01 収束 ¶

黒木玄

2018-04-18

- Copyright 2018 Gen Kuroki
- License: MIT https://opensource.org/licenses/MIT (https://opensource.org/licenses/MIT)

- Repository: https://github.com/genkuroki/Calculus (https://github.com/genkuroki/Calculus)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/01%20convergence.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/01%20convergence.ipynb)
- https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/01%20convergence.pdf (https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/01%20convergence.pdf)

このファイルは Julia Box (https://juliabox.com) で利用できる.

自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ.

論理的に完璧な説明をするつもりはない. 細部のいい加減な部分は自分で訂正・修正せよ.

目次

1 収束の定義
  1.1 数列の収束の定義
  1.2 級数の収束の定義
  1.3 連続的な極限
2 収束の判定法の基本
  2.1 挟撃法 (挟み撃ち)
  2.2 二項定理の復習
  2.3 多項式函数より指数函数の方が速く増加すること
  2.4 指数函数より階乗の方が速く増加すること
  2.5 まとめ
3 上限と下限と上極限と下極限
  3.1 上限と下限
  3.2 上極限と下極限
4 実数の連続性の帰結
  4.1 有界単調実数列の収束
  4.2 Bolzano–Weierstrassの定理
  4.3 実数のCauchy列の収束
  4.4 閉区間に関するHeine-Borelの被覆定理
  4.5 閉区間上の実数値連続函数が最大最小を持つこと

In [1]:
```
using Plots
gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn) = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    display("text/html", """<img src="data:$mime; base64,$base64">""")
end

using SymPy
#sympy[:init_printing](order="lex") # default
#sympy[:init_printing](order="rev-lex")

using SpecialFunctions
using QuadGK
```

1 収束の定義

1.1 数列の収束の定義

定義: 数列 a_n が $n \to \infty$ で α に**収束する**とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある番号 N が存在して, N 以降のすべての番号 n について $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立することである. □

a_n が α に収束するとき, a_n の極限の値を $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と定義する. 収束しないときには極限の値は定義されない.

a_n が α に収束することを $a_n \to \alpha$ と書くことにする.

上の定義に基けば, 数列 a_n が $n \to \infty$ で α に**収束しない**ことは, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の番号 N について, ある $n \geqq N$ で $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ を満たすものが存在することだと言い換えられる.

どのような数にも収束しない数列は**発散**しているという.

以上は所謂 ε-N 論法による数列の収束の定義である.

勉強の仕方について1: このノートから始まる一連のノート群では ε-N 論法や ε-δ 論法による詳しい証明は**多くの場合に扱わない予定**である.

しかし, 以下では数列の収束について ε-N について詳しく説明しておくことにする. ε-N および ε-δ の方が易しく扱える場合は結構多いので教養として身に付けておいて損はないと思われる.

特に解析学の知識を信頼できる数値計算の遂行に役立てたいと思っている人は, どこかの段階で ε-N と ε-δ の考え方をマスターしておくべきである. なぜならば, **ε-N と ε-δ は「誤差の評価をまじめに行うこと」そのもの**だからである. 単に数学を応用するだけならば, ε-N と ε-δ は必要ないという考え方は誤りである.

初心者のために, 下の方には ε-N を使わない解答例1と ε-N を使った解答例2の両方を解説した場合を複数書いておいた. それらの解答を比較することは, 収束に関する直観と論理の整備に役に立つだろう.

しかし, 無理はいけない.

初心者のうちは ε-N および ε-δ を使った証明を無理してフォローする必要はない.

すぐに理解できそうもないならば, 「適当に証明を飛ばしながら先に進み, 必要に応じて何度でも前に戻ることを繰り返しながら膨大な時間をかければいつかは理解できる」のように考えるのがよいと思う. □

勉強の仕方について2: 筆者の個人的な経験では, 初心者のうちは, ε-N や ε-δ の議論を書き下すときには, ∀, ∃ という記号を**使わない方がよい**と思う. より正確に言えば, ∀, ∃ という記号を使わずに説明できないと感じたら, ∀, ∃ という記号を使わない方がよい. 記号に頼る議論は非常によろしくない. 頼るべきなのは記号ではなく, 健全な直観である.

特に解析学の議論を ∀, ∃ という記号を使った形式的な記号計算として理解しようとするのはやめた方がよい. 解析学のポイントは「近似の誤差にあたるものが何にどのように依存しているか」を見極めることにある場合が多い.

「〇〇の大きさが△△に◇◇のように依存して決まっており, 大雑把には□□と評価される」というような考え方を滑らかにできるようになることを目標にするのがよい. □

数列の収束の正確な定義の1つの解釈: 上の定義は数列 a_n で α の値を近似計算したい場合には次のような意味を持つ.

(1) 計算可能な数列 a_n は直接正確な値を計算できない数値 α に収束することがわかっているとする.

(2) $\varepsilon > 0$ を任意に与え, 数列 a_n の計算によって数値 α を誤差 ε 未満で計算したいとする.

(3) もしも数列 a_n が α に収束しているならば, ある番号 N が存在して, その $n \geqq N$ とすれば a_n と α の差は ε 未満になる.

(4) そのとき, もしも ε から N を具体的に求めることができれば, N 以上の n に対する a_n を実際に計算することによって, α の値を誤差 ε 未満で求めることができる. □

例: $\alpha = \sqrt{2}$ に対して, a_n を $\sqrt{2}$ を小数点以下第 n 桁まで計算した結果だとする. 例えば, $a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414, \ldots$. このとき, $|a_n - \alpha| < 10^{-n}$ なので, $\alpha = \sqrt{2}$ を誤差 10^{-N} 未満で求めるためには $n \geqq N$ に対する a_n を求めればよい. □

数列が α に収束しないことの正確な定義の1つの解釈: 数列 a_n が α に収束しないことは次のように言い換えられる: ある $\varepsilon > 0$ が存在して, どんなに番号 N を大きくしても, ある $n \geqq N$ で $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ を満たすものが存在する.

これは, 以下のような意味を持っている.

(1) 数列 a_n で数値 α を近似計算したいとする.

(2) しかし, a_n は α に収束していないとする.

(3) その場合には, 許される誤差 $\varepsilon > 0$ を小さく取り過ぎると, どんなに N を大きくしても, N 以上の n の中に a_n による α の近似計算の誤差が許される誤差 ε 以上になるものが存在する.

もしも a_n が α に収束しているならば, どんなに許される誤差 $\varepsilon > 0$ を小さくしても, 十分に N を大きくすると, N 以上の n については常に a_n による α の近似計算の誤差が許される誤差 ε 未満になる. すなわち, あるところから先の a_n と α の距離は ε 未満になる.

a_n が α に収束していなければ, 許される誤差 $\varepsilon > 0$ を小さくし過ぎると, どんなに先の a_N 以降の $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ の中に誤差が ε 以上になるものが含まれてしまう. □

例: a_n は上の例と同様に $\alpha = \sqrt{2}$ を小数点以下 n 桁まで計算した結果であるとし, $b_n = a_n - (0.005 + (-1)^n \times 0.005)$ とおく. このとき, $b_{2k+1} = a_{2k+1}$ かつ $b_{2k} = a_n - 0.01$ となる. だから, 奇数の n についてのみ b_n を考えれば $\alpha = \sqrt{2}$ に収束するが, 偶数の n に対する b_n は $\sqrt{2}$ よりも 0.01 以上小さくなる. だから, どんなに番号 N を大きくしても $b_N, b_{N+1}, b_{N+2}, \ldots$ の中に $\alpha = \sqrt{2}$ との差が 0.01 以上になるものが存在する. これは b_n が $\alpha = \sqrt{2}$ に収束しないということを意味している. □

問題: 数列 a_n が α に収束することと, 次の条件が同値であることを示せ:

(☆) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, a_n と α の距離が ε 以上になる n 達の個数は有限個しかない.

数列 a_n が α に収束しないことと, 次の条件が同値であることを示せ:

(★) ある $\varepsilon > 0$ で, a_n と α からの距離が ε 以上になる n 達の個数が無限個になるものが存在する.

注意: 同値なのでこれらの条件を収束する, しないの定義として採用してもよい.

解答例: $a_n \to \alpha$ と仮定し, 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. 収束の定義より、ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる. そのとき, $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ ならば $n < N$ となるので, α からの距離が ε 以上の a_n の個数は N 未満の有限個になる. これで(☆)が示された.

条件(☆)を仮定し, $\varepsilon > 0$ であるとする. α から距離が ε 以上の a_n 達の個数は有限個なので, そのような n の最大値が存在する. その最大値を $N - 1$ と書くと, $n \geqq N$ のとき a_n と α の距離は ε 未満になる. これで $a_n \to \alpha$ が示された.

条件(★)は条件(☆)の否定そのものであり, 条件(☆)は a_n が α に収束することの定義と同値だったので, 条件(★)は a_n が α に収束しないことと同値になる.

これで示すべきことがすべて示されたが, 条件(★)と「ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の番号 N に対して, ある $n \geqq N$ で $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ を満たすものが存在する」が同値であることも示しておこう.

ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の番号 N に対して, ある $n \geqq N$ で $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ を満たすものが存在すると仮定する. もしも $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ を満たす n 達が有限個しかないとすると, そのような n の最大値が存在し, そのとき n がその最大値より大きければ常に $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となってしまい仮定に反する。ゆえに $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ を満たす n 達は無限個存在する. これで条件(★)が示された.

条件(★)を仮定する. すなわち, ある $\varepsilon > 0$ で, a_n と α からの距離が ε 以上になる n 達の個数が無限個になるものが存在すると仮定する. 任意に N を取る. もしも $n \geqq N$ ならば常に $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となるならば, $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ となる n 達の個数が $N-1$ 以下になってしまうので, 仮定に反する. ゆえに, ある $n \geqq N$ で $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ となるものが存在する. これで, 「ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の番号 N に対して, ある $n \geqq N$ で $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ を満たすものが存在する」という条件が示された. □

問題(三角不等式): 実数 A, B について

$$|A \pm B| \leqq |A| + |B|, \quad |A \pm B| \geqq |A| - |B|, \quad |A \pm B| \geqq |B| - |A|$$

となることを示せ.

解答例:

$$(|A| + |B|)^2 - |A \pm B|^2 = |A|^2 + 2|A||B| + |B|^2 - (A^2 \pm 2AB + B^2) = 2(|A||B| \mp AB) \geqq 0,$$

より, $|A \pm B| \leqq |A| + |B|$ が得られる. その不等式で A を $-(A \pm B)$ で置き換えると, $|A| \leqq |A \pm B| + |B|$ が得られるので, $|A \pm B| \geqq |A| - |B|$ が得られる. その不等式で A と B の立場を取り換えると, $|A \pm B| \geqq |B| - |A|$ が得られる. □

三角不等式のよくある使い方: $|A - B|$ が小さいことを示すために, 三角不等式を

$$|A - B| = |A - C + C - B| \leqq |A - C| + |C - B|$$

の形で用い, $|A - C|$ と $|C - B|$ が小さいことを示すという手段が非常によく使われる. ここで使われる C は初等幾何の問題における補助線のようなものであり, うまい C を見付けることが証明のポイントになることが多い. □

三角不等式は空気のごとく多用される.

問題: 数列 a_n が α と β に収束しているならば, $\alpha = \beta$ となることを示せ. (これは同一の数列の収束先は唯一であることを意味している.)

解答例1: $n \to \infty$ とすると,

$$|\beta - \alpha| = |\beta - a_n + a_n - \alpha| \leqq |\beta - a_n| + |a_n - \alpha| \to 0.$$

ゆえに $|\beta - \alpha| = 0$ となるので, $\beta = \alpha$. □

解答例2: 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. a_n は α に収束しているので, ある番号 N' が存在して, $n \geqq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ となる. a_n は β にも収束しているので, ある番号 N'' が存在して, $n \geqq N''$ ならば $|a_n - \beta| < \varepsilon/2$ となる. ゆえに, $N = \max\{N', N''\}$ とおくと, $n \geqq N$ のとき,

$$|\beta - \alpha| = |(a_n - \alpha) - (a_n - \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ここで $\leqq$ では三角不等式を使った. $\varepsilon > 0$ はいくらでも小さくできるので, $\alpha = \beta$ となる. □

解説: 以上の解答例は等式 $\beta = \alpha$ を示すために不等式を使っている. 等式を不等式を使って証明することは解析学における典型的な議論の仕方だと言ってよい. α と β が等しいことを示すためには, それらの差がどんな正の実数よりも小さいことを示せばよい. α と β の差は三角不等式によって,

$$|\beta - \alpha| = |(a_n - \alpha) - (a_n - \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |a_n - \beta|$$

と評価される. これは a_n と α の差と a_n と β の差が同時に小さくなれば α と β の差も小さくなることを意味している. a_n が α と β に収束するならば, a_n と α の差も a_n と β の差も同時に小さくできるので, 示したいことが示される. □

問題: 収束する実数列 a_n, b_n が全ての番号 n について $a_n \leqq b_n$ を満たしているならば, $\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$ が成立することを示せ.

