

行列の指数関数とその一般化 ¶

- Author: 黒木玄
- Date: 2019-06-05~2019-06-05
- Repository: <https://github.com/genkuroki/DifferentialEquations> (<https://github.com/genkuroki/DifferentialEquations>)

このファイルは [nbviewer](https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/DifferentialEquations/blob/master/09-1%20Matrix%20exponential.ipynb) (<https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/DifferentialEquations/blob/master/09-1%20Matrix%20exponential.ipynb>) でも閲覧できる.

[Julia言語](https://julialang.org/) (<https://julialang.org/>) と [Jupyter環境](https://jupyter.org/) (<https://jupyter.org/>) の簡単な解説については次を参照せよ:

- [JuliaとJupyterのすすめ](https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/msfd28genkuroki.ipynb?flush_cached=true) (https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/msfd28genkuroki.ipynb?flush_cached=true)

[Julia言語](https://julialang.org/) (<https://julialang.org/>) 環境の整備の仕方については次を参照せよ:

- [Julia v1.1.0 の Windows 8.1 へのインストール](https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/install.ipynb) (<https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/install.ipynb>)

[Wolfram言語](http://www.wolfram.com/language/fast-introduction-for-programmers/ja/) (<http://www.wolfram.com/language/fast-introduction-for-programmers/ja/>) 環境の整備の仕方については次を参照せよ:

- [Free Wolfram EngineをJupyterで使う方法](https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/Free%20Wolfram%20Engine.ipynb) (<https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/Free%20Wolfram%20Engine.ipynb>)

注意: このノートブックの出力結果は [Free Wolfram EngineをJupyterで使う方法](https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/Free%20Wolfram%20Engine.ipynb) (<https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/Free%20Wolfram%20Engine.ipynb>) に書いてある修正を `OutputHandlingUtilities.wl` の `toOutText` 関数 (<https://github.com/WolframResearch/WolframLanguageForJupyter/blob/master/WolframLanguageForJupyter/Resources/OutputHandlingUtilities.wl>) に施した場合にのみ得られる出力である. 例えば, `<pre> ~ </pre>` で囲んである部分を `$$ ~ $$` で囲むように修正している.

目次

- 1 行列の指数関数
 - 1.1 行列の指数関数の定義
 - 1.2 行列の指数関数の積
- 2 定数係数でない場合
 - 2.1 定数係数でない場合の線形常微分方程式の解法
 - 2.2 時間順序積
 - 2.3 非定数係数でかつ非斉次な場合

```
In [1]: 1  JupyterImageResolution = 84;
2  JupyterOutTextForm = "TeX";
3
4  ▼ TeX[x_] := ToString[TeXForm[x]]
5  ▼ TeX[x_, y_] := StringJoin[TeX[x], TeX[y]]
6  ▼ TeXRaw[x_, y_] := StringJoin[x, TeX[y]]
7
8  ▼ MappedBy[x_] := x
9  ▼ MappedBy[x_, F___, G_] := MappedBy[x, F] // G
10
11 ▼ SetAttributes[TeXEq, HoldFirst]
12 ▼ TeXEq[x_] := TeX[HoldForm[x] == MappedBy[x, ReleaseHold, FullSimplify]]
13 ▼ TeXEq[x_, F_] := TeX[HoldForm[x] == MappedBy[x, ReleaseHold, F]]
```

1 行列の指数関数

1.1 行列の指数関数の定義

X は $L \times L$ の実行列もしくは複素行列であるとする.

$e^X = \exp(X)$ を次のように定義する:

$$e^X = \exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n.$$

これが収束することは次のようにして確かめられる. $L \times L$ 行列 $X = [x_{ij}]$ の成分の絶対値の最大値を M と書くと, X^n の (i, k) 成分

$$\sum_{j_1, \dots, j_{n-1}=1}^L x_{ij_1} x_{j_1 j_2} \cdots x_{j_{n-2} j_{n-1}} x_{j_{n-1} k}$$

の絶対値 M_n は三角不等式 $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ によって

$$M_n \leq \sum_{j_1, \dots, j_{n-1}=1}^L |x_{ij_1} x_{j_1 j_2} \cdots x_{j_{n-2} j_{n-1}} x_{j_{n-1} k}| \leq \sum_{j_1, \dots, j_{n-1}=1}^L M^n = L^{n-1} M_1^n = \frac{1}{L} (LM)^n$$

と上から抑えられる. ゆえに, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$ の (i, k) 成分の級数の各項の絶対値を取ったものは

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{L} (LM)^n \leq \frac{1}{L} e^{LM} < \infty$$

で上から抑えられる. ゆえに, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$ の (i, k) 成分は絶対収束する.

