算数数学教育の暗黒面

黒木玄 (Gen Kuroki)

2018-08-21

- Repository: https://github.com/genkuroki/HighSchoolMath (https://github.com/genkuroki/HighSchoolMath)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- 高校数学の話題 HTML版 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/HighSchoolMath/blob/master/MathEduDarkSide.ipynb)
- 高校数学の話題 PDF版 (https://genkuroki.github.io/documents/HighSchoolMath/MathEduDarkSide.pdf)

このノートの想定読者は大学である程度を数学を学んだ学生で高校で習った数学について見直したい人達である.

このファイルはJulia言語 (https://julialang.org/)カーネルの Jupyter notebook (http://jupyter.org/) である. 自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ. このファイルは JuliaBox (https://juliabox.com/) でも使用できるかもしれない. このファイル中のJulia言語 (https://julialang.org/)のコードを理解できれば, Julia言語 (https://julialang.org/)からSymPy (https://www.sympy.org)を用いた数式処理や数値計算の結果のプロットの仕方を学ぶことができる.

目次

In [1]:

```
using Plots
pyplot()
#gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
#clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn; scale="") = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    if scale == ""
        display("text/html", """<img src="data:$mime;base64,$base64">""")
    else
        display("text/html", """<img src="data:$mime;base64,$base64" width="$scale">""")
    end
end

using SymPy
#sympy[:init_printing](order="lex") # default
#sympy[:init_printing](order="rev-lex")

using SpecialFunctions
using QuadGK
using Elliptic.Jacobi: cd, sn
```

1 微分は分数商ではないのか？

> $\dfrac{dy}{dx}$ は $dy \div dx$ の意味ではないので, dx 分の dy と読んではいけない.

と教えている先生が一部にいるようだ. これは本当に正しいだろうか? 微分形式を含む現代数学における**微分**のスタイルを知っていれば, **そのような教え方は誤り**になるので注意しなければいけない.

実際, 高木貞治『解析概論 (https://www.google.co.jp/search?q=%E9%AB%98%E6%9C%A8%E8%B2%9E%E6%B2%BB+%E8%A7%A3%E6%9E%90%E6%A6%82%E8' には以下のように書いてある.

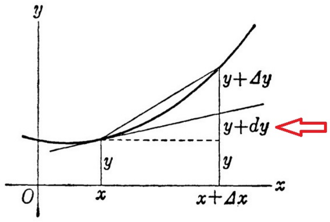
In [105]:

```
showimg("image/jpeg", "images/kaisekigairon-bibun1.jpg", scale="80%")
```

高木貞治『解析概論』p. 36より

函数 $y=f(x)$ のグラフにおいては，$\Delta y/\Delta x$ は点 (x, y) と点 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ とを結ぶ弦の勾配で，$\dfrac{dy}{dx}$ は点 (x, y) における接線の勾配である．

$\Delta x, \Delta y$ はグラフの上での点の座標の変動であるが，もしもグラフの代りに接線を取って，接線上における点 (X, Y) の座標の変動を dx, dy で表わして，$dx=X-x$（それは Δx と同一），また $dy=Y-y$（それは Δy とは違う）とするならば



$$dy=f'(x)dx \qquad (1)$$

は点 (x, y) における接線の方程式にほかならない．そのように dx, dy を単独に定義すれば，(1) の意味は明確である．しかし我々は点 (x, y) の近傍においてのみ (1) を用いるつもりであるから，dx を変数 x の**微分** (differential)，dy をそれに対応する函数 y の微分という．

In [104]:

```
showimg("image/jpeg", "images/kaisekigairon-bibun2.jpg", scale="80%")
```

高木貞治『解析概論』より　14. 微分の方法　37

$f'(x)\cdot\Delta x$ を点 x における函数 $y=f(x)$ の微分と名づけて，それを dy で表わすことにする．すなわちこの定義によれば

$$dy=f'(x)\Delta x. \qquad (4)$$

今同様の意味において，x それ自身を x の函数とみれば，$x'=1$ だから

$$dx=\Delta x.$$

故に上記定義の下において，Δx は x の函数なる x の微分である．これを (4) に代入すれば，

$$dy=f'(x)dx. \qquad (5)$$

これを

$$\frac{dy}{dx}=f'(x) \qquad (6)$$

と書くならば，記号 $\dfrac{dy}{dx}$ において dx および dy が各々独立の意味を有するから，$\dfrac{dy}{dx}$ は商としての意味を有する．すなわち‘微分商’というものである．

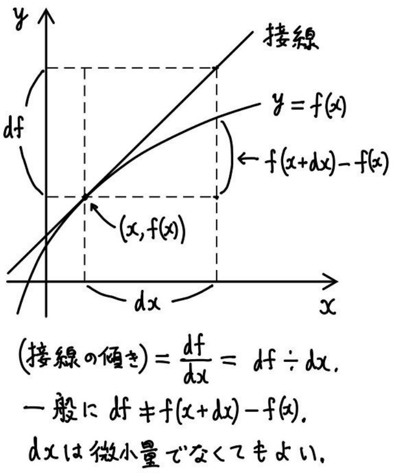
このように，現代的の精密論法によって，Leibniz の漠然たる‘微分商’が合理化される．また (5) によれば，$f'(x)$ は微分 dy における dx の係数であるから，それを‘微分係数’というのも，もっともではある．

以上のように, 高木貞治『解析概論』には

> $\dfrac{dy}{dx}$ は商として意味を有する.

とはっきり書いてある. 高木貞治氏による dx, dy の定義は筆者が独立に描いた次の図と本質的に同じである.

```
In [83]: showimg("image/jpeg", "images/bibun.jpg", scale="33%")
```



df の定義を $f(x+dx)-f(x)$ とするのではなく, 上の図のように取ることが, $\dfrac{df}{dx}$ を真の分数商とみなすときのポイントになる. 数学の定義はこのような「みもふたもない」ものが多い. この図の df の定義を一般化することによって1次の**微分形式**(differential form)が定義される. 微分形式は現代数学における基本的な概念である.

2 高校数学における三角函数の微積分は循環論法なのか？

答えは**いいえ**である.

高校数学IIIの教科書には「曲線の長さを速さの積分で表す公式」が書いてある:

$$L=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt.$$

その公式を用いて弧度法の意味での角度 θ を $(x(t),y(t))=(\sqrt{1-t^2},t)$ から得られる

$$\theta=\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

で定義したり, $(X(u),Y(u))=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}},\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)$ から得られる

$$\theta=\int_0^a \frac{du}{1+u^2}$$

で定義することによって, 高校数学のスタイルそのままの三角函数の定義に基いて三角函数の微積分の理論を展開できるようになる.

その結果は循環論法にならないだけではなく, べき級数による天下り的な定義の採用によってすべての議論を再構成する必要がなくなるだけではなく, その他様々な技巧をこらした三角函数の再定義を行う必要もなくなり, そしてさらに楕円函数論にも容易に接続できるような議論の仕方も可能になる.

数学的にはそういう事情になっているので, 数学を本当に理解する気があるならば, 「高校数学における三角函数の微積分は循環論法である」などと安易に言ってはいけない.

実際の理論の展開の仕方の素描を「[高校数学の話題 (https://github.com/genkuroki/HighSchoolMath)](https://github.com/genkuroki/HighSchoolMath)」の方に書いておいたので参照して欲しい.

補足: 前者と後者の θ の定義は

$$t = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \qquad u = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

という変換によって同値にであることも確認できる. $\square$

In [37]:
```
u = symbols("u", real=true)
t = u/√(1+u^2)
simplify(1/√(1-t^2) * diff(t, u))
```

Out[37]:

$$\frac{1}{u^2+1}$$

In [38]:
```
t = symbols("t", real=true)
u = t/√(1-t^2)
simplify(1/(1+u^2) * diff(u, t))
```

Out[38]:

$$\frac{1}{\sqrt{-t^2+1}}$$

3 無理式とは根号内に文字を含む式のことなのか？

高校の数学の教科書を見ると,

> $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{2x^2-3}$ などのように根号内に文字を含む式をその文字についての**無理式**といい, x についての無理式で表された関数を x の**無理関数**という. (実教出版『数学III』2009年1月25発行)

のように書いてある. これは高校の数学の教科書外では通用しない可能性が高い「定義」である.