解答例1: a_n, b_n の収束先をそれぞれ α, β と書くことにする. 一般に実数 A について $-|A| \leqq A \leqq |A|$ が成立しているので,

$$a_n = a_n - \alpha + \alpha \geqq -|a_n - \alpha| + \alpha, \quad b_n = b_n - \beta + \beta \leqq |b_n - \beta| + \beta$$

なので $a_n \leqq b_n$ なので

$$-|a_n - \alpha| + \alpha \leqq a_n \leqq b_n \leqq |b_n - \beta| + \beta.$$

ゆえに

$$\alpha \leqq \beta + |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|.$$

$n \to \infty$ とすると, $|a_n - \alpha| \to 0$, $|b_n - \beta| \to 0$ となるので, $\alpha \leqq \beta$ を得る. □

注意: 上の証明中で, 全ての番号 n について $a_n < b_n$ が成立していれば

$$-|a_n - \alpha| + \alpha \leqq a_n < b_n \leqq |b_n - \beta| + \beta$$

となるので,

$$\alpha < \beta + |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|.$$

となるが, この不等式で $n \to \infty$ としても, $\alpha < \beta$ となるとは限らないことに注意せよ. 実際には $\alpha = \beta$ だが $|a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$ が常に正であるおかげで, $\alpha < \beta + |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$ となっているかもしれないからである. 例えば $a_n = -\dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$ のとき, $a_n < b_n$ となっているが, $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ となっている. □

解答例2: a_n, b_n の収束先をそれぞれ α, β と書くことにする. 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. a_n は α に収束するので, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$, 特に $\alpha + \varepsilon < a_n$ が成立している. b_n は β に収束するので, ある番号 N' が存在して, $n \geqq N'$ ならば $|b_n - \beta| < \varepsilon$, 特に $b_n < \beta + \varepsilon$ が成立している. そのとき, $n \geqq \max\{N, N'\}$ ならば

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leqq b_n < \beta + \varepsilon$$

となるので

$$\alpha < \beta + 2\varepsilon$$

となる.

$\varepsilon > 0$ は幾らでも小さくできるので, $\alpha \leqq \beta$ が成立している. (もしも $\alpha > \beta$ ならば $\varepsilon = (\alpha - \beta)/2 > 0$ のとき $\alpha < \beta + 2\varepsilon = \alpha$ となって矛盾する.) □

注意: 収束する実数列 a_n, b_n が全ての番号 n について $a_n < b_n$ を満たしていても, $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ が成立するとは限らない. 例えば $a_n = -1/n$, $b_n = 1/n$ は $a_n < b_n$ を満たしているが, どちらも 0 に収束する.

このように $\leqq$ の型の不等号は極限で保たれるが, $<$ の型の不等号は保たれるとは限らない. この意味で証明中で極限操作を多用する場合には $\leqq$ 型の不等号を多用した方が便利な場合がある. □

問題: 数列 a_n, b_n がそれぞれ α, β に収束するとき, 数列 $a_n + b_n$ が $\alpha + \beta$ に収束することを証明せよ.

解答例1: 三角不等式より, $n \to \infty$ とすると,

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \alpha| \to 0.$$

ゆえに $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \to 0$. すなわち $a_n + b_n \to \alpha + \beta$. □

解答例2: 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. a_n は α に収束するので, ある番号 N' が存在して, $n \geqq N'$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ となる. b_n は β に収束するので, ある番号 N'' が存在して, $n \geqq N''$ ならば $|b_n - \beta| < \varepsilon/2$ となる. ゆえに, $N = \max\{N', N''\}$ とおくと, $n \geqq N$ ならば,

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ここで $\leqq$ では三角不等式を使った. これで $a_n + b_n$ が $\alpha + \beta$ に収束することが示された. □

解説: $a_n + b_n$ が $\alpha + \beta$ に収束することを示すためにはそれらの差が適当な条件のもとで適切な意味で小さくなることを示せばよい. それらの差は三角不等式によって

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \alpha|$$

を満たしている. これは a_n と α の差と b_n と β の差が両方小さくなれば, $a_n + b_n$ と $\alpha + \beta$ の差も小さくなることを意味している. こういう当たり前の議論を ε-N 論法の言葉で書き直せば上の問題の解答が得られる. □

問題: a_n, b_n がそれぞれ α, β に収束するならば $a_n - b_n$ が $\alpha - \beta$ に収束することを示せ. □

上の問題と本質的に同じ証明が可能なので解答は略す.

問題: 数列 a_n がある値に収束しているならば, ある正の実数 M で $|a_n| \leqq M$ を満たすものが存在することを示せ. (この事実を**収束する数列は有界である**という.)

解答例: a_n の収束先は α であるとする. ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $|a_n - \alpha| \leqq 1$ となるので,

$$|a_n| = |a_n - \alpha + \alpha| \leqq |a_n - \alpha| + |\alpha| \leqq 1 + |\alpha|.$$

ゆえに $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |\alpha|\}$ とおくと, すべての番号 n について $|a_n| \leqq M$ となる. □

例: $a_n = 10 + \dfrac{1000}{n}$ である場合に上の解答例の議論を適用してみよう. そのとき, $n \geqq 1000$ とすると,

$|a_n - 10| = \dfrac{1000}{n} \leqq \dfrac{10}{1000} \leqq 1$ となり, $|a_n| \leqq 1 + 10 = 11$ となる. $a_1 = 1010, a_2 = 510, \ldots, a_{999} = 10 + 1000/999$, $1 + 10 = 11$ の最大値は 1010 である. ゆえにすべての番号 n について $|a_n| \leqq 1010$. □

問題: 数列 a_n, b_n がそれぞれ α, β に収束するとき, 数列 $a_n b_n$ が $\alpha\beta$ に収束することを示せ.

解答例1: 収束する数列は有界なので, ある正の実数 M ですべての番号 n について $|a_n| \leqq M$ を満たすものが存在する. 三角不等式より, $n \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned}|a_n b_n - \alpha\beta| &= |a_n b_n - a_n\beta + a_n\beta - \alpha\beta| = |a_n(b_n - \beta) + (a_n - \alpha)\beta| \\ &\leqq |a_n||b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta| \leqq M|b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta| \to 0\end{aligned}$$

となるので, $a_n b_n \to \alpha\beta$ となる. □

解答例2: $a_n b_n$ と $\alpha\beta$ の差は三角不等式によって

$$\begin{aligned}|a_n b_n - \alpha\beta| &= |a_n b_n - a_n\beta + a_n\beta - \alpha\beta| = |a_n(b_n - \beta) + (a_n - \alpha)\beta| \\ &\leqq |a_n||b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta|\end{aligned}$$

と上から評価される. 上の問題の結果より, ある正の実数 M が存在して, すべての番号 n について $|a_n| \leqq M$ となる. b_n は β に収束するので, ある番号 N'' が存在して, $n \geqq N''$ ならば $|b_n - \beta| < \varepsilon/(2M)$ となる. a_n は α に収束するので, ある番号 N' が存在して, $n \geqq N'$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon/(2|\beta| + 1)$ となる. そのとき, $n \geqq \max\{N', N''\}$ ならば, 上の評価式より,

$$|a_n b_n - \alpha\beta| < M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|\beta| + 1}|\beta| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで $a_n b_n$ が $\alpha\beta$ に収束することが示された. □

問題: a_n が $\alpha \neq 0$ に収束するならば, $r < |\alpha|$ を満たす任意の実数 r に対して, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $|a_n| \geqq r$ となることを示せ.

解答例: $r < |\alpha|$ より $\varepsilon = |\alpha| - r$ とおくと, $\varepsilon > 0$ となり, a_n は α に収束するので, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば, $|a_n - \alpha| < \varepsilon = |\alpha| - r$ となり,

$$|a_n| = |a_n - \alpha + \alpha| \geqq |\alpha| - |a_n - \alpha| > r$$

となる. □

例: $a_n = -1 + (-1)^n \dfrac{100}{n}$ と $r = 0.9$ の場合に上の解答例の議論を適用してみよう. $n \geqq 1001$ とすると $|a_n - (-1)| = \dfrac{100}{n} \leqq \dfrac{100}{1001} < 0.1$ となるので, $|a_n| \geqq |-1| - |a_n - (-1)| > 1 - 0.1 = 0.9 = r$ となる. □

問題: a_n が $\alpha \neq 0$ に収束しているならば $1/a_n$ は $1/\alpha$ に収束することを示せ.

解答例1: $a_n \to \alpha \neq 0$ より, 十分に n を大きくすると $|a_n| \geqq \dfrac{|\alpha|}{2}$ となる. 三角不等式より, $n \to \infty$ のとき,

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha - a_n}{a_n\alpha}\right| = \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n||\alpha|} \leqq \frac{|a_n - \alpha|}{(|\alpha|/2)|\alpha|} \to 0.$$

ゆえに $\dfrac{1}{a_n} \to \dfrac{1}{\alpha}$ となる. □

解答例2: $1/a_n$ と $1/\alpha$ の差は

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha - a_n}{a_n\alpha}\right| = \frac{|a_n - \alpha|}{|\alpha|}$$

をみたしている. 上の問題の結果より, ある番号 N' が存在して, $n \geqq N'$ ならば $|a_n| \geqq |\alpha|/2$ となる. a_n は α に収束しているので, ある番号 N'' が存在して, $n \geqq N''$ ならば $|a_n - \alpha| < |\alpha|^2\varepsilon/2$ となる. そのとき, $N = \max\{N', N''\}$ とおくと, $n \geqq N$ ならば

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n||\alpha|} < \frac{|\alpha|^2\varepsilon/2}{(|\alpha|/2)|\alpha|} = \varepsilon.$$

これで $1/a_n$ が α に収束することが示された. □

問題: 数列 a_n が α に収束しているならば

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

も α に収束することを示せ.

ヒント: a_n を $a_n - \alpha$ で置き換えることによって, a_n が 0 で収束するならば b_n も 0 に収束することを示せば十分であることがわかる. a_n が 0 に収束するならば, 十分大きな N について a_n はほとんど 0 になるので, $n \geqq N$ のとき加法平均 $(a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n)/(n - N + 1)$ もほとんど 0 になるだろう. N を固定したまま $n \geqq N$ を大きくすれば $(a_1 + \cdots + a_{N-1})/n$ は 0 に収束する. □

注意: 上の問題は ε-N 論法を使った方が「易しい」例として有名である. ε-N 論法を理解しているかどうかのチェックにもよく使われる. 以下の解答例を読まずに自力で証明を考えた方がよいと思われる. □

解答例1: $A_n = a_n - \alpha$ とおくと,

$$b_n - \alpha = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha = \frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} = \frac{A_1 + \cdots + A_n}{n}.$$

これの右辺を B_n を書くことにする. これより, $A_n \to 0$ から $B_n \to 0$ を示せば十分であることがわかる. 以下では A_n, B_n をそれぞれ a_n, b_n と書く. $a_n \to 0$ という仮定のもとで $b_n \to 0$ を示せばよい.

任意に $\varepsilon > 0$ を取る. $a_n \to 0$ より, ある番号 N が存在して, $|a_N|, |a_{N+1}|, |a_{N+2}|, \ldots$ がすべて $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 未満になるので, $n \geqq N$ ならば

$$\begin{aligned}
|b_n| &\leqq \frac{|a_1| + \cdots + |a_n|}{n} \\
&= \frac{|a_1| + \cdots + |a_{N-1}|}{n} + \frac{|a_N| + |a_{N+1}| + \cdots + |a_n|}{n} \\
&\leqq \frac{|a_1| + \cdots + |a_{N-1}|}{n} + \frac{|a_N| + |a_{N+1}| + \cdots + |a_n|}{n - N + 1} \\
&< \frac{|a_1| + \cdots + |a_{N-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

N' は $2(|a_1| + \cdots + |a_{N-1}|)/\varepsilon$ より大きな正の整数であるとする. そのとき, $n \geqq N'$ ならば

$$\frac{|a_1| + \cdots + |a_{N-1}|}{n} < \frac{|a_1| + \cdots + |a_{N-1}|}{2(|a_1| + \cdots + |a_{N-1}|)/\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

以上より, $n \geqq \max\{N, N'\}$ ならば

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで b_n が 0 に収束することが示された. □

注意: 上の問題の逆は成立しない. すなわち $b_n = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ が収束していても, a_n が収束しない場合がある. 例えば, $a_n = (-1)^n$ のとき, a_n は振動して収束しないが, b_n は 0 に収束する. □

問題: 数列 a_n が収束するならば $a_{n+1} - a_n$ も 0 に収束することを示せ.

解答例1: 数列 a_n は α に収束していると仮定する. 三角不等式より, $n \to \infty$ のとき

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - \alpha + \alpha - a_n| \leqq |a_{n+1} - \alpha| + |\alpha - a_n| \to 0.$$

これで, $a_{n+1} - a_n$ が 0 に収束することが示された. □

解答例2: 数列 a_n は α に収束すると仮定し, $\varepsilon > 0$ を任意に取る. a_n が α に収束することから, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ となる. そのとき, $n \geqq N$ ならば

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - \alpha + \alpha - a_n| \leqq |a_{n+1} - \alpha| + |\alpha - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで $a_{n+1} - a_n$ が 0 に収束することが示された. □

注意: 上の問題の逆は成立しない. すなわち $a_{n+1} - a_n \to 0$ であっても a_n が収束しない場合がある. 例えば, $a_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ のとき, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1}$ は 0 に収束するが, a_n は無限大に発散する. □

問題(Cauchy列=基本列): 数列 a_n が**Cauchy列**もしくは**基本列**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある番号 N が存在して, $m, n \geqq N$ ならば $|a_m - a_n| \leqq \varepsilon$ となることだと定める. 収束する数列はCauchy列であることを示せ.

