ函数は $s>0$ に対して $\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ と定義される. 直接の計算によって $\Gamma(1)=1$ を, 部分積分によって $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ を示せるので, 0 以上の整数 n について $\Gamma(n+1)=n!$ となる.

ここで $\alpha, \tau > 0$ はガンマ分布を決めるパラメーターである [4]. 以下簡単のため $\alpha = n > 0$, $\tau = 1$ の場合のガンマ分布のみを扱うために $f_n(x) = f_{n,1}(x)$ とおく:

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}x^{n-1}}{\Gamma(n)} \qquad (x > 0).$$

確率密度函数 $f_n(x)$ で定義される確率変数を X_n と書くことにする. 確率変数 X_n の平均 μ_n と分散 σ_n^2 は両方 n になる [5]:

$$\begin{aligned}
\mu_n &= E[X_n] = \int_0^\infty x f_n(x)\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = n, \\
E[X_n^2] &= \int_0^\infty x^2 f_n(x)\,dx = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} = (n+1)n, \\
\sigma_n^2 &= E[X_n^2] - \mu_n^2 = n.
\end{aligned}$$

ゆえに確率変数 $Y_n = (X_n - \mu_n)/\sigma_n = (X_n - n)/\sqrt{n}$ の平均と分散はそれぞれ 0 と 1 になり, その確率密度函数は

$$\sqrt{n} f_n(\sqrt{n}y + n) = \sqrt{n}\frac{e^{-(\sqrt{n}y+n)}(\sqrt{n}y+n)^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

になる [6]. この確率密度函数で $y = 0$ とおくと

$$\sqrt{n} f_n(n) = \sqrt{n}\frac{e^{-n}n^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)}$$

となる. $n > 0$ が整数のとき $\Gamma(n+1) = n!$ なので, これが $n \to \infty$ で $1/\sqrt{2\pi}$ に収束することと Stirling の公式の成立は同値になる.

ガンマ分布が再生性を満たしていることより, 中心極限定理を適用できるので, $\mathbb{R}$ 上の有界連続函数 $\varphi(x)$ に対して, $n \to \infty$ のとき

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{x-n}{\sqrt{n}}\right) f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi(y)\sqrt{n} f_n(\sqrt{n}y+n)\,dy \longrightarrow \int_{-\infty}^\infty \varphi(y)\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy.$$

$\varphi(y)$ をデルタ函数 $\delta(y)$ に近付けることによって (すなわち確率密度函数の y に 0 を代入することによって),

$$\sqrt{n} f_n(n) = \sqrt{n}\frac{e^{-n}n^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad (n \to \infty)$$

を得る. この結果は Stirling の公式の成立を意味する.

以上の "導出" の最後で確率密度函数の y に 0 を代入するステップには論理的にギャップがある. このギャップを埋めるためには中心極限定理をブラックボックスとして利用するのではなく, 中心極限定理の特性函数を用いた証明に戻る必要がある. そのような証明の方針については次の節を見て欲しい.

[4] α は shape parameter と, τ は scale parameter と呼ばれているらしい. ガンマ分布の平均と分散はそれぞれ $\alpha\tau$ と $\alpha\tau^2$ になる.

[5] 確率密度函数 $f(x)$ を持つ確率変数 X に対して, 期待値汎函数が $E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,dx$ と定義され, 平均が $\mu = E[X]$ と定義され, 分散が $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2$ と定義される.

[6] 確率変数 X の確率分布函数が $f(x)$ のとき, 確率変数 Y を $Y = (X-a)/b$ と定めると, $E[g(Y)] = \int_{\mathbb{R}} g((x-a)/b)f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(y)bf(by+a)\,dy$ なので, Y の確率分布函数は $bf(by+a)$ になる.

2 ガンマ分布の特性函数を用いた表示からの導出

前節では中心極限定理を便利なブラックボックスとして用いて Stirling の公式を “導出” した．しかし，その “導出” には論理的なギャップがあった．そのギャップを埋めるためには，中心極限定理が確率密度函数を特性函数 (確率密度函数の逆 Fourier 変換) の Fourier 変換で表示することによって証明されることを思い出す必要がある．

この節ではガンマ分布の確率密度函数を特性函数の Fourier 変換で表わす公式を用いて，直接的に Stirling の公式を証明する [7].

2.1 Stirling の公式の証明

ガンマ分布の確率密度函数 $f_n(x) = e^{-x}x^{n-1}/\Gamma(n)$ $(x > 0)$ の特性函数 (逆 Fourier 変換) $F_n(t)$ は次のように計算される [8]:

$$F_n(t) = \int_0^\infty e^{itx} f_n(x)\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-(1-it)x}x^{n-1}\,dx = \frac{1}{(1-it)^n}.$$

ここで，実部が正の複素数 α に対して

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-\alpha t}t^{n-1}\,dt = \frac{1}{\alpha^n}$$

となること使った．この公式は Cauchy の積分定理を使って示せる [9].

Fourier の反転公式より [10],

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}x^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-itx}F_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-itx}}{(1-it)^n}\,dt \qquad (x > 0).$$

この公式さえ認めてしまえば Stirling の公式の証明は易しい．

この公式より，$t = \sqrt{n}u$ と置換することによって，

$$\sqrt{n}f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-itn}}{(1-it)^n}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iu\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n}\,du.$$

Stirling の公式を証明するためには，これが $n\to\infty$ で $1/\sqrt{2\pi}$ に収束することを示せばよい．そのために被積分函数の対数の様子を調べよう:

$$\begin{aligned}\log\frac{e^{-iu\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n} &= -n\log\left(1-\frac{iu}{\sqrt{n}}\right) - iu\sqrt{n}\\ &= n\left(\frac{iu}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - iu\sqrt{n} = -\frac{u^2}{2} + o(1).\end{aligned}$$

---

[7] 筆者はこの証明法を https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nobuo/pdf/prob/stir.pdf を見て知った．

[8] 確率分布がパラメーター n について再生性を持つことと特性函数がある函数の n 乗の形になることは同値である．

[9] Cauchy の積分定理を使わなくても示せる．左辺を $f(\alpha)$ と書くと，$f(1) = 1$ でかつ部分積分によって $f'(\alpha) = -(n/\alpha)f(\alpha)$ となることがわかるので，その公式が得られる．正の実数 α に対するこの公式は $t = x/\alpha$ という置換積分によって容易に証明される．

[10] Fourier の反転公式の証明の概略については第 5 節を参照せよ．

したがって, $n\to\infty$ のとき

$$\frac{e^{-iu\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n} \longrightarrow e^{-u^2/2}.$$

これより, $n\to\infty$ のとき

$$\sqrt{n}f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iu\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n}\,du \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

となることがわかる [11]. 最後の等号で一般に正の実数 α に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/\alpha}\,du = \sqrt{\alpha\pi}$$

となることを用いた [12]. これで Stirling の公式が証明された.

2.2　正規化されたガンマ分布の確率密度函数の各点収束

確率密度函数 $f_n(x) = e^{-x}x^{n-1}$ を持つ確率変数を X_n と書くとき, $Y_n = (X_n - n)/\sqrt{n}$ の平均と分散はそれぞれ 0 と 1 になるのであった (前節を見よ). Y_n の確率密度函数は

$$\sqrt{n}f_n(\sqrt{n}y+n) = \sqrt{n}\frac{e^{-\sqrt{n}y-n}(\sqrt{n}y+n)^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{e^{-n}n^{n-1/2}}{\Gamma(n)}\frac{e^{-\sqrt{n}y}(1+y/\sqrt{n})^n}{1+y/\sqrt{n}}$$

になる. そして, $n\to\infty$ のとき

$$\begin{aligned}\log\left(e^{-\sqrt{n}y}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n\right) &= n\log\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}y \\ &= n\left(\frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \sqrt{n}y = -\frac{y^2}{2} + o(1)\end{aligned}$$

なので, $n\to\infty$ で $e^{\sqrt{n}y}(1+y/\sqrt{n})^n \to e^{-y^2/2}$ となり, さらに $1+y/\sqrt{n}\to 1$ となる. ゆえに, 次が成立することと Stirling の公式は同値になる:

$$\sqrt{n}f_n(\sqrt{n}y+n) = \sqrt{n}\frac{e^{-\sqrt{n}y-n}(\sqrt{n}y+n)^{n-1}}{\Gamma(n)} \longrightarrow \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \qquad (n\to\infty).$$

すなわち Y_n の確率密度函数が標準正規分布の確率密度函数に各点収束することと Stirling の公式は同値である.

ガンマ分布について確率密度函数の各点収束のレベルで中心極限定理が成立していることと Stirling の公式は同じ深さにある.

[11] 厳密に証明したければ, たとえば Lebesgue の収束定理を使えばよい.

[12] この公式は Gauss 積分の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ で $x = u/\sqrt{\alpha}$ と積分変数を変換すれば得られる. Gauss 積分の公式は以下のようにして証明される. 左辺を I とおくと $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ であり, I^2 は $z = e^{-(x^2+y^2)}$ のグラフと平面 $z=0$ で挟まれた「小山状の領域」の体積だと解釈される. その小山の高さ $0 < z \leqq 1$ における断面積は $-\pi\log z$ になるので, その体積は $\int_0^1(-\pi\log z)\,dz = -\pi[z\log z - z]_0^1 = \pi$ になる. ゆえに $I = \sqrt{\pi}$. Gauss 積分の公式の不思議なところは円周率が出て来るところであり, しかもその平方根が出て来るところである. しかしその二乗が小山の体積であることがわかれば, その高さ z での断面が円盤の形になることから円周率 π が出て来る理由がわかる. 平方根になるのは I そのものを直接計算したのではなく, I^2 の方を計算したからである.

Y_n の確率分布函数が標準正規分布の確率密度函数に各点収束することの直接的証明は $\sqrt{n}f(n)$ の収束の証明と同様に以下のようにして得られる:

$$\sqrt{n}f_n(\sqrt{n}y+n) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it(\sqrt{n}y+n)}}{(1-it)^n}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iuy}\frac{e^{-it\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n}\,dt$$
$$\longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iuy}e^{-u^2/2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2} \qquad (n\to\infty).$$

最後の等号で, Cauchy の積分定理より [13]

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iuy}e^{-u^2/2}\,du = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-(u+iy)^2/2-y^2/2}\,du = e^{-y^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2/2}\,dv = e^{-y^2/2}\sqrt{2\pi}$$

となることを用いた.

このように, ガンマ分布の確率密度函数の特性函数の Fourier 変換による表示を使えば確率密度函数の各点収束のレベルでの中心極限定理を容易に示すことができ, その結果は Stirling の公式と同値になっている.

2.3　ガンマ分布の特性函数と Fourier 反転公式を用いない方法

ガンマ函数の定義より,

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty}e^{-x}x^n\,dx.$$

積分変数を $x = n+\sqrt{n}\,y = n(1+y/\sqrt{n})$ によって y に変換すると,

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{\infty}e^{-\sqrt{n}\,y}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n dy.$$

ゆえに

$$c_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}, \qquad h_n(y) = \begin{cases} e^{-\sqrt{n}\,y}(1+y/\sqrt{n})^n & (y > \sqrt{n}),\\ 0 & (y \leqq -\sqrt{n}).\end{cases}$$

とおくと, $c_n = \int_{-\infty}^{\infty}h_n(y)\,dy$ となる. $\log h_n(y)$ の $y=0$ における Taylor 展開によって $\log h_n(y) = -y^2/2 + o(1)$ $(n\to\infty)$ となることがわかるので, $\lim_{n\to\infty}h_n(y) = e^{-y^2/2}$ となることがわかる. さらに

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_n(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2/2}\,dy$$

という積分と極限の順序の交換を示すことができれば [14], $\lim_{n\to\infty}c_n = \sqrt{2\pi}$ が得られる. すなわち Stirling の公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$

[13] 複素解析を使わなくても容易に証明される. たとえば, e^{-ity} の Taylor 展開を代入して項別積分を実行しても証明できる. もしくは, 両辺が $f'(y) = -yf(y)$, $f(0) = \sqrt{2\pi}$ を満たしていることからも導かれる (左辺が満たしていることは部分積分すればわかる). Cauchy の積分定理を使えば形式的に $u+iy$ $(u>0)$ を $v>0$ で置き換える置換積分を実行したのと同じように見える証明が得られる.

[14] $y \geqq 0$ で $h_n(y) \leqq h_1(y) = e^{-y}(1+y)$ が, $y \leqq 0$ で $h_n(y) \leqq e^{-y^2/2}$ が成立しているので, Lebesgue の収束定理を使えば容易に示すことができる. Lebesgue の収束定理を使わなくても, $|y| \leqq M$ で h_n が一様収束することを用いて示すこともできる.

が得られる．この筋道であれば Fourier 解析の知識は必要ではなくなる．

積分と極限の順序交換を Lebesgue の収束定理で示すためには

$$0 \leqq h_n(y) \leqq \begin{cases} e^{-y}(1+y) & (y \geqq 0), \\ e^{-y^2/2} & (y \leqq 0). \end{cases}$$

を示せば十分である ($\phi(y)$ は可積分函数)．$y > -\sqrt{n}$ とし, $l_n(y) = \log h_n(y)$ を微分すると,

$$\begin{aligned} l_n'(y) &= \frac{\sqrt{n}}{1+y/\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{-y}{1+y/\sqrt{n}}, \\ l_n''(y) &= \frac{-1}{(1+y/\sqrt{n})^2} < 0, \\ l_n'''(y) &= \frac{2/\sqrt{n}}{(1+y/\sqrt{n})^3} > 0, \\ l_n(0) &= 0, \qquad l_n'(0) = 0, \qquad l_n''(1) = -1. \end{aligned}$$

Taylor の定理より, 各 $y > -\sqrt{n}$ ごとにある $0 < \theta < 1$ が存在して,

$$l_n(y) = -\frac{y^2}{2} + Ay^3, \qquad A = \frac{1}{3!} l_n'''(\theta y) = \frac{1}{3\sqrt{n}(1+\theta y/\sqrt{n})^3} > 0.$$

これより $\lim_{n\to\infty} l_n(y) = -y^2/2$. ゆえに $\lim_{n\to\infty} h_n(y) = e^{-y^2/2}$ となることがわかる．

$y \leqq 0$ のとき, $Ay^3 \leqq 0$ なので $l_n(y) \leqq e^{-y^2/2}$ となるので, $h_n(y) \leqq e^{-y^2/2}$.

$y \geqq 0$ と仮定し, $l_1(y) = \log(e^{-y}(1+y))$ と $l_n(y)$ $(n \geqq 1)$ を比較しよう．まず $l_1(0) = l_n(0)$ である．そして $l_1'(y) = -y/(1+y)$, $l_n'(y) = -y/(1+y/\sqrt{n})$ の分母を比較すると, $\sqrt{n} \geqq 1$ より $1+y \geqq 1+y/\sqrt{n}$ なので, $l_1'(y) \geqq l_n'(y)$ $(y \geqq 0)$ となる．ゆえに, $y \geqq 0$ のとき $l_1(y) \geqq l_n(y)$ となる．すなわち $h_n(y) \leqq h_1(y) = e^{-y}(1+y)$ となる．

これで示すべきことが示された．

2.4　自由度が大きなカイ 2 乗分布が正規分布で近似できることとの関係

独立な標準正規分布する確率変数 n 個の確率変数 $X_1, \dots, X_n$ によって $Y_n = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ と定義された確率変数 Y_n の確率分布を自由度 n の**カイ 2 乗分布**と呼ぶ．

自由度 n のカイ 2 乗分布は shape が $\alpha = n/2$ で scale が $\tau = 2$ のガンマ分布に等しい．特に自由度 n のカイ 2 乗分布の確率密度函数は

$$f_{n/2,2}(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-y/2} y^{n/2-1}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}} & (y > 0), \\ 0 & (y \leqq 0). \end{cases}$$

になり, その平均と分散はそれぞれ n と $2n$ になる．すなわち,

$$\int_0^\infty g(y) \frac{e^{-y/2} y^{n/2-1}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}}\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \frac{e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)/2}}{(2\pi)^{n/2}}\,dx_1 \cdots dx_n.$$

この事実を示すためには, ガンマ分布の再生性より, $n = 1$ の場合を示せば十分である．$n = 1$ の場合の計算は本質的にガウス積分と $\Gamma(1/2)$ の関係そのものである．実際, $x > 0$

で $x=\sqrt{y}$ と積分変数を置換することによって

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x^2)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 2\int_0^{\infty} g(y)\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{y^{-1/2}}{2}\,dy = \int_0^{\infty} g(y)\frac{e^{-y/2}y^{1/2-1}}{\Gamma(1/2)2^{1/2}}\,dy.$$

最後の等号で $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ を使った.

統計学の世界では, 自由度 n を大きくすると, カイ 2 乗分布は平均が n で分散が $2n$ の正規分布にゆっくり近付くことがよく知られている. その事実はガンマ分布の中心極限定理そのものである. そして, 前節で示したように正規化されたガンマ分布の確率密度函数が標準正規分布に各点収束するという結果と Stirling の公式は同値 (同じ深さの結果) なのであった. 以上をまとめると次のようにも言えることがわかる:

> 自由度 n のカイ 2 乗分布を変数変換で平均 0, 分散 1 に正規化するとき, $n\to\infty$ でその確率密度函数が標準正規分布の確率密度函数に収束するという統計学においてよく知られている結果は Stirling の公式と同値である.

要するに統計学をよく知っている人は, Stirling の公式は $n\to\infty$ でカイ 2 乗分布が正規分布に近づくことと同じことを意味していると思ってよい.

2.5 一般の場合の中心極限定理に関する大雑把な解説

一般の場合の中心極限定理について大雑把にかつ簡単に解説する.

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ は独立で等しい確率分布を持つ確率変数の列であるとする. さらにそれらは平均 $\mu=E[X_k]$ と分散 $\sigma^2=E[(X_k-\mu)^2]=E[X_k]^2-\mu^2$ を持つと仮定する.

$Y_n=(X_1+\cdots+X_n-n\mu)/\sqrt{n\sigma^2}$ とおくと Y_n の平均と分散はそれぞれ 0 と 1 になる. このとき $n\to\infty$ の極限で Y_n の確率分布が平均 0, 分散 1 の標準正規分布に (適切な意味で) 収束するというのが中心極限定理である.

記述の簡単のため X_k を $(X_k-\mu)/\sigma$ で置き換えることにする. このように置き換えても Y_n は変わらない. このとき X_k の平均と分散はそれぞれ 0 と 1 になるので, X_k の特性函数を $\varphi(t)=E[e^{itX_k}]$ と書くと,

$$\varphi(t)=1-\frac{t^2}{2}+o(t^2).$$

$Y_n=(X_1+\cdots+X_n)/\sqrt{n}$ とおくと Y_n の平均と分散もそれぞれ 0 と 1 になり, Y_n の特性函数の極限は次のように計算される:

$$\begin{aligned} E[e^{itY_n}] &= \prod_{k=1}^n E[e^{itX_k/\sqrt{n}}] = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \\ &= \left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \longrightarrow e^{-t^2/2} \qquad (n\to\infty). \end{aligned}$$

ゆえに, Fourier の反転公式より [15], Y_n の確率密度函数 [16] $f_n(y)$ は

$$f_n(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity}\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n\,dt$$

[15] $\varphi(t/\sqrt{n})^n$ が可積分ならば Y_n に関する Fourier 反転公式の結果は函数になるが, 可積分でない場合には測度になり, 測度の収束を考えることになる.

[16] 一般には $\mathbb{R}$ 上の確率測度になる.

になり, これは $n \to \infty$ で標準正規分布の確率密度函数

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity}e^{-t^2/2}\,dt = \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

に収束する [17].

2.6 二項分布の中心極限定理

以上では確率分布の「適切な意味での収束」についてほとんど何も説明しなかった. この節ではその点について二項分布を例に用いて大雑把に説明する [18].

X_n が二項分布する確率変数のとき, $g(X_n)$ の期待値は

$$E[g(X_n)] = \sum_{k=0}^{n} g(k)\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

と定義される. ここで $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ であり, n は正の整数であるとし, $\binom{n}{k}$ は二項係数を表わす:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

$E[g(X_n)]$ を積分の形式で書くためにはデルタ函数 (デルタ測度) $\delta(x-a)\,dx$ を使う必要がある [19]:

$$E[g(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_n(x)\,dx, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\delta(x-k).$$

このように, 二項分布の確率密度函数 $f_n(x)$ はデルタ函数 (デルタ測度) を使って表わされると考えられ, 通常の函数ではなく超函数 (より正確には測度) になってしまう. 特に確率密度函数の収束を通常の函数の各点収束で考えることはできなくなる.

そのような場合には確率密度函数の各点収束ではなく, 期待値汎函数 $g \mapsto E[g(X)]$ の収束を考えればよい [20].

具体的な議論では, 一般の函数 g に対する $E[g(X)]$ を扱うのではなく, ある特別な形の函数 g に関する $E[g(X)]$ を扱い, その特別な場合の計算から一般の場合を導くというようなことがよく行われる.

その典型例が確率変数 X の特性函数 $\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$ を扱うことである. 特性函数は $\mathbb{R}$ 上で常に絶対値が 1 以下の一様連続函数になる:

$$\begin{aligned}
&|\varphi_X(t)| = \left|E[e^{itX}]\right| \leqq E\left[|e^{itX}|\right] = E[1] = 1,\\
&\sup_{t\in\mathbb{R}}|\varphi_X(t+h) - \varphi(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}}|E[e^{itX}(e^{ith}-1)]| \leqq E\left[|e^{ihX}-1|\right] \longrightarrow 0 \quad (h \to 0).
\end{aligned}$$

最後の 0 への収束では Lebesgue の収束定理を用いた. 函数 $g(x)$ が

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\widehat{g}(t)\,dt$$

[17] 厳密には適切な意味での収束を考える必要がある.

[18] アイデアの説明はするが, 厳密な議論はしない.

[19] デルタ函数 (デルタ測度) $\delta(x-a)\,dx$ は連続函数 $f(x)$ に対して, $\int_{\mathbb{R}} g(x)\delta(x-a)\,dx = g(a)$ によって定義されていると考える.

[20] この型の収束は**弱収束**と呼ばれる.

と表わされていたとする[21]. このとき, $E[\ ]$ と積分の順序を交換することによって

$$E[g(X)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(t)E[e^{itX}]\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(t)\varphi_X(t)\,dt.$$

この公式より, 確率変数列 Y_n と確率変数 Y について, 特性函数列 φ_{Y_n} が特性函数 φ_Y に各点収束していれば, 適切なクラス[22]に含まれる任意の函数 $g(y)$ に対して $E[g(Y_n)]$ は $E[g(Y)]$ に収束することを示せる[23]. 離散型確率変数を含む一般の場合の中心極限定理はこのような形で定式化される.

注意. 確率変数 Y_n の特性函数 φ_{Y_n} が函数 φ に各点収束していても収束先の函数 φ がある確率変数の特性函数になっていない場合には確率変数 Y_n は確率変数に収束しない. 特性函数列 φ_{Y_n} が原点で連続な函数 φ に各点収束するならば, 特性函数 φ を持つ確率変数 Y が存在して, 確率変数列 Y_n が Y に弱収束することが知られている[24]. □

二項分布の中心極限定理を示そう. 二項分布の特性函数は

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_n}(t) = E[e^{itX_n}] &= \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^{it})^n q^{n-k} = (pe^{it}+q)^n
\end{aligned}$$

となる. 二項分布の平均と分散はそれぞれ $\mu_n = np$ と $\sigma_n^2 = npq$ である. ゆえに確率変数

$$Y_n = \frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq)}}$$

の平均と分散はそれぞれ 0 と 1 になり, その特性函数は

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_n}(t) &= E\left[e^{itY_n}\right] = E\left[e^{-itnp/\sqrt{npq}}e^{itX_n/\sqrt{npq}}\right] \\
&= e^{-itnp/\sqrt{npq}}\varphi_{X_n}(t/\sqrt{npq}) = e^{-itnp/\sqrt{npq}}\left(pe^{it/\sqrt{npq}}+q\right)^n \\
&= \left(pe^{itq/\sqrt{npq}} + qe^{-itp/\sqrt{npq}}\right)^n
\end{aligned}$$

となる[25]. X_n の特性函数の公式を経由せずに, $X_n - np = X_n(p+q) - np = qX_n - p(n-X_n)$ を用いて, 直接的に

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_n}(t) &= E\left[e^{itY_n}\right] = E\left[e^{itqX_n/\sqrt{npq}}e^{-itp(n-X_n)/\sqrt{npq}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{itqk/\sqrt{npq}}e^{-itp(n-k)/\sqrt{npq}}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(pe^{itq/\sqrt{npq}}\right)^k\left(qe^{-itp/\sqrt{npq}}\right)^{n-k} \\
&= \left(pe^{itq/\sqrt{npq}} + qe^{-itp/\sqrt{npq}}\right)^n
\end{aligned}$$

[21]たとえば $g(x)$ が急減少函数であれば急減少函数 $\widehat{g}(t)$ でこのように $g(x)$ を表示できる.

[22]たとえば有界な連続函数の集合.

[23]実際の証明では, $g(y)$ が急減少函数であるような扱い易い場合に収束を示し, その極限として $g(t)$ がより広い函数のクラス (例えば有界連続函数の集合) に含まれる場合の結果を導く.

[24]Bochner の定理.

[25]たとえば $p = q = 1/2$ のとき $\varphi_{Y_n}(t) = (\cos(t/\sqrt{n}))^n$.

と計算することもできる. これに

$$pe^{itq/\sqrt{npq}} = p + \frac{itpq}{\sqrt{npq}} - \frac{qt^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$
$$qe^{-itp/\sqrt{npq}} = q - \frac{itpq}{\sqrt{npq}} - \frac{pt^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

を代入すると

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

なので

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = e^{-t^2/2}$$

一方, 標準正規分布する確率変数 Y の特性函数は

$$\varphi_Y(t) = E[e^{itY}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy = e^{-t^2/2}.$$

これより, 適切なクラスに含まれる函数[26] $g(y)$ について

$$\lim_{n\to\infty} E[g(Y_n)] = E[g(Y)]$$

となることを示せる. すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)\binom{n}{k} p^k q^{n-p} = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy.$$

$g(y)$ が $a \leqq y \leqq b$ のとき値が 1 になり, そうでないとき 0 になる函数の場合には

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leqq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leqq b\right) = \int_a^b \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy.$$

以上が二項分布の確率変数 X_n の中心極限定理である.

3 Laplace の方法による導出

前節までに説明した Stirling の公式の証明は本質的にガンマ函数 (ガンマ分布) が Gauss 積分 (正規分布) で近似されることを用いた証明だと考えられる. Gauss 積分による近似を **Laplace の方法**と呼ぶことがある.

3.1 ガンマ函数の Gauss 積分による近似を使った導出

ガンマ函数の値を Gauss 積分で直接近似することによって Stirling の公式を示そう. $\log(e^{-x}x^n) = n\log x - x$ を $x = n$ で Taylor 展開すると

$$n\log x - x = n\log n - n - \frac{(x-n)^2}{2n} + \frac{(x-n)^3}{3n^2} - \frac{(x-n)^4}{4n^3} + \cdots$$

[26] この場合には有界な連続函数や $a \leqq y \leqq b$ で値が 1 にそうでないとき 0 になる函数など.

なので, n が大きなとき $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$ が

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(n\log n - n - \frac{(x-n)^2}{2n}\right) dx = n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-n)^2/(2n)}\,dx = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

で近似されることがわかる. ゆえに

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \qquad (n\to\infty).$$

この近似の様子を scilab で描くことによって作った画像をツイッターの過去ログで見ることができる. 無料の数値計算ソフト scilab については関連のツイートを参照して欲しい.

以上の証明法では Stirling の公式中の因子 $n^n e^{-n}$, $\sqrt{2\pi n}$ のそれぞれが $g_n(x) = \log(e^{-x}x^n) = n\log x - x$ の $x = n$ における Taylor 展開の定数項と 2 次の項に由来していることがわかる. 3 次の項は $\int_{-\infty}^{\infty} y^3 e^{-y^2/\alpha}\,dy = 0$ なので寄与しない.

以上の方法を拡張して第 1 補正項の $1/(12n)$ まで導出してみよう [27].

準備. ガウス型積分とガンマ函数の関係は以下の通り: $k = 0, 1, 2, \dots$ のとき

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}y^{2k}\,dy &= 2\int_0^\infty e^{-y^2/2}(y^2)^k\,dy = 2\int_0^\infty e^{-x}(2x)^k\sqrt{2}\,\frac{x^{-1/2}}{2}\,dx \\
&= 2^k\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-x}x^{k-1/2}\,dx = 2^k\sqrt{2}\,\Gamma(k+1/2) \\
&= 2^k\sqrt{2}\,\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi} = 1\cdot 3\cdots(2k-1)\sqrt{2\pi}.
\end{aligned}$$

たとえば, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}y^2\,dy = \sqrt{2\pi}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}y^4\,dy = 3\sqrt{2\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}y^6\,dy = 15\sqrt{2\pi}.$$

これらの公式を以下で使う.

ガンマ函数の積分表示の積分変数 x に $n + \sqrt{n}\,y = n(1 + y/\sqrt{n})$ を代入すると

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx = n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\sqrt{n}\,y}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n dy.$$

被積分函数の対数を $\phi_n(y)$ と書くと:

$$\phi_n(y) = n\log\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}\,y = -\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3\sqrt{n}} - \frac{y^4}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n\to\infty).$$

最後の $o(1/n)$ の部分は n をかけた後に $n\to\infty$ とすると 0 に収束する量である. ゆえに

$$\begin{aligned}
e^{-\sqrt{n}\,y}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n &= e^{-y^2/2}\exp\left(\frac{y^3}{3\sqrt{n}} - \frac{y^4}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= e^{-y^2/2}\left(1 + \frac{y^3}{3\sqrt{n}} - \frac{y^4}{4n} + \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= e^{-y^2/2}\left(1 + \frac{y^3}{3\sqrt{n}} - \frac{y^4}{4n} + \frac{y^6}{18n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

[27] 一松信, Stirling の公式の第 1 剰余項までの初等的証明, 数学 Vol. 31 (1979) No. 3, 262–263 では Wallis の公式の精密化によって第 1 補正項を得る方法が解説されている. 第 1 補正項付きの Stirling 公式の易しい証明については, 鍋谷清治, 連続変数に対する Stirling の公式の初等的証明, 数学 Vol. 36 (1984) No. 2, 175–178 という文献がある. 後者の文献の解説を以下では参考にした.

$o(1/n)$ の部分に含まれる n の半整数乗分の 1 の項の係数は y について奇函数になることに注意せよ．奇函数と $e^{-y^2/2}$ の積の $-\infty < y < \infty$ における積分は消えるので, 上で準備しておいた公式によって次が得られる:

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\sqrt{n}\,y}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n dx &\sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\left(1-\frac{y^4}{4n}+\frac{y^6}{18n}\right)dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \sqrt{2\pi}-\frac{3\sqrt{2\pi}}{4n}+\frac{15\sqrt{2\pi}}{18n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).\end{aligned}$$

ゆえに

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \qquad (n\to\infty).$$

これで第 1 補正項 $1/(12n)$ が得られた [28] 第 1 補正項 $1/(12n)$ は, n が大きなとき, $n!$ の $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ による近似の誤差は n が大きなとき $n!$ の値の $12n$ 分の 1 程度になることを意味している．

3.2　ガンマ函数のガンマ函数を用いた近似で補正項を計算する方法

Laplace の方法による Stirling の公式の証明とその一般化に関しては Gergö Nemes, Asymptotic expansions for integrals, 2012, M. Sc. Thesis, 40 pages が詳しい．以下で説明する方法の詳細はこの論文の Example 1.2.1 にある．そこに書いてある方法を使っても, Stirling の公式の補正項 $1/(12n)$ を容易に得ることができる．

次の公式を使うことを考える: 任意の $a>0$ ($a=\infty$ を含む) に対して,

$$\int_0^a e^{-nt}t^{s-1}\,dt = \frac{1}{n^s}\int_0^{an} e^{-x}x^{s-1}\,dx \sim \frac{\Gamma(s)}{n^s} \qquad (n\to\infty).$$

$t = x/n$ と積分変数を置換した．この公式を使えば,

$$\int_0^a e^{-nt}(\alpha_1 t^{s_1-1}+\alpha_2 t^{s_2-1}+\cdots)\,dt = \frac{\alpha_1\Gamma(s_1)}{n^{s_1}}+\frac{\alpha_2\Gamma(s_2)}{n^{s_2}}+\cdots \qquad (n\to\infty)$$

のような計算が可能になる．これを用いて Stirling の公式の最初の補正項 $1/(12n)$ を得てみよう．

函数 $f(x)$ を

$$f(x) = x-\log(1+x) \qquad (x>-1)$$

と定め, 積分変数を $y = n(1+x)$ と置換することによって,

$$\begin{aligned}n! = \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} e^{-y}y^n\,dy\\ &= \int_{-1}^{\infty} e^{-n-nx}n^n(1+x)^n n\,dx = n^{n+1}e^{-n}\int_{-1}^{\infty} e^{-nf(x)}\,dx.\end{aligned}$$

[28] 高次の補正項も同様にして得られる．

さらに積分を $x>0$ と $x<0$ に分けることによって

$$\frac{n!}{n^{n+1}e^{-n}} = \int_0^\infty e^{-nf(x)}\,dx + \int_0^1 e^{-nf(-x)}\,dx.$$

もしも $f(x)=t$ もしくは $f(-x)=t$ と積分変数を置換できれば, 積分の形が上で説明した形になりそうである.

