定数係数線形常微分方程式(斉次)

* Author: 黒木玄

* Date: 2019-04-23〜2019-05-06
* Repository: https://github.com/genkuroki/DifferentialEquations (https://github.com/genkuroki/DifferentialEquations)

このファイルは nbviewer (https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/DifferentialEquations/blob/master/01-1%20Van%20der%20Pol%20oscillator.ipynb) でも閲覧できる.

Julia言語 (https://julialang.org/) と Jupyter環境 (https://jupyter.org/) の簡単な解説については次を参照せよ:

* JuliaとJupyterのすすめ (https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/msfd28genkuroki.ipynb?flush_cached=true)

Julia言語 (https://julialang.org/) 環境の整備の仕方については次を参照せよ:

* Julia v1.1.0 の Windows 8.1 へのインストール (https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/install.ipynb)

目次

In [1]:

```
using Base64

showimg(mime, fn; scale="") = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    if scale == ""
        display("text/html", """<img src="data:$mime;base64,$base64">""")
    else
        display("text/html", """<img src="data:$mime;base64,$base64" width="$scale">""")
    end
end

using SymPy: SymPy, sympy, Sym, @syms, @vars, oo
```

1 2階単独の定数係数線形常微分方程式

複素数値函数 $x = x(t)$ に関する次の線形常微分方程式の解をすべて求めたい:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0. \tag{$*$}$$

ここで p, q は複素定数である(応用上は p, q は実数になることが多い). これを**2階単独の定数係数線形常微分方程式**と呼ぶ.

1.1 2階単独の定数係数線形常微分方程式と定数係数で線形な3項間漸化式の類似性

方程式($*$)は高校数学で習う次の**定数係数で線形な3項間漸化式**に似ている:

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0. \tag{$\star$}$$

これを満たす数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ をこの漸化式の解と呼ぶ. 漸化式($\star$)の解をすべて求める問題と方程式($*$)の解をすべて求める問題は「ほぼ同じ問題である」と言ってよいほど似ている. 漸化式($\star$)の解き方を復習し直せば, 方程式($*$)に関する以下の解説の内容もすんなり理解できるものと思われる.

注意: 離散化された直線 $\mathbb{Z}$ 上の3項間漸化式

$$-a_{n-1} + 2a_n - a_{n+1} = Ea_n$$

は直線 $\mathbb{R}$ 上の頻出形の微分方程式

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \omega^2 u$$

の離散化とみなされるので特に重要である. その形の漸化式は $\alpha = 2 - E$ とおくと

$$a_{n-1} + a_{n+1} = \alpha a_n$$

と書き直される. この形の漸化式に関する非常に詳しい分析については

- A02 Diagonalization of Cartan matrices of classical types (https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/DifferentialEquations/blob/master/A02%20Diagonalization%20of%20Cartan%20matric

を参照せよ. □

1.2 方程式を解くときの考え方

方程式は解く手続きは以下の2つに分けられる.

1. どのような手段でもよいので, とにかく, 方程式の解をたくさん見付ける.
2. 見付けた解で方程式の解がすべて尽くされることを確認する.

ポイントは解を見付けるための手段は何であっても構わないということである.

とにかくどんな「汚い手」を使っていても, 十分たくさんの解を見付けることができれば「勝ち」になる.

1.3 2階単独の定数係数線形常微分方程式の解全体が2次元のベクトル空間になること

このノートでは次の結果を認めて使うことにする.

- 2階単独の定数係数線形常微分方程式$(*)$の解全体の集合は2次元のベクトル空間になる.

線形代数の教科書や講義などでベクトル空間の公理的な定義を学んだが, その定義をピンとくるまで理解できなかった人は, 「ベクトル空間になること」は「一次結合で閉じている(空でない)集合になっていること」とほぼ同義であると考えてよい. 実用的にはそれで困らないと思われる. (注意: 「一次独立」の概念はそのように雑な扱いが許されない.)

「ベクトル空間になること」は(認めて使わなくても)容易に確認できる. 実際に確認しておこう. まず, 定数函数 $f(t) = 0$ は方程式$(*)$の解になっていることがすぐにわかる. これで方程式$(*)$の解全体の集合が空集合でないことがわかった. 函数 $f(t)$ と $g(t)$ が方程式

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \tag{$*$}$$

の解であると仮定する. すなわち

$$f''(t) + pf'(t) + qf(t) = 0, \quad g''(t) + pg'(t) + qg(t) = 0$$

が成立していると仮定する. このとき, 定数 a, b について,

$$\begin{aligned}
&(af(t) + bg(t))'' + p(af(t) + bg(t))' + q(af(t) + bf(t)) \\
&= (af''(t) + bg''(t)) + p(af'(t) + bg'(t)) + q(af(t) + bf(t)) \\
&= a(f''(t) + pf'(t) + qf(t)) + b(g''(t) + pg'(t) + qg(t)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

これで, 方程式$(*)$の解全体の集合が一次結合で閉じていることがわかった. これで方程式$(*)$の解全体の集合がベクトル空間をなすことがわかったと考えてよい.

そのベクトル空間が2次元になることは以下で認めて使うことにする.

ベクトル空間が2次元になることの定義は, そのベクトル空間の2つの要素で一次独立なものが存在し, そのベクトル空間の任意の要素がその2つの一次独立なベクトルの一次結合で表せることである. (再注意: 一次独立性の概念は重要なので正確な意味と直観的な意味を必ず復習しておくこと!)

ゆえに, 上の結果を認めると, 方程式$(*)$のすべての解を求めるためには, 一次独立な2つの解 $f(t), g(t)$ を見付ければ十分だということがわかる. そのとき, 方程式$(*)$の任意の解 $x(t)$ はそれらの一次結合

$$x(t) = af(t) + bg(t)$$

の形で一意的に表わされる. 我々はこのような $f(t), g(t)$ を何らかの方法で求めることができればよいということになった.

1.4 解の見付け方(1)

方程式

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \tag{$*$}$$

の解で $x(t) = e^{\lambda t}$ の形のものを見つけてみよう. $x = x(t) = e^{\lambda t}$ を$(*)$に代入すると,

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + p\lambda e^{\lambda t} + qe^{\lambda t} = 0.$$

これと

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

は同値である. したがって,

$$\lambda^2 + p\lambda + q = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

のとき, $f(t) = e^{\alpha t}$ と $g(t) = e^{\lambda t}$ は方程式$(*)$の解である.