解答例: 本質的に上の問題の解答例と同じ. 数列 a_n は α に収束すると仮定し, $\varepsilon > 0$ を任意に取る. a_n が α に収束することから, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ となる. そのとき, $m, n \geqq N$ ならば

$$|a_m - a_n| = |a_m - \alpha + \alpha - a_n| \leqq |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで示すべきことが全て示された. □

注意1: 数列 a_n がCauchy列であることを, 「$m, n \to \infty$ のとき $|a_m - a_n| \to 0$ になる」と言うこともある. その代わりに「$m, n \geqq N$ で $N \to \infty$ のとき $|a_m - a_n| \to 0$ となる」と言う方がよいかもしれない. □

注意2(完備性の定義): a_n が収束する数列ならば a_n はCauchy列になる. 実数や複素数の範囲内ではこれの逆が成立している. すなわち, a_n が実数列(もしくは複素数列)でかつCauchy列ならば, ある実数 α (もしくは複素数 α)が存在して a_n は α に収束する. この結果を「実数(もしくは複素数)全体の集合は**完備**である」という.

実数全体の集合は有理数全体の集合の通常の絶対値による距離に関する**完備化**として定義されていると思ってよい. その意味で実数全体の集合の定義の中には完備性が含まれていると思ってよい. □

1.2 級数の収束の定義

(無限)級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束は数列 $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ の収束で定義される. 収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ と書く.

例(等比級数): $|q| < 1$, $a_n = q^{n-1}$ のとき

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

であり, $n \to \infty$ で $q^n \to 0$ なので, $s_n \to 1/(1-q)$ となる. すなわち,

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}. \qquad \square$$

注意: $1 + q + \cdots + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$ は $q \to 1$ で n に収束する. これを q 数 (q-number)と呼び, $(n)_q$ のように書くことがある:

$$(n)_q = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

さらに q 階乗 (q-factorial)や q 二項係数が

$$(n)_q! = (1)_q (2)_q \cdots (n)_q, \qquad \binom{n}{k}_q = \frac{(n)_q!}{(k)_q!\,(n-k)_q!}$$

と定義される. このようにして, 数学的対象にパラメーター q を入れて解析を行うことを q 解析と呼ぶ. 20世紀の終わり頃に量子群が発見され, q 解析と深い繋がりがあることが判明した. □

問題: 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束しているならば, $n \to \infty$ で $a_n \to 0$ となることを示せ.

解答例1: 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は α に収束していると仮定する. すなわち, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ は $n \to \infty$ で α に収束していると仮定する. このとき, $n \to \infty$ のとき,

$$|a_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| + \left|\sum_{k=1}^{n-1} a_k - \alpha\right| \to 0.$$

これで $a_n \to 0$ であることが示された. □

解答例2: 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は α に収束していると仮定し, $\varepsilon > 0$ を任意に取る. このとき, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる. ゆえに $n - 1 \geqq N$ のとき,

$$|a_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| + \left|\sum_{k=1}^{n-1} a_k - \alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで, $a_n \to 0$ となることが示された. □

問題: 上の問題の逆が成立しないことを示せ. すなわち, $a_n \to 0$ であっても, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは限らないことを示せ.

解答例: $a_n = 1/n$ とおくと, $a_n \to 0$ である. しかし, $n \leqq x \leqq n+1$ のとき $1/x \leqq 1/n$ なので,

$$\log(k+1) - \log k = \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx = \frac{1}{k} = a_k$$

となるので, 両辺を $k = 1, \ldots, n$ について足し上げてると,

$$\log(n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

これより, $n \to \infty$ で $\sum_{k=1}^{n} a_k \to \infty$ となることがわかる. □

In [2]:

```
# 1/1+1/2+...+1/n と log n の比較
# nを大きくするとそれらの差はEuler定数 γ = 0.5772… に近付く
# ゆえに, 1/1+1/2+...+1/n は log n + γ でよく近似される.
# 以下のプロットでもそれらのグラフはほとんど一致している.

f(x) = sum(k->1/k, 1:floor(Int, x))
n = 1:100
x = 1:0.1:100
plot(size=(500,350), legend=:bottomright)
plot!(n, f.(n), label="1/1+1/2+...+1/n", lw=2.5)
plot!(x, log.(x), label="log(x)", ls=:dashdot, color=:orange)
plot!(x, log.(x.+1), label="log(x+1)", ls=:dashdot, color=:darkgreen)
plot!(x, log.(x).+eulergamma, label="log(x) + Euler's gamma", lw=2, ls=:dash, color=:red)
```

Out[2]:

In [3]:

```
?eulergamma
```

search: **eulergamma**

Out[3]:

γ
eulergamma

Euler's constant.

```
julia> eulergamma
γ = 0.5772156649015...
```

1.3 連続的な極限

函数の x における値 $f(x)$ が $x \to a$ で α に**収束する**とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $0 < |x - a| < \delta$ を満たすすべての x について $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成立することである.

$f(x)$ が $x \to a$ で α に収束するとき, その極限の値を $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ と定義する. 収束しないときには極限の値は定義されない.

問題: 上の定義における $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ を $|f(x) - \alpha| \leqq \varepsilon$ に置き換えても同値な条件になることを示せ. □

解答例: 以下の2条件が互いに同値であることを示そう.

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $0 < |x - a| < \delta$ を満たすすべての x について $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成立する.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $0 < |x - a| < \delta$ を満たすすべての x について $|f(x) - \alpha| \leqq \varepsilon$ が成立する.

ついでに任意の正の実数 M について以下も同値であることも示してしまおう.

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $0 < |x - a| < \delta$ を満たすすべての x について $|f(x) - \alpha| \leqq M\varepsilon$ が成立する.

(1) $\Longrightarrow$ (2): (1)を仮定して, 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. (1)より, $0 < |x - a| < \delta$ を満たすすべての x について $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成立し, そのとき $|f(x) - \alpha| \leqq \varepsilon$ が自明に成立している. これで(1)から(2)が自明に導かれることがわかった.

(2) $\Longrightarrow$ (3): (2)を仮定して, 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. (2)の ε として $M\varepsilon$ を採用すると, ある $\delta > 0$ が存在して, $0 < |x - a| < \delta$ を満たすすべての x について $|f(x) - \alpha| \leqq M\varepsilon$ が成立する. これで(2)から(3)も自明に導かれることがわかった.

(3) $\Longrightarrow$ (1): (3)を仮定して, 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. (3)の ε として $\varepsilon/(2M)$ を採用すると, ある ある $\delta > 0$ が存在して, $0 < |x - a| < \delta$ を満たすすべての x について $|f(x) - \alpha| \leqq M(\varepsilon/(2M)) = \varepsilon/2 < \varepsilon$ が成立する. これで(3)から(1)が導かれることがわかった.

以上によって(1),(2),(3)が互いに同値であることがわかった. □

問題: さらに $< \delta$ の部分を $\leqq \delta$ に変更しても同値であることを示せ. \QED

上の解答例と完全に同じ考え方で証明できるので解答略.

2 収束の判定法の基本

2.1 挟撃法 (挟み撃ち)

定理: $A_n \leqq a_n \leqq B_n$ でかつ A_n と B_n が α に収束するならば a_n も α に収束する.

証明: $\varepsilon > 0$ を任意に取る. $A_n \to \alpha$ より, ある番号 N' が存在して, $n \geqq N'$ ならば $|A_n - \alpha| < \varepsilon$, 特に $\alpha - \varepsilon < A_n$ となる. $B_n \to \alpha$ より, ある番号 N'' が存在して, $n \geqq N''$ ならば $|A_n - \alpha| < \varepsilon$, 特に $B_n < \alpha + \varepsilon$ となる. ゆえに $N = \max\{N', N''\}$ とおくと, $n \geqq N$ のとき,

$$\alpha - \varepsilon < A_n \leqq a_n \leqq B_n < \alpha + \varepsilon$$

なので $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる. これで $a_n \to \alpha$ が示された. □

定理: $A_n \leqq a_n$ でかつ $A_n \to \infty$ ならば $a_n \to \infty$ となる.

証明: M は任意の実数であるとする. $A_n \to \infty$ より, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $A_n \geqq M$ となり, $a_n \geqq A_n \geqq M$ となる. これで $a_n \to \infty$ を示せた. □

注意: 挟撃法は「$|a_n| \leqq A_n$ かつ $A_n \to 0$ ならば $a_n \to 0$ となる」の形式で使われることが非常に多い. したがって, 挟撃法を便利に利用するためには 0 に収束する A_n の例をたくさん知っておくことが必要である. □

例: $n \to \infty$ のとき $a_n \to 0$ かつ $b_n \to \beta$ となっているならば, $a_n b_n \to 0$ となる. 同様に, $x \to 0$ のとき, $f(x) \to 0$ かつ $g(x) \to 0$ となっているならば, $f(x)g(x) \to 0$ となる. この場合は簡単である. 難しいのは $a_n \to 0$ かつ $b_n \to \infty$ となっているときの, $a_n b_n$ の $n \to \infty$ での様子や, $x \to 0$ のとき $f(x) \to 0$ かつ $g(x) \to \infty$ となっているときの, $f(x)g(x)$ の $x \to 0$ での様子を調べることである. □

上の例の補足の注意: $a_n \to \infty$ の定義は, 任意の実数 M に対して, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $a_n \geqq M$ となることである. $x \to 0$ のとき $f(x) \to \infty$ となることの定義は, 任意の実数 M に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $0 < |x| < \delta$ ならば $f(x) \geqq M$ となることである. □

2.2 二項定理の復習

以下の節では 0 への収束の判定を主に扱うが, そのための準備として二項定理について復習しておく.

二項係数を

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

と定義する. 例えば

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

n も k も非負の整数のとき $\binom{n}{k}$ は n 個から k 個選び出すときの場合の数に一致している. 高校数学では ${}_nC_k$ のように書いているようだが, 一般には $\binom{n}{k}$ と書くことの方が多いように感じられるので, $\binom{n}{k}$ の方を使用する. (上の定義に従えば, k が非負の整数でありさえすれば, n が整数でなくても $\binom{n}{k}$ が定義されていることに注意せよ. この事実は二項展開を考えるときに必要になる.)

以上の記号法のもとで, 二項定理は

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{$*$}$$

と書ける. 2つ目の等号は自明である.

高校数学で証明を習っているはずだが, 忘れている人は二項定理を証明しておくこと.

考え方: 解析学では不等式を扱いたい. しかし, 二項定理のような**良い等式は良い不等式を生み出す**ために非常に役に立つ. 解析学では非自明な等式は非自明な不等式を作る材料になる. 次の節の証明を見よ!

二項定理の証明1: $(x+y)^n$ を展開したときに得られる $x^k y^{n-k}$ の係数は k 個の x と $n-k$ 個の y の並べ方の個数に等しい. その個数は全部で n 個並べるうち k 個の x の場所の選び方の個数に等しい. それは

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

に等しい. □

二項定理の証明2: n に関する帰納法を使う. $n=0$ の場合に($*$)は成立している. ($*$)が n について成立していると仮定する. そのとき, k が負の整数のとき $\binom{n}{k} = 0$ と約束しておくと,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!} \times (k + (n-k+1)) \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!} \times (n+1) \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

ゆえに n に関する帰納法の仮定($*$)を使うと,

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

これで n を $n+1$ で置き換えた場合の条件$(*)$も成立することがわかった. これで示すべきことが示された. $\square$

注意: 二項定理は形式べき級数としての $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ が

$$f(x+y) = f(x)(y)$$

を満たしていることと同値である. なぜならば,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n, \\ f(x)f(y) &= \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k!l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-k} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-k} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \end{aligned}$$

$f(x)$ は $e^{x+y} = e^x e^y$ を満たす指数函数 e^x の $x=0$ におけるTaylor展開に等しい. そのことを使うことを許せば, 二項定理を経由せずに $f(x+y) = f(x)f(y)$ を示せる. このように, 二項定理のような組み合わせ論的な内容を持つ定理と $e^{x+y} = e^x e^y$ のような特別な函数が満たす特別な関係式が同値になっていることはよくある. \QED$

2.3 多項式函数より指数函数の方が速く増加すること

定理: $a > 1$ ならば $n \to \infty$ のとき $\dfrac{n^l}{a^n} \to 0$. $\square$

証明: 二項定理を使う.

L は l より大きな正の整数であるとし, n は L 以上であると仮定する.

そのとき特に $n \to \infty$ のとき $n^l/n^L \to 0$ が成立している.

$a > 1$ なので $a = 1+\alpha$, $\alpha > 0$ と書ける. 二項定理より

$$\begin{aligned} a^n &= (1+\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \alpha^2 \\ &\geqq \frac{n(n-1)\cdots(n-L+1)}{L!} \alpha^L = n^L \frac{(1-1/n)\cdots(1-(L-1)/n)\alpha^L}{L!}. \end{aligned}$$

ゆえに, $n \to \infty$ のとき

$$0 \leqq \frac{n^l}{a^n} \leqq \frac{n^l}{n^L} \times \frac{L!}{(1-1/n)\cdots(1-(L-1)/n)\alpha^L} \to 0 \times \frac{L!}{\alpha^L} = 0. \qquad \square$$

問題: $a = 1.01$, $l = 100$ のとき, n^l と a^n の大きさを比較するためのグラフを描いてみよ.

解答例: 直接 n^l と a^n を扱うと数値が巨大になり過ぎるので, それらの対数を比較することにする.