実際にそれが可能なことを確認しよう. $f(x)=x-\log(1+x)$ の導函数は

$$f'(x) = 1-\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

なので $x>0$ で $f'(x)>0$ となり, $-1<x<0$ で $f'(x)<0$ となる. $f(x)$ は $x=0$ で最低値 $f(0)=0$ を持ち, $x>0$ で単調増加し, $x<0$ で単調減少する. ゆえに $x>0$ と $-1<x<0$ のそれぞれで $t=f(x)$ は逆函数 $x=x(t)$ を持つ. $x=x(t)$ の原点近くでの振る舞いを調べるために,

$$x = \alpha t^{1/2} + \beta t + \gamma t^{3/2} + \cdots$$

とおいて

$$t = f(x) = x-\log(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \cdots$$

に代入して [29], α,β,γ を求めてみよう. 実際に代入すると,

$$t = \frac{\alpha^2}{2}t + \left(\alpha\beta + \frac{\alpha^3}{3}\right)t^{3/2} + \left(\alpha\gamma + \frac{\beta^2}{2} + \alpha^2\beta + \alpha^4\right)t^2 + \cdots.$$

両辺を比較して α,β,γ を求めると,

$$\alpha=\sqrt{2}, \qquad \beta=\frac{2}{3}, \qquad \gamma=\frac{\sqrt{2}}{18}$$

を得る. すなわち

$$x = \sqrt{2}\,t^{1/2} + \frac{2}{3}t + \frac{\sqrt{2}}{18}t^{3/2} + \cdots$$

とおくと $f(x)=t$ となる. $x>0$ ではこの表示をそのまま用いる. $x<0$ では $t^{1/2}$ を $-t^{1/2}$ で置き換え, さらに x を $-x$ で置き換えた表示を用いる. すなわち

$$x = \sqrt{2}\,t^{1/2} - \frac{2}{3}t + \frac{\sqrt{2}}{18}t^{3/2} - \cdots$$

とおくと $f(-x)=t$ となる. 以上のそれぞれの場合において, おいて

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{2}t^{1/2-1} \pm \frac{2}{3}t^{1-1} + \frac{\sqrt{2}}{12}t^{3/2-1} \pm \cdots$$

以上の 2 つの場合で t の整数次の項には -1 倍の違いがある. 準備が整った.

[29] $|x|<1$ における Taylor 展開 $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \cdots$ は非常によく使われる.

$f(x) = t$ と積分変数を置換することによって, $n \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-nf(x)}\,dx &= \int_0^\infty e^{-nt}\frac{dx}{dt}\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-nt}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,t^{1/2-1} + \frac{2}{3}t^{1-1} + \frac{\sqrt{2}}{12}t^{3/2-1} + \cdots\right)dt \\
&= \frac{\sqrt{2}\Gamma(1/2)}{2n^{1/2}} + \frac{2\Gamma(1)}{3} + \frac{\sqrt{2}\Gamma(3/2)}{12n^{3/2}} + \cdots \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2n^{1/2}} + \frac{2}{3n} + \frac{\sqrt{2\pi}}{24n^{3/2}} + \cdots
\end{aligned}$$

となる. 最後に $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3/2) = (1/2)\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$ を使った. もう一方の積分についても, $f(-x) = t$ と積分変数を置換することによって同様にして, $n \to \infty$ のとき

$$\int_0^1 e^{-nf(-x)}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2n^{1/2}} - \frac{2}{3n} + \frac{\sqrt{2\pi}}{24n^{3/2}} - \cdots$$

となる. 以上の 2 つを足し合わせると, n の整数乗分の 1 の項がすべてキャンセルし, 次が得られる:

$$\frac{n!}{n^{n+1}e^{-n}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{1/2}} + \frac{\sqrt{2\pi}}{12n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) \qquad (n \to \infty).$$

これは次のように書き直される:

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \qquad (n \to \infty).$$

これで第 1 の補正項 $1/(12n)$ も Laplace の方法で求められることがわかった. 第 2 の補正項以降も同様にして求められる.

注意. 以上の計算において “$+\cdots$” と書いた部分については注意が必要である. そのことは以下の計算例を見ればわかる.

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{k-1}t^{k-1} + (-1)^k\frac{t^k}{1+t}$$

なので

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{-nt}\,dt}{1+t} &= \frac{\Gamma(1)}{n} - \frac{\Gamma(2)}{n^2} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{\Gamma(k)}{n^k} + (-1)^k\int_0^\infty \frac{e^{-nt}t^k\,dt}{1+t} \\
&= \frac{0!}{n} - \frac{1!}{n^2} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{n^k} + (-1)^k\int_0^\infty \frac{e^{-nt}t^k\,dt}{1+t}.
\end{aligned}$$

上の議論ではこのような和の途中から先を “$+\cdots$” と略記して来た. すぐ上の式は正しい公式だが,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-nt}\,dt}{1+t} = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{n^k}$$

は通常の意味で正しい公式ではない. なぜならば右辺はどんなに大きな n に対しても収束しないからである. “$+\cdots$” の部分は “無限和” を意味すると解釈するのではなく, “有限和+剰余項” を意味すると解釈しておかなければいけない. □

4 対数版の易しい Stirling の公式

Stirling の公式は次と同値である:

$$\log n! - (n+1/2)\log n + n \longrightarrow \log\sqrt{2\pi} \qquad (n\to\infty).$$

これより, 次の弱い結果が導かれる:

$$\log n! = n\log n - n + o(n) \qquad (n\to\infty).$$

ここで $o(n)$ は n で割った後に $n\to\infty$ とすると 0 に収束する量を意味する. これをこの節では**対数版の易しい Stirling の公式**と呼ぶことにする. この公式であれば以下で説明するように初等的に証明することができる[30].

4.1 対数版の易しい Stirling の公式の易しい証明

単調増加函数 $f(x)$ について $f(k) \leqq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqq f(k+1)$ が成立しているので, $f(1) \geqq 0$ を満たす単調増加函数 $f(x)$ について,

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1) \leqq \int_1^n f(x)\,dx \leqq f(1)+f(2)+\cdots+f(n).$$

ゆえに

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqq f(1)+f(2)+\cdots+f(n) \leqq \int_1^n f(x)\,dx + f(n).$$

これを $f(x)=\log x$ に適用すると

$$\int_1^n \log x\,dx = [x\log x - x]_1^n = n\log n - n + 1, \qquad \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n = \log n!$$

なので

$$n\log n - n + 1 \leqq \log n! \leqq n\log x - n + 1 + \log n.$$

すなわち

$$1 \leqq \log n! - n\log n + n \leqq 1 + \log n.$$

したがって

$$\log n! = n\log n - n + O(\log n) = n\log n - n + o(n) \qquad (n\to\infty).$$

ここで $O(\log n)$ は $\log n$ で割ると有界になるような量を意味している.

[30] 以下の証明を見ればわかるように $o(n)$ の部分は $O(\log n)$ であることも証明できる. ここで $O(\log n)$ は $\log n$ で割った後に有界になる量を意味している.

4.2　大学入試問題への応用例

対数版の易しい Stirling の公式を使うと, an 個から bn 個取る組み合わせの数 (二項係数) の対数は

$$\begin{aligned}\log\binom{an}{bn} &= \log(an)! - \log(bn)! - \log((a-b)n)! \\ &= an\log a + an\log n - an + o(n) \\ &- bn\log b - bn\log n + bn + o(n) \\ &- (a-b)n\log(a-b) - (a-b)n\log n + (a-b)n + o(n) \\ &= n\log\frac{a^a}{b^b(a-b)^{a-b}} + o(n).\end{aligned}$$

となる. ゆえに

$$\log\binom{an}{bn}^{1/n} \longrightarrow \log\frac{a^b}{b^b(a-b)^{a-b}} \qquad (n\to\infty).$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\binom{an}{bn}^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(an)!}{(bn)!((a-b)n)!}\right)^{1/n} = \frac{a^a}{b^b(a-b)^{a-b}}.$$

要するに an 個から bn 個取る組み合わせの数の n 乗根の $n\to\infty$ での極限は二項係数部分の式の分子分母の $(kn)!$ を k^k で置き換えれば得られる.

この結果を使えば次の東工大の 1988 年の数学の入試問題を暗算で解くことができる:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}\right)^{1/n} \quad を求めよ.$$

この極限の値は

$$\frac{3^3/(1^1 2^2)}{2^2/(1^1 1^1)} = \frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16}.$$

入試問題を作った人は, まず Stirling の公式を使うと容易に解ける問題を考え, その後に高校数学の範囲内でも解けることを確認したのだと思われる.

注意. 上で示したことより,

$$\lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n}^{1/n} = \frac{2^2}{1^1 1^1} = 2^2.$$

これは次を意味している ($o(n)$ は n で割ると $n\to\infty$ で 0 に収束する量):

$$\binom{2n}{n} = 2^{2n}e^{o(n)} \qquad (n\to\infty).$$

Wallis の公式 (第 8.4 節)

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \qquad (n\to\infty)$$

はその精密化になっている. □

注意. 東工大では 1968 年にも次の問題を出しているようだ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}P_n}\ を求めよ. \qquad (答えは\ 2^2e^{-1}.)$$

この問題も明らかに元ネタは Stirling の公式である. より一般に次を示せる:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{((an)!)^{1/n}}{n^a}=a^ae^{-a}.$$

なぜならば

$$\begin{aligned}\log\frac{((an)!)^{1/n}}{n^a}&=\frac{1}{n}\log(an)!-a\log n\\&=\frac{1}{n}(an\log a+an\log n-an+o(n))-a\log n\\&=a\log a-a+o(1)\\&=\log(a^ae^{-a})+o(1).\end{aligned}$$

やはり Stirling の公式を使えば容易に示せる結果を高校数学の範囲内で解けるように調節して入試問題にしているのだと思われる. □

4.3 対数版の易しい Stirling の公式の改良

少し工夫すると次を示せる. ある定数 c が存在して,

$$\log n!=n\log n+\frac{1}{2}\log n-n+c+o(1)\qquad(n\to\infty).$$

以下ではこの公式を証明しよう [31].

第 4.1 節で証明した対数版の易しい Stirling の公式と上の公式の違いは $(1/2)\log n$ の項と定数項 c を付け加えて改良しているところである. それらの項を出すアイデアは次の通り. $\int_1^n\log x\,dx=[x\log x-x]_1^n=n\log n-n+1$ を $k=1,2,3,\dots,n-1$ に対する長方形 $[k-1/2,k+1/2]\times[0,\log k]$ の面積の総和と長方形 $[n-1/2,n]\times[0,\log n]$ の面積の和 $\log(n-1)!+(1/2)\log n=\log n!-(1/2)\log n$ で近似すれば, 自然に $(1/2)\log n$ の項が得られる. さらに, それらの長方形の和集合と領域 $\{\,(x,y)\mid 1\leqq x\leqq n,\ 0\leqq y\leqq\log x\,\}$ の違いを注意深く分析すれば, $\int_1^n\log x\,dx$ と長方形の面積の総和の差が $n\to\infty$ である定数に収束することがわかり, 定数項も得られる.

$\log x$ は単調増加函数なので正の実数 α_k,β_k を

$$\alpha_k=\int_k^{k+1/2}\log x\,dx-\frac{1}{2}\log k,\qquad\beta_k=\frac{1}{2}\log k-\int_{k-1/2}^k\log x\,dx$$

と定めることができる. このとき,

$$\begin{aligned}\log n!-\frac{1}{2}\log n-\int_1^n\log x\,dx&=\sum_{k=1}^{n-1}\log k+\frac{1}{2}\log n-\int_1^n\log x\,dx\\&=-\alpha_1+\beta_2-\alpha_2+\beta_3-\cdots+\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}+\beta_n.\end{aligned}$$

[31] 定数 c が $\log\sqrt{2\pi}$ であることは既知であるが, Wallis の公式を使えば $e^c=\sqrt{2\pi}$ であることを示せる.

この交代和が $n \to \infty$ で収束することを示したい.

$\log x$ が上に凸であることより, 数列 $\alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \beta_3, \alpha_3, \dots$ が単調減少することがわかり, $\log x$ の導函数が $x \to \infty$ で 0 に収束することより, その数列は 0 に収束することもわかる. ゆえに上の交代和は $n \to \infty$ で収束する[32]. その収束先を a と書き, $c = 1 + a$ とおくと, $n \to \infty$ のとき

$$\log n! = \frac{1}{2}\log n + \int_1^n \log x\,dx + a + o(1) = n\log n + \frac{1}{2}\log n - n + c + o(1).$$

$c = \log\sqrt{2\pi}$ であることを Wallis の公式 (第 8.4 節) を使って証明しよう. $n! = n^{n+1/2}e^{-n}e^c e^{o(1)}$ を Wallis の公式

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}$$

に代入すると,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}n^{2n+1}e^{-2n}e^{2c}}{2^{2n+1/2}n^{2n+1}e^{-2n}e^{c}} = \frac{e^c}{\sqrt{2}}.$$

ゆえに $e^c = \sqrt{2\pi}$ である.

これで Wallis の公式を使えば, 対数版の易しい Stirling の公式を改良することによって, 通常の Stirling の公式 $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ が得られることがわかった.

5 付録: Fourier の反転公式

厳密な証明をするつもりはないが, Fourier の反転公式の証明の概略について説明しよう.

函数 $f(x)$ に対してその逆 Fourier 変換 $F(p)$ を

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} f(x)\,dx$$

と定める. このとき函数 f について適切な条件を仮定しておくと, それに応じた適切な意味で

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} F(p)\,dp$$

が成立する. これを Fourier の反転公式と呼ぶ.

5.1 Gauss 分布の場合

$a > 0$ であるとし,

$$f(x) = e^{-x^2/(2a)}$$

とおき, $F(p)$ はその逆 Fourier 変換であるとする. このとき

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} e^{-x^2/(2a)}\,dx = e^{-p^2/(2a^{-1})}\sqrt{2a\pi}$$

[32] 0 以上の実数で構成された 0 に収束する単調減少列 a_n が定める交代級数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ は収束する. (絶対収束するとは限らない.)

が容易に得られる[33]. この公式で x, a のそれぞれと p, a^{-1} の立場を交換することによって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} e^{-p^2/(2a^{-1})}\,dp = e^{-x^2/(2a)}\sqrt{2a^{-1}\pi}$$

が得られる. 以上の 2 つの結果を合わせると,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} F(p)\,dp$$

が得られる. すなわち $f(x) = e^{-x^2/(2a)}$ については Fourier の反転公式が成立している.

一般に $f(x)$ について Fourier の反転公式が成立していれば $f(x)$ を平行移動して得られる函数 $f(x-\mu)$ についても Fourier の反転公式が成立していることが容易に示される. 実際, $F(p)$ を $f(x)$ の逆 Fourier 変換とすると, $f(x-\mu)$ の逆 Fourier 変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} f(x-\mu)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x'+\mu)} f(x')\,dx' = e^{ip\mu}F(p)$$

になり,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}e^{ip\mu}F(p)\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip(x-\mu)}F(p)\,dp = f(x-\mu).$$

以上によって, $f(x-\mu) = e^{-(x-\mu)^2/(2a)}$ についても Fourier の反転公式が成立することがわかった.

逆 Fourier 変換および Fourier 変換の線形性より, $f(x-\mu) = e^{-(x-\mu)^2/(2a)}$ の形の函数の線形和についても Fourier の反転公式が成立していることがわかる[34].

5.2 一般の場合

$a > 0$ に対して函数 $\rho_a(x)$ を

$$\rho_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-x^2/(2a)}$$

と定める. これは $\rho_a(x) > 0$ と $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_a(x)\,dx = 1$ を満たしている. そして前節の結果によって, $\rho_a(x-\mu)$ は Fourier の反転公式を満たしている.

函数 $f(x)$ に対して函数 $f_a(x)$ を ρ_a との畳み込み積によって函数 $f_a(x)$ を定める:

$$f_a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_a(x-y) f(y)\,dy.$$

このとき $f_a(x)$ については Fourier の反転公式が成立している[35]. 実際, $f_a(x)$ の逆 Fourier 変換 $F_a(p)$ と書くと,

$$F_a(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} f_a(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}\rho_a(x-y)\,dx\right) f(y)\,dy$$

[33] Cauchy の積分定理を使う方法, e^{ipx} の Taylor 展開を代入して項別積分する方法, 左辺と右辺が同じ微分方程式を満たしていることを使う方法など複数の方法で容易に計算可能である.

[34] “任意の函数” はそのような線形和の “極限” で表わされる. したがって, Fourier の反転公式の証明の本質的部分はこれで終了しているとみなせる.

[35] $f_a(x)$ は Fourier の反転公式が成立している函数 $\rho_a(x-\mu)$ の重み $f(\mu)$ での重ね合わせなので, これはほとんど明らかである.

なので

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}F_a(p)\,dp = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx'}\rho_a(x'-y)\,dx'\right)dp\right)f(y)\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\rho_a(x-y)f(y)\,dy = f_a(x).$$

2 つ目の等号で $\rho_a(x-\mu)$ について Fourier の反転公式が成立することを使った. さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}\rho_a(x-y)\,dx = e^{ipy}e^{-ap^2/2}$$

なので

$$F_a(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipy}e^{-ap^2/2}f(y)\,dy = e^{-ap^2/2}F(p)$$

となる[36]. ゆえに

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}F_a(p)\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}e^{-ap^2/2}F(p)\,dp.$$

したがって

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}e^{-ap^2/2}F(p)\,dp = \int_{-\infty}^{\infty}\rho_a(x-y)f(y)\,dy = f_a(x).$$

もしも $F(p)$ が可積分ならば, Lebesgue の収束定理より, 左辺について

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}e^{-ap^2/2}F(p)\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}F(p)\,dp$$

が言える. あとは, 函数 $f(x)$ について適切な条件を仮定したとき, $a\to 0$ のとき函数 $f_a(x)$ が適切な意味で函数 $f(x)$ に収束することを示せれば, $f(x)$ 自身が適切な意味で Fourier の反転公式を満たすことがわかる[37].

たとえば, f は有界かつ点 x で連続だと仮定する. ある $M>0$ が存在して $|f(y)-f(x)|\leqq M$ $(y\in\mathbb{R})$ となる. 任意に $\varepsilon>0$ を取る. ある $\delta>0$ が存在して $|y-x|\leqq\delta$ ならば $|f(y)-f(x)|\leqq\varepsilon/2$ となる. 函数 ρ_a の定義より, $a>0$ を十分小さくすると $\int_{|y-x|>\delta}\rho_a(x-y)\,dy\leqq\varepsilon/(2M)$ となることもわかる. 以上の状況のもとで

$$\begin{aligned}
|f_a(x)-f(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\rho_a(x-y)(f(y)-f(x))\,dy\right| \\
&\leqq \int_{-\infty}^{\infty}\rho_a(x-y)|f(y)-f(x)|\,dy \\
&\leqq \int_{|y-x|\leqq\delta}\rho_a(x-y)\frac{\varepsilon}{2}\,dy + \int_{|y-x|>\delta}\rho_a(x-y)M\,dy \\
&\leqq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2M}M = \varepsilon.
\end{aligned}$$

これで $\lim_{a\to 0}f_a(x)=f(x)$ が示された.

筆者は実解析一般については次の教科書をおすすめする.

[36] これは畳み込み積の逆 Fourier 変換が逆 Fourier 変換の積に等しいことの特殊な場合にすぎない.

[37] $\rho_a(x)$ の $a\to 0$ での様子のグラフを描けば, $\rho_a(x)$ が Dirac のデルタ函数 (超函数) に "収束" しているように見えることから, これもほとんど明らかだと言える.

猪狩惺, 実解析入門, 岩波書店 (1996), xii+324 頁, 定価 3,800 円.

筆者は学生時代に猪狩惺先生の授業で Lebesgue 積分論や Fourier 解析について勉強した. 信じられないほどクリアな講義であり, 数学の分野の中で実解析が最もクリアな分野なのではないかと思えて来るほどだった. 上の教科書が 2016 年 5 月 3 日現在品切れ中であり, プレミア価格のついた中古本しか手に入らないことはとても残念なことである.

5.3 Riemann-Lebesgue の定理

$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の可積分函数 [38] であるとする. このとき, その Fourier 変換 $\widehat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x)\,dx$ は連続函数になり, $|p| \to \infty$ で 0 に収束する. 特に

$$\lim_{|p|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x)\,dx = 0.$$

これは **Riemann-Lebesgue の定理** (リーマン・ルベーグの定理) と呼ばれている.

$\hat{f}(p)$ の連続性は Lebesgue の収束定理 [39] によって示される. 実際, $|e^{ihx}-1||f(x)| \leqq 2|f(x)|$ でかつ $|f(x)|$ は可積分なので,

$$|\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x)| \leqq \int_{\mathbb{R}} |e^{ihx} - 1||f(x)|\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} |e^{i0x} - 1||f(x)|\,dx = 0 \qquad (h \to 0).$$

これで $\hat{f}$ の連続性が示された.

Riemann-Lebesgue の定理の証明は可積分函数が階段函数で L^1 近似されることから, 階段函数の場合に制限された Riemann-Lebesgue の定理の証明に帰着する [40]. その理由は以下の通り. 正の実数 $\varepsilon > 0$ と $\mathbb{R}$ 上の可積分函数 f, g について, $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\,dx \leqq \varepsilon$ と $\lim_{|p|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} g(x)\,dx = 0$ が成立していれば,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x)\,dx\right| &\leqq \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} g(x)\,dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} (f(x) - g(x))\,dx\right| \\
&\leqq \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} g(x)\,dx\right| + \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\,dx \leqq \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} g(x)\,dx\right| + \varepsilon
\end{aligned}$$

[38] $\mathbb{R}$ 上の可測函数で $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < \infty$ を満たすものを $\mathbb{R}$ 上の可積分函数と呼ぶ. 可測函数の定義を知らない人は以下のように考えてよい. 区間 $I = [a, b]$ に対して I 上で 1 になり I の外で 0 になる函数を 1_I と書く. 数 α_i と区間 I_i たちによって $\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{I_i}$ と表される函数は**階段函数**と呼ばれる. 階段函数の全体は和とスカラー倍で閉じており, 自然にベクトル空間をなす. 階段函数 $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{I_i}$, $I_i = [a_i, b_i]$, $a_i < b_i$ の積分が $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i (b_i - a_i)$ と定義することができる. 階段函数列 $f_n(x)$ は $\int_{\mathbb{R}} |f_m(x) - f_n(x)|\,dx \to 0$ $(m, n \to \infty)$ を満たおり, ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ について $f_n(x)$ は収束していると仮定する. (前者の仮定からほとんどいたる所収束する部分列を取れることを示せる.) このとき $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で函数 $f(x)$ が定まる (収束しない x における f の値は任意に決めておく). このとき $\left|\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx\right| \leqq \int_{\mathbb{R}} |f_m(x) - f_n(x)|\,dx \to 0$ $(m, n \to \infty)$ なので $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$ は $n \to \infty$ で収束する. その収束先の値を $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ と書く. このような函数 $f(x)$ を可積分函数と呼んでよい. さらにそのとき $\left|\int_{\mathbb{R}} |f_m(x)|\,dx - \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\,dx\right| \leqq \int_{\mathbb{R}} |f_m(x) - f_n(x)|\,dx \to 0$ $(m, n \to \infty)$ でもあるので, $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\,dx$ は有限の値に収束し, $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < \infty$ も成立している.

[39] Lebesgue の収束定理とは次の結果のことである. f_n はほとんどいたる所 f に収束する可積分函数列であり, ある可積分函数 $\varphi \geqq 0$ ですべての n について $|f_n| \leqq \varphi$ を満たすものが存在するとき, f_n の収束先の f も可積分函数になり, 積分 $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$ は $n \to \infty$ で $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ に収束する. この定理は非常に便利なので空気のごとく使われる.

[40] $\mathbb{R}$ 上の可積分函数列 f_n が $\mathbb{R}$ 上の可積分函数 f に L^1 収束するとは $n \to \infty$ のとき $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\,dx \to 0$ が成立することである.

なので

$$\limsup_{|p|\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}f(x)\,dx\right| \leqq \varepsilon$$

となる. そして, $\mathbb{R}$ 上の任意の可積分函数 f に対して階段函数列 f_n で f に L^1 収束するものが存在するので, 一般の可積分函数に関する Riemann-Lebesgue の定理の証明は階段函数に関する Riemann-Lebesgue の定理の証明に帰着する.

区間 $I=[a,b]$ 上で 1 になり, その外で 0 になる函数を 1_I と書く. 階段函数は 1_I 型の函数の一次結合である. ゆえに, 階段函数に関する Riemann-Lebesgue の定理の証明は 1_I 型の函数に関する Riemann-Lebesgue の定理の証明に帰着する. その場合の証明は次のようにほぼ自明である:

$$\widehat{1_I}(p)=\int_a^b e^{-ipx}\,dx=\frac{e^{-ipb}-e^{-ipa}}{-ip}$$

なので, $\widehat{1_I}(p)\to 0$ ($|p|\to\infty$). 一般の可積分函数に関する Riemann-Lebesgue の定理はこれよりしたがう.

5.4　Fourier 変換の部分和の収束に関する Riemann の局所性定理

$N>0$ とする.

$\mathbb{R}$ 上の可積分函数 f の Fourier 変換 $\widehat{f}(p)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ipy}f(y)\,dx$ に対して,

$$s_N(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}e^{ipx}\widehat{f}(p)\,dp$$

を Fourier 変換の N 部分和と呼ぶ. N 部分和は次のように変形される:

$$\begin{aligned}
s_N(f)(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}e^{ip(x-y)}\,dp\right)f(y)\,dy\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iN(x-y)}-e^{e^{-iN(x-y)}}}{2\pi i(x-y)}f(y)\,dy\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(N(x-y))}{\pi(x-y)}f(y)\,dy.\\
&=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(Ny)}{\pi y}(f(x+y)+f(x-y))\,dy\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin(Ny)\frac{f(x+y)+f(x-y)}{y}\,dy.
\end{aligned}$$

4 つ目の等号で y を $x+y$ でおきかえ, $\sin(Ny)/y$ が偶函数であることを使った.

$\delta>0$ を任意に取る. $y\geqq\delta$ で $(f(x+y)+f(x-y))/y$ は可積分である. ゆえに Riemann-Lebesgue の定理より,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\delta}^{\infty}\sin(Ny)\frac{f(x+y)+f(x-y)}{y}\,dy=0.$$

したがって N 部分和 $s_N(f)(x)$ が $N\to\infty$ で収束することと,

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\sin(Ny)\frac{f(x+y)+f(x-y)}{y}\,dy$$

が $N\to\infty$ で収束することは同値になり, それらが収束するときそれらの値は一致する. 以上の結果を **Riemann の局所性定理**と呼ぶ.

5.5 Dirichlet 積分

Riemann-Lebesgue の定理と Riemann の局所性定理を $f(x) = e^{-x^2/2}$ の場合に適用することによって **Dirichlet 積分** (ディリクレ積分) の公式

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

を証明できる. $f(x) = e^{-x^2/2}$ とおく. このとき, 第 6 節での計算より, $\widehat{f}(p) = e^{-p^2/2}\sqrt{2\pi}$ でかつ

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}\widehat{f}(p)\,dp = f(x).$$

ゆえに, Riemann の局所性定理を $x = 0$ の場合に適用すると, 任意の $\delta > 0$ について

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f)(0) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \sin(Ny)\frac{2e^{-y^2/2}}{y}\,dy = e^{-0^2/2} = 1.$$

ゆえに

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_0^\delta \frac{\sin(Ny)}{y}\,dy + \int_0^\delta \sin(Ny)\frac{e^{-y^2/2}-1}{y}\,dy\right) = \frac{\pi}{2}.$$

左辺の後者の積分は Riemann-Lebesgue の定理より $N\to\infty$ で 0 に収束する. したがって

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\delta \frac{\sin(Ny)}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

さらに $y = x/N$ と積分変数を変換することによって,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{N\to\infty}\int_0^{N\delta}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

このように Dirichlet 積分の公式は Riemann の局所性定理と Riemann-Lebesgue の定理と $e^{-x^2/2}$ の Fourier 変換の計算から得られる [41].

Dirichlet 積分の公式で積分変数 x を $a > 0$ に対する ax で置換し, 両辺を ± 1 倍することによって

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin(\pm ax)}{x}\,dx = \pm\frac{\pi}{2} \qquad (a > 0,\ \text{復号同順}).$$

すなわち次が成立している:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin(ax)}{x}\,dx = \begin{cases} \pi/2 & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -\pi/2 & (a < 0). \end{cases}$$

Dirichlet 積分の公式はこの形で使われることが多い.

注意 5.1 (Dirichlet 積分の一般化). 以上では Fourier 解析の応用で Dirichlet 積分の公式を証明したが, その一般化

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,dx = \int_a^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan a \qquad (a \geqq 0) \tag{$*$}$$

を以下のようにして証明することもできる.

[41] 他の証明法もある. 注意 5.1 を参照せよ.

1. e^{-ax}/x の積分表示を使う方法 準備: $t>0$ のとき, 部分積分を 2 回実行すると

$$
\begin{aligned}
I &:= \int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx = \int_0^\infty e^{-tx}(-\cos x)'\,dx \\
&= [-e^{-tx}\cos x]_{x=0}^\infty - t\int_0^\infty e^{-tx}\cos x\,dx = 1 - t\int_0^\infty e^{-tx}(\sin x)'\,dx \\
&= 1 - t^2\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx = 1 - t^2 I
\end{aligned}
$$

となるので

$$\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx = I = \frac{1}{1+t^2}.$$

$a, x > 0$ のとき次が成立していることに注意せよ:

$$\frac{e^{-ax}}{x} = \int_a^\infty e^{-tx}\,dt.$$

これを上の $(*)$ の左辺に代入して積分の順序を交換して, I の式を代入すると,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,dx &= \int_0^\infty \left(\int_a^\infty e^{-tx}\,dt\right)\sin x\,dx \\
&= \int_a^\infty \left(\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx\right)\,dt = \int_a^\infty \frac{dt}{1+t^2}.
\end{aligned}
$$

これで $(*)$ が示された. ($t = \tan\theta$ と置換積分すれば $(*)$ の 2 つ目の等号も示される.)

2. Cauchy の積分定理を使う方法 $0 \leqq \alpha < \pi/2$, $0 < \varepsilon < R$ であるとし, 次の複素領域 K を考える:

$$K = \{\, re^{i\theta} \mid \varepsilon \leqq r \leqq R,\ |\theta| \leqq \alpha \,\}.$$

この領域を時計回りに一周する積分経路 C を考え, $\varepsilon e^{i\alpha}$ から $Re^{i\alpha}$ までの経路を C_1 と書き, $Re^{i\alpha}$ から $Re^{-i\alpha}$ までの経路を C_2 と書き, $Re^{-i\alpha}$ から $\varepsilon e^{-i\alpha}$ までの経路を C_3 と書き, $\varepsilon e^{-i\alpha}$ から $\varepsilon e^{-i\alpha}$ までの経路を C_4 と書く. このとき, $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_1} e^{-z}\frac{dz}{z} \to \int_0^\infty \exp(-te^{i\alpha})\frac{e^{i\alpha}\,dt}{te^{i\alpha}} = \int_0^\infty \exp(-te^{i\alpha})\frac{dt}{t}, \\
&\int_{C_2} e^{-z}\frac{dz}{z} = -\int_{-\alpha}^{\alpha} \exp(-Re^{it})\frac{d(Re^{it})}{Re^{it}} = -\int_{-\alpha}^{\alpha} \exp(-Re^{it})i\,dt \to 0, \\
&\int_{C_3} e^{-z}\frac{dz}{z} \to -\int_0^\infty \exp(-te^{-i\alpha})\frac{d(te^{-i\alpha})}{te^{-i\alpha}} = -\int_0^\infty \exp(-te^{-i\alpha})\frac{dt}{t}, \\
&\int_{C_4} e^{-z}\frac{dz}{z} \to \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d(\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} = \int_{-\alpha}^{\alpha} i\,dt = 2i\alpha.
\end{aligned}
$$

以上の結果の 2 つ目の極限は $|t| \leqq \alpha$ のとき

$$|\exp(-Re^{it})| \leqq e^{-R\cos\alpha}$$

から得られる. さらに

$$\exp(-te^{i\alpha}) - \exp(-te^{-i\alpha}) = e^{-t\cos\alpha - it\sin\alpha} - e^{-t\cos\alpha + it\sin\alpha} = -2ie^{-t\cos\alpha}\sin(t\sin\alpha)$$

なので, Cauchy の積分定理より,

$$0 = \int_C e^{-z}\frac{dz}{z} = -2i\int_0^\infty e^{-t\cos\alpha}\sin(t\sin\alpha)\frac{dt}{t} + 2i\alpha.$$

ゆえに

$$\int_0^\infty e^{-t\cos\alpha}\sin(t\sin\alpha)\frac{dt}{t} = \alpha.$$

積分変数を $t\sin\alpha = x$ によって置換すると

$$\int_0^\infty e^{-x\cot\alpha}\sin x\,\frac{dx}{x} = \alpha.$$

a から α を $a = \cot\alpha = \tan(\pi/2-\alpha)$ によって決めると

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan a.$$

これで $(*)$ が得られた.