もしも $\alpha \neq \beta$ ならばそれらは異なる解であり, 一次独立であることを示せる(後で証明する). ゆえに $\alpha \neq \beta$ のとき, 方程式$(*)$の任意の解は

$$x(t) = ae^{\alpha t} + be^{\beta t}$$

と一意に表わされる.

1.5 解の見付け方(2)

$\lambda^2 + p\lambda + q = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$ で $\alpha \neq \beta$ の場合には方程式$(*)$の2つの異なる解 $e^{\alpha t}, e^{\beta t}$ が得られて, それらが一次独立になるので, それですべての解を求める手続きは実質的に終了する.

それでは $\alpha = \beta$ (重解の場合)はどうすればよいのだろうか?

$\lambda^2 + p\lambda + q = (\lambda - \alpha)^2$ の場合には $f(t) = e^{\alpha t}$ だけではなく, $g(t) = te^{\alpha t}$ も($*$)の解になることを以下のようにして示せる:

$$
\begin{aligned}
&g(t) = te^{\alpha t}, \\
&g'(t) = e^{\alpha t} + \alpha te^{\alpha t} = (\alpha t + 1)e^{\alpha t}, \\
&g''(t) = \alpha e^{\alpha t} + \alpha(1 + \alpha t)e^{\alpha t} = (\alpha^2 t + 2\alpha)e^{\alpha t}
\end{aligned}
$$

より,

$$
\begin{aligned}
g''(t) + pg'(t) + qg(t) &= (2\alpha + \alpha^2 t + p(1 + \alpha t) + qt)e^{\alpha t} \\
&= (\alpha^2 + p\alpha + q)t + 2\alpha + p)e^{\alpha t} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

最後の等号で $\lambda^2 + p\lambda + q = (\lambda - \alpha^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2$ であることを使った. $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ と $p = -2\alpha, q = \alpha^2$ が成立している. (以上の計算は実は不必要に煩雑になっており, 高階の場合に一般化することが難しくなっている. 後で高階の場合についても通用する楽な考え方を説明する.)

さらに, $f(t) = e^{\alpha t}$, $g(t) = te^{\alpha t}$ は一次独立なので(後で証明する), $\alpha = \beta$ のとき方程式($*$)の任意の解は

$$x(t) = ae^{\alpha t} + bte^{\alpha t}$$

と一意に表わされる.

1.6 結果のまとめ

微分方程式

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \tag{$*$}$$

の解は以下のようにして求められる.

$\lambda^2 + p\lambda + q = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$ であるとする.

$\alpha \neq \beta$ のとき, 方程式($*$)の任意の解は次のように一意に表わされる:

$$x(t) = ae^{\alpha t} + be^{\beta t}.$$

$\alpha = \beta$ のとき, 方程式($*$)の任意の解は次のように一意に表わされる:

$$x(t) = ae^{\alpha t} + bte^{\alpha t}.$$

1.7 一次独立性の証明

1.7.1 $\alpha \neq \beta$ のときの $e^{\alpha t}, e^{\beta t}$ の一次独立性の証明

$\alpha \neq \beta$ と仮定し, $a, b \in \mathbb{C}$ とし,

$$ae^{\alpha t} + be^{\beta t} = 0$$

であると仮定する. $e^{\alpha t}, e^{\beta t}$ の一次独立性を証明するためには $a = b = 0$ となることを示せばよい. 上の式の両辺を微分すると,

$$\alpha ae^{\alpha t} + \beta be^{\beta t} = 0.$$

さらに上の2つの公式において $t = 0$ とおくと,

$$a + b = 0, \quad \alpha a + \beta b = 0.$$

左の等式の両辺に β をかけたものから, 右の等式を引くと, $(\beta - \alpha)a = 0$ が得られる. $\alpha \neq \beta$ より, $\beta - \alpha \neq 0$ となるので $a = 0$ となる. ゆえに $a + b = 0$ より $b = 0$ も得られる. 以上によって $e^{\alpha t}, e^{\beta t}$ が一次独立であることが示された.

注意: $a + b = 0, \alpha a + \beta b = 0$ は行列を使えば

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と書き直される. 左辺の行列の行列式は $\beta - \alpha$ なので $\alpha \neq \beta$ ならば 0 にならない. 一般に正方行列について, その行列式が 0 にならないこととその逆行列が存在することは同値である. ゆえに $\alpha \neq \beta$ のとき, 左辺の行列の逆行列を両辺にかけることによって,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得ることができる. この筋道であれば高階の場合に一般化しやすい. 高階の場合への一般化では[Vandermondeの行列式 (https://www.google.com/search?q=Vandermonde%E3%81%AE%E8%A1%8C%E5%88%97%E5%BC%8F)](https://www.google.com/search?q=Vandermonde%E3%81%AE%E8%A1%8C%E5%88%97%E5%BC%8F)が出て来る. □

Vandermondeの行列式の様な重要な数学的対象がこのような形で自然に必要になる. 微分方程式論には数学のあらゆる分野の道具が総動員されることになる. だから, 微分方程式論を詳しく勉強すると, 自然に多くの数学について詳しくなることになる. もちろん, 線形代数についても詳しくなるであろう. 実際には線形代数のような基本的な数学的道具の価値は実際に応用される現場を見て初めて認識できることが多い.

1.7.2 $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}$ の一次独立性の証明

$a, b \in \mathbb{C}$ とし,

$$ae^{\alpha t} + bte^{\alpha t} = 0$$

であると仮定する. $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}$ の一次独立性を証明するためには $a = b = 0$ となることを示せばよい. 上の式の両辺を微分すると,

$$(\alpha a + b)e^{\alpha t} + \beta bte^{\alpha t} = 0.$$

さらに上の2つの公式において $t = 0$ とおくと,

$$a = 0, \quad \alpha a + b = 0.$$

これより, $a = b = 0$ となることがわかるので, $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}$ が一次独立であることが示された.