In [4]:

```
a = 1.01
l = 100
n = 1:10^3:2*10^5
f(n) = l*log(n)
g(n) = n*log(a)
plot(size=(500, 350), legend=:topleft, xlabel="n")
plot!(n, f.(n), label="$l*log(n)")
plot!(n, g.(n), label="n*log($a)")
```

Out[4]:

問題: $a > 1$ ならば, $x > 0$ が連続的に幾らでも大きくなるとき $\dfrac{x^l}{a^x} \to 0$ となることを示せ.

証明: 正の整数 n について $n \leqq x \leqq n+1$ のとき, x^l は n^l と $(n+1)^l$ のあいだにあり, a^x は a^n 以上になる. ゆえに, $x \to \infty$ のとき, $n \to \infty$ となり,

$$0 \leqq \frac{x^l}{a^x} \leqq \frac{\max\{n^l, (n+1)^l\}}{a^n} \leqq \max\left\{\frac{n^l}{a^n},\ a\frac{(n+1)^l}{a^{n+1}}\right\} \to 0.$$

最後に上の方の定理を使った. これで示すべきことが示された. □

問題: $x > 0$ について, $x \to 0$ のとき $x \log x \to 0$ となることを示せ.

証明: $x > 0$ なので $x = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$ と書ける. $x \to 0$ のとき $t \to \infty$ となるので,

$$x \log x = e^{-t} \log e^{-t} = -\frac{t}{e^t} \to 0.$$

最後の上の問題の結果を使った. □

注意: 統計学に出て来る計算では $0 \log 0 = 0$ と約束しておくことが適切な場合が多い. □

In [5]:
```
f(x) = x*log(x)
x = 0.001:0.001:1
plot(x, f.(x), xlim=(-0.1,1), ylim=(-0.4,0), label="y = x log x", legend=:top)
```

Out[5]:

2.4 指数函数より階乗の方が速く増加すること

定理: $a > 0$ と仮定する. そのとき $n \to \infty$ ならば $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$ が成立する.

証明: N を十分大きくすると $\dfrac{a}{N+1} < 1$ となる. そして, $n > N$ とすると,

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^N}{N!}\frac{a}{N+1}\frac{a}{N+2}\cdots\frac{a}{n} \leqq \frac{a^N}{N!}\left(\frac{a}{N+1}\right)^{n-N} \to 0 \quad (n \to \infty). \qquad \square$$

問題: $a > 1$ と仮定する. そのとき $n \to \infty$ ならば $\dfrac{n!}{a^{n^2}} \to 0$ が成立することを示せ.

解答例: 指数函数は多項式函数より速く増加するので $\dfrac{n}{a^n} \to 0$. ゆえにある番号 N が存在して $n > N$ ならば $\frac{n}{a^n} \geqq \frac{1}{2}$ となる. したがって, $n > N$ のとき,

$$\frac{n!}{a^{n^2}} = \frac{n!}{(a^n)n} = \frac{N!}{(a^n)^N}\frac{N+1}{a^n}\frac{N+2}{a^n}\cdots\frac{n}{a^n} \leqq \frac{N!}{(a^N)^n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \to 0 \quad (n \to \infty). \qquad \square$$

2.5 まとめ

$n \to \infty$ のとき $\dfrac{a_n}{b_n} \to 0$ となることを $a_n \prec b_n$ と書くことにする. $a > 1$ のとき

$$1 \prec \cdots \prec \log\log n \prec \log n \prec n \prec n^2 \prec \cdots \prec a^n \prec n! \prec a^{n^2} \prec \cdots$$

右に行くほど $n \to \infty$ で速く増加する. このように増大度に階層性があるという認識は解析学における基本になる.

例: Stirlingの近似公式より,

$$n! = n^n \frac{1}{e^n}\sqrt{n}\,\sqrt{2\pi}\,(1+\varepsilon_n) \quad (\varepsilon_n \to 0)$$

が成立することが知られている(この一連のノート群の中でも複数回証明される)). 右辺に登場する n^n, e^n, $\sqrt{n}$, $\sqrt{2\pi}$ は左のものほど $n \to \infty$ で速く増加する.

$\delta_n = \log(1+\varepsilon_n)$ とおき, Stirlingの近似公式の両辺の対数を取ると,

$$\log n! = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\log 2\pi + \delta_n \quad (\delta_n \to 0).$$

右辺に登場する $n\log n$, n, $\frac{1}{2}\log n$, $\frac{1}{2}\log\sqrt{2\pi}$, δ_n は左のものほど $n\to\infty$ で速く増加する. □

次のセルで $\log n!$ がどのように近似されるかをプロットしてみよう. □

In [6]:
```
lfact(n) = lgamma(n+1) # = log n!
f1(n) = n*log(n)
f2(n) = n*log(n) - n
f3(n) = n*log(n) - n + 0.5*log(n)
f4(n) = n*log(n) - n + 0.5*log(n) + 0.5*log(2π)

function plot_logfactorial(n)
    plot(legend=:topleft)
    plot!(n, lfact.(n), label="log n!", lw=1.5)
    plot!(n, f1.(n), label="n log n", ls=:dash)
    plot!(n, f2.(n), label="n log n - n", ls=:dash)
    plot!(n, f3.(n), label="n log n - n + 0.5 log n", ls=:dash)
    plot!(n, f4.(n), label="n log n - n + (1/2)log n + (1/2)log 2pi", color=:red, ls=:dash)
end
```

Out[6]: plot_logfactorial (generic function with 1 method)

In [7]:
```
plot_logfactorial(1:20)
```

Out[7]:

In [8]:
```
plot_logfactorial(10:10:1000)
```

Out[8]:

In [9]:
```
plot_logfactorial(10^16:10^16:10^18)
```

Out[9]:

すぐ上のプロットを見れば, n がこのように極めて大きな値であれば $\log n!$ の $\log n^n = n \log n$ による近似もそう悪くないことがわかる.

3 上限と下限と上極限と下極限

3.1 上限と下限

Y は空でない実数の集合であると仮定する.

実数 M で任意の $y \in Y$ について $y \leqq M$ を満たすものを実数の集合 Y の**上界**(upper bound)と呼ぶ. 実数 m で任意の $y \in Y$ について $m \leqq y$ を満たすものを Y の**下界**(lower bound)と呼ぶ.

Y の上界が1つ以上存在するとき, Y は**上に有界**(bounded from above)であると言い, Y の下界が1つ以上存在するとき, Y は**下に有界**(bounded from below)であると言う. Y が上に有界かつ下に有界であるとき, Y は**有界**(bounded)であると言う.

次の結果は認めて使うことにする.

実数の連続性: 実数の空でない集合 Y が上に有界ならば Y の上界全体の集合の中に最小値が存在する. □

Y が上に有界なとき, Y の上界全体の集合の最小値を Y の**最小上界**(least upper bound)もしくは**上限**(supremum)と呼び. 同様に, Y が下に有界ならば Y の下界全体の集合の中に最大値が存在する. その最大値を Y の**最大下界**(greatest lower bound)または**下限**(infimum)と呼ぶ. Y の上限と下限をそれぞれ

$$\sup Y, \quad \inf Y$$

と書く. 集合 X 上の実数値函数 $f(x)$ による集合 X の像 $f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$ の上限と下限をそれぞれ

$$\sup f(X) = \sup_{x \in X} f(x), \quad \inf f(X) = \inf_{x \in X} f(x)$$

と書く. $f(X)$ が上に(もしくは下)に有界なとき, 函数 f は X において上に有界(もしくは下)に有界であるという.

Y が上に有界でないときには Y は(有限な)上限を持たないが, そのとき $\sup Y = \infty$ と書くことがある. 同様に Y が下に有界でないときには Y は(有限な)下限を持たないが, そのとき $\inf Y = -\infty$ と書くことがある.

Y に最大値 $\max Y$ が存在するとき, $\sup Y = \max Y$ となる. 同様に Y に最小値 $\min Y$ が存在するとき, $\inf Y = \min Y$ となる.

上限と下限の便利なところ: X に最大値や最小値が存在しなくても, 上限と下限は値として $\pm\infty$ を許せば常に存在する. 上限と下限は, 最大値や最小値が存在しないときに, それらに代わるものとして用いることができる場合が結構ある. □

例: 開区間 $Y = (0, 1)$ には最小値も最大値も存在しない. $Y = (0, 1)$ のとき $\inf Y = 0$, $\sup Y = 1$ となる. □

例: $Y = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ には最大値 1 は存在するが, 最小値は存在しない. このとき,

$$\sup Y = \sup_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n} = \max_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n} = 1, \quad \inf Y = \inf_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n} = 0. \qquad \square$$

例: $Y = \{1, 2, 3, \dots\}$ は上に有界でないので有限の上限を持たない. 下限は最小値の 1 になる:

$$\sup\{1, 2, 3, \dots\} = \infty, \quad \inf\{1, 2, 3, \dots\} = \min\{1, 2, 3, \dots\} = 1.$$

3.2 上極限と下極限

この節はすぐに読む必要はない. 上極限と下極限が必要になったときに読めば十分である.

実数の集合 X とその部分集合 Y を考える. X の上界は Y の上界にもなるので, X の上界の最小値は Y の上界の最小値以上になる. すなわち, $\sup X \geqq \sup Y$ となる(これは図を描いて考えれば明らかだろう). 部分集合の上限はもとの集合の上限以下になる. 同様に部分集合の下限はもとの集合の下限以上になる.

したがって, 実数列 a_n に対して, 数列 $\alpha_n = \sup_{k \geqq n} a_k$ は単調減少し, 数列 $\beta_n = \inf_{k \geqq n} a_k$ は単調増加する. ゆえに $\pm\infty$ も収束先に含めれば, それらの数列は常に収束することになる. それぞれの収束先を次のように書く:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geqq n} a_k = \inf_{n \geqq 1} \sup_{k \geqq n} a_k,$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k \geqq n} a_k = \sup_{n \geqq 1} \inf_{k \geqq n} a_k.$$

これらをそれぞれ**上極限**(limit superior), **下極限**(limit inferior)と呼ぶ.

それぞれを $\liminf a_n$, $\limsup a_n$ と略して書くこともある.

自明に $\inf_{k \geqq n} a_k \leqq \sup_{k \geqq n} a_k$ が成立しているので,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

が成立している.

定理: 実数列 a_n について

$$-\infty < \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n < \infty$$

が成立しているならば, 実数列 a_n は収束して,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

証明: $\alpha = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ とおき, 任意に $\varepsilon > 0$ と取って固定する. $\alpha = \liminf_{n\to\infty} a_n$ より, $\inf_{j \geqq n} a_j$ が n について単調増加することに注意すれば, ある番号 N' が存在して,

$$\alpha - \varepsilon \leqq \inf_{j \geqq n} a_j \leqq \alpha \quad (n \geqq N').$$

同様に, $\sup_{j \geqq n} a_j$ が n について単調減少することに注意すれば, ある番号 N'' が存在して,

$$\alpha \leqq \sup_{j \geqq n} a_j \leqq \alpha + \varepsilon \quad (n \geqq N'').$$

ゆえに $n = \max\{N', N''\}$ のとき, $k \geqq n$ ならば

$$\alpha - \varepsilon \leqq \inf_{j \geqq n} a_k \leqq a_k \leqq \sup_{j \geqq n} a_j \leqq \alpha + \varepsilon.$$

これは $k \geqq n$ のとき, $|a_k - \alpha| \leqq \varepsilon$ が成立することを意味する. したがって, 数列の収束の定義より, 数列 a_n は α に収束する. これで示すべきことが示された. □

上極限と下極限の便利な点: $\lim a_n$ と違って, $\liminf a_n$ と $\limsup a_n$ は収束先として $\pm\infty$ を含めれば常に収束しているので収束性を確認せずに気軽に使うことができる. そして上の定理より, $\liminf a_n$ と $\limsup a_n$ が一致していれば, a_n は収束していて収束先はそれらと同じになる.

だから, 以下のような使われ方をすることが多い. 実数列 a_n に対して, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, それに依存して決まる別の数列 $A_n^{(\varepsilon)}$ と $B_n^{(\varepsilon)}$ で同じ値 α に収束するものが存在して, さらに

$$A_n^{(\varepsilon)} - \varepsilon \leqq a_n \leqq B_n^{(\varepsilon)} + \varepsilon$$

が成立していると仮定する. このとき, $n \to \infty$ とすると,

$$\alpha - \varepsilon \leqq \liminf_{n \to \infty} a_n \leqq \limsup_{n \to \infty} a_n \leqq \alpha + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は幾らでも小さくできるので,

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \limsup_{n \to \infty} a_n = \alpha$$

となる. ゆえに数列 a_n は α に収束する:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha.$$

「$n \to \infty$ とすると」の段階では数列 a_n が収束するかどうかわかっていないので, lim ではなく, lim inf と lim sup を使わなければいけない. □

問題: 以下の実数列の上極限を求めよ.

(1) $a_n = 10/n + (-1)^n$.

(2) $b_n = 10/n + \sin(4n)$.

π が無理数であることを認めて使ってよい.

解答例: (1) $\limsup a_n = \limsup(10/n + (-1)^n) = 1$.