Dirichlet 積分の別の一般化については第 8.6 節を参照せよ. □

5.6 Riemann の局所性定理の簡単な応用例

$\mathbb{R}$ 上の可積分函数 f と $x\in\mathbb{R}$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して

$$\frac{(f(x+y)+f(x-y))/2 - f(x)}{y}$$

が $0<y<\delta$ で可積分になるならば[42], Fourier 変換の N 部分和の x における値は $f(x)$ に収束する:

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f)(x) = f(x).$$

この事実は上で述べたことを合わせると容易に導かれる. Riemann の局所性定理より, 任意の $\delta>0$ について, $N\to\infty$ のとき

$$s_N(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \sin(Nx)\frac{f(x+y)+f(x-y)}{y}\,dy + o(1).$$

Dirichlet 積分の公式の証明より, $N\to\infty$ のとき

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin(Ny)}{y}\,dy\,f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\delta \sin(Ny)\frac{f(x)}{y}\,dy + o(1).$$

ゆえに

$$s_N(f)(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\delta \sin(Ny)\frac{(f(x+y)+f(x-y))/2 - f(x)}{y}\,dy + o(1).$$

もしも $[(f(x+y)+f(x-y))/2 - f(x)]/y$ が $0<y<\delta$ で可積分ならば Riemann-Lebesgue の定理より, 右辺は $N\to\infty$ で 0 に収束する. これで示すべきことが示された.

[42] この条件は **Dini の条件**と呼ばれている.

例 5.2. 可積分函数 f が点 x で微分可能ならば, 十分小さな $\delta > 0$ について, $[(f(x+y)+f(x-y))/2 - f(x)]/y$ は $0 < y < \delta$ で有界になる.
したがって f が微分可能な点 x において, $\lim_{N\to\infty} s_N(f)(x) = f(x)$ が成立する. □

例 5.3. 可積分函数 f の値の点 x における左右からの極限

$$f(x-0) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} f(x-\varepsilon), \qquad f(x+0) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} f(x+\varepsilon)$$

が存在し, $f(x) = (f(x+0)+f(x-0))/2$ であると仮定する. さらに点 x における左右の微係数

$$f'(x-0) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{f(x-\varepsilon)-f(x-0)}{-\varepsilon}, \qquad f'(x+0) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x+0)}{\varepsilon}$$

が存在すると仮定する. このとき, 十分小さな $\delta > 0$ について,

$$\frac{(f(x+y)+f(x-y))/2 - f(x)}{y} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x+y)-f(x+0)}{y} - \frac{f(x-y)-f(x-0)}{-y}\right]$$

は $0 < y < \delta$ で有界になる. したがって

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f)(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{ipx}\widehat{f}(p)\,dp = f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

となる. □

例 5.4. $a > 1$ に対して函数 $f_a(x)$ を次のように定める:

$$f_a(x) = \begin{cases} 1/(2a) & (-a < x < a), \\ 1/(4a) & (x = \pm a), \\ 0 & (x < -a \text{ または } a < x). \end{cases}$$

このとき

$$\widehat{f_a}(p) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{-ipx}\,dx = \frac{e^{-iap}-e^{iap}}{-2iap} = \frac{\sin(ap)}{ap}.$$

これは偶函数である. ゆえに Fourier 変換の N 部分和は次のようになる:

$$\begin{aligned} s_N(f_a)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{ixp}\frac{\sin(ap)}{ap}\,dp = \frac{2}{2\pi a}\int_0^N \cos(xp)\frac{\sin(ap)}{p}\,dp \\ &= \frac{1}{2\pi a}\int_0^N \frac{\sin((a+x)p)+\sin((a-x)p)}{p}\,dp \end{aligned}$$

これの $N \to \infty$ での極限は 2 つの Dirichlet 積分の和の $2\pi a$ 分の 1 になる. 1 つ目の Dirichlet 積分は $x > -a$ のとき $\pi/2$ になり, $x = -a$ のとき 0 になり, $x < -a$ のとき $-\pi/2$ になり, 2 つ目の Dirichlet 積分は $x < a$ のとき $\pi/2$ になり, $x = a$ のとき 0 なり, $x > a$ のとき $-\pi/2$ になる. それらの和は $-a < x < a$ のとき π になり, $x = \pm a$ のとき $\pi/2$ になり, $x < -a$ または $a < x$ のとき 0 になる. ゆえに

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f_a) = f_a(x)$$

となることがわかる. □

5.7 Fourier 級数の部分和の収束

以下, f は $\mathbb{R}$ 上の周期 2π を持つ函数であり, $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で可積分であると仮定する. このとき f の Fourier 係数 a_n $(n \in \mathbb{Z})$ が

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iny} f(y)\,dy$$

と定義される. 正の整数 N に対して, 次を f の Fourier 級数の N 部分和と呼ぶ:

$$s_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}.$$

N 部分和は次のように変形される:

$$\begin{aligned}
s_N(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)}\right) f(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(N+1)(x-y)} - e^{-iN(x-y)}}{e^{i(x-y)} - 1} f(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(N+1/2)(x-y)} - e^{-i(N+1/2)(x-y)}}{e^{i(x-y)/2} - e^{-i(x-y)/2}} f(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin((N+1/2)(x-y))}{\sin((x-y)/2)} f(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin((N+1/2)y)}{\sin(y/2)} f(x+y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin((N+1/2)y)}{\sin(y/2)} (f(x+y) + f(x-y))\,dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin((N+1/2)y)\frac{y/2}{\sin(y/2)} \frac{f(x+y)+f(x-y)}{y}\,dy.
\end{aligned}$$

5 つ目の等号で y を $x+y$ で置き換え, $\sin(\alpha x)/\sin(\beta x)$ が偶函数であることを使い, さらに 6 つ目の等号で被積分函数の周期性を使った.

$\lim_{t\to 0}(t/\sin t) = 1$ に注意すれば, 第 5.4 節とまったく同様にして, N 部分和の収束に関する類似の結果が得られることがわかる.

Dirichlet 積分の公式の代わりに次の公式を使わなければいけない:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin((N+1/2)y)}{\sin(y/2)}\,dy = s_N(1)(0) = 1.$$

さらに非積分函数の周期性と偶函数性より,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin((N+1/2)y)}{\sin(y/2)}\,dy = 1.$$

$s_N(1)(0) = 1$ の証明は次の通り:

$$s_N(1)(0) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iny}dy = \sum_{n=-N}^{N} \delta_{n0} = 1.$$

$e^{-i0y}=1$ 以外の e^{-iny} の 0 から 2π までの積分が消えることを使った.

上の公式を使うと,

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin((N+1/2)y)}{\sin(y/2)}\,dy\,f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin((N+1/2)y)\frac{y/2}{\sin(y/2)}\frac{2f(x)}{y}\,dy.$$

ゆえに上の $s_N(f)(x)$ の表示より,

$$s_N(f)(x)-f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin((N+1/2)y)\frac{y/2}{\sin(y/2)}\frac{(f(x+y)+f(x-y))/2-f(x)}{y}\,dy.$$

右辺の積分の被積分函数の $\sin((N+1/2)y)$ 以外の部分は $\delta\leqq y<\pi$ で可積分なので Riemann-Lebesgue の定理より, $\delta>0$ に対して,

$$\lim_{N\to\infty}\int_\delta^\pi\sin((N+1/2)y)\frac{y/2}{\sin(y/2)}\frac{(f(x+y)+f(x-y))/2-f(x)}{y}\,dy=0.$$

ゆえに, $N\to\infty$ のとき,

$$\begin{aligned}&s_N(f)(x)-f(x)\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\delta\sin((N+1/2)y)\frac{y/2}{\sin(y/2)}\frac{(f(x+y)+f(x-y))/2-f(x)}{y}\,dy+o(1).\end{aligned}$$

ゆえに $0<y<\delta$ で

$$\frac{(f(x+y)+f(x-y))/2-f(x)}{y}$$

が可積分ならば $N\to 0$ で $s_N(f)(x)-f(x)$ が 0 に収束し, $\lim_{N\to\infty}s_N(f)(x)=f(x)$ が成立することがわかる. この条件が成立するための簡単な十分条件の例も第 5.4 節 と同様である.

6 付録: Gauss 分布の Fourier 変換

$t>0$ に対して次の公式が成立している:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ipx}\frac{e^{-x^2/(2t)}}{\sqrt{2\pi t}}\,dx=e^{-tp^2/2}. \qquad (*)$$

この公式が成立していることを複数の方法で示そう.

6.1 熱方程式を使う方法

函数 $u=u(t,x)$ を次のように定める:

$$u(t,x)=\frac{e^{-x^2/(2t)}}{\sqrt{2\pi t}}.$$

この函数 $u=u(t,x)$ は熱方程式の基本解になっている:

$$u_t=\frac{1}{2}u_{xx},\qquad \lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^\infty f(x)u(t,x)\,dx=f(0).$$

ここで $f(x)$ は有界な連続函数である. $u = u(t,x)$ が熱方程式を満たすことは偏微分の計算で容易に示される. 後者の極限の証明は実質的に第 5.2 節の終わりに書いてある.

ゆえに, $U(t,p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} u(t,x)\,dx$ とおくと,

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,p) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 e^{-ipx}}{\partial x^2}u(t,x)\,dx = -\frac{p^2}{2}U(t,p).$$

2 つ目の等号で部分積分を 2 回行なった. さらに

$$\lim_{t\to 0} U(t,p) = \lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}u(t,x)\,dx = e^{-ip0} = 1.$$

したがって

$$U(t,p) = e^{-tp^2/2}$$

となることがわかる. これで公式 $(*)$ が示された.

6.2 両辺が同一の常微分方程式を満たしていることを使う方法

前節の記号をそのまま使うと,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p}U(t,p) &= \int_{-\infty}^{\infty}(-ix)e^{-ipx}u(t,x)\,dx = it\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\,dx \\
&= -it\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{-ipx}\right)u(t,x)\,dx = -it\int_{-\infty}^{\infty}(-ip)e^{-ipx}u(t,x)\,dx \\
&= -tpU(t,p).
\end{aligned}$$

2 つ目の等号で $u_x = -(x/t)u$ を使い, 3 つ目の等号で部分積分を使った. さらに

$$U(t,0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\,dx = 1$$

となる. これらより $U(t,p) = e^{-tp^2/2}$ となることがわかる. この方針であれば $u(t,x)$ が熱方程式の基本解であることを使わずにすむ.

6.3 Taylor 展開の項別積分で計算する方法

もしも $t = 1$ の場合の公式 $(*)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{-p^2/2} \tag{$**$}$$

が示されたならば, x, p をそれぞれ $x/\sqrt{t}$, $\sqrt{t}\,p$ で置換することによって一般の $t > 0$ に関する公式 $(*)$ が得られる. ゆえに公式 $(*)$ を示すためには公式 $(**)$ を証明すれば十分である.

さらに $\sin(px)$ は奇函数なので $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\sin(px)\,dx = 0$ となる. ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cos(px)\,dx = e^{-p^2/2}\sqrt{2\pi}$$

を示せば十分である. 左辺の $\cos(px)$ にその Taylor-Maclaulin 展開を代入した後に項別積分することによってこの公式を示そう.

準備. まず $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^{2n}\,dx$ を計算しよう. 部分積分によって

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^{2n}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-e^{-x^2/2}\right)' x^{2n-1}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} (x^{2n-1})'\,dx = (2n-1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^{2n-2}\,dx.\end{aligned}$$

ゆえに帰納的に $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^{2n}\,dx = (2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\sqrt{2\pi} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{2\pi}.$$

2 つ目の等号は左辺の分子分母に $2n \cdots 4 \cdot 2 = 2^n n!$ をかけることによって得られる.

上で準備した結果を用いると,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cos(px)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(px)^{2n}}{(2n)!}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-p^2)^n}{(2n)!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-p^2/2)^n}{n!}\sqrt{2\pi} = e^{-p^2/2}\sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$

これで公式 $(**)$ が示された.

6.4　Cauchy の積分定理を使う方法

複素解析を知っている人であれば詳しい説明は必要ないと思うので, 以下の説明では大幅に手抜きをする. Cauchy の積分定理を使うと実数 p に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ip)^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

となることを示せる. ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ip)^2/2-p^2/2}\,dx = e^{-p^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ip)^2/2}\,dx = e^{-p^2/2}\sqrt{2\pi}.$$

これで公式 $(**)$ が示された.

7　付録: Gauss 積分の計算

次の公式の様々な証明の仕方を解説しよう:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

この公式の面白いところ (不思議なところ) は円周率の気配が見えない積分の値が円周率の平方根になっていることである. 実際の証明では

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi$$

を示すことになる.

7.1 同一の体積の 2 通りの積分表示を用いた計算

$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ は $z = e^{-(x^2+y^2)}$ の小山状のグラフと平面 $z=0$ に挟まれた部分の体積を表わしている．その体積は高さ z の断面の面積[43] $\pi(-\log z)$ を $0 < z \leqq 1$ で積分することによっても求められる．ゆえに

$$I^2 = \int_0^1 \pi(-\log z)\,dz = -\pi[z\log z - z]_0^1 = \pi.$$

おそらくこの方法が最も簡明である．

7.2 極座標変換による計算

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と極座標変換すると，

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr = 2\pi\left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^\infty = \pi.$$

2 つ目の等号で極座標変換の Jacobian が r になることを使った．もしくは

$$dx\wedge dy = (\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta)\wedge(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) = r\,dr\wedge d\theta$$

なので，$K = \{\,(r,\theta) \mid r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi\,\}$ とおくと，

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\wedge dy = \iint_K e^{-r^2} r\,dr\wedge d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr = \pi.$$

7.3 Jacobian を使わずにすむ積分変数の変換による計算

以下のように計算すると積分の順序交換と 1 変数の置換積分のみを使って Gauss 積分を計算できる．

$y = x\tan\theta$ によって y から θ に積分変数を変換すると，

$$dy = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}, \qquad x^2 + y^2 = x^2(1+\tan^2\theta) = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$$

より，

$$\begin{aligned}
I^2 &= 4\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy\right) dx = 4\int_0^\infty \left(\int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)\frac{x}{\cos^2\theta}\,d\theta\right) dx \\
&= 4\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)\frac{x}{\cos^2\theta}\,dx\right) d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \left[\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)}{-2}\right]_{x=0}^{x=\infty} d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\,d\theta = 4\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

3 つ目の等号で積分の順序交換を行なった．

[43] $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $r^2 = x^2 + y^2$ とおくと，$\pi r^2 = \pi(-\log z)$ となる．

$y = xt$ によって y から t に積分変数を変換することによって本質的に同じ計算を実行することもできる:

$$\begin{aligned}
I^2 &= 4\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy\right)dx = 4\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}\,x\,dt\right)dx \\
&= 4\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}\,x\,dx\right)dt = 4\int_0^\infty \left[\frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{-2(1+t^2)}\right]_{x=0}^{x=\infty} dt \\
&= 2\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = 2[\arctan t]_0^\infty = 2\frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

3 つ目の等号で積分の順序交換を行ない, 6 つ目の等号で $\arctan t$ の導函数が $1/(1+t^2)$ であることを使った [44].

7.4 ガンマ函数とベータ函数の関係を用いた計算

前節では Jacobian が出て来ない 1 変数の積分の置換積分のみを用いて Gauss 積分を計算する方法を説明した. それと似たような方法によって, ガンマ函数とベータ函数の関係式を 1 変数の積分の置換積分のみを用いて証明することができて, その関係式の特別な場合として Gauss 積分の値を計算することもできる. この節の内容は前節の内容の一般化であると考えられる. 統計学でよく使われる確率密度函数の記述にはガンマ函数やベータ函数を与える積分の被積分函数が現われる (第 9 節). だから, 統計学に興味がある読者は Gauss 積分の計算の一般化としてガンマ函数とベータ函数についても学んでおいた方が効率が良いとも考えられる.

$s, p, q > 0$ (もしくは実部が正の複素数 s, p, q) に対して,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx \qquad B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

によってガンマ函数 $\Gamma(s)$ とベータ函数 $B(p,q)$ が定義される [45].

部分積分によって $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ であることがわかり, $\Gamma(1) = 1$ なので, 0 以上の整数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となる.

Gauss 積分 I は $\Gamma(1/2)$ に等しい:

$$I = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-t}\frac{t^{-1/2}}{2}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{1/2-1}\,dt = \Gamma(1/2).$$

2 つ目の等号で $x = \sqrt{t}$ とおいた. したがって $\Gamma(1/2)^2 = \pi$ を証明できれば Gauss 積分が計算できたことになる.

ベータ函数は以下のような複数の表示を持つ:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta\,\sin^{2q-1}\theta\,d\theta = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^{1/p})^{p+q}}.$$

---

[44] $t = \tan\theta$ のとき $dt/d\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + t^2$ なので, $\theta = \arctan t$ の導函数は $d\theta/dt = 1/(1+t^2)$ になる. そのことから, $\arctan t = \int_0^t dt/(1+t^2)$ となることもわかる.

[45] 他にもたくさんの同値な定義の仕方がある. 以下では解析接続については扱わない.

$x = \cos^2\theta = t/(1+t)$, $t = u^{1/p}$ と変数変換した. 3 つ目の (最後の) 表示の $p = 1/2$ の場合の被積分函数が t 分布の確率密度函数の表示で使用され, 2 つ目の表示の被積分函数は F 分布の確率密度函数の表示で使用される. $\Gamma(1/2)$ の Gauss 積分による表示の被積分函数は正規分布の確率密度函数の表示で使用され, ガンマ函数の定義式の被積分函数は χ^2 分布の被積分函数の表示で使用される. このようにガンマ函数とベータ函数は実用的によく利用される確率分布を理解するためには必須の教養になっている (第 9 節).

特に最初の表示より $B(1/2, 1/2) = \pi$ となることがわかる. ゆえに, もしも

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

が示されたならば, $\Gamma(1/2)^2 = B(1/2, 1/2) = \pi$ となることがわかる. したがって Gauss 積分の計算はガンマ函数とベータ函数のあいだの関係式を示すことに帰着される.

ガンマ函数とベータ函数のあいだの関係式は 1 変数の置換積分と積分順序の交換のみを使って証明可能である. 以下でそのことを簡単に説明しよう. 条件 A に対して, x, y が A をみたすとき値が 1 になり, それ以外のときに値が 0 になる x, y の函数を $1_A(x,y)$ と書くことにすると,

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1}\,dy\right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty e^{-z} x^{p-1} (z-x)^{q-1}\,dz\right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty 1_{x<z}(x,z) e^{-z} x^{p-1} (z-x)^{q-1}\,dz\right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty 1_{x<z}(x,z) e^{-z} x^{p-1} (z-x)^{q-1}\,dx\right) dz \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^z e^{-z} x^{p-1} (z-x)^{q-1}\,dx\right) dz \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-z} (zt)^{p-1} (z-zt)^{q-1} z\,dt\right) dz \\
&= \int_0^\infty e^{-z} z^{p+q-1}\,dz \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \Gamma(p+q)B(p,q).
\end{aligned}$$

2 つ目の等号で $y = z - x$ と置換積分し, 4 つ目の等号で積分の順序を交換し, 6 つ目の等号で $x = zt$ と置換積分した.

7.5 他の方法

他の方法については Hirokazu Iwasawa, Gaussian Integral Puzzles, The Mathematical Intelligencer, Vol. 31, No. 3, 2009, pp. 38-41 および Steven R. Dunbar, Evaluation of the Gaussian Density Integral, October 22, 2011 を参照して欲しい.

7.6 類似の積分

$a \geqq 0$ に対する次の公式を証明しよう:

$$\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right) dx = \sqrt{2\pi}\,e^{-a}. \tag{$*$}$$

積分範囲を $x>0$ に制限し, $y=x-a/x$ で $x>0$ を $-\infty<y<\infty$ に置換積分すれば計算できる. 任意の $y\in\mathbb{R}$ ついて $x-a/x=y$ は $x>0$ で

$$x=\frac{1}{2}(y+\sqrt{y^2+4a})$$

と一意的に解けて

$$dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4a}}\right)dy.$$

が成立している. ゆえに

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{x}\right)^2\right)dx&=2\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{x}\right)^2\right)dx\\&=2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4a}}\right)dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2/2}\,dy=\sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$

3 番目の等号で $y/\sqrt{y^2+4a}$ が y の奇函数であることを使った. 一方

$$-\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{x}\right)^2=-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)+a$$

なので

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{x}\right)^2\right)dx=e^a\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\right)dx.$$

以上を合わせると $(*)$ が得られる.

8　付録: ガンマ函数

第 7.4 節でガンマ函数について簡単に解説した. 以下ではそこでは解説できなかったガンマ函数の性質について説明しよう.

8.1　ガンマ函数と正弦函数の関係式

第 7.4 節で示した $\Gamma(1/2)^2=B(1/2,1/2)=\pi$ は次の有名な公式の特別な場合である:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=B(s,1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

この公式にも複数の証明法がある. 1 つ目の方法は $\sin z$ と $\Gamma(s)$ の無限乗積展開

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2n^2}\right),\qquad \text{i.e.}\quad \frac{\sin(\pi s)}{\pi}=s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right),$$

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\lim_{n\to\infty}\frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!n^s}=e^{\gamma s}s\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}\right]$$

を使う方法である[46]. ここで γ は Euler 定数

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

である. これらの公式を認めると,

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{1}{\Gamma(s)(-s)\Gamma(-s)} = \frac{s(-s)}{-s}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{s}{n}\right)\left(1-\frac{s}{n}\right)\right] = \frac{\sin(\pi s)}{\pi}.$$

2 つ目の方法は次の定積分を複素解析を用いて計算することである:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = B(s,1-s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t}\,dt.$$

$0<s<1$ であると仮定し, $0<\varepsilon<1<R$ に対して定まる次の積分経路を C と書く: まず ε から R までまっすぐに進む. 次に複素平面上の原点を中心とする半径 R の円周上を反時計回りで 1 周する. そして R から ε までまっすぐに進む. 最後に複素平面上の原点を中心とする半径 ε の円周上を時計回りで 1 周する. このとき $\int_C z^{s-1}\,dz/(1+z)$ は $z^{s-1}\,dz/(1+z)$ の $z=-1$ での留数の $2\pi i$ 倍に等しい:

$$\int_C \frac{z^{s-1}\,dz}{1+z} = -2\pi i e^{\pi i s}.$$

$\varepsilon\to 0$, $R\to\infty$ の極限を考えることによって $\int_C z^{s-1}\,dz/(1+z)$ は $\int_0^\infty t^{s-1}\,dt/(1+z)$ からそれ自身の $e^{2\pi i s}$ 倍[47] を引いた結果に等しいこともわかる:

$$\int_C \frac{z^{s-1}\,dz}{1+z} = (1-e^{2\pi i s})\int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{1+t}.$$

以上の 2 つの結果を比較することによって

$$B(s,1-s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{1+t} = \frac{-2\pi i e^{\pi i s}}{1-e^{2\pi i s}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi i s}-e^{-\pi i s}} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

この積分は $t=u^{1/s}$ とおくことによって $s^{-1}\int_0^\infty du/(1+u^{1/s})$ に変形できる. ゆえに, 次の公式も得られたことになる:

$$B(1+s,1-s) = sB(s,1-s) = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}} = \frac{\pi s}{\sin(\pi s)}.$$

この公式を直接示すこともできる. $R>1$ であるとし, 複素平面上を原点から R までまっすぐ進み, 次に時計回りに角度 $2\pi s$ だけ回転して $Re^{2\pi i s}$ まで進み, そこから原点までまっすぐに戻る経路を C と書くと, $\int_C dz/(1+z^{1/s})$ は $dz/(1+z^{1/s})$ の $z=e^{\pi i s}$ における留数 $-se^{\pi i s}$ の $2\pi i$ 倍に等しく, $R\to\infty$ の極限で $\int_C dz/(1+z^{1/s})$ は $\int_0^\infty du/(1+u^{1/s})$ からそれ自身の $e^{2\pi i s}$ 倍を引いたものに等しい[48]. ゆえに

$$\int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}} = \frac{-2\pi i s e^{\pi i s}}{1-e^{2\pi i s}} = \frac{2\pi i s}{e^{\pi i s}-e^{-\pi i s}} = \frac{\pi s}{\sin(\pi s)}.$$

[46] $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/\sin(\pi s)$ を先に証明しておいて (たとえば複素解析を使えば容易に示せる), ガンマ函数の無限乗積展開から $\sin z$ の無限乗積展開を導出することもできる.

[47] z^s の値は原点の周囲を反時計回りに 1 周すると $e^{2\pi i s}$ 倍になる.

[48] $z^{1/s}$ は z を $e^{2\pi i s}$ 倍しても不変だが, dz は $e^{2\pi i s}$ 倍になる.

定積分を計算した結果に円周率倍がよく現われるのは極の周囲を 1 周する積分が留数の $2\pi i$ 倍になるからである.

複素解析と初等函数とガンマ函数の解説については, 高木貞治『解析概論』(岩波書店) の第 5 章 (201–267 頁) をおすすめする. 複素函数論の一般論だけではなく, 具体的な函数の性質の詳しい解説も含めて 67 頁におさまっているのは驚異的だと思う.

8.2　ガンマ函数の無限乗積展開

函数 $f(s)$ $(s>0)$ は以下の 3 つの条件を満たしていると仮定する:

- 正値性: $f(s)>0$ $(s>0)$,
- 函数等式: $f(s+1)=sf(s)$ $(s>0)$,
- 対数凸性: $\log f(s)$ は $s>0$ の下に凸な函数である.

この 3 つの条件を満たす函数は次の表示を持つ:

$$f(s)=f(1)\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} \qquad (s>0). \tag{$*$}$$

特に $\Gamma(s)$ が上の 3 つの条件と $\Gamma(1)=1$ を満たしていることから, **Gauss の公式**

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}$$

が成立しており, 上の 3 つの条件を満たしている函数は $\Gamma(s)$ の定数倍になることもわかる.

以上で述べたことを証明しよう.

まず, $(*)$ の極限の分子分母をひっくり返して得られる極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!n^s}$$

が常に収束することを示そう.

$$\begin{aligned}
&\frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!n^s}\\
&=s\left(1+\frac{s}{1}\right)\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s\log n}\\
&=s\left(1+\frac{s}{1}\right)e^{-s}\left(1+\frac{s}{2}\right)e^{-\frac{s}{2}}\cdots\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}e^{s\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)}
\end{aligned}$$

$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$ は $n\to\infty$ で Euler 定数 γ に収束する[49]. ゆえに $\prod_{k=1}^n(1+s/k)e^{-s/k}$ が $n\to\infty$ で収束することを示せばよい. z の複素正則函数 $(1+z)e^{-z}-1$ は原点 $z=0$ で 2 位の零点を持つので, $(1+z)e^{-z}=1+O(z^2)$ $(z\to 0)$ となる. ゆえに $(1+s/k)e^{-s/k}=1+O(s^2/k^2)$ $(k\to\infty)$. これより無限積 $\prod_{k=1}^\infty(1+s/k)e^{-s/k}$ が収束することがわかる. まとめ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!n^s}=e^{\gamma s}s\prod_{n=1}^\infty\left[\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}\right]$$

[49] $1/x$ は単調減少函数なので, $1+1/2+\cdots+1/n-\log n\geqq\int_1^{n+1}dx/x-\log n=\log(n+1)-\log n\geqq 0$ でかつ $1/(n+1)\leqq\int_n^{n+1}dx/x=\log(n+1)-\log n$ なので, $1+1/2+\cdots+1/n-\log n$ は有界かつ単調減少する. ゆえに収束する.

は常に収束する[50]. 右辺の無限積が $1/\Gamma(s)$ に等しいという公式

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{\gamma s} s \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{s}{n}\right) e^{-s/n} \right]$$

を **Weierstrass の公式**と呼ぶ. 右辺の無限積は任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して収束する.

以上によって収束が示された極限の逆数を $F(s)$ と書くことにする:

$$F(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

このとき

$$F(s+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{ns}{s+1+n} \frac{n! n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} = sF(s), \quad F(1) = \frac{n!\, n}{(n+1)!} = 1.$$

ゆえに目標である $(*)$ の公式 $f(s) = f(1)F(s)$ $(s > 0)$ を示すためには, $0 < s < 1$ のとき $f(s) = f(1)F(s)$ となることを示せば十分である.

次に, $f(s)$ の正値性と対数凸性を用いて, 2 以上の整数 n と $0 < s < 1$ について, $f(n+s)$ の大きさを $f(n-1), f(n), f(n+1)$ を用いて上下から評価する不等式

$$\left(\frac{f(n)}{f(n-1)}\right)^s f(n) \leqq f(n+s) \leqq \left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right)^s f(n) \qquad (0 < s < 1) \qquad (\#)$$

を示そう. 一般に下に凸な函数 $g(s)$ は $a < b < c$ に対して

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} \leqq \frac{g(c)-g(a)}{c-a} \leqq \frac{g(c)-g(b)}{c-b}$$

を満たしている[51]. これの左半分を $g(s) = \log f(s)$, $(a,b,c) = (n, n+s, n+1)$ に適用すると,

$$\frac{\log f(n+s) - \log f(n)}{s} \leqq \log f(n) - \log f(n+1).$$

右半分を $(a,b,c) = (n-1, n, n+s)$ に適用すると,

$$\log f(n) - \log f(n-1) \leqq \frac{\log f(n+s) - \log f(n)}{s}.$$

以上の 2 つの不等式を整理し直すと $f(n+s)$ の評価 $(\#)$ が得られる.

$f(n+s)$ の評価 $(\#)$ に f の函数等式を適用しよう. f の函数等式より

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = n, \quad f(s+n) = (s+n-1)\cdots(s+1)sf(s), \quad f(n) = (n-1)!f(1)$$

などが成立している. $(\#)$ の左半分で n を $n+1$ に置き換えると,

$$n^s n! f(1) \leqq (n+s)(n-1+s)\cdots s f(s), \qquad \therefore \quad \frac{f(0) n! n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} \leqq f(s).$$

---

[50] この極限を $1/\Gamma(s)$ の定義とすることもできる. この方法であれば最初から $1/\Gamma(s)$ が複素平面全体で定義されており, $\Gamma(s)$ の極が $s = 0, -1, -2, \ldots$ のみにあることも自明になる.

[51] 図を描けば直観的に明らかだろう.

$(\#)$ の右半分より,

$$f(s) \leqq \frac{f(1)(n-1)!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n-1)} = \frac{n+s}{n}\frac{f(1)n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

以上をまとめると

$$\frac{f(1)n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} \leqq f(s) \leqq \frac{n+s}{n}\frac{f(1)n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

これより, 示したかった $(*)$ が得られる.

ガンマ函数が3つの条件 (正値性, 函数等式, 対数凸性) を満たしていることを証明しよう. 正値性は定義 $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ より明らかであり, 函数等式は部分積分によって容易に証明される. 対数凸性を示すためには $g(s) = \log\Gamma(s)$ とおくとき, $g''(s) \geqq 0$ を示せば十分である. より一般に次のように定義される函数 $f(s)$ に対して $g(s) = \log f(s)$ とおくと $g''(s) \geqq 0$ となることを示そう:

$$f(s) = \int_a^b e^{s\phi(x)+\psi(x)}\,dx.$$

ここで $\phi(x), \psi(x)$ は実数値函数であり, s に関する積分記号化の微分が可能だと仮定しておく. $(a,b) = (0,\infty)$, $\phi(x) = \log x$, $\psi(x) = -x - \log x$ のとき $f(s) = \Gamma(s)$ となる [52]. このとき, $g(s) = \log f(s)$ とおくと

$$g'' = \frac{d}{ds}\frac{f'}{f} = \frac{ff'' - f'^2}{f^2}.$$

ゆえに $f'^2 - ff'' \leqq 0$ を示せばよい. $f(s)$ の定義より,

$$\begin{aligned} f(s)\lambda^2 + 2f'(s)\lambda + f''(s) &= \int_a^b e^{s\phi(x)+\psi(x)}(\lambda^2 + 2\phi(x)\lambda + \phi(x)^2)\,dx \\ &= \int_a^b e^{s\phi(x)+\psi(x)}(\lambda + \phi(x))^2\,dx \geqq 0. \end{aligned}$$

ゆえに $f'^2 - ff'' \leqq 0$ となる. 特に $\Gamma(s)$ も対数凸である.

これでガンマ函数の Gauss の公式と無限乗積展開も証明されたことになる.

補足. 以上で説明したガンマ函数に関する Gauss の公式の証明はガンマ函数そのものではなく、正値対数凸でガンマ函数と同じ函数等式を満たす函数に対して証明されたのであった. 積分で定義されたガンマ函数に関する Gauss の公式を以下のようにして直接的に証明することもできる. 函数 $n^sB(s,n+1)$ について,

$$n^sB(s,n+1) = \frac{n^s\Gamma(s)\Gamma(n+1)}{\Gamma(s+n+1)} = \frac{n^sn!}{s(s+1)\cdots(s+n)}$$

でかつ

$$n^sB(s,n+1) = n^s\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^n\,dx = \int_0^n t^{s-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\,dt$$

[52] $(a,b) = (0,1)$, $\psi(x) = \log x$ $\phi(x) = t\log(1-x)$ のとき $f(s) = B(s,t)$ となる. $B(s,t)$ も s の函数として対数凸になる. ゆえに $F(s) = \Gamma(s+t)B(s,t)$ も s の函数として対数凸になる. $F(s+1) = sF(s)$, $F(1) = \Gamma(t)$ なので $F(s) = \Gamma(s)\Gamma(t)$ であることがわかる. このようにガンマ函数の特徴付けによってガンマ函数とベータ函数の関係式を証明することもできる.