数については, $\sqrt{2}$ などが無理数なだけではなく, $\sqrt[3]{4}$ も無理数だし, π のような超越数も無理数である. 数と函数の類似に従えば, $\sin x$ のような超越函数も無理函数と呼びたくなるのだが, 上の定義に従うとそれは不可能になる.

さらに, **上に引用した無理式の定義がおそろしくあいまい**である. $\sqrt{\sin x}$ は無理式なのだろうか?

無理式(irrational expression)や無理函数(irrational function)は19世紀の数学の教科書に見付かる用語である. 19世紀の時代遅れなスタイルが伝言ゲームによって21世紀の現代まで伝わっているいるのだろう.

上に引用したような定義になっていない「定義」は数学の本質と無関係である. 数学を教えるときには, 歴史的な経緯や数学とは無関係の「大人の事情」によって不適切な記述が教科書に残ってしまうことがある.

数学を教えるときには, **教科書に忠実に従うことは決してやってはいけないこと**である.

その理由は単に教科書が誤りを含む可能性があるからだけではなく, 非標準的な用語や非標準的な流儀を採用していることがあり, そのような場合にはそれが非標準的であることがわかるように教えなければいけないからである. 教科書に書いてあることはそれが標準的であることを意味しない. 場合によっては教える必

要がないことが教科書に書いてあることもある. 数学を教えるときには, 教科書とは独立に何が標準的で何が正しくて何が良い議論の仕方なのかを知っておく必要がある.

4 単項式は多項式ではないのか？

現代における標準的なスタイルでは**単項式は多項式の特別な場合になる.**

しかし, 非常に残念なことに, 中学校と高校の数学の教科書における用語の体系は以下のようになっているように見える.

中学高校の数学教科書	現代的に標準的なスタイル
整式	多項式
単項式	単項式
多項式	複数の項を持つ多項式

現代ではほとんどの通信や放送がデジタル化されている. デジタル通信では情報の符号化とプライバシーを守るための暗号の技術が必要になる. それらの技術を理解するためには多項式環の理論も理解しておかなければいけない. そのような実用的な数学を学ぶためには, 現代的には常識的なスタイルの用語法に従う必要がある.

このような事情になっているにもかかわらず, 中学と高校の数学の教科書は19世紀以来の時代遅れのスタイルを採用してしまっている.

この点は改善されるべきなのだが, そのような改善が行われる目途は現時点ではまったくない.

下の方の画像はGoogle Booksからの引用である. 以下のリンク先で読める:

- James B. Dodd, High School Arithemtic, 1852, 362 pages. Google Books (https://books.google.co.jp/books?id=-UIXAAAAYAAJ&pg=PA129&dq=monomial+polynomial#v=onepage&q=monomial%20polynomial&f=false)
- Elias Loomis, The Elements of Algebra 1870, 281 pages. Google Books (https://books.google.co.jp/books?id=FodTAAAAYAAJ&pg=PA45&dq=monomial+polynomial#v=onepage&q=monomial%20polynomial&f=fa
- Kunihiko Kodaira, Mathematics 1: Japanese Grade 10, American Mathematical Soc., 1996, 247 pages. Googl Books (https://books.google.co.jp/books?id=nOkrDAAAQBAJ&pg=PA27&dq=integral-expression+monomial+polynomial#v=onepage&q=integral-expression%20monomial%20polynomial&f=false)

以下の引用を見れば19世紀には「単項式は多項式ではない」というスタイルで教科書が書かれていたことがわかる. 問題なのはそういう時代遅れなスタイルが21世紀の現代日本の数学の教科書でも採用されていることである. 日本の教科書の英訳を見ると, 19世紀のスタイルをそのまま踏襲しているように見える.

In [106]:
```
showimg("image/jpeg", "images/polynomial1852.jpg", scale="70%")
```

§ 171. A *monomial* quantity, or simply a *monomial*, is a quantity expressed by a *single name* of measuring units, (§ 154).

Thus 5 *dollars* is a *monomial;* 10 shillings is a monomial.

§ 172. A *polynomial* quantity, or simply a *polynomial*, is a quantity expressed by *two or more names* of measuring units.

Thus 5 *dollars* 25 *cents* is a *polynomial;* 3 pounds, 10 shillings and 6 pence, is a polynomial.

A polynomial is composed of two or more monomials, which may thence be called the *terms* of the polynomial.

Thus in the first example given, the terms are 5 *dol.* and 25 *c.*; and in the second, 3£, 10 *s.* 6 *d.*

Note.—Monomial quantities have by some been called *denominate numbers*, and *polynomials* have usually been called *compound numbers.*

James B. Dodd, High School Arithemtic, 1952, p.128

In [107]:
```
showimg("image/jpeg", "images/polynomial1870.jpg", scale="60%")
```

(32.) An algebraic quantity composed of a single term is called a *monomial*.

Thus, $2a$, $3bc$, $5xy^2$, are monomials.

An algebraic expression, consisting of two terms only, is called a *binomial;* one consisting of three terms is called a *trinomial.*

Thus, $3a+5b$ is a binomial, and $a+2bc+5xy$ is a trinomial.

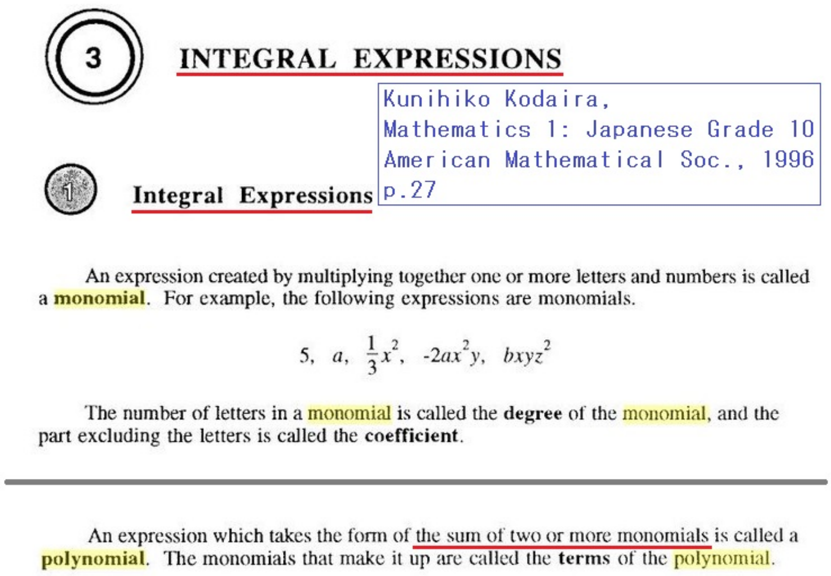
An algebraic expression which is composed of several terms is called a *polynomial.*

Thus, $2a+5b+7c-4d$ is a polynomial.

Elias Loomis, The Elements of Algebra, 1870, p.45

In [108]:

```
showimg("image/jpeg", "images/polynomial1996.jpg", scale="70%")
```



3 INTEGRAL EXPRESSIONS

Kunihiko Kodaira,
Mathematics 1: Japanese Grade 10
American Mathematical Soc., 1996
p.27

1 Integral Expressions

An expression created by multiplying together one or more letters and numbers is called a **monomial**. For example, the following expressions are monomials.

$$5,\quad a,\quad \frac{1}{3}x^2,\quad -2ax^2y,\quad bxyz^2$$

The number of letters in a monomial is called the **degree** of the monomial, and the part excluding the letters is called the **coefficient**.

An expression which takes the form of the sum of two or more monomials is called a **polynomial**. The monomials that make it up are called the **terms** of the polynomial.

5 等式は方程式と恒等式に分類されるのか？

答えは**いいえ**である.