(2) π は無理数なので $a = 4/(2\pi)$ も無理数である. そのとき, $\sin(4n) = \sin(2\pi n a)$. 次の問題より, 任意の $k > 0$ に対して, ある正の整数 n_k で $n_k a$ の小数点以下の部分と $1/4$ の距離が $1/k$ 以下になるものが存在する. そのとき, $n_k a$ の小数点以下の部分は $1/4$ に収束するので, $k \to \infty$ で $\sin(2\pi n_k a) \to \sin(2\pi(1/4)) = 1$ となる. これより, $\limsup b_n = 1$ となることがわかる. □

問題: 実数 x に対して x 以下の最大の整数を $\lfloor x \rfloor$ と書き, $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ とおく. $f(x)$ は x の小数点以下の部分になっている. a は無理数であるとする. そのとき, 任意の $\alpha \in [0, 1)$ と $\varepsilon > 0$ に対して, ある正の整数 n で $f(na)$ と $\alpha|$ の距離が ε 以下になるものが存在することを示せ.

解答例: a は無理数なので $a, 2a, 3a, \ldots$ は決して整数にはならない. そして, $f(a), f(2a), f(3a), \ldots$ の中の任意の2つは決して一致しない. なぜならば, もしも $f(ma) = f(na)$, $m < n$ ならば $na - ma = (n - m)a$ が整数になって矛盾するからである.) だから, $\{f(a), f(2a), f(3a), \ldots\}$ は有限半開区間 $[0, 1)$ の無限部分集合になる. ゆえにある正の整数の組 $m < n$ で $f(ma)$ と $f(na)$ の距離が ε 以下になるものが存在する. そのとき, $(n - m)a$ とそれに最も近い整数のあいだの距離は ε 以下になる. このとき, $f(k(n - m))$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ は $[0, 1)$ の中に刻み幅が ε 以下の等差数列を作るので, 正の整数 k をうまく取れば $f(k(n - m)a)$ と α の距離を ε 以下にできる. □

In [10]:
```
nmax = 100
n = 1:nmax
plot(n, 10./n .+ (-1).^n, label="a_n", ylims=(-1.5,10), marker=:o, markersize=3, markerstrokealpha=0)
plot!(n, ones(n), label="1")
```

Out[10]:

In [11]:
```
nmax = 200
n = 1:nmax
plot(n, 10/n + sin.(4.*n), label="b_n", ylims=(-1.5, 10), marker=:o, markersize=2, markerstrokealpha=0)
plot!(n, ones(n), label="1")
```

Out[11]:

問題(上極限の特徴付け): a_n は実数列であるとし, $\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n$ とおく. 以下を示せ.

(1) $\alpha > A$ のとき, 任意の番号 n に対して, ある $k \geqq n$ で $a_k \geqq A$ を満たすものが存在する($a_k \geqq A$ を満たす k が無限個存在する).

(2) $\alpha < B$ のとき, ある番号 N が存在して, $k \geqq N$ ならば $a_k \leqq B$ となる(ある番号から先のすべての k について $a_k \leqq B$ が成立している).

逆に(1),(2)を α が満たしていれば, $\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n$ となることも示せ.

解答例: (1)を示そう. $\alpha = \inf_{n\geqq 1} \sup_{k\geqq n} a_k$ より, 任意の番号 n について $\sup_{k\geqq n} a_k \geqq \alpha$ となる. ゆえに, $\alpha > A$ という仮定より, 各 n ごとにある $k \geqq n$ で $a_k \geqq A$ を満たすものが存在する.

(2)を示そう. $\alpha < B$ と $\sup_{k \geqq n} \to \alpha$ より, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $\sup_{k \geqq n} a_k \leqq B$ すなわち $a_k \leqq B$ $(k \geqq n)$ となる. ゆえに $k \geqq N$ ならば $a_k \leqq B$ となる.

(1),(2)を仮定して, $\alpha = \limsup_{n \to \infty} a_n$ を示そう. $A < \alpha < B$ と仮定する. (1)より, 任意の番号 n に対してある $k \geqq n$ で $a_k \geqq A$ を満たすものが存在するので, $\sup_{k \geqq n} a_k \geqq A$ となる. ゆえに $\limsup_{n \to \infty} a_n \geqq A$ となる. (2)より, ある番号 N が存在して, $k \geqq N$ ならば $a_k \leqq B$ となる. すなわち, $\sup_{k \geqq N} \leqq B$ となる. ゆえに, $\limsup_{n \to \infty} a_n \leqq B$ となる. これで

$$A \leqq \limsup_{n \to \infty} a_n \leqq B$$

が示された. A, B は α に幾らででも近くに取れるので $\alpha = \limsup_{n \to \infty} a_n$ となる. □

問題: 実数列 a_n が収束しているならば

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_n$$

となっていることを示せ.

解答例: 実数列 a_n は α に収束していると仮定する. $\limsup_{n \to \infty} a_n = \alpha$ のみを示そう. $A < \alpha < B$ と仮定する. $a_n \to \alpha$ なので, ある番号 N が存在して $k \geqq N$ ならば $A \leqq a_k \leqq B$ となる. ゆえに, 上の問題の条件(1),(2)を α は満たしている. したがって, $\limsup_{n \to \infty} a_n = \alpha$ となる. □

4 実数の連続性の帰結

この節を読むときの注意: この節の内容は初心者にとっては難しいので, 解析学の議論に慣れてから読んだ方がよい. 初心者であるにもかかわらず, どうしても読みたい場合には, まず証明には目を通さずに, 各主張の内容を図に描いたり, 図には描けない理想的な様子をイメージしてみたりする方がよいと思う. 十分に健全な直観があれば(ない場合にはそのような健全な直観を心の中に育成することが大事), 実数の連続性もその帰結もどれも当然成り立ってほしい結果であることがわかるはずである. 少なくとも, 驚くべきような仮定をしているわけでもないし, 驚くべきような結論が導かれているわけではない. □

補足: 数学における仮定や結論の多くは通常の直観のもとでは当然そうなって欲しいと感じられるような事柄に過ぎない. 当然そうなって欲しいことを論理的に適切にかつ厳密に記述するためにテクニカルな(技術的な)要素が必要になる点が難しいだけで, 直観的には驚くべきことが含まれていない場合は相当に多い. そういう場合について, 直観的に何か非常に以外なことをやっているかのように誤解するのはまずい. それとは対照的に通常の直観では想像もできないような驚くべき主張をしている数学的命題も存在する. そのような場合に素直に驚きを感じて感動すればよい. 普段から通常の直観で「明らか」だと感じられ事柄を明らかだと感じられるような直観を身に付けておいた方が, 想定外の定義や結論への感動は大きくなると思われる. □

この節では次の実数の連続性を認めて使って, 幾つかの帰結を導く.

実数の連続性: 実数の空でない集合 Y が上に有界ならば Y の上界全体の集合の中に最小値が存在する. □

Y を $-Y = \{ -y \mid y \in Y \}$ に置き換えることによって, 実数の空でない集合 Y が下に有界ならば Y の下界全体の集合の中に最大値が存在することを示せる.

4.1 有界単調実数列の収束

有界単調数列の収束: 上に有界な単調増加実数列はある実数に収束する.

証明: a_n は上に有界な単調増加実数列であるとする. 実数の連続性より, a_n 達の最小上界 α が存在する. 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. もしもすべての番号 n について $a_n \leqq \alpha - \varepsilon$ となっているならば,$\alpha - \varepsilon$ も a_n 達の上界になり, α が最小の上界であることに反するので, ある番号 N が存在して $a_N > \alpha - \varepsilon$ となる. a_n は単調増加数列なので $n \geqq N$ のとき $a_n > \alpha - \varepsilon$ となる. α は a_n たちの上界なので $a_n \leqq \alpha$ でもある. ゆえに $n \geqq N$ ならば, $\alpha - \varepsilon < a_n \leqq \alpha$ なので特に $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる. これで a_n が α に収束することが示された. □

注意: 数列をその -1 倍で置き換えることによって, 下に有界な単調減少実数列はある実数に収束することも得られる. □

4.2 Bolzano–Weierstrassの定理

数列 a_n に対して, $1 \leqq k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ が定める数列 $b_n = a_{k_n}$ を a_n の**部分列**と呼ぶ. 例えば, 数列 $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ は数列 $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ の部分列である.

Bolzano–Weierstrassの定理: 有界な実数列は収束する部分列を持つ.

証明: a_n は有界な実数列であるとする. 有界なのである実数 A, B ですべての番号 n について $A \leqq a_n \leqq B$ が成立するものが存在する. $A_1 = A, B_1 = B$ とおくと, $a_k \in [A_1, B_1]$ を満たす k は(当然)無限個存在する. A_n, B_n で $a_k \in [A_n, B_n]$ を満たす k が無限個存在するものを帰納的に以下のように定める. C_n を A_n, B_n の中点とする. $a_k \in [A_n, C_n]$ を満たす k が無限個あるならば $A_{n+1} = A_n, B_{n+1} = C_n$ とおき, そうでないならば $a_k \in [C_n, B_n]$ を満たす k は無限個あるので $A_{n+1} = C_n, B_{n+1} = B_n$ とおく. このとき, $A_n \leqq A_{n+1} \leqq B_{n+1} \leqq B_n$ なので A_n は上に有界な単調増加数列になり, B_n は下に有界な単調減少数列になる. ゆえに有界単調実数列の収束性より, A_n, B_n は収束する. それぞれの収束先を α, β と書く. $|B_n - A_n| = \dfrac{|B_1 - A_1|}{2^{n-1}}$ なので $\alpha = \beta$ となる. 各 n について, $a_k \in [A_n, B_n]$ を満たす k は無限個存在するので, $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots$ ですべての番号 n について $a_{k_n} \in [A_n, B_n]$ を満たすものが存在する. このとき, a_n の部分列 a_{k_n} は $A_n \leqq s_{k_n} \leqq B_n$ を満たしているので $\alpha = \beta$ に収束する. □

4.3 実数のCauchy列の収束

数列 a_n がCauchy列(基本列)であるとは, $m, n \geqq N \to \infty$ のとき $|a_m - a_n| \to 0$ となることであると定める. そり正確に言えば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある番号 N が存在して, $m, n \geqq N$ ならば $|a_m - a_n| < \varepsilon$ が存在することであると定める.

実数のCauchy列の収束: 実数のCauchy列はある実数に収束する.

証明: a_n は実数のCauchy列であるとする. そのとき, ある番号 N が存在して $n \geqq N$ のとき $|a_n - a_N| < 1$ となるので, $|a_n| < |a_N| + 1$ となる. ゆえに $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ とおくと, すべての番号 n について $|a_n| \leqq M$ となり, 数列 a_n が有界であることがわかる.

Bolzano-Weierstrass の定理より, a_n のある部分列 a_{k_n} である実数 α に収束するものが存在する. $\varepsilon > 0$ を任意に取る. a_n はCauchy列なので, ある番号 N' が存在して $m, n \geqq N'$ ならば $|a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる. 部分列 a_{k_n} は α に収束するので, ある番号 N'' が存在して $m \geqq N''$ ならば $|a_{k_m} - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる. $k_m \geqq N'$ となるような $m \geqq N''$ が存在する. そのとき, $n \geqq N'$ ならば

$$|a_n - \alpha| \leqq |a_n - a_{k_m}| + |a_{k_m} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで, a_n が α に収束することが示された. □

4.4 閉区間に関するHeine-Borelの被覆定理

閉区間に関するHeine-Borelの被覆定理: $a \leqq b$ であるとし, 閉区間 $I = [a, b]$ を考える. 開区間 $U_\lambda = (a_\lambda, , b_\lambda), a_\lambda < b_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 達によって I が覆われていると仮定する: $I \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. このとき有限個の U_λ 達で I を覆うことができる. すなわち有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \Lambda$ で $I \subset \bigcup_{i=1}^{r} U_{\lambda_i}$ を満たすものが存在する.

証明: $a = b$ の場合は自明なので $a < b$ であると仮定する. この定理の結論が成立していないと仮定して矛盾を導こう. すなわち, 有限個の U_λ 達で $I = [a, b]$ を覆うことができないと仮定する. $a_1 = a, b_1 = b$ とおくと, $[a_1, b_1]$ は有限個の U_λ 達で覆うことはできない. $a_n < b_n$ で $[a_n, b_n]$ が有限個の U_λ 達で覆えないものを以下のように帰納的に定めることができる. $[a_n, b_n]$ が有限個の U_λ 達で覆うことができないならば, c_n を a_n, b_n の中点とするとき, $[a_n, c_n]$ または $[c_n, b_n]$ のどちらかは有限個の U_λ で覆うことはできない. $[a_n, c_n]$ の方がそうならば $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n$ とおき, それ以外の場合には $[c_n, b_n]$ の方がそうなっているので $a_{n+1} = c_n, b_{n+1} = b_n$ とおく. このとき, $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ も有限個の U_λ 達で覆うことはできない. このとき, $a_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \leqq b_n$ でかつ $|b_n - a_n| \leqq \dfrac{b - a}{2^{n-1}}$ なので, a_n と b_n はCauchy列になり, 同一の $\alpha \in I$ に収束する. U_λ 達は I を覆っているので, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して $\alpha \in U_{\lambda_0}$ となる. a_n, b_n はともに α に収束するので, 十分に n を大きくすると, $[a_n, b_n] \subset U_{\lambda_0}$ となる. これは $[a_n, b_n]$ が有限個の U_λ 達で覆えないことに反する. これで矛盾が出た. ゆえに上の定理の結論は成立する. □

4.5 閉区間上の実数値連続函数が最大最小を持つこと

ノート「[連続函数 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/04%20continous%20functions.ipynb)](http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/04%20continous%20functions.ipynb)」の[対応する節 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/04%20continous%20functions.ipynb#閉区間上の実数値連続函数が最大最小を持つこと)](http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/04%20continous%20functions.ipynb#閉区間上の実数値連続函数が最大最小を持つこと)を参照せよ.