収束性に関わる厳密な取り扱いはいくらににして, 以下では $e^X = \exp(X)$ を定義する級数について形式的な操作がすべて正当化されることを認めて自由に使うことにする.

公式: $L \times L$ 行列 A について

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

証明: 次の公式の右辺の級数は項別微分できる:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

実際に微分すると, $(d/dt)(t^n/n!) = t^{n-1}/(n-1)!$ より,

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} A^{m+1}.$$

この等式の右辺は $A e^{tA} = e^{tA} A$ に等しい. \square

注意: 行列の三角関数も

$$\cos X = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin X = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

によって定義される. このとき

$$\frac{d}{dt} \cos(tA) = -A \sin(tA), \quad \frac{d}{dt} \sin(tA) = A \cos(tA)$$

などが成立している. \square

注意: さらに sinc 関数

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

の行列版を

$$\operatorname{sinc} X = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k}}{(2k+1)!}$$

と定めておく. 例えば

$$t \operatorname{sinc}(tX) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} (-X^2)^k$$

であり、両辺を t で微分すると、

$$\frac{d}{dt}(t \operatorname{sinc}(tX)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} (-X^2)^k = \cos(tX).$$

sinc 関数はFourier解析によく出て来る基本的な関数の1つである.

$$\int_{-a}^a e^{-ipx} dx = \left[\frac{e^{-ipx}}{-ip} \right]_{x=-a}^{x=a} = \frac{e^{-iap} - e^{iap}}{-ip} = \frac{2 \sin(ap)}{p} = 2a \operatorname{sinc}(ap).$$

の形でよく出て来る. \square

例: $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ のとき,

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\beta t} \end{bmatrix}$$

となる. 任意の $L \times L$ の対角行列の場合にも同様である. \square

```
In [14]: 1 ▼ Clear[A,t]
          2 ▼ A = {{alpha, 0}, {0, beta}};
          3 A // TeXEq
          4 ▼ MatrixExp[t A] // TeXEq
```

Out[16]: Out[16]: $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

Out[17]: $\operatorname{MatrixExp}[tA] = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\beta t} \end{pmatrix}$

例: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ のとき, $A^2 = 0$ なので

$$e^{tA} = E + tA = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる. もっと一般に, $L \times L$ 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

と定めると,

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & \\ & 0 & \cdots & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

となる. ただし A^n の中で 1 達は $(i, i+n)$ 成分に並んでいる. このとき $A^L = 0$ となるので,

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \cdots + \frac{t^{L-1}}{(L-1)!} A^{L-1}$$

となる. \square

```

In [18]: 1 ▼ Clear[A,t]
          2 ▼ A = {{0,1,0,0,0},{0,0,1,0,0},{0,0,0,1,0},{0,0,0,0,1},{0,0,0,0,0}};
          3 A // TeXEq
          4 ▼ MatrixExp[t A] // TeXEq

```

Out[20]: Out[20]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[21]:

$$\text{MatrixExp}[tA] = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} & \frac{t^4}{24} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおき, 単位行列を E と書くと, $A^2 = -E$ より,

$$A^{2k} = (-1)^k E, \quad A^{2k+1} = (-1)^k A$$

なので,

$$e^{\theta A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} (-1)^k E + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k A = (\cos \theta) E + (\sin \theta) A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

この $e^{\theta A}$ を **回転行列** と呼ぶことがある. この公式は本質的に

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

と同じ種類のものである. \square

```

In [22]: 1 ▼ Clear[A,theta]
          2 ▼ A = {{0,-1},{1,0}};
          3 A // TeXEq
          4 ▼ MatrixExp[theta A] // TeXEq

```

Out[24]: Out[24]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[25]:

$$\text{MatrixExp}[\theta A] = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