あらゆる等式は単に「左辺と右辺が等しい」という意味を持つに過ぎない.

等式を与えただけでその等式が, 方程式になったり, 恒等式になったりするわけではない.

例えば, 等式 $x = x$ について,

- $x = x$ を満たすすべての実数 x を求めよ.

という問題を考えれば方程式を考えていることになるし,

- $x = x$ はすべての実数 x について成立している.

と言えば $x = x$ が実数直線上の恒等式であることを主張している.

等式に含まれる文字が増えた場合も同様である.

例えば, $ax + b = c$ を x に関する方程式とみなすときには, 「a, b, c が与えられているときに, 等式 $ax + b = c$ を満たす x を求めること」を考えていることになる.

例えば, $ax + b = c$ を x に関する恒等式とみなすときには, 「すべての数 x について等式 $ax + b = c$ が成立するような a, b, c 」について考えていることになる.

等式だけを見て, その等式が方程式であるか恒等式であるかを判定することは不可能である.

しかし, 「等式 方程式 恒等式」をGoogleで検索 (https://www.google.co.jp/search?q=%E7%AD%89%E5%8F%B7+%E6%96%B9%E7%A8%8B%E5%BC%8F+%E6%81%92%E7%AD%89%E5 すると, 等式の方程式と恒等式への分類にこだわっている解説が多数見つかる.

実はこれもまた「19世紀の時代遅れのスタイルが中学高校での数学教育に残ってしまっている」という問題の一例に過ぎない.

19世紀の教科書には, equations (等式という意味)を identities (恒等式)と conditional equations (条件によって成立したり成立しなかったりする等式, 単に equation と書かれることも多い)に分けて説明するスタイルを採用しているものがあって, そのスタイルが日本語圏の中学高校の数学教育における「等式を恒等式と方程式に分けて説明するスタイル」として生き残っているものだと推測される.

19世紀スタイル	意味
equation	等式
identity	恒等式
conditional equation	条件によって成立したりしなかったりする等式

あらゆる等式は単に両辺が等しいことを意味する式(記号列)に過ぎない. 文脈によってニュアンスを変えたい場合に恒等式と呼んだり, 方程式と呼んだりするだけである.

以下の引用は

- C. A. Van Velzer and Chas. S. Slichter, University Algebra, 1892, 732 pages. Google Books (https://books.google.co.jp/books?id=rkQ1AQAAMAAJ&pg=PA135#v=onepage&q&f=false)

より. 19世紀の教科書による説明.

In [109]:
```
showimg("image/jpeg", "images/equation1892.jpg", scale="70%")
```

CHAPTER X.

SIMPLE EQUATIONS.

212. An **Equation** is the statement of equality which exists between two expressions. See Arts. 23 and 24.

213. The **Members** or **Sides** of an equation are the parts on either side of the sign $=$, and are distinguished as the **First** and **Second Members,** or **Left** and **Right Sides,** respectively.

Students often have a careless habit of calling almost everything in Algebra an *equation*. Thus we hear $a^2+2ab+b^2$ called an equation instead of an expression or a trinomial. It is better to call an expression an expression, and an equation an equation.

214. If the two sides of an equation are equal, no matter what numbers are substituted for the letters, the equation is called an **Identical Equation** or simply an **Identity.** Thus the following equations are identities:

$$(x+a)(x+a)=x^2+2ax+a^2;$$
$$x(x-a)=x^2-ax;$$
$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2;$$

for the equations are true, no matter what numbers are put for x and a.

215. If the two sides of an equation are equal only when particular numbers are substituted for the letters the equation is called a **Conditional Equation** or simply an equation. The following are conditional equations:

$$x+1=2;$$
$$x+7=2x+4;$$

for the first equation is true only when $x=1$, and the second is true only when $x=3$.

実際には様々な条件が複雑に入り組んだ問題を考えることが多い. 例えば,

> **問題((https://www.kahoku.co.jp/special/exam2018_tohokudai/index_sp.html)東北大学入試問題2018年前期日程, 理系[3]):** 整数 a, b は等式
>
> $$3^a - 2^b = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$
>
> を満たしているとする。
>
> (1) a, b はともに正となることを示せ。
>
> (2) $b > 1$ ならば, a は偶数であることを示せ。
>
> (3) ①を満たす整数の組 (a, b) をすべてあげよ。

これは広い意味での方程式の問題なのだが, **方程式という用語を使ってもこの問題を解くためには役に立たない**. このような問題を解くためには,

どのような仮定のもとで, どのような条件を満たす何を求めたいのか？もしくは考えるのか？

というような普遍的に通用するスタイルを採用する必要がある.

例えば, (1)では a が0以下の場合に等式①が成立しないことと, b が0以下のとき等式①が成立しないことを示さなければいけない.

(2)では b が2以上の整数のとき, 等式①を満たす整数 a が偶数でなければいけないことを示さなけばいけない(ヒント: mod 4 で考えよ).

(3)では(2)を使って $b > 1$ の場合に等式①を満たす a をすべて求めなければいけないだろう(ヒント: $a = 2k$ のとき①は $3^{2k} - 1 = 2^b$ すなわち $(3^k + 1)(3^k - 1) = 2^b$ と同値になる. $3^k + 1$ と $3^k - 1$ の最大公約数を互除法で求めよ). $b = 1$ の場合は $a = 1$ となることがすぐにわかる.

上に述べたような普遍的なスタイルで常に考えるようにすれば19世紀由来の「等式を恒等式と方程式に分類するスタイル」は完全に忘れても大丈夫である.

6 問題 6÷2(1+2)=?, 2a÷2a=? の答えは唯一つに決まるか？

答えは**決まらない**である.

- 6÷2(1+2)をGoogleで検索 (https://www.google.co.jp/search?q=%226%C3%B72(1%2B2)%22)

「6÷2(1+2)=?」はインターネット上で話題になった問題である.

数式は決められた規則によって解釈されなければいけない. しかし, その規則が決まっていない場合には解釈が唯一つに確定しないことになっていまう. 「6÷2(1+2)=?」はまさにそのような例になっている.

「6÷2(1+2)」には少なくとも「(6÷2)×(1+2)」と「6÷(2×(1+2))」の2通りの解釈があり得る. 前者ならば答えは9になり, 後者ならば1になる. インターネット上では「答えは9」派と「答えは1」派が争うことに成り易いのだが, そのどちらの派閥も間違っていることになる. 解釈が一意に確定しない問題について答えがどちらになるかを争っても無意味である.

「6÷2(1+2)」問題については英語の次のサイトが秀逸である:

- What is 48÷2(9+3)? (https://math.stackexchange.com/questions/33215/what-is-48%C3%B7293)

そこでは「数学的記号法に最高裁判所は存在しない」という回答の人気が高い.

$2a \div 2a$ についても少なくとも $((2 \times a) \div 2) \times a$ と $(2 \times a) \div (2 \times a)$ の2通りの解釈が存在するので, 答えは唯一に確定しない. しかし, 中学校の数学の教科書的には $2a \div 2a$ は 1 のみが正解であるということになっており, しかも正解をそれに限定するためのルールが教科書では一切説明されていない. そして, 仮にルールが説明されていたとしても, そのルールは単なるローカルルールに過ぎず, 中学校の外では通用しない. そして, 恐ろしいことに $6ab \div 2a$ のような曖昧な問題は全国の高校入試における定番の問題になっており, 表沙汰になっていない被害者は相当な数にのぼるものと推測される.

日本語圏において, ただでさえ混乱し易いインターネット上の議論をさらに混乱させたのはおかしな主張をしている「論文」の存在である. 具体的には次の2つの「論文」の内容には問題がある.