2 つ目の等号で $x = t/n$ とおいた. ゆえに, $n \to \infty$ のとき,

$$\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} = \int_0^n t^{s-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt \longrightarrow \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(s).$$

最後のステップを別の方法で証明することもできる. 評価 (#) を $f(s)=\Gamma(s)$ の場合に適用すると, $0<s<1$ のとき

$$\Gamma(s+n+1) \sim n^s\Gamma(n+1) \qquad (n\to\infty).$$

ガンマ函数の函数等式より, これは任意の $s>0$ で成立している. ゆえに

$$\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} = \frac{n^s\Gamma(s)\Gamma(n+1)}{\Gamma(s+n+1)} \longrightarrow \Gamma(s) \qquad (n\to\infty).$$

このように, ガンマ函数の正値性, 対数凸性, 函数等式による特徴付けを経由せずに, 直接的にガンマ函数に関する Gauss の公式を (したがって無限乗積展開も) 得ることは易しい. 以上によって次の公式も証明されたことになる:

$$\lim_{n\to\infty} n^s B(s,n+1) = \Gamma(s).$$

まとめ:

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} n^s B(s,n+1) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} = \frac{1}{e^{\gamma s}s}\prod_{n=1}^\infty\left[\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}\right]^{-1}.$$

ここで γ は Euler 定数である.

8.3 正弦函数の無限乗積展開

ガンマ函数の無限乗積展開の応用として $\sin z$ の無限乗積展開を証明しよう. 積分の順序交換を用いて証明されるガンマ函数とベータ函数の関係と複素解析を用いて証明されるベータ函数と正弦函数の関係より

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = B(s,1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

一方, ガンマ函数の無限乗積展開より,

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{1}{\Gamma(s)(-s)\Gamma(-s)} = s\prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right).$$

以上を比較すると,

$$\sin(\pi s) = \pi s\prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right), \qquad \therefore \quad \sin z = z\prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

このように, $\sin(\pi s) = \pi/(\Gamma(s)(-s)\Gamma(-s))$ なのでガンマ函数の無限乗積展開 [53] から正弦函数の無限乗積展開が得られるのである.

[53] 直接証明すれば易しい.

正弦函数の無限乗積展開を直接示すためには, $\sin z$ の対数微分 $\cot z$ の部分分数展開

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right)$$

を複素解析を用いて証明し, 項別に積分すればよい. 詳しくは高木貞治『解析概論』の 235 頁を見よ.

以下では, 複素解析ではなく, Fourier 級数の理論を使って正弦函数の無限乗積展開を直接に得る方法を紹介しておこう [54].

まず x の函数 $\cos(tx)$ の $-\pi \leqq x \leqq \pi$ での値の Fourier 級数展開を求め, そこから $\cot(\pi t)$ の部分分数展開が得られることを示そう [55]. e^{itx} の Fourier 係数は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}e^{itx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}e^{itx}}{i(t-n)}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\ &= \frac{(-1)^n(e^{i\pi t}-e^{-i\pi t})}{2\pi i(t-n)} = (-1)^n\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\frac{1}{t-n} \end{aligned}$$

なので, e^{itx} の Fourier 級数展開は

$$\begin{aligned} e^{itx} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx} = \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{(-1)^n e^{inx}}{t-n} \\ &= \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\left[\frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{e^{inx}}{t-n} + \frac{e^{-inx}}{t+n}\right)\right] \\ &= \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\left[\frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2t\cos(nx)}{t^2-n^2} + i\frac{2n\sin(nx)}{t^2-n^2}\right)\right] \end{aligned}$$

になる. ゆえに $\cos(tx)$ の Fourier 級数展開は

$$\cos(tx) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\left[\frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2t\cos(nx)}{t^2-n^2}\right]$$

になる. したがって,

$$\pi\cot(tx) = \frac{\pi\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2t\cos(nx)}{t^2-n^2}$$

両辺の $x \to \pi$ での極限を取ることによって,

$$\pi\cot(\pi t) = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2-n^2} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{t-n} + \frac{1}{t+n}\right)$$

を得る [56]. $\sin(\pi t)$ の対数微分は $\pi\cot(\pi t)$ に等しいので,

$$\frac{d}{dt}\log\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{t-n} + \frac{1}{t+n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1/n}{1-t/n} + \frac{1/n}{1+t/n}\right).$$

---

[54] 以下では厳密な議論はしないが, Fourier 級数の収束については第 5.7 節を参照せよ.

[55] x の偶函数 $\cos(tx)$ の $-\pi \leqq x \leqq \pi$ での値を周期 2π で $\mathbb{R}$ 全体に拡張して得られる連続周期函数 $f_t(x)$ の Fourier 級数を考える. $\cos(tx)$ の $0 \leqq x < 2\pi$ での値を周期 2π で拡張するのではないことに注意せよ.

[56] $\coth z = -i\cot(-iz)$ より, $\coth(\pi t) = -i\pi\cot(-\pi i t) = \dfrac{1}{t} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2+n^2}$.

両辺を $t=0$ から $t=s$ まで積分すると,

$$\log\frac{\sin(\pi s)}{\pi s}=\sum_{n=1}^\infty\left(\log\left(1-\frac{s}{n}\right)+\log\left(1+\frac{s}{n}\right)\right)=\log\prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)$$

したがって, 次が得られる[57]

$$\sin(\pi s)=\pi s\prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right).$$

sin の無限乗積展開とガンマ函数の無限乗積展開の公式を認めて使うことを許せば, $1/(\Gamma(s)\Gamma(1-s))$ と $\sin(\pi s)$ を比較することによって

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

を示せる. さらに $\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)B(p,q)$ を 1 変数の積分の置換積分と積分の順序交換のみを用いて容易に証明できることを使えば, 次の公式も得られる:

$$\frac{\pi}{\sin(\pi s)}=B(s,1-s)=\int_0^1 x^s(1-x)^{1-s}\,dx=\int_0^\infty\frac{t^{s-1}\,dt}{1+t}=\frac{1}{s}\int_0^\infty\frac{du}{1+u^{1/s}}.$$

これらの公式はどれか一つを証明できれば他も芋づる式に得られるようになっている.

8.4 Wallis の公式

次の公式は **Wallis の公式**と呼ばれている:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi},\qquad \text{i.e.}\quad \binom{2n}{n}\sim\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Wallis の公式の面白いところは円周率の平方根が整数の比の極限で表わされているところである. Wallis の公式はガンマ函数に関する Gauss の公式に $s=1/2$ を代入すれば得られる:

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}=\Gamma(1/2)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/2}n!}{(1/2)(1/2+1)\cdots(1/2+n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n^{1/2}n!}{1\cdot3\cdots(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n^{1/2}n!}{1\cdot3\cdots(2n+1)}\frac{2^nn!}{2\cdot4\cdots(2n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}n^{1/2}(n!)^2}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\frac{2n^{1/2}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

次の公式も **Wallis の公式**と呼ばれている:

$$\prod_{n=1}^\infty\frac{2n\cdot2n}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}.$$

[57] $\sinh z=i\sin(-iz)$ より, $\sinh(\pi s)=\pi s\prod_{n=1}^\infty\left(1+\dfrac{s^2}{n^2}\right)$.

この公式は次の公式で $s=1/2$ とおけば得られる:

$$\sin(\pi s)=\frac{\pi}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}=\pi s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right).$$

実際,

$$1=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot 2n}.$$

8.5 $B(s,1/2)$ の級数展開

以下の内容は mathtodon の `https://mathtod.online/@genkuroki/133351` で解説した事柄である.

二項係数 $\binom{-1/2}{n}$ は次のように表わされる:

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n}&=\frac{(-1/2)(-3/2)\cdots(-(2n-1)/2)}{n!}=\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}\\&=\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-1)(2n)}{n!\cdot 2\cdot 4\cdots(2n)}=\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n n!}=\binom{2n}{n}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$(1-x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{2^{2n}}.$$

したがって, $B(s,1/2)$ は以下のように変形できる:

$$B(s,1/2)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{-1/2}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}2^{-2n}\int_0^1 x^{n+s-1}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{2^{-2n}}{n+s}.$$

たとえば $s=1/2$ のとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{2^{-2n}}{n+1/2}=B(1/2,1/2)=\pi.$$

両辺を 2 で割ると,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{2^{-2n}}{2n+1}=B(1/2,1/2)=\frac{\pi}{2}.$$

他にも以下のような公式が成立している:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{2^{-2n}}{n+1}=B(1,1/2)=2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{2^{-2n}}{2n+3}=\frac{1}{2}B(3/2,1/2)=\frac{\pi}{4}.$$

8.6 Fresnel 積分と Dirichlet 積分とガンマ函数

以下の内容は mathtodon の https://mathtod.online/@genkuroki/133687 で解説した事柄である.

Fresnel 積分の公式とは

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos t^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin t^2\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

という公式のことである. ここで $\int_{-\infty}^{\infty}$ は $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}$ の意味である. 上の公式は左辺は偶函数の積分であることと, 置換 $t=\sqrt{x}$ によって

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

と書き直され, これは $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ と $e^{\pi i/4}=(1+i)/\sqrt{2}$ より,

$$\int_0^{\infty} e^{ix}x^{1/2-1}\,dx = e^{\pi i/4}\Gamma(1/2)$$

とまとめられる. この公式は

$$\int_0^{\infty} e^{ix}x^{s-1}\,dx = e^{\pi is/2}\Gamma(s) \tag{$*$}$$

に一般化される. この公式は, ガンマ函数の定義式

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} z^{s-1}e^{-z}\,dz$$

で $z=-ix=e^{-\pi i/2}x$ とおき、積分経路を複素平面内で 90 度回転させたものに形式的に等しい. Cauchy の積分定理を使えば実際にそのような議論で公式 $(*)$ を証明できる.

上の公式 $(*)$ の虚部は

$$\int_0^{\infty} x^{s-1}\sin x\,dx = \Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}$$

である. この公式で両辺の $s\to 0$ の極限を取れば, Dirichlet 積分の公式 (第 5.5 節に別証明がある)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

が得られる. 右辺の極限は

$$\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2} = \lim_{s\to 0}\Gamma(s+1)\frac{\sin(\pi s/2)}{s} = \frac{\pi}{2}$$

と計算される.

以上によって, Fresnel 積分の公式と Dirichlet 積分の公式はそれぞれガンマ函数の $s=1/2$ での特殊値 $\sqrt{\pi}$ と $s=0$ での留数 1 を見る公式に本質的になっていることがわかった.

8.7 Stirling-Binet の公式 (1)

以下の解説はほぼ E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis (1927) からの引き写しである. この本は様々な古典的な公式が大量に載っている非常に楽しい本である.

ガンマ函数の対数微分をディガンマ函数 (digamma 函数) と呼び, $\psi(s)$ と表わす:

$$\psi(s) = \frac{d}{ds}\log\Gamma(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}.$$

さらにディガンマ函数の導函数 $\psi'(s)$ をトリガンマ函数 (trigamma 函数) と呼ぶ.

ガンマ函数の無限乗積展開 (Weierstrass の公式) より,

$$\log\Gamma(s) = -\gamma s - \log s - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{s}{n}\right) - \frac{s}{n}\right].$$

ここで γ は Euler 定数である. 両辺を項別微分することによって次を得る:

$$\psi(s) = \frac{d}{ds}\log\Gamma(s) = -\gamma - \frac{1}{s} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+s} - \frac{1}{n}\right].$$

さらにもう一度項別微分すると

$$\psi'(s) = \frac{1}{s^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+s)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+s)^2}.$$

このようにして, ガンマ函数の無限乗積展開から, ディガンマ函数とトリガンマ函数の部分分数展開が得られる.

以下の目標はディガンマ函数に関する公式を経由して, $\log\Gamma(s)$ に関する Stirling-Binet の公式を示すことである. 長くて地道な計算になるが, 内容的にはディガンマ函数の部分分数展開からディガンマ函数の積分表示式を得て, それを積分して $\log\Gamma(z)$ の表示を得るだけの単純な計算である.

まず, Euler 定数の積分表示式

$$\gamma = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t}\right)dt$$

を示そう. Euler 定数の定義に $1/k = \int_0^1 x^{k-1}\,dx$ と $\log n = \int_1^n du/u$ を代入すると,

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^n \int_0^1 x^{k-1}\,dx - \int_1^n \frac{du}{u}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx - \int_1^n \frac{du}{u}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \frac{1-(1-y)^n}{y}\,dy - \int_1^n \frac{du}{u}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^n \frac{1-(1-u/n)^n}{u}\,du - \int_1^n \frac{du}{u}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \frac{1-(1-u/n)^n}{u}\,du - \int_1^n \frac{(1-u/n)^n}{u}\,du\right] \\
&= \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\,du - \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du \\
&= \lim_{\delta\searrow 0}\left[\int_\delta^1 \frac{du}{u} - \int_\delta^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du\right] = \lim_{\delta\searrow 0}\left[\int_\Delta^1 \frac{du}{u} - \int_\Delta^\delta \frac{du}{u} - \int_\delta^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du\right] \\
&= \lim_{\delta\searrow 0}\left[\int_\Delta^1 \frac{du}{u} - \int_\delta^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du\right] = \lim_{\delta\searrow 0}\left[\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt - \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right] \\
&= \lim_{\delta\searrow 0}\int_\delta^\infty \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t}\right)dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t}\right)dt.
\end{aligned}
$$

1 つ目の等号は Euler 定数の定義であり, 2 つ目の等号で積分の代入を行ない, 3 つ目の等号で等比数列の和 $1+x+\cdots+x^{n-1} = (1-x^n)/(1-x)$ を使った. さらに 4 つ目の等号で積分変数の変換 $y = 1-x$ を行ない, 5 つ目の等号でさらに $y = t/n$ とおき, 6 つ目の等号で 0 から 1 までの積分と 1 から ∞ までの積分を分けた. 6 つ目の等号の右辺は $n\to\infty$ の極限が取れる形式になっていることに注意せよ. 9 つ目の等号で $0 < \Delta = 1-e^{-\delta} < \delta$ とおいた. 10 個目の等号で $\delta \searrow 0$ のとき $\int_\Delta^\delta du/u = \log(\delta/(1-e^{-\delta})) \to 0$ となることを使った. 11 個目の等号で 1 つ目の積分で $u = 1-e^{-t}$ とおき, 2 つ目の積分で $u = t$ とおいた.

次に, Euler 定数の積分表示式に似ているディガンマ函数の積分表示式

$$
\psi(s) = \frac{d}{ds}\log\Gamma(s) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-st}}{1-e^{-t}}\right)dt.
$$

を示そう (Gauss によるディガンマ函数の無限積分表示). ディガンマ函数の部分分数展開で, 上で証明した Euler 定数の積分表示とよく使われる公式

$$
\frac{1}{c^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-ct}t^{s-1}\,dt \qquad (\operatorname{Re} c > 0) \tag{\$}
$$

の $s=1$ の場合を $c=s,s+n,n$ に適用した結果を使うと,

$$
\begin{aligned}
\psi(s) &= \frac{d}{ds}\log\Gamma(s) \\
&= -\int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t}\right) dt - \int_0^\infty e^{-st}\,dt + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty (e^{-nt} - e^{-(n+s)t})\,dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right) dt + \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-nt}-e^{-st}+e^{-(s+n)t}}{1-e^{-t}}\,dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-st}}{1-e^{-t}}\right) dt - \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1-e^{-st}}{1-e^{-t}}e^{-nt}\,dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-st}}{1-e^{-t}}\right) dt
\end{aligned}
$$

3 つ目の等号で

$$
\begin{aligned}
e^{-t}+e^{-2t}+\cdots+e^{-(n-1)t} &= \frac{e^{-t}-e^{-nt}}{1-e^{-t}}, \\
e^{-st}+e^{-(s+1)t}+e^{-(s+2)t}+\cdots+e^{-(s+n-1)t} &= \frac{e^{-st}-e^{(s+n)t}}{1-e^{-t}}
\end{aligned}
$$

を使った. これでディガンマ函数の積分表示式が証明された.

以下の目標はディガンマ函数に関する公式を積分して $\log\Gamma(z)$ に関する公式を得ることである.

ここで公式

$$
\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-zt}}{t}\,dt = \log z \tag{$*$}
$$

を示しておこう. 左辺を $f(z)$ と書くと, $f(1)=0$ でかつ, $f'(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\,dt = 1/z$ なので $f(z)=\log z$ となる.

上で証明したディガンマ函数の積分表示式で $s=z+1$ とおいて, 被積分函数の 2 つ目の項の分子分母に e^t をかけると:

$$
\psi(z+1) = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z+1) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{e^t-1}\right) dt.
$$

これにすぐ上の段落で証明した公式を適用すると,

$$
\psi(z+1) = \log z + \int_0^\infty \left(\frac{e^{-zt}}{t} - \frac{e^{-zt}}{e^t-1}\right) dt = \log z - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) e^{-zt}\,dt.
$$

一時的に $f(t)=1/(e^t-1)$ とおくと $f(-t)=-f(t)-1$ より $1/2+f(t)$ は奇函数になる. さらに $1/2-1/t+f(t)$ は $t=0$ で正則になり,

$$
\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} = \frac{t}{12} - \frac{t^3}{720} + \frac{t^5}{30240} + O(t^7) \tag{$*$}
$$

となることもわかる. 左辺の函数の $1/t$ 倍は $0<t<\infty$ で有界である. 上の $\psi(z+1)$ の表示の積分の括弧の中がこれになるようにするために,

$$
\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-zt}\,dt = \frac{1}{2z}
$$

を使うと

$$\psi(z+1) = \frac{d\log\Gamma(z+1)}{dz} = \log z + \frac{1}{2z} - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) e^{-zt}\,dt.$$

$\log\Gamma(2) = \log 1 = 0$ なので, この式を 1 から z まで積分すると,

$$\log\Gamma(z+1) = z\log z - z + 1 + \frac{1}{2}\log z + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) \frac{e^{-zt}-e^{-t}}{t}\,dt.$$

$\log\Gamma(z+1) = \log z + \log\Gamma(z)$ より,

$$\log\Gamma(z) = z\log z - z + 1 - \frac{1}{2}\log z + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) \frac{e^{-zt}-e^{-t}}{t}\,dt.$$

右辺の積分を評価するために

$$I(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) e^{-zt}\frac{dt}{t}$$

とおく. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ より,

$$\log\sqrt{\pi} = \frac{1}{2} + I\left(\frac{1}{2}\right) - I(1).$$

一方, $I(1)$ の定義式で t を $t/2$ で置き換えると,

$$I(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{t} + \frac{1}{e^{t/2}-1}\right) e^{-t/2}\frac{dt}{t}$$

なので

$$I\left(\frac{1}{2}\right) - I(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{t/2}}{e^t-1}\right) e^{-t/2}\frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{e^t-1}\right)\frac{dt}{t}$$

であるから, 今度は $I(1)$ の定義式の方を使うと,

$$\begin{aligned} I\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{e^t-1} + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-t}}{t} + \frac{e^{-t}}{e^t-1}\right)\frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t/2}-e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2}\right)\frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t/2}-e^{-t}}{t^2} - \frac{e^{-t}}{2t}\right)dt. \end{aligned}$$

ここで

$$-\frac{d}{dt}\frac{e^{-t/2}-e^{-t}}{t} = \frac{e^{-t/2}-e^{-t}}{t^2} + \frac{e^{-t/2}/2-e^{-t}}{t},$$
$$-\frac{e^{-t/2}/2-e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2t} = -\frac{1}{2}\frac{e^{-t/2}-e^{-t}}{t}$$

に注意すれば $I(1/2)$ の計算は $(*)$ に帰着できることがわかる:

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = -\left[\frac{e^{-t/2}-e^{-t}}{t}\right]_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-t/2}}{t}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \log\sqrt{2}.$$

したがって,

$$-I(1) = -\frac{1}{2} - I\left(\frac{1}{2}\right) + \log\sqrt{\pi}. = -1 + \log\sqrt{2\pi}.$$

以上をまとめると,

$$\log\Gamma(z) = z\log z - z + 1 - \frac{1}{2}\log z + I(z) - I(1) = z\log z - z + \log\sqrt{\frac{2\pi}{z}} + I(z).$$

$\log\Gamma(z+1) = \log z + \log\Gamma(z)$ より,

$$\log\Gamma(z+1) = z\log z - z + \log\sqrt{2\pi z} + I(z).$$

$I(z)$ の定義式を再掲すると

$$I(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) e^{-zt}\frac{dt}{t}.$$

この積分の被積分函数の括弧の内側の $1/t$ 倍は $0 < t < \infty$ で有界である. ゆえにある正の実数 M が存在して $\operatorname{Re} z > 0$ において $I(z)$ は上から次のように評価される:

$$|I(z)| \leqq M\int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re} z)t}\,dt = \frac{M}{\operatorname{Re} z}.$$

これは $z > 0$ に対して,

$$\log\Gamma(z+1) = z\log z - z + \log\sqrt{2\pi z} + O\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (z \to \infty).$$

これで Stirling の公式

$$\Gamma(z+1) = z^z e^{-z}\sqrt{2\pi z}\,(1 + O(1/z)) \qquad (z \to \infty)$$

が再証明された. より精密には (#) と ($) より,

$$\begin{aligned}
I(z) &= \int_0^\infty e^{-zt}\left(\frac{1}{12} - \frac{t^2}{720} + \frac{t^4}{30240} + O(t^6)\right)\,dt \\
&= \frac{\Gamma(1)}{12z} - \frac{\Gamma(3)}{720z^3} + \frac{\Gamma(5)}{30240z^5} + O\left(\frac{1}{z^7}\right) \\
&= \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} + O\left(\frac{1}{z^7}\right) \qquad (z \to \infty).
\end{aligned}$$

すなわち

$$\Gamma(z+1) = z^z e^{-z}\sqrt{2\pi z}\,\exp\left(\frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} + O\left(\frac{1}{z^7}\right)\right) \qquad (z \to \infty).$$

特に

$$\Gamma(z+1) = z^z e^{-z}\sqrt{2\pi z}\,\left(1 + \frac{1}{12z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \qquad (z \to \infty)$$

と第 1 補正項 $1/(12n)$ も得られた.

8.8 Stirling-Binet の公式 (2) 書きかけ

前節の結果は以下のようにまとめられる:

$$
\begin{aligned}
&\log\Gamma(z+1) = z\log z - z + \log\sqrt{2\pi z} + I(z),\\
&I(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) e^{-zt}\frac{dt}{t},\\
&\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} = \frac{t}{12} - \frac{t^3}{720} + \frac{t^5}{30240} + O(t^7).
\end{aligned}
$$

この公式は E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis (1927) の 12・31 節で “Binet's first expression for $\log\Gamma(z)$ in terms of an infinite integral” と呼ばれている. 以下では 12・32 節に書いてある “Binet's second expression” を紹介しよう. すなわち,

$$
I(z) = 2\int_0^\infty \frac{\arctan(t/z)}{e^{2\pi t}-1}\,dt
$$

という公式の証明を目指そう.

書きかけ

9 付録: 様々な確率分布について

9.1 正規分布

次の確率密度函数で定義される確率分布を平均 μ, 分散 σ の正規分布と呼ぶ:

$$
f_{\mu,\sigma}(x)\,dx = \frac{e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,dx.
$$

平均 0, 分散 1 の正規分布を標準正規分布と呼ぶ.

再生性 独立な確率変数 X, Y がそれぞれ平均 μ_X, μ_Y, 分散 σ_X^2, σ_Y^2 の正規分布にしたがうとき, $X+Y$ は平均 $\mu_X+\mu_Y$, 分散 $\sigma_X^2+\sigma_Y^2$ の正規分布にしたがう.

9.2 ガンマ分布とカイ 2 乗分布

次の確率密度函数で定義される確率分布を shape $\alpha > 0$, scale $\tau > 0$ のガンマ分布と呼ぶ:

$$
f_{\alpha,\tau}(x)\,dx = \frac{e^{-x/\tau}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\tau^\alpha}\,dx = \frac{e^{-x/\tau}(x/\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{dx}{x} \qquad (x>0).
$$

平均は $x = \alpha\tau$, 分散は $\alpha\tau^2$ であり, $\alpha \geqq 0$ のとき最頻値は $x = (\alpha-1)\tau$ になる.

特性函数 ガンマ分布の特性函数は次の形になる:

$$\varphi_{\tau,\alpha}(t) = \frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{itx} e^{-x/\tau} x^{\alpha-1}\,dx = (1 - i\tau t)^{-\alpha}.$$

証明するためには $\varphi'_{\tau,\alpha}(t) = i\alpha\tau(1 - i\tau t)^{-1}\varphi_{\tau,\alpha}(t)$ を示せば十分である. そのことは以下のようにして示される:

$$\begin{aligned}
\tau^\alpha \Gamma(\alpha)\varphi'_{\tau,\alpha}(t) &= \int_0^\infty ie^{itx}e^{-x/\tau}x^\alpha\,dx = \frac{i}{it - \tau^{-1}} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(e^{itx}e^{-x/\tau})x^\alpha\,dx \\
&= \frac{-i\tau}{1 - i\tau t} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(e^{itx}e^{-x/\tau})x^\alpha\,dx = \frac{i\tau}{1 - i\tau t} \int_0^\infty e^{itx}e^{-x/\tau}\frac{\partial}{\partial x}x^\alpha\,dx \\
&= \frac{i\alpha\tau}{1 - i\tau t} \int_0^\infty e^{itx}e^{-x/\tau}x^{\alpha-1}\,dx = \frac{i\alpha\tau}{1 - i\tau t}\tau^\alpha\Gamma(\alpha)\varphi_{\tau,\alpha}(t).
\end{aligned}$$

1 つめの等号で積分記号化での微分を行い, 4 つめの等号で部分積分を使った.
　特性函数の形から次の再生性がただちに導かれる.

再生性 独立な確率変数 X, Y がそれぞれ shape α_X, α_Y, scale τ, τ のガンマ分布にしたがうとき, $X + Y$ は shape $\alpha_X + \alpha_Y$, scale τ のガンマ分布にしたがう.

カイ 2 乗分布 カイ 2 乗分布 (χ^2 分布) はガンマ分布の特別な場合である. すなわち, shape $n/2$, scale 2 のガンマ分布を自由度 n のカイ 2 乗分布 (χ^2 分布) と呼ぶ:

$$f_{2,n/2}(x)\,dx = \frac{e^{-x/2}x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\,dx = \frac{e^{-x/2}(x/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\frac{dx}{x}.$$

カイ 2 乗分布は自由度 n について再生性を持つ.

定理 9.1 (標準正規分布からカイ 2 乗分布が得られること). 確率変数 $X_1, X_2, \dots$ は独立同分布の確率変数列であり, 各々は標準正規分布にしたがうと仮定する. このとき $Y = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ は自由度 n のカイ 2 乗分布にしたがう.

証明. 次を示せば十分である:

$$E[f(Y)] = \text{const.} \int_0^\infty f(y)e^{-y/2}y^{n/2-1}\,dy.$$

これを示そう.

$$\begin{aligned}
E[f(Y)] &= E[f(X_1^2 + \cdots + X_n^2)] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\!\cdots\!\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1^2 + \cdots + x_n^2)e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)/2}\,dx_1\cdots dx_n \\
&= \frac{A_{n-1}}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty f(r^2)e^{-r^2/2}r^{n-1}\,dr \\
&= \frac{A_{n-1}}{2(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty f(y)e^{-y/2}y^{(n-1)/2}y^{-1/2}\,dy \\
&= \frac{A_{n-1}}{2(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty f(y)e^{-y/2}y^{n/2-1}\,dy.
\end{aligned}$$

3 つめの等号で $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ とおき, $\mathbb{R}^n$ における微小体積要素が $n-1$ 次元単位球面上の微小面積と $r^{n-1}\,dr$ の積になることを使い, $n-1$ 次元単位球面の面積を A_{n-1} と書いた. 4 つめの等号で $r = y^{1/2}$, $dr = (1/2)y^{-1/2}\,dy$ とおいた. □

注意 9.2. 以上の計算によって, $n-1$ 次元単位球面の面積 A_{n-1} に関して,

$$A_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

が成立することも示されたことになる. これは第 9.9 節での計算結果と一致している. □

9.3 多項分布と Pearson のカイ 2 乗統計量と多次元正規分布

$K = (K_1, \dots, K_r)$ は多項分布に従う離散型ベクトル値確率変数であるとする. すなわち, $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ であるとし, 実数 $k_1, \dots, k_r$ に対して, $K = (k_1, \dots, k_r)$ となる確率は, k_i がすべて非負の整数で $\sum_{i=1}^r k_i = n$ のとき

$$P(K = (k_1, \dots, k_r)) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$$

であり, それ以外のとき 0 であるとする.

例 9.3 (サイコロ). 1 から 6 までの目が同じ確率で出るサイコロを n 回ふったときに i の目が出た回数を K_i と表わすと, $K = (K_1, \dots, K_6)$ は $r = 6$, $p_i = 1/6$ の多項分布にしたがう. 一般の多項分布も同様に理解できる [58]. □

確率の総和が 1 になることは多項定理

$$\sum_{k_1+\cdots+k_r=m} \frac{m!}{k_1! \cdots k_r!} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r} = (x_1 + \cdots + x_r)^m$$

を使えば確認できる. 多項定理は二項定理と同様の考え方で証明される. もしくは二項定理を用いた m に関する帰納法で証明される.

K_i の平均は $\mu_i = np_i$ になる:

$$\mu_i = E[K_i] = \sum_{k_1+\cdots+k_r=n} \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} k_i = np_i(p_1 + \cdots + p_r)^{n-1} = np_i.$$

3 つ目の等号で多項定理を使った.

K_i の分散は $\sigma_i^2 = np_i(1-p_i)$ になる:

$$\begin{aligned}
E[K_i(K_i-1)] &= \sum_{k_1+\cdots+k_r=n} \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} k_i(k_i-1) \\
&= n(n-1)p_i^2(p_1 + \cdots + p_r)^{n-2} = n(n-1)p_i^2, \\
\sigma_i^2 = E[K_i^2] - \mu_i^2 &= E[K_i(K_i-1)] + \mu_i - \mu_i^2 \\
&= n(n-1)p_i^2 + np_i - n^2p_i^2 = np_i(1-p_i).
\end{aligned}$$

2 つ目の等号で多項定理を使った.

[58] 確率変数の話はサイコロをふる話だと思っていると理解し易いと思う. 確率変数はプログラミングにおける「乱数」のことだと思ってもよい. 様々な分布を持つ確率変数を考えることは様々な「乱数」を考えることと同じだと思ってよい.

$i \neq j$ のとき K_i と K_j の共分散は $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = -np_ip_j$ になる:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} = E[K_iK_j] - \mu_i\mu_j &= \sum_{k_1+\cdots+k_r=n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_r!} p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r} k_ik_j - \mu_i\mu_j \\ &= n(n-1)p_ip_j - n^2p_ip_j = -np_ip_j.\end{aligned}$$

3 つ目の等号で多項定理を使った.

したがってベクトル値確率変数 $X = (X_1, \ldots, X_r)$ を

$$X_i = \frac{K_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$$

と定めると, X_i の平均は 0 になり, 分散は

$$p_{ii} = \frac{np_i(1-p_i)}{np_i} = 1 - p_i = 1 - \sqrt{p_i}\sqrt{p_i}$$

になり, $i \neq j$ のとき X_i と X_j の共分散は

$$p_{ij} = p_{ji} = \frac{-np_ip_j}{n\sqrt{p_i}\sqrt{p_j}} = -\sqrt{p_i}\sqrt{p_j}$$

になる. すなわち $X = (X_1, \ldots, X_r)$ の分散共分散行列 $P = [p_{ij}]$ は

$$P = E + aa^T, \qquad a = \begin{bmatrix}\sqrt{p_1}\\ \vdots \\ \sqrt{p_r}\end{bmatrix}$$

の形になる. ここで E は単位行列であり, a^T は列ベクトル a の転置である. $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ より, a は単位ベクトルになる. 列ベクトル $v \in \mathbb{R}^r$ に対して,

$$Pv = v - \langle a, v\rangle a$$

は a の直交補空間への v の直交射影になる ($r = 3$ の場合の図を描いてみよ). ここで Euclid 内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と書いた. P が単位ベクトル a の直交補空間への直交射影を表現する行列であることから, $P^2 = P$ となり, P のランクが $r-1$ になることがわかる [59].

定義 9.4 (Pearson のカイ 2 乗統計量). 多項分布にしたがう確率変数 $K = (K_1, \ldots, K_r)$ から定まる次の確率変数を **Pearson のカイ 2 乗統計量**と呼ぶ:

$$Y = \sum_{i=1}^r X_i^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(K_i - np_i)^2}{np_i}$$

これは**カイ 2 乗分布**にしたがう確率変数ではない. しかし次の定理が成立している. □

定理 9.5. Pearson のカイ 2 乗統計量は $n \to \infty$ で自由度 $r-1$ のカイ 2 乗分布にしたがう確率変数に (弱) 収束する [60].

[59] この結果は Pearson のカイ 2 乗統計量が $n \to \infty$ でカイ 2 乗分布にしたがう確率変数に (弱) 収束することを示すためのキーになる.