例: Ω は $L \times L$ 行列であるとし, $2L \times 2L$ 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

と定めると,

$$A^{2k} = \begin{bmatrix} (-\Omega^2)^k & 0 \\ 0 & (-\Omega^2)^k \end{bmatrix}, \quad A^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & (-\Omega^2)^k \\ (-\Omega^2)^{k+1} & 0 \end{bmatrix}$$

なので,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{bmatrix} (-\Omega^2)^k & 0 \\ 0 & (-\Omega^2)^k \end{bmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{bmatrix} 0 & (-\Omega^2)^k \\ (-\Omega^2)^{k+1} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & t \sin(\Omega t) \\ -\Omega \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

```

In [26]: 1 ▼ Clear[A,p,t]
          2 ▼ A = {{0,1},{-p^2,0}};
          3 A // TeXEq
          4 ▼ MatrixExp[t A] // TeXEq

```

Out[28]: Out[28]: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2 & 0 \end{pmatrix}$

Out[29]: $\text{MatrixExp}[tA] = \begin{pmatrix} \cos(pt) & \frac{\sin(pt)}{p} \\ -p \sin(pt) & \cos(pt) \end{pmatrix}$

1.2 行列の指数関数の積

例: 行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と定めると,

$$AB = B, \quad BA = -B$$

が成立しており, 特に $AB \neq BA$ となっている.

このとき

$$e^{sA} = \begin{bmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix}, \quad e^{tB} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

なので

$$e^{sA}e^{tB} = \begin{bmatrix} e^s & e^s t \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix}, \quad e^{tB}e^{sA} = \begin{bmatrix} e^s & e^{-s} t \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix}.$$

さらに, $X = sA + tB$ とおくと, $A^2 = E, B^2 = 0, AB + BA = B - B = 0$ なので, $X^2 = s^2 E$ となるので,

$$X^{2k} = s^{2k} E = s^{2k} A^{2k}, \quad X^{2k+1} = s^{2k} X = s^{2k+1} A + s^{2k} tB$$

ゆえに,

$$e^{sA+tB} = e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} A^n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{2k} t}{(2k+1)!} B = \begin{bmatrix} e^s & t \sinh(s)/s \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix}.$$

以上のように $e^{sA}e^{tB}, e^{tB}e^{sA}, e^{sA+tB}$ は互いにすべて異なる. \square

```

In [30]: 1 ▼ Clear[A,B,s,t]
2 ▼ A = {{1,0},{0,-1}};
3 ▼ B = {{0,1},{0,0}};
4 X = s A + t B;
5 s A // TeXEq
6 t B // TeXEq
7 X // TeXEq
8 ▼ MatrixPower[X,2] // TeXEq
9 ▼ MatrixPower[MatrixPower[X,2],k] // TeXEq
10 ▼ MatrixPower[MatrixPower[X,2],k] . X // TeXEq
11 ▼ MatrixExp[s A] // TeXEq
12 ▼ MatrixExp[t B] // TeXEq
13 ▼ MatrixExp[s A].MatrixExp[t B] // TeXEq
14 ▼ MatrixExp[t B].MatrixExp[s A] // TeXEq
15 ▼ MatrixExp[X] // TeXEq

```

Out[34]: $sA = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix}$

Out[35]: $tB = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Out[36]: $X = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & -s \end{pmatrix}$

Out[37]: $\text{MatrixPower}[X, 2] = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix}$

Out[38]: $\text{MatrixPower}[\text{MatrixPower}[X, 2], k] = \begin{pmatrix} (s^2)^k & 0 \\ 0 & (s^2)^k \end{pmatrix}$

Out[39]: $\text{MatrixPower}[\text{MatrixPower}[X, 2], k]. X = \begin{pmatrix} s(s^2)^k & t(s^2)^k \\ 0 & -s(s^2)^k \end{pmatrix}$

Out[40]: $\text{MatrixExp}[sA] = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}$

Out[41]: $\text{MatrixExp}[tB] = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Out[42]: $\text{MatrixExp}[sA].\text{MatrixExp}[tB] = \begin{pmatrix} e^s & e^s t \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}$