- [熊倉2006] 熊倉啓之, 乗除混合演算式についての理解と指導に関する研究 : A÷B×CとA÷BCのタイプの式に焦点を当てて, 2006. リポジトリ (https://shizuoka.repo.nii.ac.jp/?action=pages_view_main&active_action=repository_view_main_item_detail&item_id=113&item_no=1&pa
- [熊倉2016] 熊倉啓之, 文字式の計算順序に関する指導：「かけ算記号省略優先」規則に焦点を当てて, 2016. リポジトリ (https://shizuoka.repo.nii.ac.jp/?action=pages_view_main&active_action=repository_view_main_item_detail&item_id=8171&item_no=1&

[熊倉2006]のp.51には次の画像のように書いてある.

In [110]:
```
1 showimg("image/png", "images/kumakura2006.png", scale="80%")
```

しかし，一方で，式12ab÷4bを，かけ算記号×を省略せずにかいたとき，
(12×a×b)÷(4×b)あるいは　12×a×b÷(4×b)

と正しく解答せずに，
12×a×b÷4×b
とする誤答は，少なくないと考えられる。
実は，かけ算記号の省略については，中１の「文字と式」で扱うが，
「かけ算記号が省略された部分については，優先して計算を行う」…★
ことについて，きちんと指導している教科書は一社もない。もちろん，中２の「式と計算」でも同様である。

熊倉啓之，乗除混合演算式についての理解と指導に関する研究 ：
A÷B×CとA÷BCのタイプの式に焦点を当てて，2006，pp. 50-51

これだけではニュアンスが確定しないが, 論文全体と次に紹介する引用を見ればわかるように, 以上で引用した部分は「かけ算記号が省略された部分については, 優先して計算を行う」という確固たるルールがあるのにそれを教えないのは「けしからん」という主張である.

インターネット上ではこの論文を引用して, 「6÷2(1+2)」における「かけ算記号がされた部分」である「2(1+2)」は「優先して計算を行う」ことになっているので, 答えは1になると主張している人達がいた.

もちろんこのような議論の仕方は誤りである. 誰かが書いた「論文」に書いてあることは正しいことの根拠にはならない. 「論文」に書いてあるか否かではなく, 証拠が提出されているかが本質的なのである.

実際には存在しないルールがあたかも当然のルールであるかのように語っている論文を引用して根拠として採用することは単なる権威主義であり, 真面目に正誤を議論する態度ではない.

さらに, [熊倉2016] には以下に引用するように書いてある.

In [111]:
```
1 showimg("image/png", "images/kumakura2016-1.png", scale="45%")
```

規則vi　かけ算記号が省略されている場合は， その部分を先に計算する．

しかし，この規則viに関わる記述がある教科書は１社もない[4]．

熊倉啓之，文字式の計算順序に関する指導 ：「かけ算記号省略優先」規則に焦点を当てて，2016，p.35より

In [112]:
```
1    showimg("image/png", "images/kumakura2016-2.png", scale="90%")
```

⑵　規則ⅵを使用する意義

次に，使用する必要のない規則ⅵをなぜわざわざ使用するのか，この規則ⅵを使用することの意義について考察する．

①　単項式同士の四則演算を簡潔に表現する

小学校では，整数や小数，分数の四則演算について，加法，減法，乗法，除法の順に，＋，－，×，÷記号を用いて学習する．また，中学校第1学年でも，正負の数の四則演算について記号を用いて順に学習する．これに倣えば，単項式同士の四則演算についても，次のように，四則演算の記号を用いて指導することが教育的であるといえる．

ア　単項式 3a と 2a の四則演算

(3a)＋(2a)，(3a)－(2a)，(3a)×(2a)，(3a)÷(2a)

このうち，次のように，加法，減法については規則ⅲ（乗除優先）により，また乗法については結合法則により，それぞれカッコをはずすことができる．一方，除法の場合は，規則ⅰにより前のカッコをはずすことはできるが，規則ⅵを使用しなければ後ろのカッコをはずすことはできない．

イ　(3a)＋(2a)＝3a＋2a　∵規則ⅲ

ウ　(3a)－(2a)＝3a－2a　∵規則ⅲ

エ　(3a)×(2a)＝3a×2a　∵結合法則

オ　(3a)÷(2a)＝3a÷(2a)　∵規則ⅰ

逆に言えば，規則ⅵを使用することで，四則演算の4つの式について，すべてカッコを省略して簡潔に表現することができるといえる．なお，上記のことは，平方根の加減乗除の式表現についても同様である．

②　わり算記号省略の場合と統一する

わり算記号を省略して分数の形にした場合，分数の部分は，その商を先に計算する[5)]ので，次のカのようにカッコをはずすことができる．

これと同様にして，かけ算記号を省略する場合も，キのようにわり算記号省略の場合と同様な規則として規則ⅵを使用すれば，統一的に表現することができる．

カ　$a\div(b\div c)=a\div\left(\dfrac{b}{c}\right)=a\div\dfrac{b}{c}$

キ　$a\div(b\times c)=a\div(bc)=a\div bc$

③　式を計算結果とみる捉え方を促進する

文字式の捉え方には，計算の過程（process）とみる捉え方と，計算した結果(product)とみる捉え方があり，「2つの捉え方をすることが困難であること」，「process とみる捉え方が product とみる捉え方に先行すること」が指摘されている（A.Sfard & L.Linchevski, 1994：清水，1998：小岩，2005 等）．例えば，単項式 3a を単項式 2a で割る場合は，規則ⅵを使用することで，除数の 2a は，除法の計算をする段階では，あらかじめ計算した結果である product としての捉え方をすることになる．すなわち，規則ⅵを使用することにより，product としての捉え方が促進されることが期待できる．

④　除数が分数の形の式の場合に統一する

例えば，単項式 3a を単項式 $\dfrac{a}{2}$ で割る場合と $\dfrac{1}{2}a$ で割る場合の2つの式を，規則ⅵを使用せずに表現すると，次のようになる．

ク　$3a\div\dfrac{a}{2}$　　$3a\div\left(\dfrac{1}{2}a\right)$

一方はカッコが不要で，他方はカッコが必要である．類似の式でありながら，カッコの必要の有無が異なるのは，子どもの理解に混乱を生じさせる要因となりかねない．しかし，規則ⅵを使用することで，両方ともカッコが不要になって簡潔に表現できる．少なくともこのような分数倍の単項式で割る場合に，子どもが表現方法について混乱することはなくなるであろう．

以上，「かけ算記号省略優先」規則を使用しない理由と使用する意義について考察してきた．それでは，この規則は使用する方がよいのか，それとも使用しない方がよいのか．教育的な観点から考えると，筆者はこの規則を使用することがよいと考える．なぜならば，上で述べた意義①～④は，規則を積極的に使用する理由に値すると考えるからである．

熊倉啓之，文字式の計算順序に関する指導 ：
「かけ算記号省略優先」規則に焦点を当てて，2016
pp. 39-40より

「かけ算記号が省略されている場合は, その部分を先に計算する」(規則vi)を使用したときのメリットを4つ述べているので順番にコメントして行こう.

①は確かに正しい. 規則viを使用すれば確かに括弧の使用量を減らすことができる. しかし, 括弧の使用量を減らしたければ, 横線の分数表記 $\dfrac{3a}{2a}$ を使えばよいだけなので規則viのメリットはほぼない.

②も ÷ 記号の使用継続にこだわるという不合理な方針を採用しているので, 規則vi採用の合理的な理由として採用できない.

熊倉氏は横線の分数表記(例: $\dfrac{b}{c}$)と横に記号を並べる記号法(例: bc)を同様に扱いたいようだが, そもそも演算の優先順位の観点から横線の分数表記と横に記号を並べる記号法の仕組みが全く異なることを理解しているのだろうか?

横線の分数表記では横線の長さの分だけひとかたまりとみなされ優先的にその部分が先に計算される. 横に記号を並べる記号法では演算子の優先順位を決めることによって括弧の使用量を減らすことができるように工夫する. 横線の分数表記で括弧が必要がなくても, 横に記号を並べる記号法では必要になることがあっても何にも問題がない.

③は全くのナンセンス.

この文脈で, プロセス(過程)は「計算が終わっていない式」というような意味で, プロダクト(結果)は「計算が終わった式」というような意味である.