[60] この結果はよく使われている Pearson のカイ 2 乗検定の基礎になっている. このノートにこの節を追加しようと思った動機は, 入門的な統計学の教科書には「n が大きなとき, どうして Pearson のカイ 2 乗統計量をカイ 2 乗分布で近似してよいのか」に関する説明がないように見えたからである.

証明. 多次元版の中心極限定理[61] より, $X=(X_1,\dots,X_r)$ は平均 0, 分散共分散行列が P の多次元正規分布に (弱) 収束する. したがって, $X=(X_1,\dots,X_r)$ が平均 0, 分散共分散行列 P を持つ多次元正規分布にしたがうとき,

$$Y=\sum_{i=1}^r X_i^2$$

が自由度 $r-1$ のカイ 2 乗分布にしたがうことを示せばよい. そのことを示すためには次の一般的な補題を示せば十分である. □

補題 9.6. ベクトル値確率変数 $X=(X_1,\dots,X_r)$ が平均 0, 分散共分散行列 P を持つ多次元正規分布にしたがうとき, $P^2=P$ かつ P のランクが s ならば, $Y=\sum_{i=1}^r X_i^2$ は自由度 s のカイ 2 乗分布にしたがう.

証明. 一般に分散共分散行列 P は実対称行列になる. $P^2=P$ ならば P の固有値は 0 と 1 になり, 固有値 1 の重複度と P のランクは一致する. ゆえにある直交行列 U が存在して,

$$U^TPU=U^{-1}PU=\operatorname{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{s},0,\dots,0).$$

P, U の (i,j) 成分をそれぞれ p_{ij}, u_{ij} と書き,

$$Z_i=\sum_{j=1}^r u_{ji}X_j$$

とおく. このとき, $X=(X_1,\dots,X_r)$ から $Z=(Z_1,\dots,Z_r)$ への変換は直交変換なので

$$Y=\sum_{i=1}^r X_i^2=\sum_{i=1}^r Z_i^2$$

が成立し, 直交行列 U の取り方より,

$$E[Z_iZ_l]=\sum_{j,k=1}^r u_{ji}E[X_jX_k]u_{kl}=\sum_{j,k=1}^r u_{ji}p_{jk}u_{kl}=\begin{cases}1 & (1\leqq i=l\leqq s),\\ 0 & (\text{その他の場合}).\end{cases} \qquad (\&)$$

確率変数を成分に持つ行列まで期待値汎函数 $E[\ ]$ を拡張すると以上の計算を以下のように書くことができる:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}Z_1 & \cdots & Z_r\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}X_1 & \cdots & X_r\end{bmatrix}U,\\
E\left[\begin{bmatrix}Z_1\\ \vdots\\ Z_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1 & \cdots & Z_r\end{bmatrix}\right] &= U^TE\left[\begin{bmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1 & \cdots & X_r\end{bmatrix}\right]U\\
&= U^TPU=\operatorname{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{s},0,\dots,0).
\end{aligned}$$

[61] 多次元版中心極限定理も 1 次元版中心極限定理と同様の方法で証明される. すなわち特性函数の $n\to\infty$ が正規分布の特性函数に収束することを示せばよい.

公式 (&) より, $Z_1, \dots, Z_s$ は独立同分布で各々が標準正規分布にしたがい, $Z_{s+1}, \dots, Z_r$ は 0 に台を持つデルタ分布にしたがうこと (確率 1 で $Z_{s+1} = \dots = Z_r = 0$ となること) がわかる. ゆえに定理 9.1 より

$$\sum_{i=1}^r Z_i^2 = Z_1^2 + \dots + Z_s^2 \qquad \text{(almost sure)}$$

は自由度 s のカイ 2 乗分布にしたがう. これで示すべきことが示された. □

注意 9.7 (多次元正規分布). 非負の固有値を持つ r 次の実対称行列 A に対して, $\mathbb{R}^r$ 値の確率変数 $X = (X_1, \dots, X_r)$ が平均 0, 分散共分散行列 A の多次元正規分布にしたがうとは, その特性函数が次の形になることであると定義できる:

$$E\left[e^{i\langle t,X\rangle}\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle t, At\rangle\right) \qquad (t \in \mathbb{R}^r). \tag{$*$}$$

ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^r$ の標準 Euclid 内積である. このスタイルであれば分散共分散行列 A が可逆でなくても多次元正規分布が定義される.

最も極端な場合として $A = 0$ のとき X は $(0, \dots, 0)$ に台を持つデルタ分布にしたがう.

$\sigma_1 > 0, \dots, \sigma_s > 0$, $A = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_s^2, 0, \dots, 0)$ のとき, $X_1, \dots, X_r$ は独立であり, $i = 1, \dots, s$ に対する X_i は平均 0, 分散 σ_i^2 の正規分布にしたがい, $i = s+1, \dots, r$ に対する X_i は 0 に台を持つデルタ分布にしたがう.

一般の場合は直交変換によってそのような場合に帰着する. 特に任意の非負実対称行列 A を分散共分散行列に持つ多次元正規分布が存在することがわかる.

A が可逆ならば, $\mathbb{R}^r$ 上の有界連続函数 $f(x)$ について,

$$E[f(X)] = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi A)}} \int_{\mathbb{R}^r} f(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\langle x, A^{-1}x\rangle\right) dx$$

となる. ここで dx は $\mathbb{R}^r$ 上の Lebesgue 測度である. このとき $(*)$ が成立することは A を直交行列で対角化することによって示される. □

9.4 第二種ベータ分布と t 分布

次の確率密度函数で定義される確率分布をパラメーター $\alpha, \beta > 0$ を持つ第二種ベータ分布 (Beta distribution of the second kind もしくは Beta prime distribution) と呼ぶ:

$$\tilde{f}_{\alpha,\beta}(x)\,dx = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\,dx \qquad (x > 0).$$

$\beta > 1$ ならば平均は $\alpha/(\beta-1)$ になり, $\beta > 2$ ならば分散は $(\alpha(\alpha+\beta-1))/((\beta-2)(\beta-1)^2)$ になる.

第 2 種ベータ分布の確率密度函数に $x = t^2/\gamma$ $(\gamma > 0)$ を代入して, 確率分布を $-\infty < t < \infty$ に拡張すると, 確率密度函数は次の形になる:

$$\tilde{f}_{\alpha,\beta}\left(\frac{t^2}{\gamma}\right)\frac{t}{\gamma}\,dt = \frac{1}{\gamma^\alpha B(\alpha,\beta)} \frac{t^{2\alpha-1}}{(1+t^2/\gamma)^{\alpha+\beta}}\,dt$$

$n > 0$ に対して, $\alpha = 1/2$, $\beta = n/2$, $\gamma = n$ のとき, この確率密度函数で定義される確率分布を自由度 n の t 分布と呼ぶ. すなわち, 自由度 n の t 分布とは次の確率密度函数で定義される確率分布のことである:

$$\tilde{g}_n(t)\,dt = c_n \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} dt.$$

ここで

$$c_n = \frac{1}{n^{1/2}B(1/2, n/2)} = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)}.$$

自由度 n の t 分布の平均と分散をそれぞれ μ_n, σ_n^2 と書くと、

$$\mu_n = 0 \quad (n > 1), \qquad \sigma_n^2 = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2).$$

になる. 自由度無限大の極限で t 分布は標準正規分布に収束する. 自由度 1 の t 分布は **Cauchy 分布**とも呼ばれており, 平均も有限の分散も持たない確率分布の典型例になっている. 自由度 2 の t 分布は平均 0 を持つが, 分散は無限大になる.

定理 9.8 (標準正規分布とカイ 2 乗分布から t 分布が得られること). Z, Y は独立な確率変数であり, Z は標準正規分布にしたがい, Y は自由度 n のカイ 2 乗分布にしたがうと仮定する. このとき

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$$

は自由度 n の t 分布にしたがう.

証明. 次を示せば十分である:

$$E[f(T)] = \text{const.} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} dt.$$

これを示そう. $a_n = 1/(\sqrt{2\pi}\,2^{n/2}\Gamma(n/2))$ とおくと,

$$\begin{aligned}
E[f(T)] = E\left[f\left(\frac{Z}{\sqrt{Y/n}}\right)\right] &= a_n \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f\left(\frac{z}{\sqrt{y/n}}\right) e^{-z^2/2} e^{-y/2} y^{n/2-1}\,dz\right) dy \\
&= a_n \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f\left(\frac{z}{\sqrt{y/n}}\right) e^{-(y+z^2)/2} y^{n/2-1}\,dz\right) dy \\
&= \frac{a_n}{\sqrt{n}} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-(1+t^2/n)y/2} y^{(n+1)/2-1}\,dt\right) dy \\
&= \frac{a_n}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^\infty f(t) \left(\int_0^\infty e^{-(1+t^2/n)y/2} y^{(n+1)/2-1}\,dy\right) dt \\
&= \frac{2^{(n+1)/2}\Gamma((n+1)/2) a_n}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^\infty f(t) \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} dt.
\end{aligned}$$

ここで, 2 つめの等号は標準正規分布とカイ 2 乗分布の定義から得られる. 4 つめの等号では $z = t\sqrt{y/n}$ とおいた ($z^2 = yt^2/n$, $dz = y^{1/2}dt/\sqrt{n}$). 6 つめの等号で次の公式を使った:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y} y^{s-1}\,dy = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{s-1} \frac{dx}{\alpha} = \alpha^{-s}\Gamma(s) \qquad (\alpha, s > 0).$$

証明のためには必要な計算であるが, さらに,

$$\frac{2^{(n+1)/2}\Gamma((n+1)/2)a_n}{\sqrt{n}} = \frac{2^{(n+1)/2}\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi}\,2^{n/2}\Gamma(n/2)} = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)} = c_n.$$

これで確認するべきことがすべて確認された. □

定理 9.9 (正規分布から t 分布が得られること). $X_1, X_2, \dots$ が独立同分布な確率変数列であり, 各々が平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布にしたがうとき,

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k, \qquad U_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k - M_n)^2, \qquad T_n = \frac{M_n - \mu}{U_n/\sqrt{n}} \tag{$*$}$$

とおくと, M_n と U_n は独立になり, M_n は平均 μ, 分散 σ^2/n の正規分布にしたがい, $(n-1)U_n^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布にしたがい, T_n は自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう. ($U_n \geqq 0$ と仮定した.) □

注意 9.10 (T_n の出処). 上の定理の設定のもとで, $E[M_n] = \mu$, $E[U_n^2] = \sigma^2$ となる. μ, σ^2 はそれぞれ母集団平均 (population mean), 母集団分散 (population variance) と呼ばれ, M_n, U_n^2 はそれぞれ標本平均 (sample mean), 不偏分散 (unbiased variance) と呼ばれている. 正規分布の再生性より, M_n は平均 μ, 分散 σ^2/n の正規分布にしたがう. ゆえに

$$T_n = \frac{M_n - \mu}{U_n/\sqrt{n}}$$

に類似の確率変数

$$Z_n = \frac{M_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

は標準正規分布にしたがう. 上で述べたことは, Z_n の分母の母集団標準偏差 σ を経験的に得られた不偏標準偏差 U_n で置き換えると, 標準正規分布ではなく, 自由度 $n-1$ の t 分布にしたがうようになるということである.

母集団分散 σ^2 がわかっている場合には標準正規分布になる Z_n を使えるが, そうでない場合には Z_n を使えない. そこで母集団の分散 σ^2 の代わりに経験的に得られた不偏分散 U_n^2 を代用すると, 確率分布は正規分布よりも裾野が太い t 分布になってしまうのである. □

注意 9.11 (自由度の大きな t 分布が標準正規分布で近似されること). $n \to \infty$ で

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{t^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n/2} \longrightarrow e^{-t^2/2}$$

となるので, 自由度無限大の極限で t 分布の確率密度函数は標準正規分布の確率密度函数に収束する. 自由度が大きな t 分布は標準正規分布で近似される. □

定理 9.9 の証明. 必要ならば X_k を $X_k - \mu$ で置き換えることによって, $\mu = 0$ であると仮定できる. 以下では $\mu = 0$ の場合のみを扱う.

まず, $X_1, X_2, \dots$ は独立同分布な確率変数列であり, 各々が平均 0 と有限の分散 σ^2 を持つと仮定し, 正規分布であると仮定せずにどの程度のことが言えるかを調べよう. $(*)$ のように M_n, U_n を定める. ($U_n \geqq 0$ としておく.)

$Y_n = \sqrt{n}\,M_n = (X_1 + \cdots + X_n)/\sqrt{n}$ とおく. 正規直交座標系 $(X_1, \dots, X_n)$ を Y_n を含む別の正規直交座標系 $(Y_1, \dots, Y_n)$ に座標変換できる[62]. このとき多項式の計算として

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2$$

が成立している[63]ので,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - 2M_nX_k + M_n^2) = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2M_n\sum_{k=1}^{n} X_k + nM_n^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - nM_n^2 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - Y_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2.\end{aligned}$$

さらに, 座標変換の仕方より $E[Y_k^2] = \sigma^2$ となるので,

$$E\left[\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2\right] = (n-1)\sigma^2$$

となることもわかる[64]. これより $E[U_n^2] = \sigma^2$ となることもわかる. 以上の結果は X_k が正規分布でなくても成立している.

以下では, X_k たちが平均 0, 分散 σ^2 の正規分布にしたがうと仮定しよう.

このとき正規分布の確率密度函数の形より, Y_k たちも独立同分布になり, 各々が平均 0, 分散 σ^2 の正規分布にしたがう. ゆえに

$$U_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2, \qquad M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_n$$

は独立になり, 定理 9.1 より,

$$\frac{n-1}{\sigma^2} U_n^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2$$

は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布になる. したがって定理 9.8 より

$$\frac{\dfrac{M_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)U_n^2/\sigma^2}{n-1}}} = \frac{M_n - \mu}{U_n/\sqrt{n}}$$

が自由度 $n-1$ の t 分布にしたがうことがわかる. □

定理 9.12 (正規分布から t 分布が得られること (定理 9.9) の一般化). 確率変数たち $X_{s,k}$ $(s = 1, \dots, r,\ k = 1, \dots, n_s)$ は独立であり, 各 s ごとに $X_{s,k}$ たちは平均 μ_s, 分散 σ_s^2 の正

[62] Y_n に対応する単位ベクトル $(1, 1, \dots, 1)/\sqrt{n}$ を含む正規直交系を作り, その正規直交系に対応する座標系を取ればよい. $(Y_1, \dots, Y_{n-1})$ は Y_n に対応する単位ベクトルの直交補空間上の正規直交座標系になる. Y_k の具体的な取り方の例については第 9.5 節を参照せよ.

[63] 直交変換でノルムの 2 乗が保たれる.

[64] Y_k を使わない直接的計算でこの結果を確認することも容易である.

規分布にしたがっていると仮定する. このとき

$$M_s = \frac{1}{n_s}\sum_{k=1}^{n_s} X_{s,k}, \qquad U_s^2 = \frac{1}{n_s - 1}\sum_{k=1}^{n_s}(X_{s,k} - M_s)^2,$$

$$Z = \frac{\sum_{s=1}^{r}(M_s - \mu_s)}{\sqrt{\sum_{s=1}^{r}\frac{\sigma_s^2}{n_s}}}, \qquad Y = \sum_{s=1}^{r}\frac{n_s - 1}{\sigma_s^2}U_s^2 = \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{\sigma_s^2}\sum_{k=1}^{n_s}(X_{s,k} - M_s)^2,$$

$$n = \sum_{s=1}^{r} n_s, \qquad T = \frac{Z}{\sqrt{Y/(n-r)}}$$

とおくと, T は自由度 $n-r$ の t 分布にしたがう [65].

証明. 定理 9.9 の証明より, M_s と U_s^2 は独立になり, M_s は平均 μ_s, 分散 σ_s^2/n_s の正規分布にしたがい, $(n_s-1)U_s^2/\sigma_s^2$ は自由度 n_s-1 のカイ 2 乗分布にしたがうことがわかる. 特に Z と Y は独立になる. 正規分布の再生性より, $\sum_{s=1}^{n_s}(M_s-\mu_s)$ は平均 0, 分散 $\sum_{s=1}^{r}(\sigma_s^2/n_s)$ の正規分布にしたがうので, Z は標準正規分布にしたがう. カイ 2 乗分布の再生性より, Y は自由度 $n-r$ のカイ 2 乗分布にしたがう. ゆえに, 定理 9.8 より, T は自由度 $n-r$ の t 分布にしたがう. □

上の定理を $s=2$, $\mu_1=\mu$, $\mu_2=-\mu$, $\sigma_1=\sigma_2$ の場合に適用することによって次の系がただちに得られる.

系 9.13. 確率変数 $X_{s,k}$ $(s=1,2,\ k=1,\dots,n_s)$ たちは独立同分布であり, 平均 μ, 分散 σ の正規分布にしたがっているとする. このとき

$$M_s = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_s} X_{s,k}, \qquad Y' = \sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{n_s}(X_{s,k} - M_s)^2,$$

$$T = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{Y'}{n_1+n_2-2}}}$$

とおくと, T は自由度 n_1+n_2-2 の t 分布にしたがう [66]. □

9.5　不偏分散の直交変換による取り扱いについて

$X_1, X_2, \dots$ は独立同分布な確率変数列であり, それぞれの平均は 0 で分散は σ^2 であると仮定する [67]. このときサイズ n の標本 $X_1,\dots,X_n$ の標本平均 $\overline{X}_n$ と不偏分散 U_n^2 が

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad U_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2$$

[65] もしも $\sigma_1^2 = \cdots = \sigma_r^2 = \sigma^2$ ならば T の定義中の分子分母の σ がキャンセルし, Z は母集団分散 σ^2 の情報抜きに計算できる量になることに注意せよ.

[66] この結果は分散が等しい正規分布にしたがう 2 つのサンプルの平均が等しいと言えるどうかの検定に使われる.

[67] 平均が $\mu \neq 0$ の場合には X_k を $X_k - \mu$ で置き換えて考えれば同様である.

と定義される．さらに次が成立していることに注意せよ:

$$\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X}_n^2.$$

確率変数 $Y_1, \dots, Y_n$ を次のように定義する:

$$
\begin{aligned}
Y_n &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k = \sqrt{n}\,\overline{X}_n, \\
Y_k &= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\left(\sum_{j=1}^{k} X_j - kX_{k+1}\right) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).
\end{aligned}
$$

$n \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & & & & & \\ & 1/\sqrt{6} & & & & \\ & & 1/\sqrt{12} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1/\sqrt{n(n+1)} & \\ & & & & & \sqrt{n} \end{bmatrix}$$

と定めると, Y_j たちの定義は

$$Y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i$$

と書ける．さらに行列 A は直交行列であることもわかる [68]．ゆえに $\sum_{i=1}^{n} a_{ki}a_{li} = \delta_{kl}$ が成立するので

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \sum_{i,k,l} a_{ki}a_{li}X_kX_l = \sum_{k,l}\delta_{kl}X_kX_l = \sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

さらに, $E[X_iX_j] = \sigma^2\delta_{ij}$ も使うと,

$$E[Y_kY_l] = \sum_{j,j} a_{ki}a_{lj}E[X_iX_j] = \sigma^2\sum_{i,j} a_{ki}a_{li}\delta_{ij} = \sigma^2\sum_{i=1}^{n} a_{ki}a_{li} = \sigma^2\delta_{kl}.$$

以上の公式を使うと,

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^n - n\overline{X}_n^2 = \sum_{k=1}^{n} Y_k - Y_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} Y_k.$$

ゆえに

$$U_n^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2.$$

[68] ${}^tAA$ が単位行列になることを直接確認できる．まず行列 A の定義式の左側の行列の列ベクトルたちが互いに直交することを確認せよ．

不偏分散が $n-1$ 個の和の $n-1$ の分の 1 の形で書けた. さらに

$$E[U_n^2] = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} E[Y_k^2] = \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2.$$

もしも X_k たちが独立で平均 0, 分散 σ^2 の正規分布にしたがっているならば, Y_k たちも独立で平均 0, 分散 σ^2 の正規分布にしたがうことも容易に確かめられる. この場合には $\overline{X}_n = Y_n/\sqrt{n}$ は平均 0, 分散 σ^2/n の正規分布にしたがい, $(n-1)U_n^2/\sigma^2 = \sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布にしたがい, それらは独立になる.

9.6 第一種および第二種ベータ分布と F 分布

次の確率密度函数で定義される確率分布をパラメーター $\alpha, \beta > 0$ を持つ第一種ベータ分布 (Beta distribution of the first kind もしくは単にベータ分布) と呼ぶ:

$$f_{\alpha,\beta}(x)\,dx = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \qquad (0 < x < 1).$$

平均は $x = \alpha/(\alpha+\beta)$, 分散は $(\alpha\beta)/((\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1))$ になり, $\alpha, \beta > 1$ のとき最頻値は $x = (\alpha-1)/(\alpha+\beta-2)$ になる.

第一種ベータ分布の確率密度函数で x に $x/(1+x)$ $(x > 0)$ を代入すると

$$f_{\alpha,\beta}\left(\frac{x}{1+x}\right)\frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\,dx \qquad (x > 0)$$

となる. これは第二種ベータ分布の確率密度函数である. 整理の途中で $1 - x/(1+x) = 1/(1+x)$ を使った.

さらに, $m, n > 0$ とし, 第二種ベータ分布の確率密度函数の x に mx/n $(x > 0)$ を代入すると, 上と同様にして,

$$f_{\alpha,\beta}\left(\frac{mx/n}{1+mx/n}\right)\frac{(m/n)\,dx}{(1+mx/n)^2} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\frac{(mx/n)^{\alpha}}{(1+mx/n)^{\alpha+\beta}}\frac{dx}{x} \qquad (x > 0)$$

となる. これは, $\alpha = m/2$, $\beta = n/2$ のとき, 次の形になる:

$$g_{m,n}(x)\,dx = \frac{1}{B(m/2,n/2)}\frac{(mx/n)^{m/2}}{(1+mx/n)^{(m+n)/2}}\frac{dx}{x} \qquad (x > 0).$$

この確率密度函数で定義される確率分布をパラメーター m, n の F 分布と呼ぶ. パラメーター m, n の F 分布の平均と分散をそれぞれ $\mu_{m,n}$, $\sigma_{m,n}^2$ と書くと,

$$\mu_{m,n} = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2), \qquad \sigma_{m,n}^2 = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad (n > 4)$$

になる.

X がパラメーター m, n の F 分布にしたがうならば, $(mX/n)/(1+mX/n)$ はパラメーター $m/2, n/2$ の第一種ベータ分布にしたがい, mX/n はパラメーター $m/2, n/2$ の第二種ベータ分布にしたがう.

定理 9.14 (カイ 2 上分布から F 分布が得られること). 独立な確率変数 Y, Z がそれぞれ自由度 m, n のカイ 2 乗分布にしたがうとき,

$$X = \frac{Y/m}{Z/n}$$

はパラメーター m, n の F 分布にしたがう. したがって, Y_k, Z_l が独立同分布な確率変数であり, 各々が標準正規分布にしたがうとき,

$$X = \frac{\left(\sum_{k=1}^m Y_k^2\right)/m}{\left(\sum_{l=1}^n Z_l^2\right)/n}$$

はパラメーター m, n の F 分布にしたがう.

証明. 後半の主張は前半の主張と定理 9.1 から得られる. 前半の主張を示すためには

$$E[f(X)] = \text{const.}\int_0^\infty f(x)\frac{(mx/n)^{m/2}}{(1+mx/n)^{(m+n)/2}}\,\frac{dx}{x}$$

を示せばよい. $a = [2^{(m+n)/2}\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)]^{-1}$ とおくと,

$$\begin{aligned}
E[f(X)] = E\left[f\left(\frac{Y/m}{Z/n}\right)\right] &= a\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f\left(\frac{y/m}{z/n}\right)e^{-(y+z)/2}y^{m/2-1}z^{n/2-1}\,dy\right)dz \\
&= a\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(x)e^{-(1+mx/n)z/2}\left(\frac{m}{n}xz\right)^{m/2-1}z^{n/2-1}\frac{m}{n}z\,dx\right)dz \\
&= a\int_0^\infty f(x)\left(\left(\frac{mx}{n}\right)^{m/2}\int_0^\infty e^{-(1+mx/n)z/2}z^{(m+n)/2-1}\,dz\right)\frac{dx}{x} \\
&= 2^{(m+n)/2}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)a\int_0^\infty f(x)\left(\frac{mx}{n}\right)^{m/2}\left(1+\frac{mx}{n}\right)^{-(m+n)/2}\frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

3 つめの等号で $y/m = (z/n)x$ とおいた ($y = (mx/n)z$, $dy = (m/n)z\,dx$). 5 つめの等号で次の一般的な公式を使った:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z}z^{s-1}\,dy = \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{s-1}\frac{dt}{\alpha} = \alpha^{-s}\Gamma(s) \qquad (\alpha, s > 0).$$

これで示すべきことは示された. さらに

$$2^{(m+n)/2}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)a = \frac{2^{(m+n)/2}\Gamma((m+n)/2)}{2^{(m+n)/2}\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} = \frac{1}{B(m/2, n/2)}.$$

これで確認するべきことがすべて確認された. □

第二種ベータ分布の確率密度函数に $x = t^2/n$, $\alpha = 1/2$, $\beta = n/2$ を代入したものは自由度 n の t 分布の確率密度函数になるのであった. このことから確率変数 T が自由度 n の t 分布にしたがうとき, T^2 はパラメーター $1, n$ の F 分布にしたがい, T^{-2} はパラメーター $n, 1$ の F 分布にしたがうことがわかる. この意味で T 分布は本質的に片方の自由度が 1 の場合の F 分布であることがわかる.

このことは以下のように直接的な計算によっても確かめられる. F 分布の確率密度函数は次のように書き直される:

$$g_{m,n}(x)\,dx = \frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2, n/2)}\frac{x^{m/2-1}}{(1+mx/n)^{(m+n)/2}}\,dx.$$

$m=1$ を代入すると,

$$g_{1,n}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}\,B(1/2,n/2)}\frac{x^{-1/2}}{(1+x/n)^{(n+1)/2}}\,dx.$$

さらに $x=t^2$ を代入して, 分布を $-\infty<t<\infty$ に拡張したものの確率密度函数は

$$g_{1,n}(t^2)t\,dt = \frac{1}{\sqrt{n}\,B(1/2,n/2)}\frac{dt}{(1+t^2/n)^{(n+1)/2}}$$

になる. これは t 分布の確率密度函数 $\tilde{g}_n(t)\,dt$ に一致する.

9.7 ガンマ分布と第一種と第二種のベータ分布の関係

ガンマ函数とベータ函数の関係式

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

を二通りの経路で証明してみよう. ここで

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx, \qquad B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}\,du}{(1+u)^{\alpha+\beta}}.$$

ベータ函数 $B(p,q)$ の前者の表示の被積分函数は本質的に第一種ベータ分布の確率密度函数であり, 後者の表示の被積分函数は本質的に第二種ベータ分布の確率密度函数である.

第一種ベータ分布と関係する表示を先に出す方法 $x=zt$, $y=z(1-t)$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy \\
&\qquad = \int_0^1 dt\int_0^\infty dz\, f(zt,z(1-t))e^{-z}z^{p+q-1}t^{p-1}(1-t)^{q-1}.
\end{aligned}$$

ゆえに, もしも $f(x,y)=f(x/y)$ が成立しているならば

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty f\left(\frac{x}{y}\right)e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy \\
&\qquad = \int_0^1 dt\int_0^\infty dz\, f\left(\frac{t}{1-t}\right)e^{-z}z^{p+q-1}t^{p-1}(1-t)^{q-1} \\
&\qquad\qquad = \Gamma(p+q)\int_0^1 f\left(\frac{t}{1-t}\right)t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt.
\end{aligned}$$

この表示は定数倍を除いて第一種ベータ分布における $f(t/(1-t))$ の期待値に一致する. 特に $f(x/y)=1$ のとき $\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)B(p,q)$ となることがわかる. さらに $t/(1-t)=u$ すなわち $t=u/(1+u)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty f\left(\frac{x}{y}\right)e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy \\
&\qquad = \Gamma(p+q)\int_0^\infty f(u)\left(\frac{u}{1+u}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{q-1}\frac{du}{(1+u)^2} \\
&\qquad\qquad = \Gamma(p+q)\int_0^\infty f(u)\frac{u^{p-1}\,du}{(1+u)^{p+q}}
\end{aligned}$$

この表示は定数倍を除いて第二種ベータ分布における $f(u)$ の期待値に一致する. F 分布は第二種ベータ分布のスケール変換なので, これはスケール変換の違いを除いて, F 分布における期待値に一致しているとみなすこともできる.

第二種ベータ分布と関係する表示を先に出す方法 $x = uy$ によって x から u に積分変数を変換すると,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy \\ = \int_0^\infty du \int_0^\infty dy\, f(uy,y)e^{-(1+u)y}y^{p+q-1}u^{\alpha-1}.$$

さらに $(1+u)y = z$ すなわち $y = z/(1+u)$ によって y から z に積分変数を変換すると,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy \\ = \int_0^\infty du \int_0^\infty dz\, f\left(\frac{uz}{1+u}, \frac{z}{1+u}\right) e^{-z}z^{p+q-1}\frac{u^{p-1}\,du}{(1+u)^{p+q}}.$$

ここで $f(x,y) = f(x/y)$ と仮定すると,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f\left(\frac{x}{y}\right) e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy = \Gamma(p+q)\int_0^\infty f(u)\frac{u^{p-1}\,du}{(1+u)^{p+q}}.$$

上で述べた理由によって, これはスケール変換の違いを除いて, F 分布における f の期待値に一致しているとみなすこともできる.

以上の計算によって, ガンマ分布にしたがう独立な確率変数の比は第二種ベータ分布にしたがうことがわかる. そして正規分布にしたがう独立な確率変数の和はガンマ分布にしたがう. これらのシンプルな事実を合わせると, 正規分布とカイ 2 乗分布, t 分布, F 分布の関係が自然に得られる.

以上で使った積分変数たちのあいだには以下の関係がある:

$$x : y = t : (1-t) = u : 1$$

x, y はガンマ分布の積分変数, t は第一種ベータ分布の積分変数, u は第二種ベータ分布の確率変数である [69].

さらにガンマ函数の積分表示の積分変数の x をそれぞれ x^2 に置き換えた式

$$\Gamma(s) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2s-1}\,dx$$

から出発して, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ もしくは $y = x\tan\theta$ と積分変数を変換する経路で計算することによって三角函数を用いた積分表示との関係も明瞭になる.

[69] 筆者は以上の事実に気付いてから, ベータ函数の二種類の表示を平等に扱いたくなった (2016 年 7 月 1 日).

極座標変換の場合 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって積分変数を極座標変換すると,

$$
\begin{aligned}
&4\int_0^\infty\int_0^\infty g(x,y)e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\,dx\,dy \\
&\qquad = 4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^\infty dr\,g(r\cos\theta, r\sin\theta)\,e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}
\end{aligned}
$$

ゆえに $g(x,y) = g(y/x)$ のとき

$$
\begin{aligned}
&4\int_0^\infty\int_0^\infty g\left(\frac{y}{x}\right)e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\,dx\,dy \\
&\qquad = \Gamma(p+q)\cdot 2\int_0^{\pi/2} g(\tan\theta)\,(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta.
\end{aligned}
$$

特に $g(y/x) = 1$ のときより

$$
B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta
$$

となることがわかる.

正接を使う座標変換の場合 $y = x\tan\theta$ によって y から θ に積分変数を変換すると,

$$
\begin{aligned}
&4\int_0^\infty\int_0^\infty g(x,y)e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\,dx\,dy \\
&\qquad = 4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^\infty dx\,g(x, x\tan\theta)\,e^{-(1+\tan^2\theta)x^2}x^{2(p+q)-1}(\tan\theta)^{2q-1}(1+\tan^2\theta).
\end{aligned}
$$

さらに $x = r/\sqrt{1+\tan^2\theta}$ で x から r に積分変数を変換すると,

$$
\begin{aligned}
&4\int_0^\infty\int_0^\infty g(x,y)e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\,dx\,dy \\
&= 4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^\infty dr\,g\left(\frac{r}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}, \frac{r\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right)\,e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\frac{(\tan\theta)^{2q-1}}{(1+\tan^2\theta)^{p+q-1}}
\end{aligned}
$$

ゆえに $g(x,y) = g(y/x)$ のとき

$$
\begin{aligned}
&4\int_0^\infty\int_0^\infty g\left(\frac{y}{x}\right)e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\,dx\,dy \\
&\qquad = \Gamma(p+q)\cdot 2\int_0^{\pi/2} g(\tan\theta)\,\frac{(\tan\theta)^{2q-1}}{(1+\tan^2\theta)^{p+q-1}}\,d\theta.
\end{aligned}
$$

以上の結果は上で求めた極座標変換の場合の公式と同じものである. なぜならば

$$
\frac{(\tan\theta)^{2q-1}}{(1+\tan^2\theta)^{p+q-1}} = (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}.
$$

この公式は左辺に $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$ を代入しても示せるし, 右辺に

$$
\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}, \qquad \sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}
$$

を代入しても示せる．後者の公式は上の方で説明した $t = u/(1+u)$ に対応している．積分変数たちのあいだには以下の関係がある:

$$x : y = \cos\theta : \sin\theta = 1 : \tan\theta.$$

この関係は, x, y の立場を交換すると [70], ちょうど上で説明した $x : y = t : (1-t) = u : 1$ に対応している $(t = \sin^2\theta,\ 1-t = \cos^2\theta,\ u = \tan^2\theta)$.