Out[43]: $\text{MatrixExp}[tB].\text{MatrixExp}[sA] = \begin{pmatrix} e^s & e^{-s} t \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}$

Out[44]: $\text{MatrixExp}[X] = \begin{pmatrix} e^s & \frac{t \sinh(s)}{s} \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}$

補題: $L \times L$ 行列 A, B について $AB = BA$ ならば $n = 0, 1, 2, \dots$ について次の二項定理が成立している:

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

証明: $n = 0, 1$ の場合に二項定理は自明に成立している. 帰納的に n について二項定理が成立していると仮定する(帰納法の仮定). 二項係数 $\binom{n}{k}$ について,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+2)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1) \cdots (n-k+2)(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+2)k + n(n-1) \cdots (n-k+2)(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1) \cdots (n-k+2)}{k!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

この結果は $k = 0$ の場合にも $\binom{n}{-1} = 0$ と約束しておくで成立している. $\binom{n}{n+1} = 0$ であることにも注意せよ. したがって,

$$\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= (A+B)(A+B)^n \\
&= (A+B) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A A^k B^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A A^k B^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B B^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{k+1} B^{n+1-(k+1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} A^k B^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} A^k B^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) A^k B^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} A^k B^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

4番目の等号2つ目の和の各項で $BA = AB$ を使ったことに注意せよ。2番目の等号で帰納法の仮定を使い、6番目の等号で $k+1$ を k に置き換えて、 $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$ を使って和の範囲を拡大した。ゆえに数学的帰納法より、 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して二項定理が成立している。□

定理: $L \times L$ 行列 A, B について $AB = BA$ ならば

$$e^A e^B = e^{A+B}.$$

証明: 右辺を二項定理を使って左辺に変形できることを示そう。

$$\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!} A^k B^l \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} B^l = e^A e^B.
\end{aligned}$$

2番目の等号で $AB = BA$ より二項定理を使えることを用い、3番目の等号で $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$ を用い、4番目の等号で $l = n - k$ とおき、和を取るためのインデックスの取り方を変えた。これで示すべきことが示された。□

問題: 3×3 行列 A, B, Q で $AB - BA = Q$, $AQ = QA$, $BQ = QB$ を満たすものを1つ見付けよ。

解答例:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \square$$

```

In [45]: 1 Clear[A,B,Q]
2 A = {{0,1,0},{0,0,0},{0,0,0}};
3 B = {{0,0,0},{0,0,1},{0,0,0}};
4 Q = A.B - B.A;
5 A // TeXEq
6 B // TeXEq
7 Q // TeXEq
8 A.B - B.A - Q // TeXEq
9 A.Q - Q.A // TeXEq
10 B.Q - Q.B // TeXEq

```

Out[49]: Out[49]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[50]:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[51]:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[52]:

$$A.B - B.A - Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[53]:

$$A.Q - Q.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[54]:

$$B.Q - Q.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題: $L \times L$ 行列 A, B, Q が $AB - BA = Q$, $AQ = QA$, $BQ = QB$ を満たしているとき,

$$e^A e^B = e^Q e^B e^A, \quad e^{A+B} = e^{-Q/2} e^A e^B.$$

となることを証明せよ.

解答例: 前者の公式の証明. $[A, X] = AX - XA$ と書き, 行列 X に左から A をかける操作を $\lambda_A X = AX$ と書き, 右から A をかける操作を $\rho_A X = XA$ と書くと, $[A, X] = AX - XA = (\lambda_A - \rho_A)X$ と書ける. $\lambda_A \rho_A = \rho_A \lambda_A$ なので,

$$e^{\lambda_A - \rho_A} B = e^{\lambda_A} e^{-\rho_A} B = e^A B e^{-A}.$$

一方, $[A, B] = Q$, $[A, [A, B]] = [A, Q] = 0$ なので

$$e^{\lambda_A - \rho_A} B = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots = B + Q.$$

これで

$$e^A B e^{-A} = B + Q$$

が示された. 両辺の指数関数を取ると, $BQ = QB$ より

$$e^A e^B e^{-A} = e^Q e^B.$$

これより $e^A e^B = e^Q e^B e^A$ となることがわかった.