算数では「36÷12」のような式における36も12も「計算が終わった式」とみなされており, 「36÷12」の全体は「計算が終わっていない式」とみなされる. 「36÷(3×4)」における3×4は「計算が終わっていない式」とみなされる. 算数ではおおむね演算子 $+, -, \times, \div$ を含む式は「計算が終わっていない式」とみなされる.

それとの類似で「3a÷2a」についても教えようというのが③の主旨であると思われる. $2a$ の部分には $\times$ という演算子記号が存在しないので, 算数に慣れた生徒が「12」のような「計算が終わった式」とみなすことを期待しているのだろう.

しかし, 数学を正しく理解するためには式を「計算が終わっていないとみなされる式」と「計算が終わったとみなされる式」に分類することは有害である.

数学を理解するために必要な考え方は「目的ごとに適切な形式に等値変形すること」である. 例えば $2a$ は $2 \times a, a \times 2, a + a, 5a - 3a$ のどれとも等しい. 例えば

$$3a, \quad 5a, \quad 9a, \quad 17a, \quad \dots$$

は

$$(2+1)a, \quad (2^2+1)a, \quad (2^3+1)a, \quad (2^4+1)a, \quad \dots$$

と書き直した方が規則性が見易いだろう. 目的ごとにどのような形式に整理した方がよいかは大幅に変化する.

他にも $(x+2)^2 - 1$ は展開した結果を見たいならば $x^2 + 4x + 3$ と変形することになるが, 因数分解した $(x+1)(x+3)$ の形の式が欲しいことは実に多い.

こういう事情があるので, 算数に過剰に不適切な形で慣れてしまったせいで演算子が残っているか否かに基いて「計算が終わっていない式」「計算が終わった式」というよろしくない見方をしがちな生徒に対して, そのよろしくない見方を維持させるような教え方をするのは止めた方がよい.

算数の教科書通りの教え方では, $2+4, 8-2, 2 \times 3, 12 \div 2$ のどれもが完全に同一の数を表す記号列(式)であることを教えない. そもそもそれらがどれも数を表す記号列(式)であることさえ教えない. この点についても後で触れる.

算数の段階で $9-1$ と 2×4 が完全に同一の数を表す異なる記号列(式)であるとしっかり教えていれば, $(x+2)^2 - 1$ と $(x+1)(x+3)$ が完全に同一の多項式を表す記号列(式)であることも納得し易いだろう.

現実の数学教育における困難の多くが算数教育における問題のある教え方に関係している.

④ $\dfrac{a}{2}$ と $\dfrac{1}{2}a$ は確かに完全に同一の多項式を表す記号列(式)であるが, 前者は a を 2 で割った結果を意味し, 後者は $1/2$ と a の積である. それらを式の解釈時に使用されるルールで同じように扱う必然性はない.

もしも生徒が次のような考え方をしていたら, 教師はそれは誤りだとはっきり指摘しなければいけない.

誤った考え方: $\dfrac{1}{2}a$ は演算記号 × 記号を含まないので計算が終わった式とみなされる. すなわち, 算数における計算問題の答えと同じような扱いになる. 算数における計算問題において 12 が分離できない1つの数とみなされるのと同様に, $\dfrac{1}{2}a$ も分離できないひとかたまりの式とみなされる. $\square$

$3a \div \frac{1}{2}a$ の解釈は ÷ とかけ算記号を省略した並置積表記のどちらの優先順位が高いかを決めないと決まらない. そしてどちらを優先するかに関する標準的なルールは存在しない.

以上のように, 熊倉氏による意見①〜④にはまったく説得力がない. 説得力がないどころが教育的に有害な意見を述べているようにも見える.

数学は学校内で使用できればよい知識ではない. 勝手にローカルルールを作ってしまうことのデメリットは大きい. 非標準的なローカルルールを導入して混乱が減ると考えるのは基本的に誤りである.

岩倉氏の調査でも日本以外では横線の分数表記を主に扱っている教科書が結構多い. そして, 日本でも ÷ 記号はより高級な数学を学ぶ過程でほとんど使用されなくなる. 中学校以降は ÷ 記号の使用を止めて, 見易さで優る横線の分数表記に以降するようになっている.

$$(x^2+1) \div (x^2+x+1) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$$

では右辺の書き方の方が一目でどういう意味の式であるかが見易いだろう. ÷ 記号を使用した式は見易くなく, 人間にとって優しく(易しく)ない. 国際的には, 横線の分数表記を使いたくない場合には, ÷ ではなく, / を使うことの方が圧倒的に多い.

中学生にも ÷ の代わりに横線の分数表記や / を主に使うことを教えた方が標準的な記号法に慣れるという意味で好ましいのではないか?

7 ゼロは倍数ではないのか？

常識的には**0はあらゆる数の倍数**である.

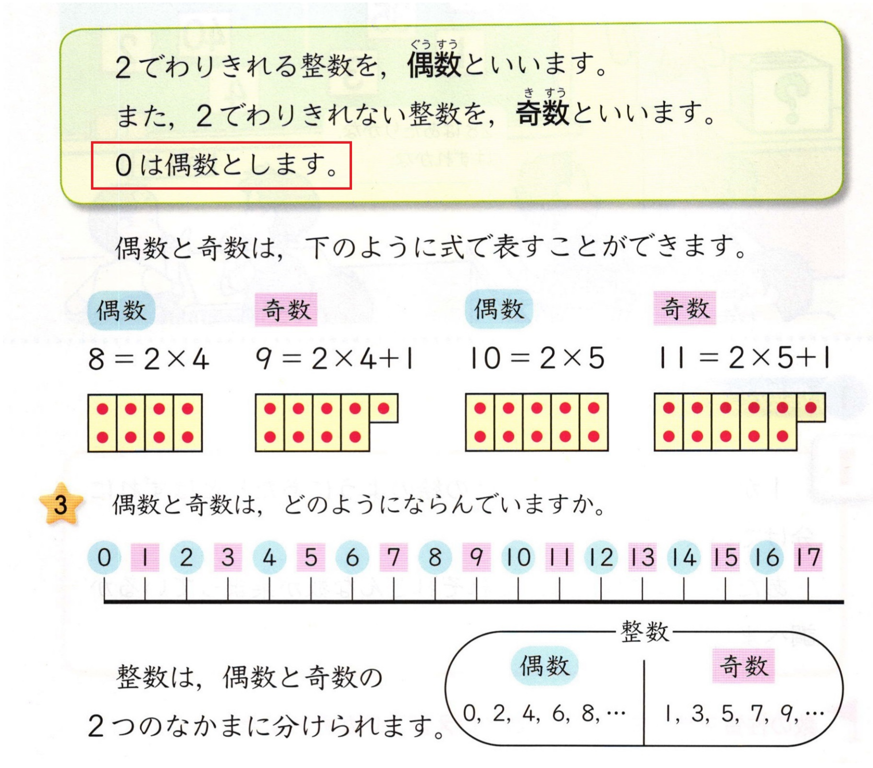
しかし, 実際に算数の教科書を確認すると以下のように書いてある. 以下では東京書籍の算数教科書を引用するが他社の算数教科書についてほぼ同様である. 驚くべきことに

- 0は偶数とします。
- 0は, 倍数には入れないことにします。

と書いてある! 常識的には**0は偶数でかつあらゆる数の倍数**である.