注意: 横ベクトル値函数 $[e^{\alpha t}, te^{\alpha t}]$ の両辺を t で微分すると, $[e^{\alpha t}\alpha, e^{\alpha t} + te^{\alpha t}]$ になるが, これは行列を使って次のように表わされる:

$$\frac{d}{dt}[e^{\alpha t}, te^{\alpha t}] = [e^{\alpha t}\alpha, e^{\alpha t} + te^{\alpha t}] = [e^{\alpha t}, te^{\alpha t}]\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

再右辺の 2×2 行列は基底 $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}$ で張られる2次元の函数空間に作用する線形変換 d/dt の基底を用いた行列表示である. その行列表示は所謂[Jordan標準形 (https://www.google.com/search?q=Jordan%E6%A8%99%E6%BA%96%E5%BD%A2)](https://www.google.com/search?q=Jordan%E6%A8%99%E6%BA%96%E5%BD%A2)の形をしている. 高階の場合にも「重解を持つ場合」には同じようにしてJordan標準形の行列が現われる. □

正方行列のJordan標準形の様な重要な数学的対象がこのような形で自然に必要になる. 微分方程式論には数学のあらゆる分野の道具が総動員されることになる. だから, 微分方程式論を詳しく勉強すると, 自然に多くの数学について詳しくなることになる. もちろん, 線形代数についても詳しくなるであろう. 実際には線形代数のような基本的な数学的道具の価値は実際に応用される現場を見て初めて認識できることが多い.

2 高階の場合

この節では $u = u(x)$ に関する次の微分方程式の解をすべて求める:

$$u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}u' + p_n u = 0. \tag{$*$}$$

ここで $u^{(k)}$ は $u = u(x)$ の k 階の導函数を表しており, $p_1, \dots, p_{n-1}, p_n$ は複素数の定数である. この微分方程式は n 階単独の定数係数線形常微分方程式と呼ばれる. (この節では気分を変えて, t ではなく, x の函数を扱う. 読者が記号に頼った悪しき思考に陥らないように, わざとこのようにすることにした.)

方程式($*$)の解全体の空間が n 次元のベクトル空間になることを認めて使うことにする. ゆえに, 方程式($*$)の n 個の解で一次独立になるものを見付けることができれば, 任意の解はそれらの一次結合で一意的に表わされることもわかる. したがって, 以下で方程式($*$)の n 個の解で一次独立になるものを見付けることを目標とする.

2.1 線形微分作用素

函数 $f(x)$ をその導函数 $f'(x)$ に対応させる写像は $\dfrac{d}{dx}$ と書かれる. その写像は線形写像になっており,

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$$

の左辺のように書かれる. これを一般化して, 函数をその k 階の導函数に対応させる写像を

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x) = f^{(k)}(x)$$

と書くことにする. さらに毎回 $\dfrac{d}{dx}$ と書くのは面倒なので, それを一文字の ∂ で表すことにする:

$$\partial = \frac{d}{dx}, \quad \partial^k = \left(\frac{d}{dx}\right)^k.$$

函数を函数に対応させる線形写像 P, Q の和と差と積とスカラー倍と函数 $a(x)$ 倍が

$$\begin{aligned}
&(P \pm Q)f(x) = Pf(x) \pm Qf(x), \\
&(PQ)f(x) = P(Qf)(x), \\
&(\alpha P)f(x) = \alpha \cdot Pf(x), \\
&(a(x)P)f(x) = a(x) \cdot Pf(x)
\end{aligned}$$

によって定義される. このようにして, 函数を函数に対応させる線形写像(作用素, 演算子, operatorなどと呼ばれる)達はまるで行列のように計算できる. (行列にも和と差と積とスカラー倍が定義されているのであった.) 行列の積が非可換であったのと同じように, 特別な場合を除いて(後でその特別な場合が出て来る!), $PQ = QP$ のような計算を自由にできなくなることに注意せよ.

次の作用素は(線形常)微分作用素と呼ばれる:

$$P = a_n(x)\partial^n + \cdots + a_1(x)\partial + a_0(x).$$

この作用素は函数 $f(x)$ を次に対応させる線形写像になっている:

$$Pf(x) = a_n(x)f^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x).$$

微分作用素は線形写像の重要な例になっている.

例: $\partial = d/dx$ と $a(x)$ をかける操作は非可換である:

$$\begin{aligned}
&a(x)\partial f(x) = a(x)f(x), \\
&\partial(a(x)f(x)) = (a(x)f(x))' = a'(x)f(x) + a(x)f'(x)
\end{aligned}$$

なので

$$(\partial a(x) - a(x)\partial)f(x) = \partial(a(x)f(x)) - a(x)\partial f(x) = a'(x)f(x).$$

以上より, 作用素として,

$$\partial a(x) - a(x)\partial = a'(x)$$

となっていることがわかる. □

2.2 定数係数線形常微分方程式の微分作用素を用いた表示

定数係数の線形常微分作用素

$$\partial^n + p_1\partial^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\partial + p_n$$

を使うと, 微分方程式

$$u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}u' + p_n u = 0 \tag{$*$}$$

は

$$(\partial^n + p_1\partial^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\partial + p_n)u = 0$$

と表わされる.

2.3 重解がない場合の定数係数線形常微分方程式の解法

定数倍と微分する操作は可換なので, 定数係数線形常微分作用素はまるで ∂ の(可換な)多項式のように計算できる. ゆえに,

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = (\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_n)$$

のとき,

$$\partial^n + p_1\partial^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\partial + p_n = (\partial - \alpha_1)\cdots(\partial - \alpha_n)$$

も成立している. このとき, 方程式($*$)は次のように書かれる:

$$(\partial - \alpha_1)\cdots(\partial - \alpha_n)u = 0.$$

$\partial - \alpha_j$ の積の順序は自由に交換できるので, もしも

$$(\partial - \alpha_j)u = u' - \alpha_j u = 0$$

すなわち

$$u' = \alpha_j u$$

が成立しているならば, $(\partial - \alpha_1)\cdots(\partial - \alpha_n)u = 0$ も成立する. そして,

$$f_j(x) = e^{\alpha_j x}$$

は微分方程式 $u' = \alpha u$ の解なので, もしも n 個の α_j 達が互いに異なるならば, 方程式($*$)の n 個の異なる解が得られたことになる. 実はそれらは一次独立になる(後で証明する).