In [ ]:
```
1
```

02 級数

黒木玄

2018-04-18

- Copyright 2018 Gen Kuroki
- License: MIT https://opensource.org/licenses/MIT (https://opensource.org/licenses/MIT)

- Repository: https://github.com/genkuroki/Calculus (https://github.com/genkuroki/Calculus)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/02%20series.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/02%20series.ipynb)
- https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/02%20series.pdf (https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/02%20series.pdf)

このファイルは Julia Box (https://juliabox.com) で利用できる.

自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ.

論理的に完璧な説明をするつもりはない. 細部のいい加減な部分は自分で訂正・修正せよ.

目次

1 級数
- 1.1 絶対収束と条件収束
  - 1.1.1 絶対収束と条件収束の定義
  - 1.1.2 絶対収束級数の収束先は和を取る順番によらないこと
- 1.2 絶対収束級数の例
  - 1.2.1 絶対収束級数の例1 (Riemannのゼータ函数)
  - 1.2.2 絶対収束級数の例2
- 1.3 条件収束級数の例
  - 1.3.1 条件収束級数の例1
  - 1.3.2 Euler変換による交代級数の数値計算
  - 1.3.3 無限和と積分の交換に関する注意
  - 1.3.4 条件収束級数の例2

2 複素数の級数
- 2.1 複素数の絶対収束級数
- 2.2 条件収束する複素級数の例
- 2.3 多重対数函数
- 2.4 二重対数函数のζ(2)の近似計算への応用
- 2.5 二重対数函数のζ(2)の正確な計算への応用
- 2.6 二重対数函数の高木貞治『解析概論』§35の例2(p.113)への応用
- 2.7 二重対数函数の五項関係式

3 無限積
- 3.1 無限積の絶対収束
- 3.2 絶対収束する無限積の収束先が積の順序によらないこと
- 3.3 量子二重対数函数
  - 3.3.1 量子二重対数函数と量子指数函数との関係
  - 3.3.2 q二項定理
  - 3.3.3 q指数函数の加法公式
  - 3.3.4 量子二重対数函数の五角形恒等式

In [1]:

```
using Plots
gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn) = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    display("text/html", """<img src="data:$mime; base64,$base64">""")
end

using SymPy
#sympy[:init_printing](order="lex") # default
#sympy[:init_printing](order="rev-lex")

using SpecialFunctions
using QuadGK
import PyPlot
```

1 級数

1.1 絶対収束と条件収束

1.1.1 絶対収束と条件収束の定義

定理: $a_n \geqq 0$ であると仮定する. そのとき, ある正の定数 M が存在して, すべての番号 n について $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leqq M$ が成立しているならば, 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は有限の値に収束する.

証明: $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_n$ とおくと, s_n は上に有界な単調増加実数列になる. ゆえに実数の連続性より, s_n は有限の値に収束する. □

定理: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ ならば級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する. そのとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**絶対収束する**という.

証明: $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく. 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ より, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

となる. ゆえに $m \geqq n \geqq N$ のとき,

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leqq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon.$$

ゆえに s_n はCauchy列になる. ゆえに実数の完備性より, s_n は収束する. □

注意: 上の定理の逆は成立しないことに注意に注意せよ. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束していても $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ となる場合がある. そのとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**条件収束する**という. □

注意: 上の定理は a_n が実数列でも複素数列でも成立している. さらに a_n が $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ の点列でかつ絶対値をノルムで置き換えた場合にも成立している. 直観的には「長さが有限の紐の先端に対応する点が収束先として存在する」というような発想で考えればよい.

より一般にはノルム空間においては上の定理が成立することと完備性の条件は同値になっている. 実数列の場合には**実数の連続性**と同値になっている.

実数の連続性について理解していなくても, 絶対収束の概念を理解していれば足りることは多い. □

1.1.2 絶対収束級数の収束先は和を取る順番によらないこと

定理: 絶対収束する無限級数の収束先は足し上げる順序をどのように変えても同じになる. □

このノートでは, 絶対収束する無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に関する以下の2つの結果を証明しておくことにしよう.

(1) $k \mapsto n_k$ は正の整数全体と正の整数全体を一対一に対応させる写像であるならば, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ も絶対収束して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が成立する.

(2) $(k, l) \mapsto n_{k,l}$ が正の整数の対の全体と正の整数全体を一対一に対応させる写像であるならば, すべての k について $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} a_{n_{k,l}}$ は絶対収束し, さらに $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{n_{k,l}}$ も絶対収束して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{n_{k,l}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が成立する.

証明: $\displaystyle M = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ とおく.

(1) $n_1, n_2, \dots, n_K$ の最大値を N と書くと,

$$\sum_{k=1}^{K} |a_{n_k}| \leqq \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leqq M < \infty$$

なので $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}|$ は収束する. つまり $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ は絶対収束する.

$n_k = 1, 2, \dots, N$ となる k の最大値を K_N 書くと, $n_1, n_2, \dots, n_{K_N}$ は $1, 2, \dots, N$ をすべて含み, $N \to \infty$ のとき $K_N \to \infty$ となり,

$$\left|\sum_{k=1}^{K_N} a_{n_k} - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = M - \sum_{n=1}^{N} |a_n| \to 0 \quad (N \to \infty)$$

となるので, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ となることがわかる.

(2) 各 $n_{k,1}, n_{k,2}, \dots, n_{k,L}$ の最大値を N と書くと,

$$\sum_{l=1}^{L} |a_{n_{k,l}}| \leqq \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leqq M < \infty$$

なので, $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} a_{n_{k,l}}$ は絶対収束する.

任意に $\varepsilon > 0$ を取る. $k = 1, 2, \dots, K$ ごとに L_k を十分に大きくすると, $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} |a_{k,l}| \leqq \sum_{l=1}^{L_k} |a_{k,l}| + \varepsilon$ となるので, $n_{k,l}$ ($k = 1, 2, \dots, K$, $l = 1, 2, \dots, L_k$) の最大値を N と書くと,

$$\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right| \leqq \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{\infty} |a_{n_{k,l}}| \leqq \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k} |a_{n_{k,l}}| + K\varepsilon \leqq \sum_{n=1}^{N} |a_n| + K\varepsilon \leqq M + K\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ はいくらでも小さくできるので,

$$\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{l=1}^{\infty}a_{k,l}\right| \leqq \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{n_{k,l}}| \leqq M < \infty.$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{n_{k,l}}$ も絶対収束する.

任意に $\varepsilon > 0$ を取る. $\{\, n_{k,l} \mid k = 1, 2, \dots, K,\ l = 1, 2, 3, \dots \,\} \supset \{1, 2, \dots, N\}$ となるような最小の K を K_N と書くことにする. このとき, $N \to \infty$ ならば $K_N \to \infty$ となる. 各 $k = 1, 2, \dots, K_N$ に対して, ある L_k が存在して,

$$\{\, n_{k,l} \mid k = 1, 2, \dots, K,\ l = 1, 2, \dots, L_k \,\} \supset \{1, 2, \dots, N\}$$

かつ

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty}a_{n_{k,l}} - \sum_{l=1}^{L_k}a_{n_{k,l}}\right| < \frac{\varepsilon}{K_N}$$

となる. ゆえに,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{K_N}\sum_{l=1}^{\infty}a_{n_{k,l}} - \sum_{n=1}^{N}a_n\right| &\leqq \left|\sum_{k=1}^{K_N}\sum_{l=1}^{\infty}a_{n_{k,l}} - \sum_{k=1}^{K_N}\sum_{l=1}^{L_k}a_{n_{k,l}}\right| + \left|\sum_{k=1}^{K_N}\sum_{l=1}^{L_k}a_{n_{k,l}} - \sum_{n=1}^{N}a_n\right| \\ &\leqq \sum_{k=1}^{K_N}\left|\sum_{l=1}^{\infty}a_{n_{k,l}} - \sum_{l=1}^{L_k}a_{n_{k,l}}\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n| \\ &< \varepsilon + \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|.\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ はいくらでも小さくできるので,

$$\left|\sum_{k=1}^{K_N}\sum_{l=1}^{\infty}a_{n_{k,l}} - \sum_{n=1}^{N}a_n\right| \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|.$$

右辺は $N \to \infty$ のとき 0 に収束するので, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{n_{k,l}} = \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が成立することがわかる. □

上の定理から次の系(corollary, 当然の結果)がただちに導かれる.

系: $a_n \geqq 0$ のとき $a_1, a_2, \dots$ の無限和は足し上げる順序をどのように変えても同じになる. □

注意: $a_n \geqq 0$ のとき $a_1, a_2, \dots$ の無限和の値として ∞ も許せば, その無限和は常に値を持っているとみなせる. 非負の実数の無限和を扱うときには収束先として ∞ も許したくなる場合が多いので, その場合には収束先が有限の値になるか否かを明瞭に述べておいた方が誤解が少なくなる. □

問題: $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}a_m$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が絶対収束しているならば, $\displaystyle\sum_{m,n\geqq 1,\ m+n\leqq N+1}|a_m b_n|$ も $N \to \infty$ で収束しており,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m,n\geqq 1,\ m+n\leqq N+1}a_m b_n = \sum_{m=1}^{\infty}a_m\sum_{n=1}^{\infty}b_n \tag{$*$}$$

が成立していることを示せ.

解答例: $L = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|$, $M = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ とおく. このとき,

$$\sum_{m,n\geqq 1,\ m+n\leqq N+1}|a_m b_n| \leqq \sum_{m=1}^{N}|a_m|\sum_{n=1}^{N}|b_n| \leqq LM < \infty.$$

これより, $\displaystyle\sum_{m,n\geqq 1,\ m+n\leqq N+1}|a_m b_n|$ も $N \to \infty$ で収束することがわかる. これは $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{m,n\geqq 1,\ m+n\leqq N+1}a_m b_n$ が絶対収束することを意味している. したがって, 上の方の定理の(2)より$(*)$が成立することもわかる. □

注意: 条件収束級数の収束先は足し上げる順序によって変わるので扱いには注意が必要になる. □

問題: 実数 a_n の級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は条件収束していると仮定する. このとき, 任意の実数 α に対して, その級数の足し上げる順序をうまく変えることによって, 収束先を α にできることを示せ.

解答例: a_n うち非負のもの全体を $b_1 \geqq b_2 \geqq \dots$ と書き, 負のもの全体を $c_1 \geqq c_2 \geqq \dots$ と書く. このとき, $b_n \to 0$, $c_n \to 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -\infty$ が成立している. まず, $b_1 + \dots + b_k$ が最初に α 以上になる k を k_1 と定める. 次に $b_1 + \dots + b_{k_1} + c_1 + \dots + c_l$ が最初に α 以下になる l を l_1 と定める. これを同様に繰り返すと, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の項の順序を並び換えた級数

$$b_1 + \dots + b_{k_1} + c_1 + \dots + c_{l_1} + b_{k_1+1} + \dots + b_{k_2} + c_{l_1+1} + \dots + c_{l_2} + \dots$$

ができ上がる. b_{k_i} までの和は和の途中段階も含めてすべて $\alpha + b_{k_i}$ 未満であり, c_{l_j} までの和は和の途中段階も含めてすべて $\alpha + c_{l_j}$ より大きくなる($c_l < 0$ に注意せよ). したがって, $b_n \to 0$ と $c_n \to 0$ より, 上のように並び換えた級数が α に収束することがわかる. □

注意: 上の解答例の最後の部分の議論は $a_n \geqq 0$, $a_n \geqq a_{n+1}$, $a_n \to 0$ のとき, 交代級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ が常に収束することを示すためにも使える. □

1.2 絶対収束級数の例

1.2.1 絶対収束級数の例1 (Riemannのゼータ函数)

$s > 1$ と仮定する. このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty$ である. なぜならば $n \to \infty$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leqq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^s} = 1 + \frac{1 - n^{1-s}}{s-1} \to 1 + \frac{1}{s-1}.$$

これより $s > 1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leqq 1 + \frac{1}{s-1}$$

となることがわかった. $s > 1$ の函数 $\zeta(s)$ を

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

と定める. これを**Riemannのゼータ函数**と呼ぶ. Riemannのゼータ函数の定義域は $s \neq 1$ の複素数全体に自然に拡張される(解析接続される). Riemannのゼータ函数は整数論における最も基本的で重要な函数である.

$s > 1$ のとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ は絶対収束級数である. この級数は後で示すように $s = 1$ でも収束している. (さらに複素平面全体に解析接続されることも示せる.)

問題: $s > 1$ と仮定する. この仮定のもとで次の公式を証明せよ:

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

証明: 絶対収束級数を扱っているので, 以下のように形式的に計算した結果がそのまま証明になる.

$$\begin{aligned}
(1 - 2^{1-s})\zeta(s) &= \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^s} \\
&= \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) - \left(\frac{2}{2^s} + \frac{2}{4^s} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}. \qquad \square
\end{aligned}$$

問題: $\zeta(2)$ を数値計算して, $\pi^2/6$ に近いことを確認せよ.

In [2]:
```
N = 10^8
SimpleSum = sum(n->1/n^2, 1:N)
TrueValue = π^2/6
@show SimpleSum
@show TrueValue
@show SimpleSum - TrueValue;
```

```
SimpleSum = 1.6449340568482278
TrueValue = 1.6449340668482264
SimpleSum - TrueValue = -9.99999860695766e-9
```

問題: $\zeta(2) = \pi^2/6$ の証明について調べよ.