In [113]:

```
showimg("image/jpeg", "images/kyokasho-gusu.jpg", scale="70%")
```



2でわりきれる整数を，**偶数**といいます。
また，2でわりきれない整数を，**奇数**といいます。
0は偶数とします。

偶数と奇数は，下のように式で表すことができます。

偶数 $8=2\times4$　奇数 $9=2\times4+1$　偶数 $10=2\times5$　奇数 $11=2\times5+1$

3 偶数と奇数は，どのようにならんでいますか。

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

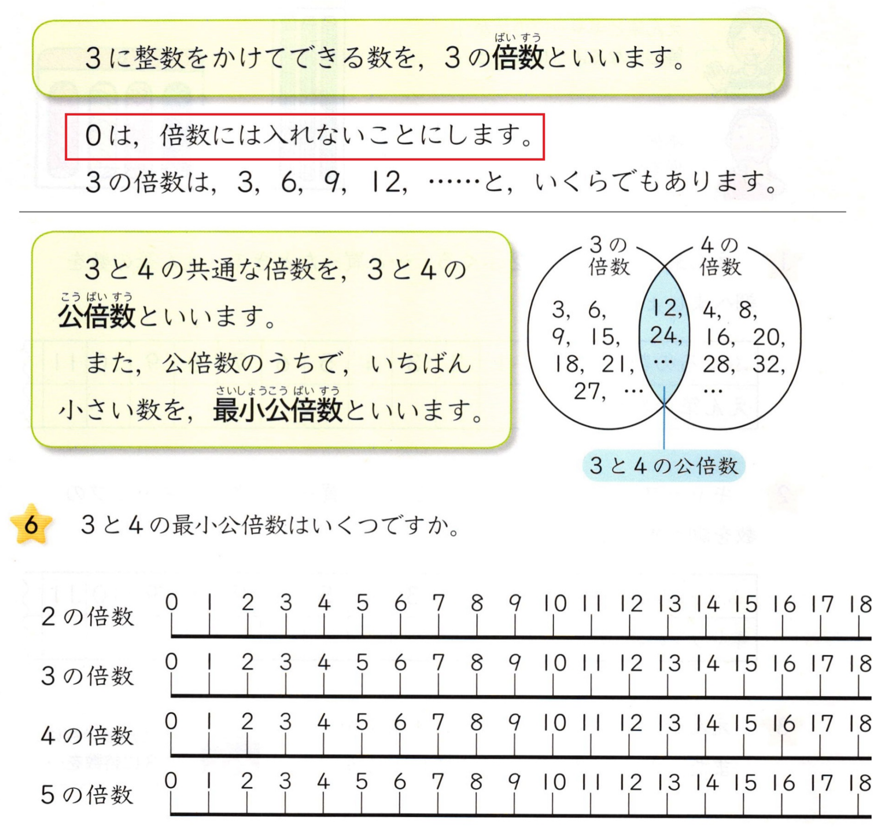
整数は，偶数と奇数の2つのなかまに分けられます。

整数
偶数 0, 2, 4, 6, 8, …
奇数 1, 3, 5, 7, 9, …

東京書籍『新しい算数5上』平成26年2月28日検定済p. 80より

上の偶数に関する説明は非常にわかりやすい.

In [114]:
```
showimg("image/jpeg", "images/kyokasho-baisu.jpg", scale="70%")
```


3に整数をかけてできる数を，3の倍数(ばいすう)といいます。

0は，倍数には入れないことにします。

3の倍数は，3，6，9，12，……と，いくらでもあります。

3と4の共通な倍数を，3と4の公倍数(こうばいすう)といいます。

また，公倍数のうちで，いちばん小さい数を，最小公倍数(さいしょうこうばいすう)といいます。

6 3と4の最小公倍数はいくつですか。

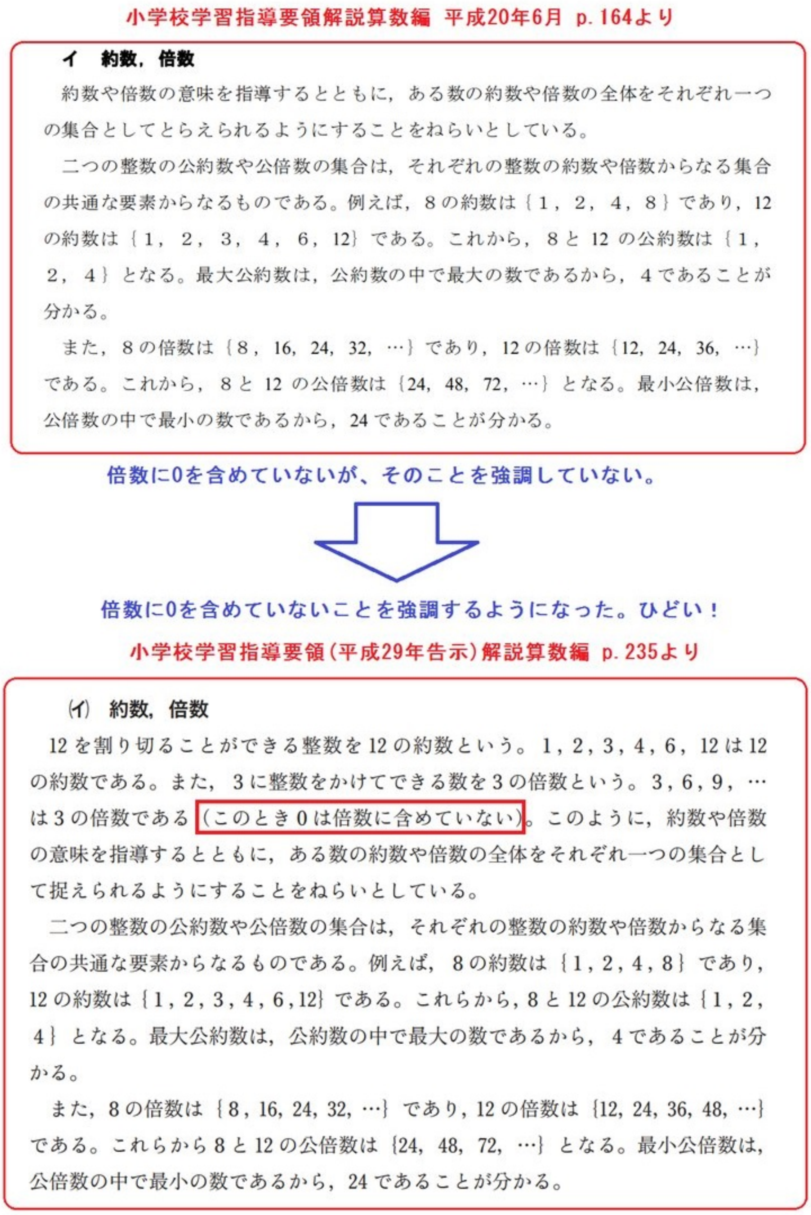
東京書籍『新しい算数5上』平成26年2月28日検定済p. 82より

最小公倍数を「0以外の公倍数を最小のもの」と定義しておけば問題ないのに，「0は, 倍数には入れないことにします」と非常識なローカルルールを宣言しており, しかも**0を含む**数直線上の倍数を丸で囲ませる問題が掲載されている(問題文は引用しなかった次のページにある). そして，「0はあらゆる数の倍数である」という標準的な常識に基いて0も丸で囲んだ児童は誤りを指摘され, 消しゴムで囲んだ丸を消すことを要求される. これが日本の算数教育の実態である.

このような事情になっているので, 中学校や高校で数学を教えるときには，「算数の教科書には非常識なことが書いてあったこと」をはっきり述べて，「0は倍数には入れない」という誤解を訂正しておかなければいけない.

さて, それで文科省の立場はどうなのだろうか？ 文科省著作物の学習指導要領解説算数編(学習指導要領そのものと違って『解説』には拘束力はない)には次のように書いてある.