後者の公式の証明. 上と同様にして, $e^{tA} B e^{-tA} = B + tQ$ を示せる. $F(t) = e^{t(A+B)}$, $G(t) = e^{-t^2 Q/2} e^{tA} e^{tB}$ とおく. このとき, $F(0) = G(0) = E$ であつ,

$$\begin{aligned}
F'(t) &= (A + B)F(t), \\
G'(t) &= -tQe^{-t^2 Q/2} e^{tA} e^{tB} + e^{-t^2 Q/2} A e^{tA} e^{tB} + e^{-t^2 Q/2} e^{tA} B e^{tB} \\
&= -tQe^{-t^2 Q/2} e^{tA} e^{tB} + e^{-t^2 Q/2} A e^{tA} e^{tB} + e^{-t^2 Q/2} (B + tQ) e^{tA} e^{tB} \\
&= -tQe^{-t^2 Q/2} e^{tA} e^{tB} + A e^{-t^2 Q/2} e^{tA} e^{tB} + (B + tQ) e^{-t^2 Q/2} e^{tA} e^{tB} \\
&= (-tQ + A + (B + tQ))G(t) = (A + B)G(t).
\end{aligned}$$

$F(t)$ と $G(t)$ は同一の定数係数の線形常微分方程式の初期値問題を満たすので互いに等しい. 特に $t = 1$ の場合には $e^{A+B} = e^{-Q/2} e^A e^B$. \square

2 定数係数でない場合

A が $L \times L$ の定数行列の場合には, $L \times L$ 行列値関数 $U = U(t)$ に関する定数係数線形常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}U(t) = AU(t), \quad u(0) = E$$

は, 行列の指数関数を使って,

$$U(t) = e^{tA}$$

と(少なくとも原理的には)一瞬で解けてしまう. (E は単位行列を表わす.)

A が定数行列ではなく, 独立変数 t に依存する関数の場合はどうだろうか? 次の初期値問題を考える:

$$\frac{d}{dt}U(t) = A(t)U(t), \quad U(0) = E. \quad (*)$$

2.1 定数係数でない場合の線形常微分方程式の解法

初期値問題 (*) は積分を使って次のように書き直される:

$$U(t) = E + \int_0^t dt_1 A(t_1)U(t_1).$$

積分関連の記号をすべて左側に寄せたことに注意せよ(このように書いてもよい). 右辺で t, t_1 を t_1, t_1 に置き換えたものを右辺の $U(t_1)$ に代入すると,

$$U(t) = E + \int_0^t dt_1 A(t_1) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1)A(t_2)U(t_2).$$

同様に繰り返すと

$$U(t) = \int_0^t dt_1 A(t_1) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1)A(t_2) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 A(t_1)A(t_2)A(t_3)U(t_3), \dots$$

の極限として次が得られる:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n). \quad (**)$$

この右辺は実際に収束しており, 項別微分可能であることも示せる(証明略). 右辺の $n = 0$ に対応する項は単位行列 E であると約束しておく.

公式(**)の右辺を t で項別微分すると,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t)A(t_2) \cdots A(t_n) \\ &= A(t) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t_2) \cdots A(t_n) \\ &= A(t) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n), \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^0 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n) = E \end{aligned}$$

と(*)の解になっていることがわかる.

注意: 以上の方法は常微分方程式の初期値問題の一般的な開放である [Picardの逐次近似法](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%94%E3%82%AB%E3%83%BC%E3%83%AB%E3%81%AE%E9%80%90%E6%AC%A1%E8%B)

(<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%94%E3%82%AB%E3%83%BC%E3%83%AB%E3%81%AE%E9%80%90%E6%AC%A1%E8%B>) を線形の場合に適用した結果になっている. \square

2.2 時間順序積

$T[\]$ の内側では $A(t)$ の t が大きなものほど左側に寄せた積になっていると仮定する. 例えば, $t_1 > t_2 > t_3$ のとき,

$$T[A(t_2)A(t_1) + A(t_3)A(t_1)A(t_2)] = A(t_1)A(t_2) + A(t_1)A(t_2)A(t_3).$$

以下, $t > 0$ と仮定する. このとき, 積分

$$K_n = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n)$$

は t_i たちを $t > t_1 > t_2 > \cdots > t_n > 0$ の範囲で動かす積分になっている. $A(t)$ 達は t の大きな順序に並んでいる. ゆえに, これを $n!$ 倍して $n!$ で割ることによって次が得られる:

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n T[A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n)] \\ &= \frac{1}{n!} T \left[\int_0^t dt_1 A(t_1) \cdot \int_0^{t_1} dt_2 A(t_2) \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t_n) \right] \\ &= \frac{1}{n!} T \left[\left(\int_0^t A(s) ds \right)^n \right]. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n = T \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T \left[\left(\int_0^t A(s) ds \right)^n \right] \right] = T \left[\exp \int_0^t A(s) ds \right].$$

これで(**)を次のように書き直すことができることがわかった:

$$U(t) = T \left[\exp \int_0^t A(s) ds \right]. \quad (**')$$

これは, スカラー値関数 $a(t)$ が与えられたときの初期値問題

$$\frac{d}{dt}u(t) = a(t)u(t), \quad u(0) = 1$$

の解の公式

$$u(t) = \exp \int_0^t a(s) ds$$

の行列の場合への一般化になっている. 公式(**')は公式(**)のコンパクトな表示として便利である.

2.3 非定数係数でかつ非斉次な場合

$A(t)$ は $L \times L$ の行列値関数であるとし, $b(t)$ は L 次元列(縦)ベクトル値関数であるとし, u_0 は定数の L 次元列ベクトルであるとする. L 次元列ベクトル値関数 $u = u(t)$ に関する次の微分方程式の初期値問題を考えよう:

$$\frac{d}{dt}u(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad u(0) = u_0.$$

この解を, 前節までの $U(t)$ を用いた $u(t) = U(t)f(t)$ の形で探してみよう(定数変化法). ここで $f(t)$ は求めるべき L 次元列ベクトル値関数である. $u(t) = U(t)f(t)$ のとき, $\dot{U}(t) = A(t)U(t)$, $U(0) = E$ より,

$$\frac{d}{dt}u(t) = A(t)U(t)f(t) + U(t)\frac{d}{dt}f(t), \quad u(0) = f(0)$$

なので, 上の初期値問題の解を得るためには

$$\frac{d}{dt}f(t) = U(t)^{-1}b(t), \quad f(0) = u_0$$

であればよい. これは

$$f(t) = u_0 + \int_0^t U(s)^{-1}b(s) ds$$

と解ける.

$$u(t) = U(t)f(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t)U(s)^{-1}b(s)ds$$

は上の初期値問題の解になっている.

例: $L = 1$ の場合. この場合には $A(t)$, $b(t)$ はスカラー値関数になる. それを $A(t)$ を $a(t)$ と書くと,

$$U(t)U(s)^{-1} = \exp\left(\int_0^t a(r)dr\right) \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) = \exp\int_s^t a(r)dr$$

なので

$$\frac{d}{dt}u(t) = a(t)u(t) + b(t)$$

は

$$u(t) = \left(\exp\int_0^t a(s)ds\right)u_0 + \int_0^t \left(\exp\int_s^t a(r)dr\right)b(s)ds$$

と解ける. \square

注意: $U(t, s) = U(t)U(s)^{-1}$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t, s) = A(t)U(t, s), \quad U(s, s) = E$$

を満たしているので, $t \geq s$ のとき,

$$U(t, s) = T \left[\exp \int_s^t A(r)dr \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \cdots \int_s^{t_{n-1}} dt_n A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n)$$

と書ける. $U(t, s) = U(t)U(s)^{-1}$ を s で偏微分すると

$$\frac{d}{ds}U(s)^{-1} = -U(s)^{-1} \frac{dU(s)}{ds} U(s)^{-1}, \quad \frac{dU(s)}{ds} = A(s)U(s)$$

より,

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t, s) = -U(t)U(s)^{-1}A(s) = -U(t, s)A(s)$$

を満たしている. $U(t, s)$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t, s) = A(t)U(t, s), \quad \frac{\partial}{\partial s}U(t, s) = -U(t, s)A(s), \quad U(s, s) = E$$

という条件で一意的に特徴付けられる. \square

▶ In []:

1