ゆえに, n 個の α_j が互いに異なるとき, 方程式($*$)の任意の解は次のように一意に表わされる:

$$u(x) = a_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + a_n e^{\alpha_n x}.$$

注意: 以上の議論を見れば, $e^{\alpha x}$ 型の函数が定数係数線形常微分方程式の解として出て来る理由がわかる. そのような解が出て来る理由は定数係数線形常微分方程式を与える定数係数線形常微分作用素が $(\partial - \alpha_1)\cdots(\partial - \alpha_n)$ と表され, その互いに可換な因子である $\partial - \alpha_j$ 達を作用させて 0 になる函数として $e^{\alpha_j x}$ が取れるからである. □

2.3.1 定数係数でない場合の斉次1階の線形常微分方程式の解法

一般に微分方程式 $u'(x) = a(x)u(x)$ の任意の解は

$$u(x) = Ce^{\int a(x)\,dx}$$

と表わされる. C は任意定数である. これもよく使われる.

例: 作用素として $\partial x = x\partial + 1$ が成立することに注意すれば

$$(\partial - x)(\partial + x) = \partial^2 - x\partial + \partial x - x^2 = \partial^2 - x^2 + 1$$

が成立することがわかる. ゆえに, 微分方程式

$$(\partial + x)u = 0, \quad \text{i.e.} \quad u' = -xu$$

の解

$$u(x) = e^{\int(-x)\,dx} = e^{-x^2/2}$$

は微分方程式

$$(\partial^2 - x^2 + 1)u = (\partial - x)(\partial + x)u = 0$$

の解になっていることがわかる. $e^{-x^2/2}$ は[量子調和振動子 (https://www.google.com/search?q=%E9%87%8F%E5%AD%90%E8%AA%BF%E5%92%8C%E6%8C%AF%E5%8B%95%E5%AD%90)](https://www.google.com/search?q=%E9%87%8F%E5%AD%90%E8%AA%BF%E5%92%8C%E6%8C%AF%E5%8B%95%E5%AD%90)の基底状態であり, 0 番目の[Hermiteの多項式 (https://www.google.com/search?q=Hermite%E3%81%AE%E5%A4%9A%E9%A0%85%E5%BC%8F)](https://www.google.com/search?q=Hermite%E3%81%AE%E5%A4%9A%E9%A0%85%E5%BC%8F)の $e^{-x^2/2}$ 倍になっている. □

このように定数係数の場合に限らず, 微分作用素の「因数分解」は数学的に重要なテクニックの一つになっている.

2.4 重解がある場合の定数係数線形常微分方程式の解法の準備

それでは n 個の α_j 達に重複がある場合にはどのようにして n 個の一次独立な解を見付けたらよいのだろうか?

そのためには作用素として,

$$e^{\alpha x}\partial e^{-\alpha x} = \partial - \alpha$$

となっていることが役に立つ. この公式は次のようにして示される:

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}\partial(e^{-\alpha x}f(x)) &= e^{\alpha x}(e^{-\alpha x}f'(x) - \alpha e^{-\alpha x}f(x)) \\ &= f'(x) - \alpha f(x) \\ &= (\partial - \alpha)f(x). \end{aligned}$$

2.4.1 定数係数でない場合の非斉次1階の線形常微分方程式の解法

一般に作用素として,

$$e^{\int a(x)\,dx}\,\partial e^{-\int a(x)\,dx} = \partial - a(x)$$

が成立している. 実際,

$$\begin{aligned}
e^{\int a(x)\,dx}\,\partial\left(e^{-\int a(x)\,dx} f(x)\right) &= e^{-\int a(x)\,dx}\left(e^{-\int a(x)\,dx} f'(x) - a(x)e^{-\int a(x)\,dx} f(x)\right) \\
&= f'(x) - a(x)f(x) \\
&= (\partial - a(x))f(x).
\end{aligned}$$

これもよく使われる.

例: 微分方程式 $(\partial - a(x))u = f(x)$ の解

$$u(x) = e^{\int a(x)\,dx} \int e^{-\int a(x)\,dx} f(x)\,dx$$

は以下のようにして得られる. $\partial - a(x) = e^{\int a(x)\,dx}\,\partial e^{-\int a(x)\,dx}$ なので, $(\partial - a(x))u = f(x)$ は

$$\partial\left(e^{-\int a(x)\,dx} u(x)\right) = e^{-\int a(x)\,dx} f(x)$$

に書き直される. 両辺を x で不定積分すれば,

$$e^{-\int a(x)\,dx} u(x) = \int e^{-\int a(x)\,dx} f(x)\,dx$$

これより, 上の解が得られる. □

注意: 形式的には $\partial^{-1} = \int dx$ (微分の逆は積分)と書けるので,

$$(\partial - \alpha)^{-1} = \left(e^{\int a(x)\,dx}\,\partial e^{-\int a(x)\,dx}\right)^{-1} = e^{\int a(x)\,dx} \int dx\; e^{-\int a(x)\,dx}$$

を $(\partial - \alpha)u(x) = f(x)$ の両辺に作用させて, 解 $u(x)$ が得られたと考えてもよい. □

2.5 重解がある場合の定数係数線形常微分方程式の解法

一般に, 中間に挟まった $P^{-1}P$ がことごとく消えて,

$$(PAP^{-1})^m = PAP^{-1}PAP^{-1}\cdots PAP^{-1}PAP^{-1} = PA^mP^{-1}$$

となるので, 作用素としての公式 $e^{\alpha x}\partial e^{-\alpha x} = \partial - \alpha$ より,

$$(\partial - \alpha)^m = e^{\alpha x}\partial^m e^{-\alpha x}$$

となる. ゆえに方程式

$$(\partial - \alpha)^m u = 0$$

は

$$e^{\alpha x}\partial^m(e^{-\alpha x}u(x)) = 0$$

に書き直される. これは $e^{-\alpha x}u(x)$ を m 回微分すると消えることを意味しており, そうなることは, $e^{-\alpha x}u(x)$ が x に関する $m-1$ 次以下の多項式函数になることと同値である. ゆえに, 解 $u(x)$ は

$$u(x) = (a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0)e^{\alpha x}$$

と一意に表わされる. ゆえに方程式 $(\partial - \alpha)^m u = 0$ の解全体のなすベクトル空間の基底として,

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}$$

が取れる.