ヒント: この問題は**Basel問題**などと呼ばれているようである. インターネットで検索してみよ. □

正の偶数 $2m$ について $\zeta(2m)$ はすべて計算されている. しかし, 3以上の奇数 $2m+1$ に対する $\zeta(3m+1)$ の数学的な素性はまだよくわかっていない.

1.2.2 絶対収束級数の例2

問題: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n)-1) = 1$ を示せ.

証明: $k \geqq 2$ のとき

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{k^n} = \frac{1/k^2}{1-1/k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

そして

$$\zeta(n) - 1 = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^n}$$

なので,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n)-1) &= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \cdots = 1.\end{aligned}$$

2つ目の等号で $1/k^n \geqq 0$ なので足し上げる順序を変えても総和は等しいことを使った. □

以下はコンピューターによる計算.

In [3]:
```
N = 50
sum(n->zeta(n)-1, 2:N)
```

Out[3]: 1.0000000000000044

In [4]:
```
l, n = symbols("l n", integer=true, positive=true) # l = k-1
s = simplify(doit(Sum(1/(l+1)^n, (n,2,oo))))
S = doit(Sum(s, (l,1,oo)))
```

Out[4]: 1

問題: 上の問題の結果より, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(\zeta(n)-1)$ は絶対収束する. その収束先を求めよ.

証明: $k \geqq 2$ のとき

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k^n}=\frac{1/k^2}{1+1/k}=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

そして

$$(-1)^n(\zeta(n)-1)=\frac{(-1)^n}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}+\frac{(-1)^n}{4^n}+\cdots=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k^n}$$

なので,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n)-1)&=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k^n}=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k^n}=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2つ目の等号で絶対収束級数なので足し上げる順序を変えても総和は等しいことを使った. □

以下はコンピューターによる計算.

In [5]:
```
N = 50
sum(n->(-1)^n*(zeta(n)-1), 2:N)
```

Out[5]: 0.5000000000000018

In [6]:
```
l, n = symbols("l n", integer=true, positive=true) # l = k-1
s = simplify(doit(Sum((-1)^n/(l+1)^n, (n,2,oo))))
S = doit(Sum(s, (l,1,oo)))
```

Out[6]: $\frac{1}{2}$

問題: 以上の例以外の絶対収束級数の例について調べ, ノートにまとめよ.

1.3 条件収束級数の例

定理: 一般に $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots$ かつ $a_n \geqq 0$ かつ $a_n \to 0$ のとき, **交代級数**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$$

は常に収束する.

注意: この定理中の a_n について $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$ が成立しているとき, 交代級数は条件収束級数になる.

証明: $c_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}$ とおくと, n が奇数のとき $c_n=1$ となり, n が偶数のとき $c_n=0$ となる. $c_n-c_{n-1}=(-1)^{n-1}$ なので,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k=\sum_{k=1}^{n}(c_k-c_{k-1})a_k=\sum_{k=1}^{n}c_ka_k-\sum_{k=0}^{n-1}c_ka_{k+1}=c_na_n-c_0a_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k(a_k-a_{k+1})$$

であり, $|c_k|\leqq 1$ かつ a_n が単調減少することより $a_k-a_{k+1}\geqq 0$ であり, $a_n\to 0$ より $a_n\geqq 0$ なので,

$$\sum_{k=1}^{n-1}|c_k||a_k-a_{k+1}|\leqq\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_n\leqq a_1.$$

ゆえに $\sum_{k=1}^{\infty}c_k(a_k-a_{k+1})$ は絶対収束する. そして, $a_n\to 0$ かつ $|c_n|\leqq 1$ より $c_na_n\to 0$ となるので, $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ が $n\to\infty$ で収束することがわかる. □

注意: 上の証明は部分積分と類似の計算を和の場合に行っている. 部分積分やそれと同様の和の変形は収束し難い積分や無限和を収束し易くするために役に立つ. □

注意: 上の証明の議論は c_n が有界で a_n が単調減少しながら 0 に収束する場合に一般化される. $\square$

1.3.1 条件収束級数の例1

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は収束するが, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ となる.

なぜならば, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqq\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\log(n+1)\to\infty\ (n\to\infty)$ が成立するからである.

問題: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ を求めよ.

解答: $\log 2$.

証明: 一般に

$$\int_1^x\frac{dt}{t}=\log x.$$

ゆえに,

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\int_1^2\frac{dy}{y}=\log 2.$$

一方, $|x|<1$ のとき

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

なので

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\int_0^1(1-x+x^2-x^3+\cdots)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

したがって,

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\log 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.\qquad\square$$

以下はコンピューターによる計算.

In [7]:
```
n = symbols("n", integer=true)
S = doit(Sum((-1)^(n-1)/n, (n, 1, oo)))
```

Out[7]: $\log(2)$

In [8]:
```
N = 1000
SimpleSum = sum(n->(-1)^(n-1)/n, 1:N)
TrueValue = log(2)
@show SimpleSum
@show TrueValue
@show SimpleSum - TrueValue;
```

```
SimpleSum = 0.6926474305598223
TrueValue = 0.6931471805599453
SimpleSum - TrueValue = -0.0004997500001230337
```

1.3.2 Euler変換による交代級数の数値計算

$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ で $N=1000$ としても収束先の値を小数点以下第2桁までしか再現してくれない. 一般に条件収束する交代級数を定義通り足し上げると収束は遅い.

収束を加速するための様々な方法が知られているが, 交代級数の場合には**Euler変換**が有名である. 詳しくは

- 交代ゼータ函数のオイラー変換 (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/4a8fea5e2ed1b4e3b737c99acf237042)

を参照せよ. 交代級数 $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ のEuler変換の結果は

$$\lim_{L\to\infty}\sum_{k=0}^{L-1} w_k^{(L)}(-1)^k a_k, \qquad w_k^{(L)} = \sum_{n=k}^{L-1} 2^{-n-1}\binom{n}{k}.$$

すなわち交代級数のEuler変換は交代級数の各項にウェイト $w_k^{(L)}$ をかけてから $L \to \infty$ の極限を取る形になる.

以下のようにEuler変換を使えば数十項で精密な計算が可能になる.

In [9]:
```
binom(n,k) = exp(lgamma(n+1) - lgamma(k+1) - lgamma(n-k+1))

struct EulerWeight{T} W::T end
function EulerWeight(; Lmax=2^6)
    W = zeros(Lmax,Lmax)
    for L in 1:Lmax
        for k in 0:L-1
            W[L,k+1] = sum(n->2.0^(-n-1)*binom(n,k), k:L-1)
        end
    end
    EulerWeight(W)
end
(eulerweight::EulerWeight)(L,k) = eulerweight.W[L,k+1]
eulerweight = EulerWeight()
```

Out[9]:
```
EulerWeight{Array{Float64,2}}([0.5 0.0 ⋯ 0.0 0.0; 0.75 0.25 ⋯ 0.0 0.0; ⋯ ; 1.0 1.0 ⋯ 1.0842e-19 0.0; 1.0 1.0
⋯ 3.52366e-18 5.42101e-20])
```

In [10]:
```
L = 2^6
EulerTran = sum(k->eulerweight(L,k)*(-1)^k/(k+1), 0:L-1)
TrueValue = log(2)
@show EulerTran
@show TrueValue
@show EulerTran - TrueValue
```

```
EulerTran = 0.6931471805599451
TrueValue = 0.6931471805599453
EulerTran - TrueValue = -2.220446049250313e-16
```

Out[10]:
```
-2.220446049250313e-16
```

Euler変換を使うと, 次のセルのように $\zeta(s)$ の非自明な零点をプロットすることができる.

In [11]:

```
f(s) = sum(k -> eulerweight(L,k)*(-1)^k/(1+k)^s, 0:L-1)/(1-2^(1-s))
x = 0.0:0.005:1.0
y = 13.75:0.005:14.75
z = x' .+ im.*y
@time w = f.(z)
plot(size=(600, 500), title="first non-trivial zero of zeta(s)")
heatmap!(x, y, abs.(w), color=:rainbow, xlabel="Re s", ylabel="Im s")
vline!([0.5], color="gray", ls=:dot, label="")
```

```
1.973115 seconds (13.50 M allocations: 339.967 MiB, 2.09% gc time)
```

Out[11]:

複素平面における実部が 0 から 1 の縦に無限に長い帯状の領域を $\zeta(s)$ の critical strip と呼ぶ. $\zeta(s)$ の critical strip における零点を $\zeta(s)$ の非自明な零点と呼ぶ.

Riemann予想: $\zeta(s)$ の非自明な零点の実部はすべて $1/2$ である. □

この予想は非常に有名であり, もしも証明されれば素数の分布に関する精密な評価が得られる.

問題: $\zeta(s)$ のcritical stripにおける様子をプロットせよ. □

次のセルを見よ. 虚部が12から45までのcritical stripでの $\zeta(s)$ の様子がプロットされている. 少なくともその範囲内で $\zeta(s)$ の非自明な零点の実部はどれも $1/2$ になっていそうなことがわかる.

In [12]:

```
x = 0:0.01:1
y = 12:0.005:45
s = x' .+ y*im
@time w = zeta.(s)

PyPlot.figure(figsize=(4,10))

PyPlot.subplot(121)
PyPlot.pcolormesh(x, y, log.(abs.(w)), cmap="prism")
PyPlot.colorbar()
PyPlot.grid(ls=":")
PyPlot.title("log(abs(ζ(s)))")

PyPlot.subplot(122)
PyPlot.pcolormesh(x, y, angle.(w), cmap="rainbow")
PyPlot.colorbar()
PyPlot.grid(ls=":")
PyPlot.title("angle(ζ(s))")

PyPlot.tight_layout()
```

```
3.785944 seconds (152.43 k allocations: 16.549 MiB, 0.20% gc time)
```

1.3.3 無限和と積分の交換に関する注意

上では $\int_0^1 x^n\,dx = 1/(n+1)$ となることと, 無限和 $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ と積分 $\int_0^1 dx$ の順序を交換できることを用いた.

無限和と積分の順序交換が可能なことは以下のようにして確認できる. まず $|x| < 1$ で

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{N-1}x^{N-1} + (-1)^N \frac{x^N}{1+x}$$

となることを確認せよ. この公式を使うと,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + (-1)^{N-1}\frac{1}{N} + (-1)^N \int_0^1 \frac{x^N}{1+x}\,dx$$

さらに $0 \leqq x \leqq 1$ のとき, $1 \leqq 1 + x$ なので

$$0 \leqq \frac{x^N}{1+x} \leqq x^N$$

となるから,

$$0 \leqq \int_0^1 \frac{x^N}{1+x}\,dx \leqq \int_0^1 x^N\,dx = \frac{1}{N+1}$$

なので, $N \to \infty$ で

$$\int_0^1 \frac{x^N}{1+x}\,dx \to 0.$$

以上を合わせると,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

となることがわかる.

注意: 上の計算における $(-1)^N \displaystyle\int_0^1 \frac{x^N}{1+x}\,dx$ のように, 極限で 0 になって欲しい項が積分表示を持つことは多い. 極限で 0 になって欲しい部分を「$+\cdots$」のように書くと正体不明で不安になるのだが, 積分表示を持つ場合にはそのような不安は完全に解消してしまう. □

1.3.4 条件収束級数の例2

問題: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ を求めよ.

答え: $\pi/4$.

証明: $a = \tan\theta$ の $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ における逆函数を $\theta = \arctan a$ と書くと,

$$\int_0^a \frac{dt}{1+t^2} = \arctan a.$$

この公式は左辺で $t = \tan\theta$ と置換すれば確認できる.

ゆえに,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

一方, $|x| < 1$ のとき

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

なので

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

したがって,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}. \qquad \square$$

問題: 上の例の計算における無限和と積分の交換の正当化を実行せよ.

解答例: $0 < t < 1$ のとき

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t^2)^k + \frac{(-t^2)^n}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{2k} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}$$

なので,

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}\,dt}{1+t^2} \qquad (*)$$

でかつ

$$0 \leqq \int_0^1 \frac{t^{2n}\,dt}{1+t^2} \leqq \int_0^1 t^{2n}\,dt = \frac{1}{2n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}\,dt}{1+t^2} \to 0$ となる. したがって, $(*)$で $n \to \infty$ とすることによって,

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

を得る. □

注意: 多くの解説で, この例の証明にAbelの連続性定理を使っているようだ. しかし, この場合には以上のように初等的かつ明瞭かつ単純な方法で証明可能である. 特別に簡単な場合について, Abelの連続性定理のような一般的な定理を適用して処理することを機械的に繰り返すと, 数学の内容を誤解してしまう危険性があるので注意した方がよい. □

問題: 以上の例以外の条件収束級数の例について調べ, ノートにまとめよ. □

以下はコンピューターによる計算.

In [13]:
```
n = symbols("n", integer=true)
S = doit(Sum((-1)^(n-1)/(2n-1), (n, 1, oo)))
```

Out[13]: $\frac{\pi}{4}$

In [14]:
```
N = 10^8
SimpleSum = sum(n->(-1)^(n-1)/(2n-1), 1:N)
TrueValue = π/4
@show SimpleSum
@show TrueValue
@show SimpleSum - TrueValue;
```

```
SimpleSum = 0.7853981608974486
TrueValue = 0.7853981633974483
SimpleSum - TrueValue = -2.499999651739415e-9
```

In [15]:
```
L = 2^6
EulerTran = sum(k->eulerweight(L,k)*(-1)^k/(2k+1), 0:L-1)
TrueValue = π/4
@show EulerTran
@show TrueValue
@show EulerTran - TrueValue
```

```
EulerTran = 0.7853981633974486
TrueValue = 0.7853981633974483
EulerTran - TrueValue = 3.3306690738754696e-16
```

Out[15]: 3.3306690738754696e-16

以下はコンピューターによる $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ や $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$ などの計算.