9.8 $n-1$ 次元球面上の一様分布と Maxwell-Boltzmann 則 (1)

X_i 達は独立な標準正規分布であるとし, $R_n = \sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}$, $Z_i^{(n)} = X_i/R_n$ とおく．このとき $(Z_1^{(n)}, \dots, Z_n^{(n)})$ は $n-1$ 次元単位球面上の一様分布になる [71]. 確率変数 $Z_i^{(n)}$ の確率密度函数は

$$g_n(z)\,dz = c_n^{-1}(1-z^2)^{(n-3)/2}\,dz \qquad (-1 < z < 1),$$
$$c_n = \int_{-1}^1 (1-z^2)^{(n-3)/2}\,dz = B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) = 2^{n-2}B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$$

になる．以下, これを示そう．

$n-2$ 次元単位球面 $S^{n-2} = \{\,(x_2, \dots, x_n) \mid x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\,\}$ の面積要素を $d\omega'$ と書き, $r' = \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ と置き, $x_2, \dots, x_n$ から r' と $n-2$ 次元単位球面上の座標の組に変数変換すると, 半径 r' の $n-2$ 次元球面の面積は r'^{n-2} に比例するので,

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = r'^{n-2} dx_1 \wedge dr' \wedge d\omega'.$$

さらに, r' から $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ に変数変換すると, $r' = \sqrt{r^2 - x_1^2}$, $\partial r'/\partial r = r/r'$ なので,

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = r(r^2 - x_1^2)^{(n-3)/2}\,dx_1 \wedge dr \wedge d\omega'.$$

最後に x_1 から $z = x_1/r$ に変数変換すると,

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = r^{n-1}(1-z^2)^{(n-3)/2}\,dz \wedge dr \wedge d\omega'.$$

したがって, $\mathbb{R}^n$ 上の球対称な確率密度函数 $\rho(r)$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(z)\rho(r)\,dx_1 \cdots dx_n = \int_{-1}^1 g(z)(1-z^2)^{(n-3)/2}\,dz \int_0^\infty r^{n-1}\rho(r)\,dr \int_{S^{n-2}} d\omega'.$$

後ろの 2 つの積分の積を c_n^{-1} と書くと,

$$c_n = \int_{-1}^1 (1-z^2)^{(n-3)/2}\,dz$$

c_n を 2 通りの方法で計算しよう．1 つ目は $z = t^{1/2}$, $dz = t^{-1/2}\,dt/2$ と変数変換する方法である:

$$c_n = 2\int_0^1 (1-z^2)^{(n-3)/2}\,dz = \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{(n-3)/2}\,dt = B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right).$$

[70] 上の方でも $f(x,y) = f(y/x)$ と仮定しておくべきだったかもしれない．

[71] この方法を使えば標準正規正規分布する乱数から球面上一様分布する乱数が得られる．

2 つ目は $(1-z^2) = (1+z)(1-z)$ と因数分解し, $z = 2t-1$, $dz = 2\,dt$ と変数変換する方法である:

$$c_n = \int_0^1 2^{(n-3)/2} t^{(n-3)/2} 2^{(n-3)/2} (1-t)^{(n-3)/2} 2\,dt = 2^{n-2} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right).$$

これで示すべきことがすべて示された.

副産物として, ガンマ函数の duplication formula も得られていることを注意しておこう. $(n-1)/2$ を任意の正の実数 s に置き換えても c_n の二通りの表示は成立している:

$$\int_{-1}^1 (1-z^2)^{s-1}\,dz = B(1/2, s) = 2^{2s-1} B(s, s).$$

ベータ函数にガンマ函数を代入すると

$$\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)} = \frac{2^{2s-1}\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)}.$$

すなわち, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ より,

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s)\Gamma(s+1/2).$$

この公式は (Legendre's) duplication formula と呼ばれている [72].

$Z_i^{(n)}$ の確率密度函数の例 [73]:

- $g_2(z)\,dz = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ $\quad (-1 < z < 1).\quad$ 平均 0, 分散 1/2.

  $z = \sin\theta$ を代入すると, $\dfrac{1}{\pi}\,d\theta$ $(-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2)$ と一様分布になる (当たり前). ゆえに累積分布函数は $1/2 + \theta/\pi = 1/2 + (\arcsin z)/\pi$ $(-1 \leqq z \leqq 1)$ になる. 逆正弦函数が出て来るのでこの分布は**逆正弦分布**と呼ばれる [74].

- $g_3(z)\,dz = \dfrac{1}{2}\,dz$ $\quad (-1 \leqq z \leqq 1).\quad$ 平均 0, 分散 1/3.

  2 次元球面上の一様分布の原点を通る直線上への射影は一様分布になる.

- $g_4(z)\,dz = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-z^2}\,dz$ $\quad (-1 \leqq z \leqq 1).\quad$ 平均 0, 分散 1/4.

---

[72] Legendre's duplication formula は任意の正の整数 n に対する次の Gauss's multiplication theorem に一般化される:

$$\Gamma(ns) = \frac{n^{ns-1/2}}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \Gamma(s)\Gamma(s+1/n)\Gamma(s+2/n)\cdots\Gamma(s+(n-1)/n).$$

たとえば $\Gamma(3s) = 3^{3s-1/2}\Gamma(s)\Gamma(s+1/3)\Gamma(s+2/3)/(2\pi)$.

[73] これらは本質的に第一種ベータ分布の特別な場合である.

[74] ギャンブルをやり続けるとき, トータルで勝ち越している状態の時間の長さの総和から負け越している状態の時間の長さの総和を引いた結果の確率分布は適当に規格化すると逆正弦分布に近付くことが知られている. これは**逆正弦法則**と呼ばれている. 逆正弦分布の確率密度函数は両端に近付くほど大きくなり, 真ん中の 0 付近は小さくなる. ゆえに, 逆正弦法則は勝ち越している時間と負け越している時間の差の絶対値は 0 付近に留まらずに大きくなる傾向が強いということを意味している. ギャンブル好きならばこの事実を経験的によく知っているはずである. 単なる偶然で, 勝ち続けたり, 負け続けたりすることの方が多い.

この分布は**半円分布**と呼ばれる[75].

$z = -\cos\theta$ を代入すると, $\sin^2$ 型分布 $\dfrac{2}{\pi}\sin^2\theta\,d\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ になる[76].

$n \geqq 4$ のとき $g_n(z)$ はグラフが釣鐘型の函数になる. 平均はどれも 0 で分散は以下で示すように $1/n$ になる.

$Z_i^{(n)}$ の平均は 0 である. さらにベータ函数とガンマ函数の関係およびガンマ函数の函数等式より $c_n/c_{n+2} = (n-1)/n = 1 - 1/n$ となることがわかる. そのことを使うと, $Z_i^{(n)}$ の分散が $1/n$ になることを示せる:

$$c_n^{-1}\int_{-1}^{1} z^2(1-z^2)^{(n-3)/2}\,dz = c_n^{-1}(c_n - c_{n+2}) = 1 - \frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

ここで z^2 に $1-(1-z^2)$ を代入する計算を行った.

$Y_i^{(n)} = \sqrt{n}\,Z_i^{(n)}$ は平均 0, 分散 1 の確率変数になり, その確率密度函数は

$$g_n\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\frac{dy}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\,c_n}\left(1 - \frac{y^2}{n}\right)^{(n-3)/2} dy$$

になる. $n \to \infty$ のとき, $\nu = (n-1)/2$ とおくと,

$$\left(1-\frac{y^2}{n}\right)^{(n-3)/2} = \left(1-\frac{y^2}{n}\right)^{-3/2}\left(1-\frac{y^2/2}{n/2}\right)^{n/2} \longrightarrow e^{-y^2/2}$$

$$\sqrt{n}\,c_n = \sqrt{2\nu+1}\;2^{2\nu-1}B(\nu,\nu) \sim \sqrt{2\nu}\,2^{2\nu-1}\frac{2}{\nu}\frac{\sqrt{\pi\nu}}{2^{2\nu}} = \sqrt{2\pi}$$

---

[75] 半円分布は行列模型における固有値の分布密度に関する **Wigner の半円則**に現われる. N 次実対称行列に値を持つ確率変数 M の確率密度函数は $\prod_i e^{-M_{ii}^2/2}dM_{ii}\prod_{i<j}e^{-M_{ij}^2/2}dM_{ij}$ に比例していると仮定し, ランダムな実対称行列 M の固有値の確率分布を考える. そのとき, スケール変換によって分散が 1/4 になるように規格化すると, その確率分布は $N \to \infty$ で分散 1/4 の半円分布に収束するというのが Wigner の半円則である.

半円分布は量子中心極限定理における収束先として現われる典型的な確率分布である. たとえば, 尾畑伸明, 量子確率論とその応用, 無限次元解析特論 (名城大学, 2013.10) に解説がある.

[76] **佐藤・Tate 予想**にこの型の分布が登場する. 佐藤・Tate 予想とは「有理数体上定義された虚数乗法を持たない楕円曲線の素数位数 p の有限体上での有理点の個数から $p+1$ を引いて $2\sqrt{p}$ で割って得られる数値の分布が $\sin^2$ 型分布になる」という内容の 1960 年代に独立に発見された予想である. 現在では完全に解決されているらしい. R = T の最近の発展についての勉強会 (2008) の報告集にまとまった解説がある.

佐藤幹夫氏の側がどのように「佐藤 $\sin^2$ 予想」を発見したかについては, 難波莞爾, Dedekind η 函数と佐藤 sin2-予想, 第 16 回数学史シンポジウム, 津田塾大学 (2005) に詳しい. 当時まだ大学院生だった難波莞爾さんがコンピューターで遊んでいることを佐藤先生らにビアガーデンで話したときについて「少し意味のある計算をやってみませんか、ということになった。それで、楕円母数形式、志村・谷山…などの概念や文字列と遭遇することになったのである」と書いてある. その「少し意味のある計算」の積み重ねによって「佐藤 $\sin^2$ 予想」が発見された.

$SU(2)$ 上の一様分布 (Haar 測度) から誘導される $SU(2)$ の共役類全体の空間上の分布は $\sin^2$ 型分布になる. その理由は以下の通り. $A \in SU(2)$ の共役類は $-1 \leqq \mathrm{tr}(A)/2 \leqq 1$ で一意に特徴付けられる. (一般に $GL_r(\mathbb{C})$ のコンパクト Lie 部分群の元の共役類はその特性多項式 (すなわち固有値たち) で一意に特徴づけられる.) $A \in SU(2)$ に $\mathrm{tr}(A)/2$ を対応させる写像は, $SU = S^3 \subset \mathbb{R}^4$ という同一視のもとで, S^3 から $\mathbb{R}^4$ の 1 次元部分空間への射影に一致している. このことから $SU(2)$ 上の一様分布がその共役類全体の空間上に誘導する分布は確率密度函数は $\sin^2$ 型分布になることがわかる.

佐藤・Tate 予想は「有理数体上の虚数乗法を持たない楕円曲線から各素数 p ごとに得られる $SU(2)$ の共役類達が 3 次元球面 $S^3 = SU(2)$ 上の一様分布から誘導される分布にしたがっている」という話であるとみなせる.

となる[77]. 途中の計算で Wallis の公式より

$$B(\nu,\nu)=\frac{\Gamma(\nu)^2}{\Gamma(2\nu)}=\frac{2\nu}{\nu^2}\frac{\Gamma(\nu+1)^2}{\Gamma(2\nu+1)}=\frac{2}{\nu}\binom{2\nu}{\nu}^{-1}\sim\frac{2}{\nu}\frac{\sqrt{\pi\nu}}{2^{2\nu}}$$

となることを使った[78]. したがって, $Y_i^{(n)}$ は $n\to\infty$ の極限で標準正規分布にしたがう確率変数に収束する:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}g_n\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-y^2/n)^{(n-3)/2}}{\sqrt{n}\,2^{n-2}B(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2})}=\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

以上をまとめると, 実数 y の有界連続函数 $g(y)$ について,

$$C_n^{-1}\int_{\sqrt{n}\,S^{n-1}}g(y_i)\,d\omega_n\longrightarrow\int_{\mathbb{R}}g(y)\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy\qquad(n\to\infty).$$

ここで, $\sqrt{n}\,S^{n-1}=\{\,(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n\mid y_1^2+\cdots+y_n^2=n\,\}$ は半径 $\sqrt{n}$ の $n-1$ 次元球面であり, C_n はその球面の表面積であり, $d\omega_n$ はその球面上の面積要素である. この結果は物理的には **Maxwell-Boltzmann 則**としてよく知られている.

9.9 $n-1$ 次元球面上の一様分布と Maxwell-Boltzmann 則 (2)

前節では半径 $\sqrt{n}$ の $n-1$ 次元球面上の一様分布の x_i 軸への射影の極限が標準正規分布になることを証明した.

同様の方法で, 半径 $\sqrt{n}$ の $n-1$ 次元球面上の一様分布の m 次元部分空間への射影が m 次元の標準正規分布に収束することも示せる. 以下でその筋道を簡単に説明しておく.

前節の記号をそのまま引き継ぐ.

$n-m-1$ 次元単位球面 $S^{n-m-1}=\{\,(x_{m+1},\dots,x_n)\mid x_{m+1}^2+\cdots+x_n^2=1\,\}$ の面積要素を $d\omega'$ と書き, $r'=\sqrt{x_{m+1}^2+\cdots+x_n^2}$ と置き, $x_{m+1},\dots,x_n$ から r' と $n-m-1$ 次元単位球面上の座標の組に変数変換すると

$$dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=r'^{n-m-1}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m\wedge dr'\wedge d\omega'.$$

さらに, r' から $r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ に変数変換すると, $r'=\sqrt{r^2-x_1^2-\cdots-x_m^2}$ かつ $\partial r'/\partial r=r/r'^{-1}$ なので,

$$dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=r(r^2-x_1^2)^{(n-m-2)/2}\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m\wedge dr\wedge d\omega'.$$

最後に x_i $(i=1,\dots,m)$ から $z_i=x_1/r$ $(i=1,\dots,m)$ に変数変換すると,

$$dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=r^{n-1}(1-z_1^2-\cdots-z_m^2)^{(n-m-2)/2}\,dz\wedge dr\wedge d\omega'.$$

したがって, 球対称な確率密度函数 $\rho(r)$ に対して,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}g(z_1,\dots,z_m)\rho(r)\,dx_1\cdots dx_n\\&\qquad=c_m^{(n)^{-1}}\int_{z_1^2+\cdots+z_m^2<1}g(z_1,\dots,z_m)(1-z_1^2-\cdots-z_m^2)^{(n-m-2)/2}\,dz_1\cdots dz_m.\end{aligned}\qquad(*)$$

[77] $\sqrt{n}\,c_n=\int_{-1}^{1}(1-y^2/n)^{(n-3)/2}\,dy$ なので, 前者の $\lim_{n\to\infty}(1-y^2/n)^{(n-3)/2}=e^{-y^2/2}$ から後者の $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,c_n=\sqrt{2\pi}$ を導くこともできる. 実際, そうした方が簡単だろう.

[78] 以上の計算を逆にたどることによって, 逆に Wallis の公式を証明することもできる.

ここで

$$c_m^{(n)-1} = \int_0^\infty r^{n-1}\rho(r)\,dr \int_{S^{n-m-1}} d\omega'$$

である. もっとも極端な場合として $m=0$ の場合を考えると $c_0^{(n)}=1$ となる. このことより, $\rho(r)=e^{-r^2/2}/(2\pi)^{n/2}$ とすることによって, $n-1$ 次元単位球面の面積は

$$\int_{S^{n-1}} d\omega = (2\pi)^{n/2}\left(\int_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2/2}\,dr\right)^{-1} = \frac{2^{n/2}\pi^{n/2}}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$$

と計算される ($d\omega$ は $n-1$ 次元単位球面 S^{n-1} の面積要素). 次の公式を使った:

$$\int_0^\infty r^{s-1}e^{-r^2/2}\,dr = \int_0^\infty e^{-t}(2t)^{(s-2)/2}\,dt = 2^{s/2-1}\Gamma(s/2).$$

積分変数を $r^2/2=t$, $r\,dr=dt$, $r^{s-1}\,dr = r^{s-2}\,r\,dr$ と変換すればこの公式が得られる. 以上より, $\int_0^\infty r^{n-1}\rho(r)\,dr$ は常に $n-1$ 次元単位球面の面積の逆数になることもわかる. したがって,

$$c_m^{(n)} = \frac{\int_{S^{n-1}} d\omega}{\int_{S^{n-m-1}} d\omega'} = \frac{(n-1\text{ 次元単位球面の面積})}{(n-m-1\text{ 次元単位球面の面積})}.$$

これが定数 $c_m^{(n)}$ の幾何学的意味である.

定数 $c_m^{(n)}$ は以下のように計算される [79]:

$$\begin{aligned}
c_m^{(n)} &= \int_{z_1^2+\cdots+z_m^2<1} (1-z_1^2-\cdots-z_m^2)^{(n-m-2)/2}\,dz_1\cdots dz_m.\\
&= \int_{t_i>0,\ \sum_{i=1}^m t_i<1} t_1^{-1/2}\cdots t_m^{-1/2}(1-t_1-\cdots-t_m)^{(n-m-2)/2}\,dt_1\cdots dt_m\\
&= \frac{\Gamma(1/2)^m\Gamma((n-m)/2)}{\Gamma(n/2)}.
\end{aligned}$$

2 つ目の等号で $z_i=\sqrt{t_i}$ と変数変換し, 最後の等号で次の公式を使った: $p_i>0$ に対して,

$$\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{m+1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{m+1})} = \int_{t_i>0,\ \sum_{i=1}^m t_i<1} t_1^{p_1-1}\cdots t_m^{p_m-1}(1-t_1-\cdots-t_m)^{p_{m+1}-1}\,dt_1\cdots dt_m.$$

証明の方法はガンマ函数とベータ函数の関係とまったく同様である. もしくは右辺を $B(p_1,\dots,p_{m+1})$ と書くと,

$$B(p_1,\dots,p_{m+1}) = B(p_1,\dots,p_{m-1},p_m+p_{m+1})B(p_m,p_{m+1}) \tag{B}$$

が成立することから, 帰納法で証明することもできる. 実際, $t_m=(1-t_1-\cdots-t_{m-1})u$ によって t_m から u に変数変換すると

$$\begin{aligned}
&B(p_1,\dots,p_m,p_{m+1})\\
&\quad= \int_{t_i>0,\ \sum_{i=1}^{m-1} t_i<1} dt_1\cdots dt_{m-1}\int_{-1}^1 du\\
&\qquad t_1^{p_1-1}\cdots t_{m-1}^{p_{m-1}-1}(1-t_1-\cdots-t_{m-1})^{p_m+p_{m+1}-1}u^{p_m-1}(1-u)^{p_{m+1}-1}.
\end{aligned}$$

[79] $n=m+2$ のとき $c_m^{(m+2)}=\pi^{m/2}/\Gamma(m/2+1)$ は m 次元単位球体の体積に等しい.

これより上の公式 (B) が成立することがわかる．

公式 $(*)$ より, ベクトル値確率変数 $(Z_1^{(n)}, \dots, Z_m^{(n)})$ の確率密度函数は

$$g_n(z_1, \dots, z_m)\, dz_1 \cdots dz_m = {c_m^{(n)}}^{-1} (1 - z_1^2 - \cdots - z_m^2)^{(n-m-2)/2}\, dz_1 \cdots dz_m$$

である．

これより, $\sigma > 0$ に対して, $(Y_1^{(n)}, \dots, Y_m^{(n)}) = \sqrt{n}\,\sigma\,(Z_1^{(n)}, \dots, Z_m^{(n)})$ の確率密度函数は

$$\left(1 - \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{i=1}^m y_i^2\right)^{(n-m-2)/2} dy_1 \cdots dy_m$$

の定数倍になる[80]. そして,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{i=1}^m y_i^2\right)^{\frac{n-m-2}{2}} = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m y_i^2\right)$$

なので $(Y_1^{(n)}, \dots, Y_m^{(n)})$ は $n \to \infty$ で m 次元の正規分布にしたがうベクトル値確率変数に収束する[81]. すなわち,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{C_n(\sqrt{n}\,\sigma)} \int_{\sqrt{n}\,\sigma\, S^{n-1}} g(y_1, \dots, y_m)\, d\omega_n \\ &\longrightarrow \frac{1}{(2\sigma^2)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} g(y_1, \dots, y_m) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m y_i^2\right) dy_1 \cdots dy_m. \end{aligned}$$

ここで, $\sqrt{n}\,\sigma\, S^{n-1} = \{\, (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_1^2 + \cdots + y_n^2 = n\sigma^2 \,\}$ は半径 $\sqrt{n}\,\sigma$ の $n-1$ 次元球面であり, $C_n(\sqrt{n}\,\sigma)$ はその球面の表面積であり, $d\omega_n$ はその球面上の面積要素である．これは物理的には **Maxwell-Boltzmann** 則としてよく知られており, 分散 σ^2 は絶対温度の Boltzmann 定数倍 kT だと解釈される．

9.10　二項分布と第一種ベータ分布

$0 < p < 1$ とする．n は非負の整数であるとする．離散型確率変数 $B_{p,n}$ がパラメーター n と p の二項分布にしたがうとは

$$P(B_{p,n} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

が成立することであると定める．平均と分散はそれぞれ np と $np(1-p)$ になり, 特性函数は $E[e^{itB_{p,n}}] = (pe^{it} + q)^n$ となる．二項分布はパラメーター n に関して再生性を持つ．ゆえに中心極限定理より, p を一定のまま n を大きくすると, $(B_{p,n} - np)/\sqrt{np(1-p)}$ は標準正規分布にしたがう確率変数で近似される．

二項分布と第一種ベータ分布の関係は以下の通り．

$\Gamma(s+1) = s!$, $\binom{s}{t} = s!/(t!(s-t)!)$ と書くことにすると

$$\frac{1}{B(\alpha, \beta)} = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} = (\alpha+\beta-1)\binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}$$

[80] $Y_i^{(n)}$ たちは独立ではないことに注意せよ．

[81] $Y_i^{(n)}$ 達は有限な n で独立ではないが, $n \to \infty$ の極限で独立な標準正規分布に収束する．

なので, パラメーター $\alpha, \beta > 0$ を持つ第一種ベータ分布の確率密度函数は

$$f_{\alpha,\beta}(p)\,dp = (\alpha+\beta-1)\binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}\,dp \qquad (0<p<1)$$

と表される. 平均は $\alpha/(\alpha+\beta)$, 分散は $(\alpha\beta)/((\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1))$ になり, $\alpha, \beta > 1$ のとき最頻値は $p = (\alpha-1)/(\alpha+\beta-2)$ になるのであった.

ゆえに $\alpha+\beta-2 = n$, $\alpha-1 = k$ のとき, 第一種ベータ分布の確率密度函数は

$$f_{k+1,n-k+1}(p)\,dp = (n+1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\,dp \qquad (0<p<1)$$

となり, 平均値は $p = (k+1)/(n+2)$, 分散は $((k+1)(n-k+1))/((n+2)^2(n+2))$, 最頻値は $p = k/n$ になる [82].

以上の結果から, A が B と n 回対戦して k 回勝ったとき, A が B に勝つ確率はパラメーターが $\alpha = k+1$, $\beta = n-k+1$ の第一種ベータ分布にしたがっているとみなすと便利なことがわかる [83].

9.11 Poisson 分布とガンマ分布

二項分布から Poisson 分布を導こう.

$0 < \mu < n \in \mathbb{Z}$ であるとし, N_n は独立試行回数 n, 確率 $p = \mu/n$ の二項分布に従う確率変数であるとする:

$$\begin{aligned} P(N_n = k) &= \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-k}\binom{n}{k} \\ &= \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n \frac{\mu^k}{k!}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

このとき, $n\to\infty$ で

$$P(N_n = k) = \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n \frac{\mu^k}{k!}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \longrightarrow e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}.$$

離散的確率変数 N が $k = 0, 1, 2, \dots$ について

$$P(N = k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$$

を満たすとき, N はパラメーター μ の Poisson 分布に従うと言う.

二項分布に従う確率変数 N_n は $n\to\infty$ で Poisson 分布に弱収束する. これは次のように解釈される. 単位時間あたり平均して μ 回の事象が発生するようにしたい. そのためには N 分の単位時間あたり独立に確率 μ/N で事象が発生するようにすればよい. このとき単位時間あたりに発生する事象の回数は確率変数 N_n で表わされる. μ と比較して N が十分に大きなとき, N_n の従う確率分布は Poisson 分布でよく近似される.

Poisson 分布は単位時間当たりに事象が起こる回数を意味する確率分布としてよく使われる.

---

[82] $k \sim np$ ($n\to\infty$, p は一定) ならば, $n\to\infty$ で平均値と最頻値は p に収束し, 分散は 0 に収束する.
[83] 共役事前分布の話.

パラメーター μ の Poisson 分布の平均と分散はともに μ である:

$$\begin{aligned}
(N \text{ の平均}) &= E[N] = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = \mu e^{-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} = \mu, \\
E[N(N-1)] &= \mu^2 e^{-\mu} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!} = \mu^2, \\
E[N^2] &= E[N(N-1)] + E[N] = \mu^2 + \mu, \\
(N \text{ の分散}) &= E[(N-\mu)^2] = E[N^2] - \mu^2 = \mu.
\end{aligned}$$

Poisson 分布の特性函数は次のようになる:

$$E[e^{itN}] = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\mu^k}{k!} = \exp(\mu(e^{it}-1)) = \bigl(\exp(e^{it}-1)\bigr)^{\mu}.$$

これより, Poisson 分布はパラメーター μ について再生性を持つことがわかる. ゆえに, 中心極限定理より, μ を大きくすると,

$$X = \frac{N-\mu}{\sqrt{\mu}}$$

は標準正規分布に近似的に従い,

$$Y = \frac{(N-\mu)^2}{\mu}$$

は自由度 1 のカイ二乗分布に近似的に従う [84].

次の確率密度函数で定義される確率分布を shape $\alpha = k+1 > 0$, scale $\tau = 1$ のガンマ分布と呼ぶのであった:

$$f_{k+1,1}(\mu)\,d\mu = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}\,d\mu \qquad (\mu > 0).$$

平均は $\mu = k+1$, 分散は $k+1$ になり, 最頻値は $\mu = k$ になる.

このことから, 単位時間の観測で事象が k 回起こったならば, 単位時間あたりに事象が起こる回数の平均値 μ の推定値が shape $\alpha = k+1$, scale $\tau = 1$ のガンマ分布にしたがっているとみなすことは場合によっては十分に合理的でありそうなことがわかる [85].

単位時間あたりの事象生成回数の平均値が μ のとき, 時間幅 $t > 0$ の場合に Poisson 分布を拡張するとき, 時間幅 T のあいだに観測される事象の回数 N_t はパラメーター μt の Poisson 分布に従うと考えられる:

$$P(N_t = k) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

形状 $\alpha = k+1 > 0$, スケール $\tau = 1/t$ のガンマ分布の確率密度函数は次のようになる:

$$f_{k+1,1/t}(\mu)\,d\mu = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}\, t\, d\mu.$$

この分布の平均は $\mu = (k+1)/t$ になり, 分散は $(k+1)/t^2$ になり, 最頻値は $\mu = k/t$ になる. ゆえに $k \approx \mu_0 t$ ($\mu_0 > 0$ は一定) のとき, $t \to \infty$ で平均と最頻値はともに μ_0 に収束し, 分散は 0 に収束する.

---

[84] カイ二乗検定の文脈では, N を観測値 (observed) と解釈し, μ を期待値 (expectated) と解釈し, それらをそれぞれ O, E と表わし, $Y = (O-E)^2/E$ のように書くことがある.

[85] 共役事前分布の話.

9.12 基本的な数学用語の大雑把な説明

確率変数にその期待値 (平均) を対応させる汎函数 $E[\ ]$ は以下を満たしている [86]:

- $E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$ (線形性).
- $f \geqq 0$ ならば $E[f(X)] \geqq 0$ (単調性).
- $E[1] = 1$ (規格化条件).

たったこれだけの性質だけからかなりのことが言える.

確率変数 X の平均値 (期待値) が存在するとは $E\big[|X|\big] < \infty$ となることである. そのとき $\mu_X = E[X]$ を X の平均値もしくは期待値と呼ぶ. X の平均値 μ_X が存在するとき, $(X-\mu_X)^2$ の平均値を X の分散と呼び, σ_X^2 と表わし, 分散の平方根 σ_X を標準偏差と呼ぶ. 分散と標準偏差は無限大になることがありえる.

もしも $E\big[|X|^r\big] < \infty$ ならば X の r 次のモーメントが存在すると言い, $E[X^r]$ を X の r 次のモーメントと言う. X の 1 次のモーメントは X の平均 $\mu_X = E[X]$ であり, 2 次のモーメントについて $E[X^2] = \sigma_X^2 + \mu_X^2$ なので $\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2$ となる.

確率変数 X に対して $\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$ を X の特性函数と呼ぶ. 特性函数は t について一様連続函数になる. 特性函数が等しい確率変数は確率分布を持つ [87]. 確率変数 X, Y が同じ確率分布を持つとき, $X \sim Y$ と書くことにする.

X の r 次以下のモーメントがすべて存在するとき, 特性函数 $\varphi_X(t)$ は $t=0$ で r 回微分可能になり, $\varphi_X^{(k)}(0) = E[X^k]$ $(k = 0, 1, \dots, r)$ となる.

X と Y は平均値と有限の分散を持つ確率変数であるとする. このとき Cauchy-Schwarz の不等式より, $E[|(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \leqq \sigma_X \sigma_Y$ となるので, $\sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$ が well-defined になり, $\big|E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]\big| \leqq \sigma_X\sigma_Y$ となる. σ_{XY} を X と Y の共分散と呼ぶ. $\rho_{XY} = \sigma_{XY}/(\sigma_X\sigma_Y)$ を X と Y の相関係数と呼ぶ. 相関係数の絶対値は 1 以下になる.

共分散は線形代数での「ベクトルの内積」に対応し, 相関係数は「ベクトルのあいだの角度を θ と書くときの $\cos\theta$」に対応している. 確率変数 X を平均が 0 になるように値を平行移動した $X - \mu_X$ はベクトルの類似物であり, $E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$ が内積の類似物であることを理解できれば, 線形代数学で学んだことがすべて役に立つ.

確率変数たち X_i が独立であるとは, $i_1, \dots, i_r$ が互いに異なるとき,

$$E[f_1(X_{i_1}) \cdots f_r(X_{i_r})] = E[f_1(X_{i_1})] \cdots E[f_r(X_{i_r})]$$

が成立することである (f_k たちは有界な連続函数). X と Y が独立ならば X と Y の共分散と相関係数は 0 になるが, 逆は成立しない.

[86] 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の可測函数 X を確率変数と呼ぶ. 可積分函数 X に $\int_\Omega X(x)\,\mu(dx)$ を対応させる汎函数を期待値汎函数と呼び $E[\ ]$ と表わす.

[87] 確率変数とは確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の実数値可測函数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ のことである. $\mathbb{R}$ の Borel 部分集合 A に対して $\mu_X(A) = \mu(X^{-1}(A))$ と定めることによって, $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ_X が定まる. μ_X を確率変数 X の確率分布と呼ぶ. もしも μ_X が Lebesgue 測度の函数 $f(x)$ 倍と表示されるとき, $f(x)$ を確率変数 X の確率密度函数と呼ぶ. $\mathbb{R}$ 上の可測函数 $g(x)$ に対して X と g の合成を $g(X)$ と書く. $g(X)$ も確率変数になる. $g(x)$ が有界連続函数のとき, $g(X)$ の期待値は $E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mu_X(dx)$ と表わされる. X の確率密度函数 $f(x)$ が存在するならば $E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\,dx$.

D_α はパラメーター $\alpha > 0$ を持つ確率変数であるとし, $X \sim D_\alpha$, $Y \sim D_\beta$ であり, X, Y は独立であるとする. このとき, もしも $X + Y \sim D_{\alpha+\beta}$ が成立するとき, D_α の確率分布は再生性を持つと言う.

確率変数 $X_1, \dots, X_r$ が独立であるとき, $\varphi_{X_1+\cdots+X_r} = \prod_{i=k}^r \varphi_{X_k}$ が成立する. ゆえに, $\varphi_{D_\alpha} = \phi^\alpha$ が成立することと, D_α の確率分布は再生性を持つことは同値である.

10 付録: 簡単な Tauber 型定理とその応用

10.1 不定積分の Tauber 型定理

定理 10.1. $f(t)$ は $t > 0$ で定義された正値函数でかつ単調減少または単調増加[88] していると仮定し, $\alpha, a > 0$ であるとする. このとき

$$\int_0^x f(t)\,dt \sim ax^\alpha \qquad (x \to \infty)$$

ならば[89],

$$f(x) \sim a\alpha x^{\alpha-1} \qquad (x \to \infty)$$

が成立する. (この結論の式は前提の式の両辺を形式的に x で微分した形をしている.)