In [115]:
```
showimg("image/jpeg", "images/kaisetsu-baisu.jpg", scale="70%")
```


小学校学習指導要領解説算数編 平成20年6月 p.164より

イ 約数，倍数

約数や倍数の意味を指導するとともに，ある数の約数や倍数の全体をそれぞれ一つの集合としてとらえられるようにすることをねらいとしている。

二つの整数の公約数や公倍数の集合は，それぞれの整数の約数や倍数からなる集合の共通な要素からなるものである。例えば，８の約数は｛１，２，４，８｝であり，12の約数は｛１，２，３，４，６，12｝である。これから，８と12の公約数は｛１，２，４｝となる。最大公約数は，公約数の中で最大の数であるから，４であることが分かる。

また，８の倍数は｛8，16，24，32，…｝であり，12の倍数は｛12，24，36，…｝である。これから，８と12の公倍数は｛24，48，72，…｝となる。最小公倍数は，公倍数の中で最小の数であるから，24であることが分かる。

倍数に0を含めていないが、そのことを強調していない。

倍数に0を含めていないことを強調するようになった。ひどい！

小学校学習指導要領(平成29年告示)解説算数編 p.235より

(イ) 約数，倍数

12を割り切ることができる整数を12の約数という。1，2，3，4，6，12は12の約数である。また，３に整数をかけてできる数を３の倍数という。3，6，9，…は３の倍数である（このとき０は倍数に含めていない）。このように，約数や倍数の意味を指導するとともに，ある数の約数や倍数の全体をそれぞれ一つの集合として捉えられるようにすることをねらいとしている。

二つの整数の公約数や公倍数の集合は，それぞれの整数の約数や倍数からなる集合の共通な要素からなるものである。例えば，８の約数は｛1，2，4，8｝であり，12の約数は｛1，2，3，4，6，12｝である。これらから，８と12の公約数は｛1，2，4｝となる。最大公約数は，公約数の中で最大の数であるから，４であることが分かる。

また，８の倍数は｛8，16，24，32，…｝であり，12の倍数は｛12，24，36，48，…｝である。これらから８と12の公倍数は｛24，48，72，…｝となる。最小公倍数は，公倍数の中で最小の数であるから，24であることが分かる。

2008年版(平成20年版)の学習指導要領解説算数編には

> 8の倍数は {8, 16, 24, 32, ...} であり,

と0を倍数から除いてはいるが, 0を倍数に含めていないことは強調していなかったが, 平成29年版では括弧の中に0を倍数に含めていないことを強調する但し書きが追加されている.

おそらく, これによって「0があらゆる数の倍数である」という標準的なスタイルを知らずに一生を終える人が増えてしまうことになるだろう.

補足: 小学校の算数教科書の世界では「偶数であることと1の位が偶数であることは同値である」は正しいが, 「2の倍数であることと1の位が2の倍数であることは同値である」は正しくない主張であることになってしまう. なぜならば 10 は1の位の0を2の倍数と呼ぶと誤りだとされてしまうからである. □

参照文献

- 東京書籍の算数教科書, 新しい算数5上, 平成26年2月28日検定済
- 文部科学省, 小学校学習指導要領解説 (http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/syokaisetsu/index.htm) 算数編, 平成20年6月
- 文部科学省, 小学校学習指導要領(平成29年3月告示)解説 (http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/1387014.htm) 算数編

注意 学習指導要領と学習指導要領解説を厳密に区別せよ! 学習指導要領は**告示**になるが, 学習指導要領解説は文科省による**著作物**に過ぎず, 法的な拘束力がない. すなわち, 学習指導要領解説に何が書いてあったとしても, それに教育関係者が従う義務はないということである.

実際, 文科省のウェブサイトにある教育課程部会 教育課程企画特別部会（第8回）配付資料3 学習指導要領（解説）等の位置付けについて (http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/039/siryo/attach/1402682.htm)には次のように書いてある:

> 学習指導要領解説
>
> （文部科学省著作物）：総則及び各教科、道徳、特別活動について、学校種ごとに、学習指導要領等の改善の趣旨及び内容について解説したもの。　※　小・中学校について、平成元年までは「指導書」としていたが、**学習指導要領と同様の拘束力を有すると誤解されるとの指摘もあったため、その位置付けを一層明確にする観点から、高等学校と同様に「解説」に改めた。**

太字化は引用者による. 「解説」は「拘束力を有する」と誤解されないようにするために付けられた名前である.

教育関係者の中には, 「学習指導要領によれば」と言いながら, 「学習指導要領解説」を引用して来る人がいるので注意が必要である. □

資料追加: 以下は高校の先生と大学の先生の報告の引用である. それぞれ

- https://twitter.com/tsatie/status/799138128619442177 (https://twitter.com/tsatie/status/799138128619442177)
- https://twitter.com/esumii/status/1021326851250065412 (https://twitter.com/esumii/status/1021326851250065412)

より。高校で -20 から 20 までの整数で 5 の倍数に丸で囲ませたら, $-20, -15, -10, -5, 5, 10, 15, 20$ と 0 をとばして丸を付けた生徒が多数いたのだそうだ. 大学の試験の採点をしてみても同様に 0 を倍数から除いている学生がいたらしい. このどちらも原因は小学校での算数教育だろう.

In [116]:
```
1 showimg("image/png", "images/baisu2.png", scale="70%")
```

ʇɥbıluooɯ ǝıʇɐs @tsatie · 2016年11月17日

そしてもう一つ。負の数を割った時の余りを素直に確認できる為に、-20〜20までの数を今度は一列に並べたものがプリントに用意されていて5の倍数に○をしなさい。次は5で割ると1余るものに○を、、、。此処でも大多数の子が○し損ねた数がある。
此方は容易に思いつくと思うが0だけ跳ばすのだ

> ʇɥbıluooɯ ǝıʇɐs @tsatie
> 今年は驚きの結果だった。
> ・
> ・
> ・...

4 26 18

In [117]:
```
1 showimg("image/png", "images/baisu1.png", scale="70%")
```

Eijiro Sumii @esumii · 7月23日

減点しませんけど、わざわざ倍数から0除くの超算数なのでやめてください...

2 7 17

Eijiro Sumii @esumii · 7月23日

twitter.com/esumii/status/... 負の数は入ってるのに0だけ除外されてるのがマジっぽい

> Eijiro Sumii @esumii
> 減点しませんけど、わざわざ倍数から0除くの超算数なのでやめてください...
> このスレッドを表示

1 9 7

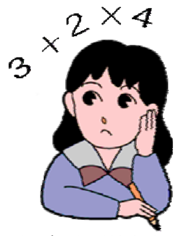
8 括弧やかけ算の式は1つの数量を表す記号なのか？

岡山県総合教育センター (http://www.edu-ctr.pref.okayama.jp/chousa/study/index.htm)研究紀要平成18年275号には以下のように書いてある.

In [118]:
```
showimg("image/png", "images/okayama-kakezan.png", scale="70%")
```

さて，もう一つ，分かっているようで本当はよく分かっていない例をご紹介しよう。

整数の四則計算の学習が完結するのは第 4 学年だ。ここでは，「たし算やひき算よりかけ算やわり算を先に計算する」とか，式の中に括弧がある場合は「括弧の中を先に計算する」などの計算のきまりについても学習することになっている。では，もし，子どもに「きまりがあるのは分かったけど，なぜ，かけ算，わり算や括弧の中を先に計算するの？」と質問されたら答えられる先生が何人いるだろうか。



なぜ，かけ算を先に計算するのかなあ？

2005 年 1 月 25 日及び 2 月 17 日，国立教育政策研究所は「特定の課題における調査」を実施した。この調査結果は，既に 2006 年 7 月 15 日に発表されているが，この中に，計算のきまりが身に付いていないという結果が示されている（【参考】問題は「3+2×4」。調査対象は小 4 から中 1。正解者は「小 4（73.6%），小 5（66%），小 6（58.1%），中 1（81.1%）」という結果だった）。ちなみに，岡山県が県内すべての中学校 1 年生に実施した調査（平成 18 年 4 月実施）でも同様な結果が出ている（【参考】岡山県の調査では，問題は「5+2×（7−3）」。正解者はなんと全体の 50.9%だった）。

なぜ，乗除優先（かけ算とわり算をたし算とひき算より先に計算）なのか。国の調査問題「3+2×4」を例に説明しよう。実は，「2×4」は，一つの数を示しているのだ。したがって，「3+2」より「2×4」を先に計算するのは当然で，かけ算を優先する「きまり」は，かけ算の意味から必然的に生まれたことだったのだ。このことは，小学校指導要領解説算数編の p.124 にも明確に説明されている。知っているつもりで知らないことは多い。我々教師は，まず，そのことを認める謙虚さを持つ必要があると思う。素直な先生は必ず伸びるのだ！

岡山県総合教育センター 研究紀要第275号 平成18年度 pp. 16-17 より

「2×4」が8という一つの数を表していることは常識だろう. しかし,「3+5」も「10-2」も「16÷2」もどれも8という一つの数を表している. だから, 上の引用文はそのような常識的解釈では意味不明の事柄について述べていることになる.

