講義題目

共形場理論と量子可積分系

要約

共形場理論とその量子可積分系との関係について解説する. 予備知識はできる限り仮定せずに説明する予定であるが, 層の理論とコンパクト Riemann 面に関する基礎的知識は仮定するかもしれない.

主に Wess-Zumino-Witten 模型 (WZW 模型) を扱う. WZW 模型はゲージ対称性を持つ共形場理論であり、他の模型に比べて扱い易い. 共形場理論は、数学的には共形ブロック (conformal block) の理論である. WZW 模型の共形ブロックをアフィン Lie 環を用いて表現論的に定義する.

共形ブロックの空間は表現論的データと幾何的データを与えると決まる. 例えば, ゲージ群 G を対称性に持つ WZW 模型における幾何的データは, N 点付きコンパクト Riemann 面とその上の主 G 束の組である. (量子可積分系と関係を付けるためには, 点付き Riemann 面だけではなく, 主 G 束と共に考えることが本質的である.)

さらに, 幾何的データの変形に関して, 共形ブロックの空間の層化を考えることができる. 理論の要点は, 共形ブロックの層に (射影) 可積分接続が入ることである. WZW 模型の場合にその接続を具体形が計算し易いやり方で構成する.

以上の定式化を臨界レベルの場合に適用することによって, WZW 模型と量子可積分系の間に関係を付けることができる. 例えば, コンパクト Riemann 面のジーナスが 1 以下の場合を具体的に計算すると, ルート系に付随した楕円函数版の Calogero 型模型のパラメーターが特別な場合, 有理 r 行列に付随した Gaudin 模型, 楕円 r 行列に付随した Gaudin 模型, 楕円函数版の Calogero-Gaudin 模型 (Calogero 模型と Gaudin 模型の両方を含む一般化) などが臨界レベルの WZW 模型から出て来る.

以上の定式化のメリットは, アフィン Lie 環の表現論を自由に利用できることである.

例えば, 脇本表現の理論を応用することによって, 共形ブロックの積分表示式を機械的に導出することができる. (ただし, 楕円 r 行列に付随した Gaudin 模型は除く.) その要点は, 菅原作用素も含めて自由場で表現できることと, アフィン Lie 環のスクリーニング作用素を具体的に構成できることである.

さらに, 臨界レベルの脇本表現を用いることによって, 上に挙げた量子可積分系達に関する代数的 Bethe 仮設法をかなり楽に展開できる. そのとき, Bethe 仮設方程式は Lie 環の下三角部分に対応するカレントのスクリーニング作用素の作用素積展開が正則になるべしという条件から自然に導かれる.

1　談話会題目

楕円曲線上の Wess-Zumino-Witten 模型と量子可積分系

2　アブストラクト

お茶大の武部尚志氏との共同研究の内容を説明する.

楕円曲線上の Wess-Zumino-Witten 模型をアフィン Lie 環を用いて表現論的に定式化する. 量子可積分系との関係において, 以下の二点が重要である:

- 楕円曲線の変形だけではなく, その上の主 G 束の変形も考える.
- ゲージ群として, 楕円曲線上の群概型も許す.

前者は, 共形場理論と量子可積分系の関係を付けるためにどうしても必要である. なぜなら, 量子可積分系は, 楕円曲線の変形の上ではなく, その上の束の変形の上に定義されるからである.

後者は, 楕円 r 行列 (Belavin-Drinfeld) に付随した Gaudin 模型を共形場理論の立場で定式化するために必要になる. その模型は頂点型の格子模型のある種の準古典極限とみなせるので, 我々はそれを頂点型の Gaudin 模型と呼んでいる.

通常の WZW 模型は $G \times X \to X$ の型の群概型に付随する模型である. ここで, G は複素単純代数群であり, X は楕円曲線, 写像は射影である. この場合に対応する量子可積分系は面型の格子模型のある種の準古典極限とみなせる. そこで, 我々はその模型を面型の Gaudin 模型と呼んでいる.

面型の場合に関して, 具体的な量子可積分系との関係は以下のように与えられる.

簡単のため, 楕円曲線 X を $X = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ と表わしておく. このとき, 任意の $x \in G$ に対して, $z \mapsto z + 1$ と $z \mapsto z + \tau$ のそれぞれについて, G を 1 と x の右作用によって貼り合わせることによって, X 上の主 G 束の G 上での族を構成できる. この族を G の Cartan 部分群 H に制限したものを考え, さらに, それを H の Lie 環 $\mathfrak{h}$ に持ち上げたものを考える.

楕円曲線上に N 個の点を固定し, 各点 z_i ごとに G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現 V_i を対応させておく.

以上の状況で, 臨界レベルの WZW 模型を考えると, Cartan 部分群 H もしくは $\mathfrak{h}$ の元を独立変数とする以下の量子可積分系が得られる.

- $G = SL_n(\mathbb{C})$, $N = 1$, $V_1 = S^{\beta n}(\mathbb{C}^n)$ の場合から, A 型の楕円函数版の Calogero 模型得られる.
- 一般の G と N に対して, 楕円函数版の Calogero 模型と Gaudin 模型の両方が混じったような模型が対応している. 上で述べた理由で我々はこれを面型の Gaudin 模型と呼んでいる.

一般に Calogero 型の模型はルート系に付随した可積分系である. 上の定式化において, ルート系は主束の族のベースである Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ として現われている. Weyl 群の作用は主束の同型に持ち上げることができるという幾何学的な事情から, 方程式の Weyl 不変性が出て来る.

脇本表現の理論をこの場合に応用すると, 非臨界レベルにおいては Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard 方程式の解の積分表示式 (多変数超幾何積分の楕円函数版) が得られ, 臨界レベルにおいては面型の Gaudin 模型 (Calogero-Gaudin 模型) に関する代数的 Bethe 仮設法が導かれる.