証明. まず, f が単調減少である場合を扱う. f が単調減少函数であることより, 任意の $c > 1$ に対して,

$$\frac{\int_0^{cx} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt}{cx - x} \leqq f(x) \leqq \frac{\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{c^{-1}x} f(t)\,dt}{x - c^{-1}x}. \tag{1}$$

これの全体を $ax^{\alpha-1}$ で割ると,

$$\frac{\dfrac{\int_0^{cx} f(t)\,dt}{ax^\alpha} - \dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{ax^\alpha}}{c-1} \leqq \frac{f(x)}{ax^{\alpha-1}} \leqq \frac{\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{ax^\alpha} - \dfrac{\int_0^{c^{-1}x} f(t)\,dt}{ax^\alpha}}{1 - c^{-1}}. \tag{2}$$

ゆえに $x \to \infty$ とすることによって[90],

$$\frac{c^\alpha - 1}{c-1} \leqq \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{ax^{\alpha-1}} \leqq \limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{ax^{\alpha-1}} \leqq \frac{1-c^{-\alpha}}{1-c^{-1}}. \tag{3}$$

さらに $c \searrow 1$ とすることによって

$$\alpha \leqq \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{ax^{\alpha-1}} \leqq \limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{ax^{\alpha-1}} \leqq \alpha.$$

を得る. ゆえに

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{ax^{\alpha-1}} = \alpha, \qquad \text{つまり} \quad f(x) \sim a\alpha x^{\alpha-1} \quad (x \to \infty).$$

[88] $x \leqq x'$ ならば $f(x) \geqq f(x')$ が成立することを「単調減少」と呼んでいる. 字義通りに解釈できるようにするためには「非増加函数」と呼ぶべきかもしれないが, 慣習に合わせてこのように呼んでいる. 「単調増加」についても不等式の無きを逆にするだけでまったく同様である.

[89] $F(x) \sim G(x)$ $(x \to \infty)$ は $\lim_{x\to\infty}(F(x)/G(x)) = 1$ を意味する

[90] $\int_0^{cx} f(t)\,dt \sim ac^\alpha x^\alpha$ $(x \to \infty)$ を用いる.

これで f が単調減少の場合に示すべきことが示された.

次に f が単調増加の場合を扱おう. f が単調増加の場合には (1),(2) で不等号の向きを逆にした結果が得られる. ゆえに, (3) で $\liminf$ と $\limsup$ を交換して, 不等号の向きを逆にした結果が得られる. そのことに注意すれば, f が単調増加の場合に示すべき結果が同様に得られることがわかる. $\square$

数列 a_n に対して $f(n) = a_n$ を満たす函数 $f(t)$ を適切に定めることによって次の結果が得られる.

系 10.2. $a_1, a_2, a_3, \dots$ は正値数列で単調減少または単調増加しているとし, $a, \alpha > 0$ であるとする. このとき

$$\sum_{k=1}^n a_k \sim a n^\alpha \qquad (n \to \infty)$$

ならば

$$a_n \sim a\alpha n^{\alpha-1} \qquad (n \to \infty)$$

が成立する. $\square$

10.2 Laplace 変換の Tauber 型定理

Stone-Weierstrass の多項式近似定理 [91] を用いてまず次を示そう.

補題 10.3. $\phi(y)$ は閉区間 $[0,1]$ 上の非負値可積分函数であるとし, $g(y)$ は閉区間 $[0,1]$ 上の函数で一点 $c \in (0,1)$ でのみ不連続で他の点では連続であるものであるとし, 極限 $g(c \pm 0) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} g(c \pm \varepsilon)$ が存在すると仮定する. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 多項式函数 $P(y)$, $Q(y)$ で

$$\begin{aligned}
&P(y) \leqq g(y) \leqq Q(y) \quad (0 \leqq y \leqq 1),\\
&\int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy - \varepsilon \leqq \int_0^1 P(y)\phi(y)\,dy \leqq \int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy,\\
&\int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy \leqq \int_0^1 Q(y)\phi(y)\,dy \leqq \int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy + \varepsilon
\end{aligned}$$

を満たすものが存在する.

証明. 条件を満たす多項式函数 $Q(y)$ の存在のみを示せばよい. ($g(y)$ の代わりに $-g(y)$ を考えれば $P(y)$ の存在も示される.) さらに $g(c-0) \leqq g(c+0)$ と仮定してよい. ($g(c-0) \geqq g(c+0)$ ならば $g(y)$ の代わりに $g(1-y)$ を考えればよい.)

$\phi(y)$ は非負値可積分函数なので $N = \int_0^1 |\phi(y)|\,dy = \int_0^1 \phi(y)\,dy$ とおくと, $N < \infty$ となる. $g(y)$ は $[0,1]$ 上有界なので, ある $M > 0$ で $|g(y)| \leqq M$ $(0 \leqq y \leqq 1)$ をみたすものが取れる.

任意に $\varepsilon > 0$ を取る.

[91] 閉区間上の任意の連続函数が多項式函数で一様近似されるという定理.

c 未満の $\delta > 0$ に対して, $g(y)$ を近似する連続函数 $g_\delta(y)$ を次のように定める:

$$g_\delta(y) = \begin{cases} g(y) & (0 \leqq y \leqq c-\delta), \\ \max\{a(y-c)+g(c+0), g(y)\} & (c-\delta \leqq y \leqq c), \\ g(y) & (c \leqq y \leqq 1). \end{cases}$$

ここで $a = (g(c+0) - g(c-\delta))/\delta$ であり, $a(y-c)+g(c+0) = a(y-(c-\delta)) + g(c-\delta)$ であることに注意せよ. 定義より

$$-M \leqq g(y) \leqq g_\delta(y) \leqq M \qquad (0 \leqq y \leqq 1)$$

となっている. $|g_\delta(y)\phi(y)| \leqq M|\phi(y)|$ $(0 \leqq y \leqq 1)$ かつ $\lim_{\delta\searrow 0} g_\delta(y)\phi(y) = g(y)\phi(y)$ $(y \neq c)$ なので Lebesgue の収束定理より,

$$\lim_{\delta\searrow 0} \int_0^1 g_\delta(y)\phi(y)\,dy = \int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy.$$

このことを使って, $\delta > 0$ を十分小さくして

$$\int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy \leqq \int_0^1 g_\delta(y)\phi(y)\,dy \leqq \int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy + \frac{\varepsilon}{3}$$

となるようにしておく.

Stone-Weierstrass の多項式近似定理より, ある多項式函数 $Q(y)$ で

$$\left|Q(y) - g_\delta(y) - \frac{\varepsilon}{3N}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3N} \qquad (0 \leqq y \leqq 1)$$

を満たすものが存在する.

このとき $g(y) \leqq g_\delta(y) \leqq Q(y)$ $(0 \leqq y \leqq 1)$ が成立しており,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 Q(y)\phi(y)\,dy \\ &\leqq \int_0^1 \left|Q(y) - g_\delta(y) - \frac{\varepsilon}{3N}\right| \phi(y)\,dy + \int_0^1 g_\delta(y)\phi(y)\,dy + \int_0^1 \frac{\varepsilon}{3N}\phi(y)\,dy \\ &\leqq \frac{\varepsilon}{3N}\int_0^1 \phi(y)\,dy + \int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3N}\int_0^1 \phi(y)\,dy \\ &= \frac{\varepsilon}{3N}N + \int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3N}N \\ &= \int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy + \varepsilon. \end{aligned}$$

これで示すべきことが示された. □

定理 10.4. $f(t)$ は $t > 0$ で定義された非負値可測函数であるとし, $a, \alpha > 0$ であると仮定する. このとき

$$\int_0^\infty e^{-xt} f(t)\,dt \sim \frac{a}{x^\alpha} \qquad (x \searrow 0)$$

ならば

$$\int_0^{1/x} f(t)\,dt \sim \frac{a}{x^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (x \searrow 0).$$

が成立する. (ガンマ函数が出て来る理由は以下の証明を見ればわかる.)

証明. $F(x)=\int_0^\infty e^{-xt}f(t)\,dt$ とおくと, 仮定 $F(x)\sim a/x^\alpha$ $(x\searrow 0)$ より, $k=0,1,2,\dots$ に対して,

$$\begin{aligned} F((k+1)x) &= \int_0^\infty e^{-xt}\left(e^{-xt}\right)^k f(t)\,dt \\ &\sim \frac{a}{(k+1)^\alpha x^\alpha} = \frac{a}{x^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}\left(e^{-t}\right)^k t^{\alpha-1}\,dt \qquad (x\searrow 0). \end{aligned}$$

ここで次の公式を使った:

$$\frac{1}{c^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-ct}t^{\alpha-1}\,dt \qquad (c>0).$$

したがって任意の多項式函数 $p(y)$ について

$$\int_0^\infty e^{-xt}p(e^{-xt})f(t)\,dt \sim \frac{a}{x^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}p(e^{-t})t^{\alpha-1}\,dt \qquad (x\searrow 0).$$

閉区間 $[0,1]$ 上の可積分函数 $\phi(y)$ を

$$\phi(y)=(-\log y)^{\alpha-1}\quad (0<y\leqq 1), \qquad \phi(0)=0$$

と定め [92], $y=e^{-1}$ にのみ不連続点を持つ $[0,1]$ 上の函数 $g(y)$ を

$$g(y)=\begin{cases} 0 & (0\leqq y<e^{-1}) \\ y^{-1} & (e^{-1}\leqq y\leqq 1) \end{cases}$$

と定める. 補題 10.3 より, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある多項式函数 $P(y),Q(y)$ で

$$\begin{aligned} &P(y)\leqq g(y)\leqq Q(y) \quad (0\leqq y\leqq 1), \\ &\int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy-\varepsilon \leqq \int_0^1 P(y)\phi(y)\,dy \leqq \int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy, \\ &\int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy \leqq \int_0^1 Q(y)\phi(y)\,dy \leqq \int_0^1 g(y)\phi(y)\,dy+\varepsilon \end{aligned}$$

を満たすものが存在する. このとき $y=e^{-t}$ とおくと,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-t}g(e^{-t})t^{\alpha-1}\,dy-\varepsilon \leqq \int_0^\infty e^{-t}P(e^{-t})t^{\alpha-1}\,dy \leqq \int_0^\infty e^{-t}g(e^{-t})t^{\alpha-1}\,dy, \\ &\int_0^\infty e^{-t}g(e^{-t})t^{\alpha-1}\,dy \leqq \int_0^\infty e^{-t}Q(e^{-t})t^{\alpha-1}\,dy \leqq \int_0^\infty e^{-t}g(e^{-t})t^{\alpha-1}\,dy+\varepsilon. \end{aligned}$$

一方, $f(t)\geqq 0$ であることより [93],

$$\int_0^\infty e^{-xt}P(e^{-xt})f(t)\,dt \leqq \int_0^\infty e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)\,dt \leqq \int_0^\infty e^{-xt}Q(e^{-xt})f(t)\,dt$$

---

[92] $\int_0^1\phi(y)\,dy=\int_0^1(-\log y)^{\alpha-1}\,dy$ で $y=e^{-t}$ とおくと, $\int_0^1\phi(y)\,dy=\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt=\Gamma(\alpha)$ となる. このことから $\phi(y)=(-\log y)^{\alpha-1}$ は $\alpha>0$ のとき $[0,1]$ で可積分であることがわかる.

[93] ここで $f(t)$ の非負性を使っている.

なので, これの全体を $a/(x^\alpha\Gamma(\alpha+1))$ で割って, $x\searrow 0$ の極限を取ると,

$$\int_0^\infty e^{-t}P(e^{-t})t^{\alpha-1}\,dt \leqq \liminf_{x\searrow 0}\frac{x^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{a}\int_0^\infty e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)\,dt$$
$$\leqq \limsup_{x\searrow 0}\frac{x^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{a}\int_0^\infty e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)\,dt \leqq \int_0^\infty e^{-t}Q(e^{-t})t^{\alpha-1}\,dt$$

以上の 2 つの段落の結果を合わせ, $\varepsilon>0$ をいくらでも小さくできることに注意すれば次が成立することがわかる:

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{x^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{a}\int_0^\infty e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}g(e^{-t})t^{\alpha-1}\,dt.$$

すなわち次が得られた[94]:

$$\int_0^\infty e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)\,dt \sim \frac{a}{x^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}g(e^{-t})t^{\alpha-1}\,dt \qquad (x\searrow 0).$$

$e^{-1}\leqq e^{-xt}$ と $t\leqq 1/x$ は同値であり, $t\leqq 1/x$ のとき $e^{-xt}g(e^{-xt})=1$ となり, $t>1/x$ のとき $g(e^{-xt})=0$ なので, すぐ上の式は次のように書き直される:

$$\int_0^{1/x} f(t)\,dt \sim \frac{a}{x^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt = \frac{a}{x^\alpha}\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} = \frac{a}{x^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (x\searrow 0).$$

これで示すべきことがすべて示された. □

上の定理と前節の訂正を合わせることによって次の結果が得られる.

系 10.5. $f(t)$ は $t>0$ で定義された正値函数で単調減少または単調増加しているとし, $\alpha, a>0$ であるとする. このとき

$$\int_0^\infty e^{-xt}f(t)\,dt \sim \frac{a}{x^\alpha} \qquad (x\searrow 0)$$

ならば,

$$\int_0^t f(t')\,dt' \sim \frac{at^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \qquad f(t)\sim\frac{at^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \qquad (x\to\infty)$$

が成立する. □

数列 a_n に対して $f(n)=a_n$ を満たす函数 $f(t)$ を適切に定義することによって近似したり, Stieltjes 積分版の定理を証明し直したり, さらに $y=e^{-x}$ と置いて $x\searrow 0$ の極限を $y\nearrow 1$ の極限に書き直すことによって, もしくは直接証明し直すことによって以下の結果が得られる. ($1-e^{-x}\sim x$ ($x\searrow 0$) であることに注意せよ.)

系 10.6. $a_0, a_1, a_2, \dots$ は非負値数列であるとし, $\alpha, a>0$ であるとする. このとき

$$\lim_{y\nearrow 1}(1-y)^\alpha\sum_{n=0}^\infty a_n y^n = a$$

ならば

$$\sum_{k=0}^n a_k \sim \frac{an^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (n\to\infty)$$

が成立する. (ガンマ函数が出て来る理由は以下の証明を見ればわかる.) □

[94] 以上の Stone-Weierstrass の多項式近似定理を使う鮮やかな方法は Jovan Karamata による.

証明. 直接証明し直しておこう. $x>0$ とし, $y=e^{-x}$ とおくと, $1-y\sim x$ $(x\searrow 0)$ なので,

$$F(x):=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}a_n \sim \frac{a}{x^\alpha} \qquad (x\searrow 0).$$

ゆえに任意の $k=0,1,2,\dots$ に対して,

$$\begin{aligned}F((k+1)x) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}(e^{-nx})^k a_n \\ &\sim \frac{a}{(k+1)^\alpha x^\alpha} = \frac{a}{x^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}\left(e^{-t}\right)^k t^{\alpha-1}\,dt \qquad (x\searrow 0).\end{aligned}$$

ここで次の公式を使った:

$$\frac{1}{c^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-ct}t^{\alpha-1}\,dt \qquad (c>0).$$

したがって, 任意の多項式函数 $p(y)$ について

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}p(e^{-nx})a_n \sim \frac{a}{x^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}p(e^{-t})t^{\alpha-1}\,dt \qquad (x\searrow 0).$$

多項式函数で函数

$$g(y) = \begin{cases} 0 & (0\leqq y<e^{-1}), \\ y^{-1} & (e^{-1}\leqq y\leqq 1)\end{cases}$$

を近似することによって次が得られる [95]:

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-nx}g(e^{-nx})a_n \sim \frac{a}{x^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}g(e^{-t})t^{\alpha-1}\,dt \qquad (x\searrow 0).$$

$e^{-1}\leqq e^{-nx}$ と $n\leqq 1/x$ は同値であり, $n\leqq 1/x$ のとき $e^{-nx}g(e^{-xx})=1$ なので, すぐ上の式は次のように書き直される:

$$\sum_{0\leqq n\leqq 1/x} a_n \sim \frac{a}{x^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt = \frac{a}{x^\alpha}\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} = \frac{a}{x^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (x\searrow 0).$$

右辺で $x=1/n$ とおき, 左辺の和を $k=0,1,\dots,n$ の和に書き直すと,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sim \frac{an^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (n\to\infty).$$

これで示すべきことが示された. □

系 10.7. $a_0,a_1,a_2,\dots$ は正値数列で単調減少または単調増加しているとし, $\alpha,a>0$ であるとする. このとき

$$\lim_{y\nearrow 1}(1-y)^\alpha\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = a$$

[95] 実際には補題 10.3 を用いた注意深い議論が必要になる. その議論の詳細を見ないと, どうして $a_n\geqq 0$ と仮定しているか, よくわからないだろう. 議論の詳細については定理 10.4 の証明を参照せよ. この方法は Jovan Karamata による.

ならば

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sim \frac{an^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \qquad a_n \sim \frac{an^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \qquad (n\to\infty)$$

が成立する. □

定理 10.4 の Stieltjes 積分版は次の通り [96].

定理 10.8. $\varphi(t)$ は $\varphi(t) = 0$ $(t<0)$ を満たす右連続単調増加函数であるとし, $a, \alpha > 0$ であるとする. このとき

$$F(x) := \int_{-0}^{\infty} e^{-xt} d\varphi(t) \sim \frac{a}{x^\alpha} \qquad (x \searrow 0)$$

ならば

$$\varphi(t) \sim \frac{at^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (t\to\infty)$$

が成立する. □

この定理の特別な場合として, もしくは定理 10.4 の証明と完全に同様の筋道をたどることによって次の結果が得られる.

系 10.9. $\lambda_n \geqq 0$ は単調増加数列であるとし, $a, \alpha > 0$ であるとする. このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x} \sim \frac{a}{x^\alpha} \qquad (x \searrow 0)$$

ならば

$$\#\{\, n \mid \lambda_n \leqq t \,\} \sim \frac{at^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (t\to\infty)$$

が成立する. さらに $t = \lambda_n$ の場合を考えることによって

$$\lambda_n \sim \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{a}\right)^{1/\alpha} n^{1/\alpha} \qquad (n\to\infty)$$

も得られる. □

10.3 Wallis の公式と逆正弦分布

べき級数展開 $(1-y)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ $(|y|<1)$ で数列 a_n を定めると

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \binom{-1/2}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} > 0. \end{aligned}$$

[96] 第 10.5 節, 第 10.6 節で漸近挙動に緩変動函数が含まれているより一般的の場合に関する解説を書いておいた. そちらの解説の方が準備を十分にしているので証明も簡明になっている.

4 つ目の等号で分子分母に $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$ をかけた. さらに

$$a_{n+1} = \frac{n+1/2}{n+1} a_n < a_n.$$

ゆえに a_n は正値単調減少数列である. $(1-y)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = 1$ なので系 10.7 を適用することによって次が得られる:

$$a_n = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sim \frac{n^{1/2-1}}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \qquad (n \to \infty).$$

この公式は **Wallis の公式**と呼ばれている [97].

逆正弦分布が出て来る一つのパターンについて説明しよう. そのために正値数列 a_n は Wallis の公式型の漸近挙動 $a_n \sim 1/\sqrt{\pi n}$ $(n \to \infty)$ を満たしていると仮定し, $p_{n,k} = a_k a_{n-k}$ とおく. このとき, 仮定より $\min\{k, n-k\} \to \infty$ において

$$p_{n,k} \sim \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} \frac{1}{n}$$

となるので, $0 \leqq a < b \leqq 1$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{a \leqq k/n \leqq b} p_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{a \leqq k/n \leqq b} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} \frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

確率密度函数 $\pi^{-1}(x(1-x))^{-1/2}\,dx$ が定める確率分布は逆正弦分布と呼ばれている. そのように呼ばれる理由はその累積確率分布函数が次のように逆正弦函数で表わされるからである:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

この確率分布は中心が $(x, y) = (1/2, 0)$ で半径が $1/2$ の円周上の一様分布を x 軸上に射影したものに等しい.

このように Wallis の公式型の漸近挙動の仮定から逆正弦分布が出て来る. そして Wallis の公式型の漸近挙動は Tauber 型の定理 (系 10.7) から出て来る. 一般的な 1 次元ランダムウォークに関する逆正弦法則はそのような方針で証明される.

逆正弦法則とは「左右対称もしくは期待値が 0 で有限の分散を持つような原点から出発する 1 次元ランダムウォークにおいて, 原点より右側に留まっている時間の総和の割合の分布が時間無限大の極限で逆正弦分布に収束する」という法則のことである [98]. 逆正弦法則の証明にはかなりややこしい計算が必要になる. 確率 1/2 で左右に 1 ステップずつ進む単純なランダムウォークに関する逆正弦法則の場合でさえ, 組み合わせ論的にややこしい議論が必要になる [99]. ここではその手の面倒な議論には一切触れないことにする.

---

[97] 第 10.2 節や第 10.6 節で解説したタイプの Tauber 型定理は Wallis の公式の一般化だとみなせる.

[98] 詳しくは Frank Spitzer, Principles of Random Walk, Springer GTM 34 (1964) の第 20 節を参照せよ. 特にその pp. 225–227 あたりを参照すればこのノートとの関係がわかるはずである.

[99] 単純なランダムウォークの逆正弦法則の証明に興味がある人は例えば服部哲也, 確率論講義付録, 20030525 もしくは服部哲也著『ランダムウォークとくりこみ群』共立出版 (2004) の第 1 章を参照して欲しい. 服部哲也さんが書いたものはサービス精神が旺盛でどれも楽しいので, 数楽好きの人にはおすすめできる.

しかし, 逆正弦法則によれば結果的に以下が成立している:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{\,(x_i)_{i=1}^n \in \{\pm 1\}^n \mid na < \#\{\,k \mid x_1 + \cdots + x_k > 0\,\} < nb\}}{2^n} = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \int\cdots\int_{\substack{-1<x_1,\dots,x_n<1,\\ na<\#\{\,k|x_1+\cdots+x_k>0\,\}<nb}} dx_1\cdots dx_n = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

ギャンブルにたとえれば, 条件 $x_1 + \cdots + x_k > 0$ は「浮いていること」(トータルで勝っている状態) を意味し, $\#\{\,k \mid x_1 + \cdots + x_k > 0\,\}$ は浮いている時間の長さを意味しており, 条件 $na < \#\{\,k \mid x_1 + \cdots + x_k > 0\,\} < nb$ は浮いている時間の長さの割合が a より大きく b より小さいことを意味している. ランダムウォークに関する逆正弦法則は「浮いている時間の割合」が $n \to \infty$ で逆正弦分布にしたがうことを意味している.

10.4 $\mathbf{x - x^2 + x^4 - x^8 + x^{16} - x^{32} + \cdots}$ で $\mathbf{x \nearrow 1}$ とすると?

函数 $F(x)$ を

$$F(x) = x - x^2 + x^4 - x^8 + x^{16} - x^{32} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2^k} \qquad (|x| < 1)$$

と定める. このとき $x \nearrow 1$ で $F(x)$ は収束するか? 収束するとしたらその収束先の値は何になるか?[100]

仮に収束するとしたら, その収束先は $1/2$ でなければいけないことはすぐにわかる. なぜならば,

$$F(x^2) = x - F(x)$$

が成立しているからである. さらに数値計算してみると, x が 1 の近くで $F(x)$ の値は 0.5 にかなり近いこともわかる. たとえば

$$F(0.99) \approx 0.494098, \qquad F(0.999) \approx 0.500124.$$

$F(x)$ は $x \nearrow 1$ で $1/2$ に収束するのだろうか?

数列 a_n, s_n を

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

と定める. 一般に

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

のとき

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

[100] 筆者はこの問題の存在を Peter Duren, Sums for Divergent Series: A Tauberian Adventure, 2013-10 (講演スライド) で学んだ. それによれば G. H. Hardy がこの問題を 1907 年に解いたらしい. 数値計算すれば $x \nearrow 1$ で $F(x)$ の値が 0.5 の周囲を小さく無限に振動している様子を見られる. そして上の講演スライドでは実際に無限に振動していることが証明されている.

となることに注意せよ.

上の状況で

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x(1-x) + x^4(1-x^4) + x^{16}(1-x^{16}) + \cdots = (1-x)f(x),\\
f(x) &= x + x^4(1+x+x^2+x^3) + x^{16}(1+x+\cdots+x^{15}) + \cdots\\
&= x + (x^4+x^5+x^6+x^7) + (x^{16}+x^{17}+\cdots+x^{31}) + \cdots .
\end{aligned}
$$

となるので, $s_n \geqq 0$ である. ゆえにもしも

$$\lim_{x\nearrow 1} F(x) = \lim_{x\nearrow 1}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = a$$

と収束するならば, 系 10.6 ($\alpha = 1$) より,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} s_n = a$$

と収束するはずである. しかし,

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\frac{s_0+s_1+\cdots+s_{2^{2k}-1}}{2^{2k}-1} &= \lim_{k\to\infty}\frac{1+4+16+\cdots+4^{k-1}}{4^k-1} = \lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{4^k-1}{4-1}}{4^k-1} = \frac{1}{3},\\
\lim_{k\to\infty}\frac{s_0+s_1+\cdots+s_{2^{2k-1}-1}}{2^{2k-1}-1} &= \lim_{k\to\infty}\frac{1+4+16+\cdots+4^{k-1}}{\frac{1}{2}4^k-1} = \lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{4^k-1}{4-1}}{\frac{1}{2}4^k-1} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

なので, $n^{-1}\sum_{k=0}^{n} s_n$ は $n\to\infty$ で収束しない. したがって $x\nearrow 1$ で $F(x)$ も収束しない.

10.5 Laplace-Stieltjes 変換

以下は第 10.6 節のための準備である.

$F(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の右連続 [101] かつ単調非減少 [102] であると仮定する.

さらに, もしも $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ と $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ が成立しているならば, $F(x)$ は**累積確率分布函数**もしくは単に**分布函数**と呼ぶことがある. そのとき $F(x)$ の値は「x 以下の値になる確率」だと解釈される. 以下では $F(x)$ が累積確率分布函数になっているとは仮定しない.

$F(x)$ が単調非減少であることから, 任意の $x \in \mathbb{R}$ において, 左からの極限 $F(x-0) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} F(x-\varepsilon)$ が存在することがわかる (上に有界な実数の集合は上限を持つから). さらに $F(x)$ は右連続なので $F(x) = F(x+0) = \lim_{\varepsilon\searrow} F(x+\varepsilon)$ が成立している. $F(x) - F(x-0) > 0$ となることと函数 F が点 x で不連続なことは同値である. すなわち $F(x)$ は不連続点 x で $F(x) - F(x-0) > 0$ の分だけ上にジャンプしている. このことから $F(x)$ の不連続点は高々可算個であることがわかる.

[101] $F(x)$ が右連続 (もしくは右側から連続) であるとは $\lim_{\varepsilon\searrow 0} F(x+\varepsilon) = F(x)$ が成立していることである.

[102] $F(x)$ が単調非減少とは $x \leqq x'$ ならば $F(x) \leqq F'(x)$ が成立していることである.

$F(x)$ に関する Lebesgue-Stieltjes 積分は

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a) \qquad (-\infty \leqq a < b)$$

を満たす Borel 測度 μ_F (一意的に存在する) に関する積分として定義される．すなわち, Borel 集合 A について

$$\int_A f(x)\,dF(x) = \int_A f(x)\,\mu_F(dx)$$

と書き, これを Lebesgue-Stieltjes 積分と呼ぶ．測度 $\mu_F(dx)$ の代わりに $dF(x)$ と書くことが多い．$F(x)$ が $x = a$ で連続なことと $\mu_F(\{a\}) = 0$ は同値になり,

$$F(b) - F(a) = \int_{(a,b]} dF(x) = \int_{[a,b]} dF(x) \qquad (a < b)$$

が成立している．2 つ目の等号は $a = b$ でかつ $x = a$ で $F(x)$ が不連続なとき成立しないことに注意せよ．もしも $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度 μ が任意の $x \in \mathbb{R}$ について $\mu((-\infty, x]) < \infty$ を満たしているならば $F(x) = \mu((-\infty, x])$ とおくと $F(x)$ は右連続な単調非減少函数で $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ を満たしており, $\mu = \mu_F$ が成立している．

区間 $[a,b]$ $(a < b)$ における Riemann-Stieltjes 積分は $[a,b]$ の分割

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \qquad c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

を取り,

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \lim \sum_{i=1}^n f(c_i)(F(x_i) - F(x_{i-1}))$$

で定義される．ここで右辺の極限は分割を細かくする極限である．$f(x)$ が連続函数ならば

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_{[a,b]} f(x)\,\mu_F(dx)$$

が成立している．

以下ではさらに $F(0) = 0$ と仮定する．

μ が $(0,\infty)$ 上の Borel 測度のとき

$$M(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\mu(dx)$$

を測度 μ の Laplace 変換と呼ぶ．より一般に

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,\mu(dx)$$

を $f(x)\,\mu(dx)$ の Laplace 変換と呼ぶ．

注意 10.10. μ が有限測度 $(\mu((0,\infty)) < \infty)$ のとき

$$M(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\mu(dx) < \infty \qquad (s \geqq 0).$$

μ が有限測度でない場合であっても, $M(\sigma) < \infty$ ならば $e^{-\sigma x}\mu(dx)$ が有限測度を定めるので, 無限測度の Laplace 変換に関する問題の多くが有限測度の Laplace 変換の場合に帰着することがわかる．さらに $e^{-\sigma x}\mu(dx)/M(\sigma)$ が確率測度を定めることから, 多くの問題が確率測度の場合に帰着することもわかる． □

命題 10.11. μ, ν は $(0,\infty)$ 上の Borel 測度のとき, 十分大きな s について

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,\mu(dx) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\nu(dx) < \infty$$

が成立しているならば $\mu = \nu$ となる. すなわち, 十分大きな s について μ, ν の Laplace 変換が有限な値に収束してかつ等しいならば, 2 つの測度 μ, ν は一致する.

証明. 注意 10.10 のアイデアを使おう. $A = \int_0^\infty e^{-\sigma x}\,\mu(dx) = \int_0^\infty e^{-\sigma x}\,\nu(dx) < \infty$ のとき, $\mu(dx)$, $\nu(dx)$ のそれぞれを $e^{-\sigma x}\,\mu(dx)/A$, $e^{-\sigma x}\,\nu(dx)/A$ で置き換えることによって, μ と ν は確率測度であると仮定できる. このとき, 任意の $s \geqq 0$ に対してそれらの Laplace 変換は有限な値に収束する. 同相写像 $f : (0,\infty) \to (0,1)$, $x \mapsto y$ を $f(x) = y = e^{-x}$ と定め, $(0,1)$ 上の確率測度 μ', ν' を

$$\mu'(A) = \mu(f^{-1}(A)), \qquad \nu'(A) = \nu(f^{-1}(A))$$

と定めると [103],

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,\mu(dx) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\nu(dx)$$

は次のように書き直される (置換積分):

$$\int_0^1 y^s\,\mu'(dy) = \int_0^1 y^s\,\nu'(dy) \qquad (s \geqq 0).$$

特に μ' と ν' のモーメントがすべて等しい. ゆえに $\mu' = \nu'$ すなわち $\mu = \nu$ であることがわかる. □

注意 10.12 (モーメント問題について). 有限区間上の確率測度はそのモーメント全体によって一意的に決定される [104]. しかし無限区間上の確率測度の場合にはそうではない. たとえば対数正規分布はそのモーメントたちだけから一意に決定されない. 対数標準正規分布の確率密度函数は次で与えられる:

$$f(x)\,dx = \frac{e^{-(\log x)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{dx}{x} \quad (x > 0), \qquad f(x) = 0 \quad (x \leqq 0).$$

$s(y)$ は周期 1 を持つ実数値奇函数でその絶対値は常に 1 以下であるとする. たとえば $s(y) = a\sin(2\pi y)$ ($|a| \leqq 1$) であるとする. そして

$$g(x)\,dx = f(x)(1 + s(\log x))\,dx$$

とおく. $s(x)$ の絶対値は常に 1 以下なので $g(x) \geqq 0$ となる. この $g(x)\,dx$ が $\mathbb{R}$ 上の確率測度を定め, 対数標準正規分布 $f(x)\,dx$ と同じモーメントたちを持つことを示したい. そのためには $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\int_0^\infty x^k f(x) s(\log x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^k e^{-(\log x)^2/2} s(\log x)\,\frac{dx}{x} = 0$$

[103] たとえば $\mu(dx) = \rho(x)\,dx$ のとき $\mu'(dy) = \rho(-\log y) y^{-1}\,dy$.

[104] Stone-Weierstrass の多項式近似定理を使って証明できる. 連続函数の多項式による一様近似が可能なのは有限閉区間上に限ることに注意せよ. 補題 10.13 の証明と同様の方法を使って証明できる.

を示せば十分である. 積分変数を $x = e^{y+k}$ と置換すると, $s(y)$ が周期 1 を持つことより,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ky+k^2}e^{-(y+k)^2/2}s(y+k)\,dy = \frac{e^{k^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}s(y)\,dy$$

$s(y)$ は奇函数だったのでこの積分は 0 になる. これで $g(x)\,dx$ は確率測度を定めそのモーメントたちは対数標準正規分布 $f(x)\,dx$ のモーメントたちに等しいことがわかった.

以上の例は, Willium Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications Vol. 2, First Edition (1970) の VII.3 の p.227 の例の引き写しである. そこには「この興味深い例は C. C. Heyde による」と書いてある. さらにその下には以下のように書いてある:

(1) $\mathbb{R}$ 上の確率分布の k 次のモーメントを μ_k と書くとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{\mu_{2n}}} = \infty$$

ならば, モーメントたちからもとの確率分布が一意に決まる (Carleman の定理).