以下では

$$\partial^n + p_1\partial^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\partial + p_n = (\partial - \alpha_1)^{m_1}\cdots(\partial - \alpha_r)^{m_r}$$

で α_j 達が互いに異なると仮定する.

上で注意したことより, 微分方程式

$$(\partial^n + p_1\partial^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\partial + p_n)u = (\partial - \alpha_1)^{m_1}\cdots(\partial - \alpha_r)^{m_r}u = 0$$

の解として, 以下が取れることがわかる:

$$e^{\alpha_j x}, \ x e^{\alpha_j x}, \ \ldots, \ x^{m_j-1} e^{\alpha_j x}, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

実はこれらが上の微分方程式の解全体のなすベクトル空間の基底になっていることを示せる(一次独立性を後で示す).

3 一次独立性の証明

この節では, 函数達 $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ の一次独立性の証明を扱う.

3.1 Wronskian

函数 $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ に対する

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

を $f_1, \ldots, f_n$ の **Wronskian (ロンスキアン, ロンスキー行列式)** と呼ぶ.

3.1.1 函数の組の一次独立性の十分条件

もしも, ある x_0 で $W(f_1, \ldots, f_n)(x_0) \neq 0$ となっていれば $f_1, \ldots, f_n$ が一次独立である.

証明: $W(f_1, \ldots, f_n)(x_0) \neq 0$, $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0$ と仮定する. $a_1 = \cdots \ a_n = 0$ を示せばよい. $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0$ の両辺を何度も微分することによって $a_1 f_1^{(k)} + \cdots + a_n f_n^{(k)} = 0$ を得る. ゆえに

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る. 左辺の中の行列の行列式は $x = x_0$ で 0 でないので, その逆行列が存在する. その逆行列を両辺に左からかければ $a_1 = \cdots = a_n = 0$ が得られる. □

注意: $f_1, \ldots, f_n$ が一次独立であっても, ある a で $W(f_1, \ldots, f_n)(a) = 0$ となるものが存在する場合がある. 例えば, $\varphi(x)$ を $x \leqq -2$ で 0 になり, $x \geqq -1$ で 1 となる C^∞ 函数とすると, $W(f_1, \ldots, f_n)(0) \neq 0$ となる $f_1, \ldots, f_n$ について, $g_j = f_j \varphi$ とおくと, $W(g_1, \ldots, g_n)(0) = W(f_1, \ldots, f_n)(0) \neq 0$, $W(g_1, \ldots, g_n)(-3) \neq 0$ となる. さらに強力な次のような例も存在する. □

例: $x \in \mathbb{R}$ について, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = |x|x$ のとき, $f_1'(x) = 2x$, $f_2'(x) = 2|x|$ なので,

$$W(f_1, f_2)(x) = \det \begin{bmatrix} x^2 & |x|x \\ 2x & 2|x| \end{bmatrix} = x^2 \cdot 2|x| - 2x \cdot |x|x = 0.$$

このように f_1, f_2 のWronskianはすべての $x \in \mathbb{R}$ について 0 になる. 一方, $a_1 f_2 + a_2 f_2 = 0$ のとき, $x = \pm 1$ を代入すると,

$$a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 - a_2 = 0$$

となり, これから $a_1 = a_2 = 0$ が得られるので, f_1, f_2 は一次独立であることがわかる. □

3.1.2 線形常微分方程式の解のWronskian

$f_1(x), \ldots, f_n(x)$ は微分方程式

$$u^{(n)}(x) = a_1(x) u^{(n-1)}(x) + a_2(x) u^{(n-2)}(x) + \cdots + a_n(x) u(x)$$

の解であると仮定する. このとき, $f_j^{(i-1)}$ を (i, j) 成分とする $n \times n$ 行列の第 i 行を $f^{(i-1)}$ と書くと,

$$\frac{d f^{(n-1)}(x)}{dx} = a_1(x) f^{(n-1)}(x) + a_2(x) f^{(n-2)}(x) + \cdots + a_n(x) f^{(0)}(x)$$

なので

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}W(f_1,\dots,f_n) &= \sum_{i=1}^{n-1}\det\begin{bmatrix} f^{(0)} \\ \vdots \\ df^{(i-1)}/dx \\ f^{(i)} \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} f^{(0)} \\ f^{(1)} \\ \vdots \\ f^{(n-2)} \\ df^{(n-1)}/dx \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} f^{(0)} \\ f^{(1)} \\ \vdots \\ f^{(n-2)} \\ a_1(x)f^{(n-1)} + a_2(x)f^{(n-2)} + \cdots + a_n(x)f^{(0)} \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} f^{(0)} \\ f^{(1)} \\ \vdots \\ f^{(n-2)} \\ a_1(x)f^{(n-1)} \end{bmatrix} = a_1(x)W(f_1,\dots,f_n).
\end{aligned}
$$

3つ目の等号で, 行列式の中で第 $i=1,\dots,n-1$ 行 $f^{(i-1)}$ の $a_{n+1-i}(x)$ 倍を第 n 行から引いた. ゆえに

$$
W(f_1,\dots,f_n)(x) = \exp\left(\int_a^x a_1(\xi)\,d\xi\right)W(f_1,\dots,f_n)(a).
$$

特に, $W(f_1,\dots,f_n)(a)\ne 0$ ならば $W(f_1,\dots,f_n)(x)\ne 0$ となる. すなわち, n 階の線形常微分方程式の n 個の解のWronskianはどこかの x で 0 にならなければ, 残りの x でも 0 でなくなる.

3.1.3 行列式の微分

一般に函数成分の行列式の微分は以下のようになる.

函数 $a_{ij}(x)$ を成分とする $n\times n$ 行列を $A(x)=[a_{ij}(x)]$ と書き, その第 j 列を $a_j(x)$ と書き, その (i,j) 余因子を $\Delta_{ij}(x)$ と書き, $\Delta_{ij}(x)$ を (i,j) 成分とする $n\times n$ 行列を $Delta(x)=[Delta_{ij}(x)]$ と書く. $\det A(x)\ne 0$ であると仮定する. このとき, 行列 X の転置を X^T と表すと,

$$
\Delta(x)^T = \det(A(x))A(x)^{-1}
$$

なので, 以下が成立する:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\det A(x) &= \sum_{j=1}^n \det[a_1(x),\dots,a_j'(x),\dots,a_n(x)] \\
&= \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \Delta_{ij}(x)a_{ij}'(x) = \operatorname{tr}\left(\Delta(x)^T\frac{dA(x)}{dx}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(A(x)^{-1}\frac{dA(x)}{dx}\right)\det(A(x)).
\end{aligned}
$$

3.2 Vandermondeの行列式

次の公式が成立している:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqq i<j\leqq n}(x_j-x_i).
$$

左辺をVandermonde(ファンデルモンド, ヴァンデルモンド)の行列式と呼び, 右辺を差積と呼ぶのであった.