小学校学習指導要領解説算数編を見てみよう.

In [119]:
```
1 showimg("image/jpeg", "images/kaisetsu-kakko1.jpg", scale="70%")
```

四則の混合した式や（ ）を用いた式は，必ずしもこの学年ではじめて取り扱われるわけではないが，一つの数量を表すのに（ ）を用いることや，乗法，除法を用いて表された式が一つの数量を表したりすることが理解できるようにするのが主なねらいである。このことを，いろいろな場面や問題で，式で表したり，式から場面や一般的な関係をよんだりすることを通して，理解できるようにしていく。乗法，除法を加法，減法より先に計算することや，( )の中を先に計算することなどの決まりがあることも明確にする。

学習指導要領解説算数編(1999)のp.124より

コピペで進化！　「確実に」が追加！

四則の混合した式や（ ）を用いた式は，前学年までにも指導してきているが，一つの数量を表すのに（ ）を用いることや乗法，除法を用いて表された式が一つの数量を表したりすることを確実に理解できるようにすることが主なねらいである。このことについて，いろいろな場面や問題で式に表したり，式から場面や一般的な関係を読み取ったりすることを通して，理解できるようにしていく。

指導に際して，乗法，除法を加法，減法より先に計算すること，（ ）の中を先に計算することなどのきまりがあることを理解できるようにし，習熟を図る。さらに，四則を混合させたり（ ）を用いたりして一つの式に表すことには，数量の関係を簡潔に表すことができるなどのよさがあることが分かるようにし，四則を混合させたり（ ）を用いたりして一つの式に表すことができるようにすることが大切である。

学習指導要領解説算数編(2008)p.158 より

In [120]:
```
1 showimg("image/jpeg", "images/kaisetsu-kakko2.png", scale="70%")
```

四則の混合した式や( )を用いた式は，前学年までにも指導してきているが，一つの数量を表すのに( )を用いることや乗法，除法を用いて表された式が一つの数量を表したりすることを確実に理解できるようにすることが主なねらいである。このことについて，いろいろな場面や問題で式に表したり，式から場面や一般的な関係を読み取ったりすることを通して，理解できるようにしていく。

指導に当たっては，乗法，除法を加法，減法より先に計算すること，( )の中を先に計算することなどのきまりがあることを，具体的な場面に照らして理解できるようにし，習熟を図る。さらに，四則を混合させたり( )を用いたりして一つの式に表すことには，数量の関係を簡潔に表すことができるなどのよさがあることが分かるようにし，四則を混合させたり( )を用いたりして一つの式に表すことができるようにすることが大切である。　小学校学習指導要領（平成29年告示）解説算数編 p. 197 より

確かに「乗法を用いて表された式が一つの数量を表したりする」とはっきり書いてある. しかし, それと乗法を加法よりも先に計算するという規則との関係は曖昧である. 学習指導要領解説算数編の特徴はこのような曖昧な記述である. 学生のレポートならば「もっとクリアに書きなさい」と指導して全文書き直しを命じたくなるレベルで曖昧な書き方になっている.

しかし, 岡山県総合教育センターでは「1つの数量なのだから, 先に計算するのは当然のことになる」と解釈しているようだ.

もちろん, その解釈は滅茶苦茶である. 「3+2×4」という記号列(式)の構文解析のルールを決めない限り, どの部分が一塊であるか, そのような順序で計算するかは決まらない. 乗法を加法より先に計算するという規則は天下り的に与えられる規則に過ぎない. 括弧は単にその内側を先に計算することを指定するための記号に過ぎない.

このようなデタラメが学習指導要領解説算数編に入ってしまった理由として, 片桐重男氏の影響が疑われている. その理由は

- 片桐重男 『算数科の指導内容の体系』 東京、東洋館出版社、2001

に下の方で引用するような説明があるからである. 片桐氏のデタラメな主張がそのまま学習指導要領解説算数編で採用されてしまった経緯はまだよくわかっていない.

以上のように学習指導要領解説算数編には, 括弧の使い方(単に先に計算したい部分を括弧で囲む)やどうして足し算よりも掛け算を先に計算するか(単なる天下り的なルール)についてデタラメな説明がある. 中学校や高校で数学を教える人は以上のような事実に注意を払って, 教えている生徒が括弧で囲まれた部分やかけ算やわり算の式が1つの数量を表すと誤解している可能性にも注意を払う必要がある. 式の取り扱いに関して最も基本的な点においても算数教育はおかしなことになっているので注意が必要である.

In [121]:
```
showimg("image/jpeg", "images/katagiri-taikei1.jpg", scale="70%")
```

（イ）かっこの意味を明確にしていないのに、なぜかっこの中を先に計算してよいということが理解できるのか。

「かっこの中を先に計算する」ことは約束であると教えているが、「なぜかっこの中を先に計算するのか」を考えさせることはなされていない。

だから、形式的にそうなっているのだとおぼえさせる以外にはないという指導になっている。これは指導として望ましいことではない。

かっこの中は１つの数量を表しているから、計算の時は１つの数量になっているものから先に計算するのが妥当である。というように、計算の順序は、かっこの意味から見出せるものである。これを考えつかせることが大切なのである

① このように、指導者が意味を正しく捉えていない。そのためにかっこの意味（式が１つの数量を表すとき、かっこで囲む）をきちんと指導しようという意図がきわめて弱い。

② 意味から計算の仕方が導かれるという、論理的つながりを指導者が捉えていない。この「意味から計算の仕方を見出させる」ということが大切なのである。

片桐重男 『算数科の指導内容の体系』 東京、東洋館出版社、2001年、25ページ。

In [122]:

```
showimg("image/jpeg", "images/katagiri-taikei2.jpg", scale="70%")
```

例えば「砂場で男の子が３人と女の子が４人遊んでいる。そしてブランコで女の子が２人遊んでいる。全部で何人いるか」
という問題に対して、
　砂場にいる子＋ブランコにいる子
と考えれば
　（３＋４）＋２
と表し、男の子＋女の子
と考えれば、
　３＋（４＋２）
と表す。このとき砂場にいる子の人数や、女の子の人数を１つのまとまった数量と見る。そのことを表すにはかっこを使う。このように、
　「式が１つの数量を表すことを示すには、かっこを使う」
これがかっこの意味である。約束として教えることである。

片桐重男 『算数科の指導内容の体系』 東京、東洋館出版社、2001年、212ページ。

In [123]:

```
showimg("image/jpeg", "images/katagiri-taikei3.jpg", scale="70%")
```

さらに、
「×や÷を用いて表された式は１つの数量を表す」
と決める。これは約束として教える。
そうすると　1000－(80×７)　や　100－(1140÷12)　は、
　1000－80×７　　や　100－1140÷12
と表してよいことになる。
このようなかっこや乗除を用いた式の意味を決めると、その結果として、次のように計算してよいことが分かる。
15×(６＋４)　や、1000－85×７　のように、１つの数量を表すのにかっこを用いることや、×、÷で表された式は１つの数量を表すから、かっこの中を先に計算してよいし、乗除は加減より先に計算してよいことが分かる。
「計算は左から順にするが、
　かっこのある式では、かっこの中を先に計算する。
　乗除は加減より先に計算する」
この計算の順序は、上のかっこや、乗除の式の意味から、演繹的に考え出せることである。約束として教えることではない。

片桐重男 『算数科の指導内容の体系』 東京、東洋館出版社、2001年、213ページ。

計算の順序は単なる約束事に過ぎず, 算数や数学の本質とは関係ない.

9 かけ算の順序が逆の「式」は誤りなのか？

もちろん正解は「誤りではない」である.

In [ ]:

```
1
```