(2) それより弱い結果: 偶数次のモーメントたちから得られるべき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

の収束半径が 0 より大きいならば (すなわちある $z > 0$ に対して収束するならば), モーメントたちからもとの確率分布が一意的に決定される (第 6 節 XV.4).

要するに高次のモーメントたちの増大度が十分小さければモーメントたちからもとの確率分布は一意的に決定される.

対数標準正規分布の k 次のモーメント μ_k は $x = e^{y+k}$ と変数変換することによって,

$$\begin{aligned}\mu_k &= \int_0^{\infty} x^k\frac{e^{-(\log x)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ky+k^2}e^{-(y+k)^2/2}\,dt \\ &= \frac{e^{k^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dt = e^{k^2/2}\end{aligned}$$

と計算され, 次数 k の 2 次函数の指数函数の速さで急速に増大することがわかる. (その増大度は $k! \sim \exp(k\log k - k + (1/2)\log k + \log\sqrt{2\pi k})$ より真に大きい.)

確率変数 X の k 次のモーメントを μ_k の定めるべき級数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\frac{z^k}{k!} \tag{\#}$$

の収束半径が正であることと上の (2) のべき級数の収束半径が正であることは同値である. なぜならば $E[|X|^{2n-1}] \leqq 1 + E[X^{2n}] = 1 + \mu_{2n}$ となるからである:

$$\begin{aligned}E[|X|^{2n-1}] &= E[1_{|X|<1}(X)|X|^{2n-1}] + E[1_{|X|\geqq 1}(X)|X|^{2n-1}] \\ &\leqq 1 + E[1_{|X|\geqq 1}(X)|X|^{2n-1}] \leqq 1 + E[|X|^{2n}] = 1 + \mu_{2n}.\end{aligned}$$

ゆえに, べき級数 (#) の収束半径が正ならば, ある $r > 0$ が存在して,

$$E[e^{zX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \frac{z^k}{k!} \qquad (|z| < r)$$

が成立する. このことから X の特性函数 $E[e^{itX}]$ $(t \in \mathbb{R})$ がモーメントたちから一意的に決まることがわかる. 確率分布はその特性函数から一意的に決まるので, べき級数 (#) の収束半径が 0 でないならば, モーメントたちによって確率分布が一意的に決まることがわかった. □

10.6 Laplace-Stieltjes 変換の Tauber 型定理

補題 10.13. μ_n, μ は $(0,1)$ 上の有限 Borel 測度であるとし,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 y^k \, \mu_n(dy) = \int_0^1 y^k \, \mu(dy) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

が成立していると仮定する. このとき $\mu(\{y\}) = 0$ となるすべての点 $y \in (0,1)$ において

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n((0,y]) = \mu((0,y])$$

となる. すなわち, 右連続単調非減少函数たちを $F_n(y) = \mu_n((0,y])$, $F(y) = \mu((0,y])$ と定めると, F が連続になるすべての点 $y \in (0,1)$ において

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = F(y)$$

となる.

証明. μ_n, μ が有限測度であることと仮定の $k = 0$ の場合より, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\mu_n((0,1)) \leqq C \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad \mu((0,1)) \leqq C$$

となる. 仮定より, すべての多項式函数 $p(y)$ について

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 p(y) \, \mu_n(dy) = \int_0^1 p(y) \, \mu(dy) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

が成立している.

任意に $\varepsilon > 0$ を取って固定する.

$a \in (0,1)$ は $\mu(\{a\}) = 0$ を満たしているとし, $0 < \delta < \min\{a, 1-a\}$ と仮定する. $\mu(\{a\}) = 0$ より $\mu((0,a)) = \mu((0,a]) = F(a)$ となる. $\mathbb{R}$ 上の連続函数 $g_\delta(y)$, $h_\delta(y)$ を次のように定める:

$$g_\delta(y) = \begin{cases} 1 & (y \leqq a - \delta), \\ (a-y)/\delta & (a - \delta \leqq y \leqq a), \\ 0 & (a \leqq y), \end{cases} \quad h_\delta(y) = \begin{cases} 1 & (y \leqq a), \\ 1 - (y-a)/\delta & (a \leqq y \leqq a + \delta), \\ 0 & (a + \delta \leqq y). \end{cases}$$

さらに次のように定める:

$$g(y) = \begin{cases} 1 & (y < a), \\ 0 & (a \leqq y), \end{cases} \qquad h_\delta(y) = \begin{cases} 1 & (y \leqq a), \\ 0 & (a < y). \end{cases}$$

このとき, 以下が成立している:

$$0 \leqq g_\delta(y) \leqq g(y) \leqq h(y) \leqq h_\delta(y) \leqq 1, \qquad \lim_{\delta \searrow 0} g_\delta(y) = g(y), \qquad \lim_{\delta \searrow 0} h_\delta(y) = h(y).$$

ゆえに Lebesgue の収束定理と $\mu((0,a)) = \mu((0,a]) = F(a)$ より

$$\lim_{\delta \searrow 0} \int_0^1 g_\delta(y)\,\mu(dy) = F(a), \qquad \lim_{\delta \searrow 0} \int_0^1 h_\delta(y)\,\mu(dy) = F(a).$$

ゆえに十分 $\delta > 0$ を小さく取って,

$$\left| \int_0^1 g_\delta(y)\,\mu(dy) - F(a) \right| \leqq \varepsilon, \qquad \left| \int_0^1 h_\delta(y)\,\mu(dy) - F(a) \right| \leqq \varepsilon \tag{2}$$

となるようにできる. Stone-Weierstrass の多項式近似定理によって次を満たす多項式函数 $P(y)$ と $Q(y)$ が存在することがわかる [105]:

$$\begin{aligned} &P(y) \leqq g_\delta(y) \leqq g(y) \leqq h(y) \leqq h_\delta(y) \leqq Q(y), \\ &|P(y) - g_\delta(y)| \leqq \varepsilon, \qquad |Q(y) - h_\delta(y)| \leqq \varepsilon \qquad (y \in (0,1)). \end{aligned}$$

このとき

$$\int_0^1 P(y)\,\mu_n(dy) \leqq \mu_n((0,a]) = F_n(a) \leqq \int_0^1 Q(y)\,\mu_n(dy), \tag{3}$$

$$\left| \int_0^1 P(y)\,\mu(dy) - \int_0^1 g_\delta(y)\,\mu(dy) \right| \leqq C\varepsilon, \tag{4}$$

$$\left| \int_0^1 Q(y)\,\mu(dy) - \int_0^1 h_\delta(y)\,\mu(dy) \right| \leqq C\varepsilon. \tag{5}$$

ゆえに (3) で (1) を用いると

$$\int_0^1 P(y)\,\mu(dy) \leqq \liminf_{n\to\infty} F_n(a) \leqq \limsup_{n\to\infty} F_n(a) \leqq \int_0^1 Q(y)\,\mu(dy).$$

ところが, (2),(4),(5) より $\varepsilon > 0$ を小さくすると $\int_0^1 P(y)\,\mu(dy)$ と $\int_0^1 Q(y)\,\mu(dy)$ はいくらでも $F(a)$ に近付く. ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a) = F(a)$$

となることがわかる. これで示すべきことが示された. □

[105] Stone-Weierstrass の多項式近似定理より, $|P(y) - (g_\delta(y) - \varepsilon/2)| \leqq \varepsilon/2$ $(y \in (0,1))$ を満たす多項式函数 $P(y)$ が存在する. $Q(y)$ についても同様.

例 10.14. 上の補題において F が連続な点 y で $F_n(y)$ が $F(y)$ に収束することを示したが, $F(y)$ が不連続な点では $F_n(y)$ が $F(y)$ に収束するとは限らない. たとえば $a \in (0,1)$, $0 < \varepsilon < 1-a$ に対して, 連続函数たち $F_\varepsilon(y)$ と右連続函数 $F(y)$ を

$$F_\varepsilon(y) = \begin{cases} 0 & (0 < y \leqq a) \\ (y-a)/\varepsilon & (a \leqq y \leqq a+\varepsilon) \\ 1 & (a+\varepsilon \leqq y < 1), \end{cases} \qquad F(y) = \begin{cases} 0 & (0 < y \leqq a) \\ 1 & (a \leqq y < 1) \end{cases}$$

と定めると,

$$\int_0^1 y^k dF_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} y^k\,dy = \frac{1}{k+1}\frac{(a+\varepsilon)^{k+1} - a^{k+1}}{\varepsilon}, \qquad \int_0^1 y^k dF(y) = a^k$$

となるので,

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0}\int_0^1 y^k dF_\varepsilon(y) = \int_0^1 y^k dF(y)$$

となり, a 以外の $y \in (0,1)$ について $\lim_{\varepsilon\searrow 0} F_\varepsilon(y) = F(y)$ となる. しかし $F_\varepsilon(a) = 0$, $F(a) = 1$ なので $y = a$ ではそうならない. □

補題 10.15. $F_n(x)$, $F(x)$ は右連続単調非減少函数で $x = 0$ で 0 になるものであるとする. このとき, 十分大きな λ に対して, $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dF_n(x)$ $(n = 1,2,3,\dots)$ と $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dF(x)$ が有限の値に収束し,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dF_n(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dF(x)$$

が成立しているならば, 函数 F が連続なすべての点 $x > 0$ において

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

となる.

証明. μ_n, μ は $\mu_n((a,b]) = F_n(b) - F_n(a)$, $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$ $(a < b)$ を満たす Borel 測度であるとする. 仮定より, ある $\sigma > 0$ について $A_n = \int_0^\infty e^{-\sigma x}\,\mu_n(dx)$ たちと $A = \int_0^\infty e^{-\sigma x}\,\mu(dx)$ は有限の値になる. 測度 $\widetilde{\mu}_n$, $\widetilde{\mu}$ を $\widetilde{\mu}_n(dx) = e^{-\sigma x}\mu_n(dx)$, $\widetilde{\mu}(dx) = e^{-\sigma x}\mu(dx)$ と定めると, $\widetilde{\mu}_n((0,\infty)) = A_n$, $\widetilde{\mu}((0,\infty)) = A$ となる. μ_n, μ の代わりに $\widetilde{\mu}_n$, $\widetilde{\mu}$ を考えることに μ_n, μ は有限測度であると仮定してよい. そのとき, 変数変換 $y = e^{-x}$ によって, この補題における $(0,\infty)$ 上の問題を $(0,1)$ 上の問題に関する補題 10.13 に帰着できる. □

定義 10.16. 函数 $L(x)$ が $x \to \infty$ における**緩変動函数** (slowly varying function) であるとは, 任意の $c > 0$ に対して

$$L(cx) \sim L(x) \quad (x \to \infty), \qquad \text{すなわち} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{L(cx)}{L(x)} = 1$$

が成立していることである. たとえば $(\log x)^\beta$ は緩変動函数である. □

定理 10.17. $F(x)$ は $x \geqq 0$ における右連続な単調増加 (非減少) 函数であり, $F(0) = 0$ を満たしているものであり, $\alpha > 0$ であるとし, $L(x)$ は $x \to \infty$ における緩変動函数であるとする. このとき

$$M(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dF(x) \sim \lambda^{-\alpha} L(\lambda^{-1}) \qquad (\lambda \searrow 0)$$

ならば

$$F(x) \sim \frac{M(x^{-1})}{\Gamma(\alpha+1)} \sim \frac{x^\alpha L(x)}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (x \to \infty)$$

が成立する.

証明. 連続函数函数 $G(x)$ を

$$G(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad (x \geqq 0), \qquad G(x) = 0 \quad (x < 0)$$

と定めると, $c > 0$ に対して

$$\int_0^\infty e^{-cx}\,dG(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty e^{-cx}x^{\alpha-1}\,dx = \frac{c^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt = c^{-\alpha}$$

が成立する. 2 つ目の等号で $x = t/c$ とおいた.

$c > 0$ のとき, $M(\lambda)$ の漸近挙動に関する仮定より,

$$\frac{M(c\lambda)}{M(\lambda)} \sim \frac{c^{-\alpha}\lambda^{-\alpha}L(c^{-1}\lambda^{-1})}{\lambda^{-\alpha}L(\lambda^{-1})} \sim c^{-\alpha} = \int_0^\infty e^{-cx}dG(x) \qquad (\lambda \searrow 0).$$

さらに $M(\lambda)$ の定義より,

$$\frac{M(c\lambda)}{M(\lambda)} = \frac{1}{M(\lambda)}\int_0^\infty e^{-c\lambda x}dF(x) = \int_0^\infty e^{-cx}d\left(\frac{F(x/\lambda)}{M(\lambda)}\right).$$

ゆえに

$$\lim_{\lambda\searrow 0}\int_0^\infty e^{-cx}d\left(\frac{F(x/\lambda)}{M(\lambda)}\right) = \int_0^\infty e^{-cx}dG(x) \qquad (c > 0).$$

したがって, 補題 10.15 より,

$$\lim_{\lambda\searrow 0}\frac{F(x/\lambda)}{M(\lambda)} = G(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (x > 0)$$

となる. すなわち

$$F(x/\lambda) \sim \frac{M(\lambda)x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (\lambda \searrow 0).$$

$x = 1$ とおき, λ を x^{-1} で置き換えることによって,

$$F(x) \sim \frac{M(x^{-1})}{\Gamma(\alpha+1)} \sim \frac{x^\alpha L(x)}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (x \to \infty)$$

が得られる. □

11 付録: Taylor の定理の証明の仕方

「(函数)=(Taylor 展開の途中まで)+(剰余項)」の形式の公式を **Taylor の定理**と言う. この節では Taylor の定理の導出の方針について説明する. この節の内容は非常に易しい.

11.1 積分剰余項型 Taylor の定理

積分表示された剰余項を持つ Taylor の定理は

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x_1)\,dx_1$$

を単純に繰り返し用いることによって証明可能である [106]. 実際, これに

$$f'(x_1) = f'(a) + \int_a^x f''(x_2)\,dx_2$$

を代入すると

$$f(x) = f(a) + f'(a)\int_a^x dx_1 + \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f''(x_2)\,dx_2.$$

ここで括弧の使用量を減らすために

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f''(x_2)\,dx_2 = \int_a^x \left(\int_a^{x_1} f''(x_2)\,dx_2\right) dx_1$$

という表記法を用いた [107]. さらに

$$f''(x_2) = f''(a) + \int_a^{x_2} f'''(x_3)\,dx_3$$

を代入すると

$$f(x) = f(a) + f'(a)\int_a^x dx_1 + f''(a)\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 + \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} f'''(x_3)\,dx_3.$$

さらに同じ操作をもう一度繰り返すと

$$f(x) = f(a) + f'(a)\int_a^x dx_1 + f''(a)\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 + f'''(a)\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 + R_4$$
$$R_4 = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_3} dx_3 \int_a^{x_3} f^{(4)}(x_4)\,dx_4.$$

以上の計算を続ければ帰納的に次が成立することがわかる:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{k-1}} dx_k + R_n,$$
$$R_n = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} f^{(n)}(x_n)\,dx_n.$$

R_n を**剰余項**と呼ぶ. 以上の計算では積分の線形性しか使っていない.

---

[106] 部分積分さえ使う必要がない!

[107] 代わりに, $\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2\, f''(x_2) = \int_a^x \left(\int_a^{x_1} f''(x_2)\,dx_2\right) dx_1$ という表記法を用いてもよい. この表記法の方が積分関連の記号をすべて左側に寄せることを徹底しているのでわかり易いと感じる人は多いかもしれない.

剰余項以外の逐次積分は以下のように順番に (次々に一つ上の式を使うことによって) 容易に計算される:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^x dx_1 = x - a, \\
&\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 = \int_a^x (x_1 - a)\,dx_1 = \frac{(x-a)^2}{2}, \\
&\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 = \int_a^x \frac{(x_1-a)^2}{2}\,dx_1 = \frac{(x-a)^3}{3!}, \\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{k-1}} dx_k = \int_a^x \frac{(x_1-a)^{k-1}}{(k-1)!}\,dx_1 = \frac{(x-a)^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

$x > a$ のとき, この計算結果は k 次元立方体の体積の $k!$ 分の 1 を意味している:

- $k = 1$ のとき, 積分の値は線分 $\{\, x_1 \mid a \leqq x_1 \leqq x \,\}$ の長さになる.

- $k = 2$ のとき, 逐次積分の値は頂点 $(a, a), (x, a), (x, x)$ を持つ直角二等辺三角形

$$\{\, (x_1, x_2) \mid a \leqq x_2 \leqq x_1 \leqq x \,\}$$

  の面積, すなわち正方形の面積 $(x-a)^2$ の半分である. 半分になる理由は, $x_2 \leqq x_1$ を満たす (x_1, x_2) のみについて積分するからである. 正方形全体の面積を得るためには $x_1 \leqq x_2$ を満たす (x_1, x_2) についても積分しなければいけない.

- $k = 3$ のとき, 逐次積分の値は頂点 $(a, a, a), (x, a, a), (x, x, a), (x, x, x)$ を持つ四面体

$$\{\, (x_1, x_2, x_3) \mid a \leqq x_3 \leqq x_2 \leqq x_1 \leqq x \,\}$$

  の体積, すなわち立方体の体積 $(x-a)^3$ の 3! 分の 1 になる. 3! 分の 1 になる理由は, $x_3 \leqq x_2 \leqq x_1$ を満たす (x_1, x_2, x_3) のみについて積分するからである. 立方体全体の体積を得るためには $x_3 \leqq x_2 \leqq x_1$ の以外の順番に並んでいるすべての $a \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq x$ について積分しなければいけない. x_1, x_2, x_3 の個数は 3 個なのでそれらの並べ方の総数は 3! 通りある.

- 一般の k の場合も以上と同様である. 逐次積分の値は頂点

$$(a, a, a, \dots, a), (x, a, a, \dots, a), (x, x, a, \dots, a), \dots, (x, x, x, \dots, x)$$

  を持つ k 次元単体 [108]

$$\{\, (x_1, x_2, \dots, x_k) \mid a \leqq x_k \leqq \dots \leqq x_2 \leqq x_1 \leqq x \,\}$$

  の体積になる. $x_1, x_2, \dots, x_k$ の並べ方の総数は $k!$ 通りなので逐次積分の値は k 次元立方体の体積 $(x-a)^k$ の $k!$ 分の 1 になる.

[108] 点, 線分, 三角形, 四面体の k 次元版を k 次元単体 (simplex) と呼ぶ.

以上によって Taylor 展開の各項の分母に階乗が現われる理由も明瞭になった! すなわち, 1 の k 回の逐次積分の結果は k 次元立方体の体積の $k!$ 分の 1 になるので分母に $k!$ が現われる.

以上のまとめ:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + R_n,$$
$$R_n = \int_a^x dx_1 \cdots \int_a^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} f^{(n)}(x_n)\,dx_n.$$

これを積分剰余項型の **Taylor の定理**と呼ぶことにする.

注意. 次のように考えてもよい. n 階の導函数 $f^{(n)}(x)$ を n 回逐次積分すれば $f(x)$ が得られるはずである. しかし, 積分定数を考慮すれば x について $n-1$ 次以下の項が生じることになる. その結果, 以下のような公式が得られる:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + R_n.$$

ここで R_n は上のように定義された $f^{(n)}(x)$ を n 回逐次積分したものである. この式の両辺を $k = 0, 1, \ldots, n-1$ 回微分して $x = a$ とおけば R_n から来る項は 0 になるので, $f^{(k)}(a) = k!a_k$ が得られる. すなわち $a_k = f^{(k)}(a)/k!$ である.

以上の計算の仕方は, 形式的に $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ とおいて両辺を繰り返し微分して $x = a$ とおくことによって a_k を決定する方法と同じだが, 剰余項 R_n の正体が明瞭にわかっているので Taylor 級数の収束性に関わる論理的なギャップが生じない.

このように剰余項付きの Taylor の定理は「n 階の導函数 $f^{(n)}(x)$ を n 回逐次積分すればもとの $f(x)$ が得られるはずだ」という非常にもっともな考え方から素直に得られるのである. □

11.2 剰余項の絶対値の上からの評価と Taylor 展開の具体例

剰余項 R_n が $n \to \infty$ で 0 に収束するならば

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x-a)^k$$

が成立する. これを函数 f の $x = a$ における **Taylor 展開**と呼ぶ[109].

剰余項の大きさを上から評価するためには次のようにすればよい. まず $R > 0$ を取って, x の動く範囲を $|x-a| \leqq R$ に限定する. そして, ある $M_n > 0$ で $|f^{(n)}(x)| \leqq M_n$ $(|x-a| \leqq R)$ を満たすものを見付ける. そのとき

$$|R_n| \leqq M_n \left| \int_a^x dx_1 \cdots \int_a^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} dx_n \right| = \frac{M_n |x-a|^n}{n!} \leqq \frac{M_n R^n}{n!} \qquad \text{(R)}$$

となるので, $M_n R^n/n! \to 0$ ならば Taylor 展開が $|x-a| \leqq R$ において $f(x)$ に一様収束する. 剰余項の具体的な形そのものよりも剰余項の絶対値の上からの評価 (R) の方がよく使われる.

[109] $x = 0$ における Taylor 展開を Maclaurin 展開と呼ぶことがある.

たとえば M_n 増大速度が n の指数函数程度ならばTaylor展開は収束する ($A^n R^n/n! \to 0$). そのことから, e^x, $\cos x$, $\sin x$ の Taylor 展開がどのような a, x についても常に収束することが容易に確かめられる:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}.$$

M_n の増大速度が $n!$ と同じ程度の場合には Taylor 展開は $|x-a|<1$ で $f(x)$ に収束する. たとえば, $f(x) = (1+x)^\alpha$ のとき,

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

なので, この f の $x=0$ での Taylor 展開は $|x|<1$ で収束することがわかる. 同様にして $f(x) = \log(1+x)$ の $x=0$ での Taylor 展開は $|x|<1$ で収束することがわかる.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (|x|<1), \qquad \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad (|x|<1).$$

次の Taylor 展開もよく使われる:

$$-\log(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad (|x|<1).$$

これを拡張した公式

$$\mathrm{Li}_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^r} \qquad (|x|<1,\ r = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定義される函数 $\mathrm{Li}_r(x)$ は r 次の多重対数函数 (polylogarithm, 通称ポリログ) と呼ばれている. 特に $\mathrm{Li}_2(x)$ は dilogarithm (通称ダイログ) と, $\mathrm{Li}_3(x)$ の場合には trilogarithm (通称トリログ) と呼ばれている. このとき

$$\frac{d\,\mathrm{Li}_r(x)}{dx} = \frac{\mathrm{Li}_{r-1}(x)}{x} \quad (r \geqq 2), \qquad \mathrm{Li}_1(x) = -\log(1-x) = \int_0^x \frac{dx_1}{1-x_1}$$

なので, 多重対数函数は

$$\mathrm{Li}_r(x) = \int_0^x \frac{dx_r}{x_r} \cdots \int_0^{x_3} \frac{dx_2}{x_2} \int_0^{x_2} \frac{dx_1}{1-x_1} = \int\cdots\int_{0<x_1<\cdots<x_r<x} \frac{dx_1}{1-x_1} \frac{dx_2}{x_2} \cdots \frac{dx_r}{x_r}$$

と逐次積分表示される. 2 つ目の等号で $0<x<1$ を仮定した. 以上を合わせると Riemann のゼータ函数の 2 以上の整数 r における特殊値の積分表示が得られる:

$$\zeta(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \mathrm{Li}_r(1) = \int\cdots\int_{0<x_1<\cdots<x_r<1} \frac{dx_1}{1-x_1} \frac{dx_2}{x_2} \cdots \frac{dx_r}{x_r} \qquad (r = 2, 3, 4, \ldots).$$

かなり話題を脱線させてしまったので, Taylor の定理の話に戻ろう.

大抵の場合, 剰余項の R_n の評価式 (R) を知っていれば十分なのだが, 剰余項 R_n を逐次積分ではなく, 1 回の積分で表示する公式があるのでそれを紹介しておこう. 簡単のた

め $a \leqq x$ と仮定しよう ($a \geqq x$ の場合も同様である). R_n の逐次積分は $a \leqq x_n \leqq x_{n-1} \leqq \cdots \leqq x_1 \leqq x$ にわたる積分であることに注意しながら, x_n による積分を一番外側に出すと,

$$R_n = \int_a^x f^{(n)}(x_n) \left(\int_{x_n}^x dx_1 \int_{x_n}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{x_n}^{x_{n-2}} dx_{n-1} \right) dx_n = \int_a^x f^{(n)}(x_n) \frac{(x - x_n)^{n-1}}{(n-1)!} \, dx_n.$$

2 つ目の等号で 1 の逐次積分が $(n-1)$ 次元立方体の体積の $(n-1)!$ 分の 1 になるという上の方で説明した結果を使った.

11.3 線形常微分方程式の解法

次の線形微分方程式を考える:

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \qquad U(0) = E.$$

ここで $A(t)$ は正方行列値連続函数であり, $U(t)$ は初期値が正方行列の正方行列値函数である. この微分方程式は次と同値である:

$$U(t) = E + \int_0^t A(t_1)U(t_1) \, dt_1.$$

前節を読んだ読者は Taylor の定理を証明した場合と同様にこの式を繰り返し用いれば解が得られそうなことに気付くはずである. この式で t, t_1 のそれぞれを t_1, t_2 に置き換えた式をその式自身に代入すると,

$$U(t) = E + \int_0^t A(t_1) \, dt_1 + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} A(t_1)A(t_2)U(t_2) \, dt_2.$$

同じ操作をもう一度繰り返すと

$$U(t) = E + \int_0^t A(t_1) \, dt_1 + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} A(t_1)A(t_2) \, dt_2 + R_3,$$
$$R_3 = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} A(t_1)A(t_2)A(t_3)U(t_3) \, dt_3.$$

同様に繰り返すと, 帰納的に次が成立していることがわかる:

$$U(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{k-1}} A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_k) \, dt_k + R_n,$$
$$R_n = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n)U(t_n) \, dt_n.$$

実はこれの $n \to \infty$ の極限で微分方程式の解が

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{k-1}} A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_k) \, dt_k.$$

で得られることを示せる. 積分中の $A(t_i)$ 達は大きな t_i の順番に並んでいることに注意せよ. 時間順序積 $T[\ \ ]$ を次のように定める:

$$T[A(t_1) \dots A(t_k)] = A(t_{\sigma(1)}) \cdots A(t_{\sigma(k)}), \quad t_{\sigma(1)} \geqq \cdots \geqq t_{\sigma(k)}, \quad \sigma \in S_k.$$

この記号法のもとで上の公式は次のように書き直される:

$$U(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^t\cdots\int_0^t T[A(t_1)\cdots A(t_k)]\,dt_1\cdots dt_k.$$

さらに形式的に $T[\ ]$ を積分と和の外に出すことを許せばこれは次のように書き直される:

$$U(t)=T\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)^k\right]=T\left[\exp\int_0^t A(s)\,ds\right]$$

この形の公式は物理の教科書などで散見される.

以上で解説した線形常微分方程式の解法は Picard の逐次代入法の特別な場合である. すなわち以上の方法は非線形の場合にも適用できる. このように Taylor の定理の逐次積分による証明法を知っていれば, 線形常微分方程式の逐次代入法による解法もすぐに思い付くだろうし, さらに Picard の逐次代入法にまで一般化される. このような理由から Taylor の定理を逐次積分で証明する方法の紹介は相当に教育的だと思われる.

11.4 微分剰余項型 Taylor の定理

逐次積分表示された剰余項を持つ Taylor の定理を知っているだけで困らないはずなのだが, 多くの文献で剰余項を高階の導函数で表示する公式もよく使われているので簡単に紹介しておこう.

Cauchy の平均値の定理： 実函数 F, G が微分可能でかつ $F(t)\neq G(a)$ でかつ速度ベクトル (F',G') が a と t のあいだで決して 0 にならないならば a と t のあいだのある実数 t_1 で

$$\frac{G(t)-G(a)}{F(t)-F(a)}=\frac{G'(t_1)}{F'(t_1)}$$

を満たすものが存在する.

この定理が成立することは, xy 平面に $(F(s),G(s))$ の軌跡の曲線を描いて, 点 $(F(a),G(a))$ と点 $(F(t),G(t))$ を結ぶ直線と速度ベクトルが平行になる時刻 t_1 の存在を視覚的に読み取れることを確認すれば納得できるだろう. 厳密な証明には Roll の定理 [110] を使うが, 個人的には「直観的に明らかな定理」とみなして問題ないと思う.

まず例として f が 4 回微分可能な場合を扱おう.

$$\begin{aligned}G(t)&=f(t)-f(a)-f'(a)(t-a)-f''(a)\frac{(t-a)^2}{2}-f'''(a)\frac{(t-a)^3}{3!},\\F(t)&=(t-a)^4\end{aligned}$$

とおく. $F(a)=F'(a)=F''(a)=F'''(a)=0$, $G(a)=G'(a)=G''(a)=G'''(a)=0$ に注意しながら, Cauchy の平均値の定理を次々に適用すると, a と t のあいだのある実数

[110] Roll の定理は「閉区間上の連続函数が最大値と最小値を持つ」という結果から従う. もしくは Roll の定理を経由せずに直接的に次のように考えてもよい. s は a と t のあいだを動くものとし, 点 $(F(a),G(a))$ と点 $(F(t),G(t))$ を結ぶ直線 ℓ から軌跡上の点 $(F(s),G(s))$ への距離が最大になる時刻 $s=t_1$ が存在する. このとき速度ベクトル $(F'(t_1),G'(t_1))$ が直線 ℓ に平行になることを示せる.

t_1, t_2, t_3, t_4 で以下を満たすものの存在が示される:

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(t)-f(a)-f'(a)(t-a)-f''(a)\dfrac{(t-a)^2}{2}-f'''(a)\dfrac{(t-a)^3}{3!}}{(t-a)^4} \\
=&\frac{f'(t_1)-f'(a)-f''(a)(t_1-a)-f'''(a)\dfrac{(t_1-a)^2}{2!}}{4(t_1-a)^3} \\
=&\frac{f''(t_2)-f''(a)-f'''(a)(t_2-a)}{4\cdot 3(t_2-a)^2} \\
=&\frac{f'''(t_3)-f'''(a)}{4\cdot 3\cdot 2(t_3-a)} \qquad (*) \\
=&\frac{f^{(4)}(t_4)}{4!}.
\end{aligned}
$$

形式的には分子分母を微分して次の番号の t_i を代入する操作を繰り返しただけである. 以上によって a と t のあいだのある実数 t_4 で

$$
\begin{aligned}
&f(t)=f(a)+f'(a)(t-a)+f''(a)\frac{(t-a)^2}{2}+f'''(a)\frac{(t-a)^3}{3!}+R_4, \\
&R_4=f^{(4)}(t_4)\frac{(t-a)^4}{4!}
\end{aligned}
$$

を満たすものの存在が証明された. これで 4 回微分可能な函数に関する微分剰余項型の Taylor の定理が証明された.

さらに上の計算中のうしろから 2 番目の等号の右辺 $(*)$ の $t\to a$ での極限は

$$
\frac{1}{4!}\lim_{t_3\to a}\frac{f'''(t_3)-f'''(a)}{t_3-a}=\frac{1}{4!}f^{(4)}(a)
$$

になる [111]. t_4 は a と t のあいだにあるので, $t\to a$ で $t_4\to a$ となることに注意せよ. これは上の計算の出発点の式の $t\to a$ での極限に等しい:

$$
\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)-f'(a)(t-a)-f''(a)\dfrac{(t-a)^2}{2}-f'''(a)\dfrac{(t-a)^3}{3!}}{(t-a)^4}=\frac{1}{4!}f^{(4)}(a).
$$

これは次と同値である:

$$
\begin{aligned}
f(t)=f(a)+f'(a)(t-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}& \\
+f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+f^{(4)}(a)\frac{(t-a)^4}{4!}+o((t-a)^4)&.
\end{aligned}
$$

これで 4 回微分可能な函数に関する “small order” 型 Taylor の定理も証明できた.

以上と全く同様にして, f が n 回微分可能ならば

$$
f(t)=\sum_{k=0}^{n-1}f^{(k)}(a)\frac{(t-a)^k}{k!}+R_n, \qquad R_n=f^{(n)}(t_n)\frac{(t-a)^n}{n!}
$$

[111] もしも f が C^4 級ならば $\lim_{t\to a}f^{(4)}(t_4)=f^{(4)}(a)$ となるので, うしろから 2 つ目の等号の右辺を使う必要はない. しかし, 我々は $f^{(4)}$ の連続性を仮定せずに, f は 4 回微分可能だと仮定していただけだったのでそうしなければいけなくなった.

を満たす a と t のあいだの実数 t_n の存在が証明できる. ゆえに $|t-a| \leqq R$, $|f^{(n)}(s)| \leqq M_n$ $(|s-a| \leqq R)$ ならば

$$|R_n| \leqq \frac{M_n R^n}{n!}$$

となる. すなわち積分表示された剰余項の場合と同じ形の評価式が得られる. さらに上と同様にして次も証明される:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^k}{k!} + o((t-a)^n).$$

これらの結果も **Taylor の定理**と呼ばれる.

以上の証明は n 回微分可能であることのみを仮定するだけで可能である. n 階の導函数の連続性を仮定する必要はない.