この公式の証明は n に関する帰納法で以下のように遂行される. $n=1$ の場合には両辺が 1 になるので成立している. n の場合に成立していると仮定する. このとき,

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \\
x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x_{n+1}^n
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & \cdots & x_n - x_{n+1} & x_{n+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_1^{n-1} - x_{n+1}^{n-1} & x_2^{n-1} - x_{n+1}^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} - x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \\
x_1^n - x_{n+1}^n & x_2^n - x_{n+1}^n & \cdots & x_n^n - x_{n+1}^n & x_{n+1}^n
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & \cdots & x_n - x_{n+1} & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_1^{n-1} - x_{n+1}^{n-1} & x_2^{n-1} - x_{n+1}^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} - x_{n+1}^{n-1} & 0 \\
x_1^n - x_{n+1}^n & x_2^n - x_{n+1}^n & \cdots & x_n^n - x_{n+1}^n & 0
\end{vmatrix} \\
&= (x_1 - x_{n+1})(x_2 - x_{n+1}) \cdots (x_n - x_{n+1}) \\
&\times \begin{vmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_1^{n-2} + \cdots + x_{n+1}^{n-2} & x_2^{n-2} + \cdots + x_{n+1}^{n-2} & \cdots & x_2^{n-2} + \cdots + x_{n+1}^{n-2} & 0 \\
x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_{n+1} + \cdots + x_{n+1}^{n-1} & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_{n+1} + \cdots + x_{n+1}^{n-1} & \cdots & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_{n+1} + \cdots + x_{n+1}^{n-1} & 0
\end{vmatrix} \\
&= (x_1 - x_{n+1})(x_2 - x_{n+1}) \cdots (x_n - x_{n+1})
\begin{vmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & 0
\end{vmatrix} \\
&= (x_1 - x_{n+1})(x_2 - x_{n+1}) \cdots (x_n - x_{n+1})(-1)^n
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}
\end{vmatrix} \\
&= (x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \cdots (x_{n+1} - x_n)
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}
\end{vmatrix} \\
&= (x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \cdots (x_{n+1} - x_n) \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i) \\
&= \prod_{1 \leqq i < j \leqq n+1} (x_j - x_i).
\end{aligned}
$$

1つ目の等号では第 $n+1$ 列を他の列から引き, 2つ目の等号では第1行の x_{n+1}^{i-1} 倍を第 $i = 2, \dots, n+1$ 行から引いた. 3つ目の等号は第 $j = 1, \dots, n$ 列が $x_j - x_{n+1}$ で割り切れることを使った. 4つ目の等号では, 第 n 行の x_{n+1} 倍を第 $n+1$ から引き, それと同様の操作を下から順番に行った. 残りは易しい計算である.

注意: 以上では行列式に関する操作による帰納法でVandermondeの行列式が差積に等しくなることを証明したが, 他にも様々な証明がある. 例えば, Vandermondeの行列式が $x_i = x_j$ $(i \neq j)$ のとき0になることから, $x_j - x_i$ $(i < j)$ で割り切れることを使う証明も有名である. 以下を見よ. □

3.2.1 Vandermondeの行列式が差積になることの別証明

Vandermondeの行列式を $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ と表すことにする:

$$
f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.
$$

Vandermondeの行列式 $f(x)$ は $x_1, \dots, x_n$ の多項式になる.

$i \neq j$ のとき, x_j に x_i を代入すると $f(x) = 0$ となりので, 剰余定理によって, $f(x)$ は $x_j - x_i$ で割り切れる. ゆえに $f(x)$ は差積

$$
\Delta(x) = \Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i)
$$

で割り切れる. Vandermondeの行列式 $f(x)$ も差積 $\Delta(x)$ も $x_1, \dots, x_n$ の $0 + 1 + \cdots + (n-1)$ 次の多項式になる. そのことより, $f(x)$ は $\Delta(x)$ の定数倍になることがわかる. $f(x)$ における $x_2 x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$ (対角成分の積)の係数は 1 であり,

$$
\begin{aligned}
\Delta(x) = & (x_2 - x_1) \\
& (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& (x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

における $x_2 x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$ の係数も 1 になることがわかる. ゆえに $f(x) = \Delta(x)$ である.

問題: Cauchyの行列式 (https://www.google.com/search?q=Proof-of-Cauchy%27s-determinant)について調べ, それに関する公式と証明を理解せよ. □

様々な機会に行列式に関する様々な公式について調べておくと, 後でよいことがあるかもしれない. 行列式に関する各種公式は理論的に重要な役目を果たすことが多く, 数学的教養として行列式に関する各種公式について理解しておくことは大事なことである.

3.3 互いに異なる α_j に対する $e^{\alpha_j x}$ 達の一次独立性

$\alpha_j \in \mathbb{C}$ であるとし, $f_j(x) = e^{\alpha_j x}$ とおく. このとき, $f_1, \dots, f_n$ のWronskianは, Vandermondeの行列式が差積に等しくなることより,

$$
\begin{aligned}
W(f_1, \dots, f_n) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} & \cdots & e^{\alpha_n x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x} & \cdots & \alpha_n e^{\alpha_n x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} e^{\alpha_1 x} & \alpha_2^{n-1} e^{\alpha_2 x} & \cdots & \alpha_n^{n-1} e^{\alpha_n x} \end{vmatrix} \\
&= e^{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)x} \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (\alpha_j - \alpha_i).
\end{aligned}
$$

となる. ゆえに, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が互いに異なるならば, このWronskianは決して 0 にならないので, $f_j(x) = e^{\alpha_j x}$ $(j = 1, \dots, n)$ は一次独立になる.

3.4 互いに異なる α_j に対する(多項式函数)×$e^{\alpha_j x}$ 達の一次独立性

$f_1(x), \dots, f_r(x)$ は複素係数の多項式函数であるとし, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ は互いに異なると仮定する. このとき,

$$
f_1(x) e^{\alpha_1 x} + \cdots + f_r(x) e^{\alpha_r x} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})
$$

ならば $f_1 = \cdots = f_r = 0$ となる. このことから, $e^{\alpha_j x}, x e^{\alpha_j x}, x^2 e^{\alpha_j x}, \dots$ 達が一次独立であることがわかる.

証明: 一致の定理より, すべての実数 x について $f_1(x) e^{\alpha_1 x} + \cdots + f_r(x) e^{\alpha_r x} = 0$ が成立することと, すべての複素数 x についてそれが成立することは同値である. ゆえに $f_1, \dots, f_r$ の中に 0 でないものが存在すると仮定して,

$$
f_1(z) e^{\alpha_1 z} + \cdots + f_r(z) e^{\alpha_r z} = 0 \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{$*$}
$$

とならないことを示せばよい. $f_1, \dots, f_r \neq 0$ かつ $\max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_r|\} = |\alpha_r|$ と仮定してよい. (0 になる f_j が存在するなら除いて考える.) $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ が互いに異なるならば, $\alpha_r = |\alpha_r| e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ とおくとき,

$$
\mathrm{Re}(\alpha_1 e^{-i\theta}), \dots, \mathrm{Re}(\alpha_{r-1} e^{-i\theta}) < \mathrm{Re}(\alpha_r e^{-i\theta})
$$

となる. これでもしも $(*)$ が成立しているならば, 絶対値が十分大きなすべての $z \in \mathbb{C}$ について,

$$
\frac{f_1(z)}{f_r(z)} e^{(\alpha_1 - \alpha_r)z} + \cdots + \frac{f_{r-1}(z)}{f_r(z)} e^{(\alpha_{r-1} - \alpha_r)z} + 1 = 0
$$

となる. しかし, $z = te^{-i\theta}$, $t \in \mathbb{R}$ とおいて, $t \to \infty$ とすると, $j = 1, \dots, r-1$ について,

$$\left|\frac{f_j(z)}{f_r(z)} e^{(\alpha_j - \alpha_r)z}\right| = \left|\frac{f_j(z)}{f_r(z)}\right| e^{(\mathrm{Re}(\alpha_1 e^{-i\theta}) - \mathrm{Re}(\alpha_r e^{-i\theta}))t} \to 0$$

となるので, $1 = 0$ となって矛盾する. これで(∗)が成立していないことがわかった. □

注意: ツイッターにおける発言

- https://twitter.com/genkuroki/status/1118680294343659520 (https://twitter.com/genkuroki/status/1118680294343659520)

における注意も参照せよ. 以下の画像中の行列式の公式(の一般の場合)を使っても, 互いに異なる α_j 達に対する $e^{\alpha_j x}, xe^{\alpha_j x}, x^2 e^{\alpha_j x}, \dots$ 達の一次独立性を(より代数的に)証明することができる. 以下の行列式公式が成立している. コンピューターの数式処理によるさらに下の方の計算も参照せよ. □

3.5 Vandermondeの行列式の公式の一般化

$n \times m$ 行列 $P_{n,m}(\alpha)$ を次のように定める:

$$P_{n,m}(\alpha) = \left[\binom{i-1}{j-1}\alpha^{i-j}\right]_{1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq m}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \alpha^2 & 2\alpha & 1 & \ddots & 0 \\ \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha & \ddots & 0 \\ \alpha^4 & 4\alpha^3 & 6\alpha^2 & \ddots & 1 \\ \alpha^5 & 5\alpha^4 & 10\alpha^3 & \ddots & \binom{m}{m-1}\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha^{n-1} & (n-1)\alpha^{n-2} & \binom{n-1}{2}\alpha^{n-3} & \cdots & \binom{n-1}{m-1}\alpha^{n-m} \end{bmatrix}.$$

$P_{n,m}(\alpha)$ の第 j 列は第 1 列を α で $j-1$ 回微分して, $(j-1)!$ で割ったものに等しい.

さらに, $m_1 + \cdots + m_s = n$ であるとし, $n \times n$ 行列 P を

$$P = \left[P_{n,m_1}(\alpha_1), \dots, P_{n,m_s}(\alpha_s)\right]$$

と定める. このとき,

$$\det P = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (\alpha_j - \alpha_i)^{m_i m_j}$$

が成立する.

この公式の証明は筆者による2004年前期の線形代数の演習問題集に収録されているが, インターネット上では未公開のままである(であったと思う). 証明の方針は簡単で, Vandermondeの行列式が差積に等しいという公式を適切な回数だけ偏微分して, 異なる変数を同じにすればよい.

筆者の他に証明をインターネット上で公開している人を検索して探してみたら, 同じ方針による証明が次の文献で公開されていることがわかった:

- Garret Sobczyk. Generalized Vandermonde determinants and applications. Aportaciones Matematicas, Serie Comunicaciones 30 (2002) 41--53. (PDF (http://www.garretstar.com/secciones/publications/docs/generalized_Vandermonde.pdf))

3.5.1 互いに異なる α_j に対する(多項式函数)×$e^{\alpha_j x}$ 達の一次独立性の別証明

一般にLeibniz則 (https://en.wikipedia.org/wiki/General_Leibniz_rule)より

$$(fg)^{(i-1)} = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} f^{(k)} g^{(i-1-k)}$$

なので

$$\left(\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}e^{\alpha x}\right)^{(i-1)} = \sum_{k=0}^{i-1}\binom{i-1}{k}\frac{x^{j-1-k}}{(j-1-k)!}\alpha^{i-1-k}e^{\alpha x}.$$

これの $x=0$ での値は $\binom{i-1}{j-1}\alpha^{i-j}$ になり, $P_{n,m}(\alpha)$ の (i,j) 成分に等しくなる. ゆえにWronskianの $x=0$ での値をVandermondeの行列式の公式の一般化を用いて評価することによって, 互いに異なる α_j 達に対する $e^{\alpha_j x}, xe^{\alpha_j x}, x^2e^{\alpha_j x}, \dots$ 達の一次独立性の証明が得られる.

3.5.2 WolframAlphaによる一般化されたVandermondeの行列式の計算例

- [WolframAlpha (https://www.wolframalpha.com/)](https://www.wolframalpha.com/)

In [2]:
```
showimg("image/jpeg", "images/generalized-Vandermonde-1.jpg", scale="70%")
```

WolframAlpha

factor det{{1,0,1,1,1},{a,1,c,d,f},{a^2,2a,c^2,d^2,f^2},{a^3,3a^2,c^3,d^3,f^3},{a^4,4a^3,c^4,d^4,f^4}}

Input interpretation

factor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & c & d & f \\ a^2 & 2a & c^2 & d^2 & f^2 \\ a^3 & 3a^2 & c^3 & d^3 & f^3 \\ a^4 & 4a^3 & c^4 & d^4 & f^4 \end{vmatrix}$

Result

$-(a-c)^2(a-d)^2(a-f)^2(c-d)(c-f)(d-f)$

In [3]:
```
showimg("image/jpeg", "images/generalized-Vandermonde-2.jpg", scale="70%")
```

WolframAlpha

factor det{{1,0,0,1,1},{a,1,0,d,f},{a^2,2a,1,d^2,f^2},{a^3,3a^2,3a,d^3,f^3},{a^4,4a^3,6a^2,d^4,f^4}}

Input interpretation

factor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 & d & f \\ a^2 & 2a & 1 & d^2 & f^2 \\ a^3 & 3a^2 & 3a & d^3 & f^3 \\ a^4 & 4a^3 & 6a^2 & d^4 & f^4 \end{vmatrix}$

Result

$-(a-d)^3(a-f)^3(d-f)$

In [4]:
```
showimg("image/jpeg", "images/generalized-Vandermonde-3.jpg", scale="70%")
```

factor det{{1,0,0,1,0},{a,1,0,d,1},{a^2,2a,1,d^2,2d},{a^3,3a^2,3a,d^3,3d^2},{a^4,4a^3,6a^2,d^4,4d^3}}

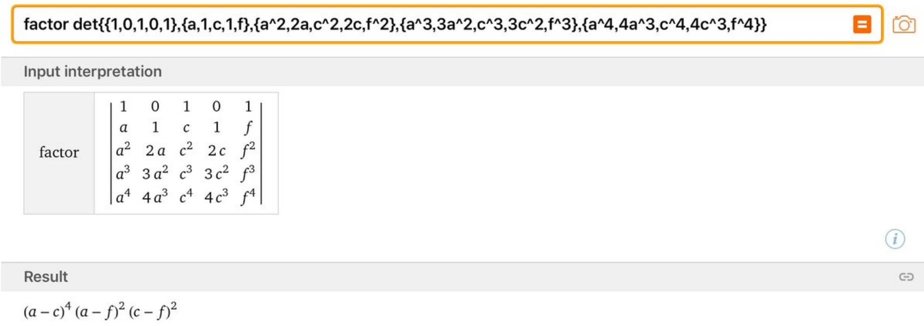
Input interpretation

factor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & d & 1 \\ a^2 & 2a & 1 & d^2 & 2d \\ a^3 & 3a^2 & 3a & d^3 & 3d^2 \\ a^4 & 4a^3 & 6a^2 & d^4 & 4d^3 \end{vmatrix}$

Result

$(a-d)^6$

In [5]:
```
showimg("image/jpeg", "images/generalized-Vandermonde-4.jpg", scale="70%")
```



3.5.3 SymPyによる一般化されたVandermondeの行列式の計算例

In [6]:
```
function Pblock(a, n, m)
    P = Array{Sym, 2}(undef, n, m)
    for j in 1:m
        for i in 1:n
            if i < j
                P[i,j] = 0
            elseif  i == j
                P[i,j] = 1
            else
                P[i,j] = binomial(i-1, j-1)*a^(i-j)
            end
        end
    end
    P
end

function Pmatrix(as, ms)
    n = sum(ms)
    hcat((Pblock(as[i], n, ms[i]) for i in 1:length(as))...)
end
```

Out[6]: `Pmatrix (generic function with 1 method)`

In [7]:
```
@vars a b c d
V = Pmatrix([a, b, c, d], [1, 1, 1, 1])
```

Out[7]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix}$$

In [8]:
```
@time V.det().factor()
```

```
  1.006343 seconds (2.25 M allocations: 111.545 MiB, 4.71% gc time)
```

Out[8]: $(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$

In [9]:
```
@vars a b c d
P = Pmatrix([a, b, c, d], [3, 2, 1, 1])
```

Out[9]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 & b & 1 & c & d \\ a^2 & 2a & 1 & b^2 & 2b & c^2 & d^2 \\ a^3 & 3a^2 & 3a & b^3 & 3b^2 & c^3 & d^3 \\ a^4 & 4a^3 & 6a^2 & b^4 & 4b^3 & c^4 & d^4 \\ a^5 & 5a^4 & 10a^3 & b^5 & 5b^4 & c^5 & d^5 \\ a^6 & 6a^5 & 15a^4 & b^6 & 6b^5 & c^6 & d^6 \end{bmatrix}$$

In [10]:
```
@time P.det().factor()
```

```
6.333972 seconds (161 allocations: 6.672 KiB)
```

Out[10]: $-(a-b)^6(a-c)^3(a-d)^3(b-c)^2(b-d)^2\,(c-d)$

In [11]:
```
@vars a b c
Q = Pmatrix([a, b, c], [4, 2, 1])
```

Out[11]:
$$\left[\begin{array}{ccccccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ a & 1 & 0 & 0 & b & 1 & c\\ a^{2} & 2a & 1 & 0 & b^{2} & 2b & c^{2}\\ a^{3} & 3a^{2} & 3a & 1 & b^{3} & 3b^{2} & c^{3}\\ a^{4} & 4a^{3} & 6a^{2} & 4a & b^{4} & 4b^{3} & c^{4}\\ a^{5} & 5a^{4} & 10a^{3} & 10a^{2} & b^{5} & 5b^{4} & c^{5}\\ a^{6} & 6a^{5} & 15a^{4} & 20a^{3} & b^{6} & 6b^{5} & c^{6}\end{array}\right]$$

In [12]:
```
@time Q.det().factor()
```

```
1.050573 seconds (161 allocations: 6.672 KiB)
```

Out[12]: $(a-b)^8(a-c)^4(b-c)^2$

In [ ]:
```

```