In [16]:
```
x = symbols("x", real=true, positive=true)
integrate(1/(1+x^3), (x,0,1))
```

Out[16]: $\frac{1}{3}\log(2) + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

In [17]:
```
n = symbols("n", integer=true, positive=true)
S = doit(Sum((-1)^(n-1)/(3n-2), (n,1,oo)))
```

Out[17]:
$$\frac{1}{3}\log(2) - \frac{1}{3}e^{-\frac{5\pi}{3}i}\log\left(1+e^{\frac{2\pi}{3}i}\right) - \frac{1}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}}\log\left(1+e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)$$

In [18]:
```
x = symbols("x", real=true, positive=true)
integrate(x/(1+x^3), (x,0,1))
```

Out[18]:
$$-\frac{1}{3}\log(2) + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

In [19]:
```
n = symbols("n", integer=true, positive=true)
S = doit(Sum((-1)^(n-1)/(3n-1), (n,1,oo)))
```

Out[19]:
$$-\frac{1}{3}\log(2) - \frac{1}{3}e^{-\frac{2\pi}{3}i}\log\left(1+e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right) - \frac{1}{3}e^{-\frac{10\pi}{3}i}\log\left(1+e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)$$

In [20]:
```
x = symbols("x", real=true, positive=true)
integrate(1/(1+x^4), (x,0,1))
```

Out[20]:
$$-\frac{\sqrt{2}}{8}\log\left(-\sqrt{2}+2\right) + \frac{\sqrt{2}}{8}\log\left(\sqrt{2}+2\right) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

In [21]:
```
n = symbols("n", integer=true, positive=true)
S = doit(Sum((-1)^(n-1)/(4n-3), (n,1,oo)))
```

Out[21]:
$$-\frac{i}{4}e^{-\frac{i\pi}{4}}\log\left(1+e^{\frac{3\pi}{4}i}\right) + \frac{1}{4}e^{-\frac{i\pi}{4}}\log\left(1+e^{\frac{i\pi}{4}}\right) + \frac{i}{4}e^{-\frac{i\pi}{4}}\log\left(1+e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) - \frac{1}{4}e^{-\frac{i\pi}{4}}\log\left(1+e^{-\frac{3\pi}{4}i}\right)$$

In [22]:
```
x = symbols("x", real=true, positive=true)
s = symbols("s", real=true, positive=true)
J = simplify(integrate(1/(1+x^(1/s)), (x,0,1)))
```

Out[22]:
$$s\Phi\left(e^{i\pi}, 1, s\right)$$

2 複素数の級数

この節では複素数 a_n の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を扱う.

2.1 複素数の絶対収束級数

定理: 複素数 $a_1, a_2, \ldots$ について, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が有限の値に収束するならば, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する. このとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**絶対収束**するという. □

絶対収束していないが収束する級数は**条件収束**するという.

上の定理の証明は略す. しかし, 下の方で, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が有限の値に収束するならば, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する直観的な理由を説明する.

例: θ は実数であるとする. このとき, 複素級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^{3/2}}$ は絶対収束する. 以下のセルにおける計算とプロットを参照せよ.

In [23]:

```
θ = 2π/10
a(n) = exp(im*n*θ)/n^1.5
sum_a(n) = iszero(n) ? Complex(0.0) : sum(k->a(k), 1:n)
N = 70
n = 0:N
z = sum_a.(n)
plot(size=(400, 400), xlims=(0,1.0), ylim=(0,1.3))
plot!(real.(z), imag.(z), legend=false)#, line=:arrow)
```

Out[23]:

In [24]:

```
θ = 2π/10
a(n) = exp(im*n*θ)/n^1.5
sum_a(n) = iszero(n) ? Complex(0.0) : sum(k->a(k), 1:n)
@time anim = @animate for N in 0:70
    n = 0:N
    z = sum_a.(n)
    plot(size=(400, 400), xlims=(0,1.0), ylim=(0,1.3))
    plot!(real.(z), imag.(z), legend=false, line=:arrow)
end

gifname = "sum_a.gif"
@time gif(anim, gifname; fps=10)
sleep(0.1)
showimg("image/gif", gifname)
```

```
2.957521 seconds (19.49 M allocations: 502.619 MiB, 7.89% gc time)
1.146096 seconds (91.74 k allocations: 4.913 MiB, 0.61% gc time)
```

```
INFO: Saved animation to C:\Users\genkuroki\OneDrive\Calculus\sum_a.gif
```

絶対収束の概念の直観的な説明:

各複素数 a_n は平面上の点と同一視できる(複素平面の考え方).

平面上の点と原点からその点への矢線(ベクトル)は同一視できる(ベクトルの考え方).

複素数の和はベクトルの和に対応している.

ベクトルの和は矢線としてのベクトルを連結することを意味する(ベクトルの和の幾何学的意味).

ゆえに, $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ は各 $a_1, a_2, \dots, a_N$ の各々に対応する矢線を連結して得られる折れ線の先端の点に対応する複素数に等しい.

$L = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ は各 a_n に対応する矢線の長さの総和を意味する.

ゆえに, L が有限の値になることは, 各 a_n に対応する矢線をすべて連結して得られる折れ線の長さが有限になることを意味する.

そのとき, a_n に対応する矢線をすべて連結して得られる折れ線の「先端」の点に対応する複素数が級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束先になる.

1つ前のセルのアニメーションはそのような様子の一例になっている.

注意: 上の説明を理解できれば, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が有限の値に収束するならば, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束することも十分に納得できると思う. その直観は数学的には**完備性** (https://www.google.co.jp/search?

q=%E5%AE%8C%E5%82%99%E6%80%A7+%E7%B5%B6%E5%AF%BE%E5%8F%8E%E6%9D%9F)の概念によって正当化される. □

2.2 条件収束する複素級数の例

例: θ は実数であり, $e^{i\theta} \neq 1$ であると仮定する. このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ は条件収束する. □

例の解説のための一般論: 一般に $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ のとき, $A_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j$, $A_0 = 0$ とおくと, $a_k = A_k - A_{k-1}$ なので

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}). \end{aligned}$$

この公式は部分積分の公式の和に関するバージョンであることに注意せよ. (「部分積分」のアイデアは普遍的によく現われる.)

仮定の追加1: 数列 b_k は単調減少実数列でかつ 0 に収束すると仮定する.

このとき, $b_k - b_{k+1} \geqq 0$ でかつ

$$\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_n \to b_1 \quad (n \to \infty).$$

仮定の追加2: A_k は有界数列であると仮定する. すなわちある正の実数で $|A_k| \leqq M$ $(k = 1, 2, \ldots)$ を満たすものが存在すると仮定する.

このとき,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k||b_k - b_{k+1}| \leqq M \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = M b_1 < \infty$$

なので 級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_{k+1} - b_k)$ は絶対収束する. さらに, $n \to \infty$ で $b_n \to 0$ なので $A_n b_n \to 0$ となる. ゆえに級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ は収束する. (積分の場合にも, 絶対収束しない積分を部分積分によって絶対収束する積分に変形できる場合がある. 各自自分で研究してみよ.) □

例の解説: 以上の一般論を上の例に適用しよう. すなわち $a_n = e^{in\theta}$, $b_n = 1/n$ の場合を考える. このとき

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

であるから, $|A_k| \leqq 2/|1 - e^{i\theta}|$ なので, A_k は有界である. 実数列 b_k は単調減少しながら 0 に収束する. したがって上の一般論より, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ は条件収束する. □

例の結論の直接的証明: $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ とおき, $s_n(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}$ とおく. $z \neq 1$ のとき, $s_n(z)$ が $n \to \infty$ で収束することを示したい.

$$\begin{aligned} (z-1)s_n(z) &= \left(\frac{z^2}{1} + \frac{z^3}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n-1} + \frac{z^{n+1}}{n} \right) \\ &\quad - \left(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^n}{n} \right) \\ &= \frac{z^{n+1}}{n} - \frac{z}{1} + S_n(z). \end{aligned}$$

ここで,

$$S_n(z) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) z^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) z^3 + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) z^n.$$

$|z| = 1$ なので, $n \to \infty$ のとき $\dfrac{z^{n+1}}{n} \to 0$ となるので, $(z-1)s_n(z)$ が $n \to \infty$ で収束することを示すためには, $S_n(z)$ が絶対収束することを示せば十分であり, $|z| = 1$ より,

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)z^2\right| + \left|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)z^3\right| + \cdots + \left|\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)z^n\right| \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1}-\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

なので, $S_n(z)$ は絶対収束する. これで $n \to \infty$ で $(z-1)s_n(z)$ が収束することがわかった. $z \neq 1$ なので, $s_n(z)$ も $n \to \infty$ で収束する. □

注意: $-\log(1-z)$ の収束半径 1 のMaclaurin展開は

$$-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

の形をしている. $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \neq 1$ のとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ の収束先は $-\log(1-e^{i\theta})$ になる. □

In [25]:

```
f(z) = -log(1-z)
g(z; N=1000) = sum(n->z^n/n, 1:N)

θ = 0.1:0.01:π
v = @.(f(exp(im*θ)))
w = @.(g(exp(im*θ)))

P1 = plot(xlims=(0,π), xlabel="t")
plot!(θ, real.(w), label="Re(sum exp(int)/n)",  lw=2)
plot!(θ, real.(v), label="Re(-log(1-exp(it)))", lw=2, ls=:dash)

P2 = plot(xlims=(0,π), xlabel="t")
plot!(θ, imag.(w), label="Im(sum exp(int)/n)",  lw=2)
plot!(θ, imag.(v), label="Im(-log(1-exp(it)))", lw=2, ls=:dash)

plot(P1, P2, size=(700,300))
```

Out[25]:

In [26]:

```
θ = 2π/10
a(n) = exp(im*n*θ)/n
sum_a(n) = iszero(n) ? Complex(0.0) : sum(k->a(k), 1:n)
N = 400
n = 0:N
z = sum_a.(n)
plot(size=(400, 400), xlims=(0,1.0), ylim=(0,1.6))
plot!(real.(z), imag.(z), legend=false)#, line=:arrow)
```

Out[26]:

In [27]:

```
θ = 2π/10
a(n) = exp(im*n*θ)/n
sum_a(n) = iszero(n) ? Complex(0.0) : sum(k->a(k), 1:n)
@time anim = @animate for N in 0:4:400
    n = 0:N
    z = sum_a.(n)
    plot(size=(400, 400), xlims=(0,1.0), ylim=(0,1.6))
    plot!(real.(z), imag.(z), legend=false, line=:arrow)
end

gifname = "sum_a.gif"
@time gif(anim, gifname; fps=10)
sleep(0.1)
showimg("image/gif", gifname)
```

```
4.257470 seconds (40.30 M allocations: 1.076 GiB, 5.10% gc time)
0.660799 seconds (1.05 k allocations: 69.125 KiB)
```

```
INFO: Saved animation to C:\Users\genkuroki\OneDrive\Calculus\sum_a.gif
```

上のセルのアニメーションの折れ線の長さは無限大である. 無限に長くなる折れ線の先端が無限に回転しながら収束している.

2.3 多重対数函数

複素数 z に関するべき級数

$$\mathrm{Li}_r(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^r}$$

は $r > 1, |z| \leqq 1$ および $r = 1, |z| < 1$ のとき絶対収束する. $r = 1, |z| = 1$ の場合には $z \neq 1$ なら条件収束し, $z = 1$ ならば ∞ に発散する. このように定義される函数 $\mathrm{Li}_r(z)$ を r 重の**多重対数函数**(polylogarithm)と呼ぶ. $r = 2$ の場合はdilogarithmと呼ばれ, $r = 3$ の場合にはtrilogarithmと呼ばれる. このとき,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z) = \int_0^z \frac{dt}{1-t}, \\
\mathrm{Li}_2(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = \int_0^z \frac{\mathrm{Li}_1(t)}{t}\,dt = \int_0^z dt_2 \int_0^{t_2} dt_1\, \frac{1}{(1-t_1)t_2}, \\
\mathrm{Li}_3(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3} = \int_0^z \frac{\mathrm{Li}_2(t)}{t}\,dt = \int_0^z dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1\, \frac{1}{(1-t_1)t_2t_3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathrm{Li}_r(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^r} = \int_0^z \frac{\mathrm{Li}_2(t)}{t}\,dt = \int_0^z dt_r \int_0^{t_r} dt_{r-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1\, \frac{1}{(1-t_1)t_2\cdots t_r},
\end{aligned}$$

$r > 1$ のとき,

$$\mathrm{Li}_r(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \zeta(r).$$

したがって, 2以上の整数 m に対して,

$$\zeta(m) = \mathrm{Li}_m(1) = \int_0^1 dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \frac{1}{(1-t_1)t_2 \cdots t_m}.$$

$t_1 = x_1 x_2 \cdots x_m, t_2 = x_2 \cdots x_m, \ldots, t_m = x_m$ と置換すると,

$$\zeta(m) = \mathrm{Li}_m(1) = \int_0^1 dx_m \int_0^1 dx_{m-1} \cdots \int_0^1 dx_1 \frac{1}{1 - x_1 \cdots x_m}.$$

これの右辺が $\zeta(m)$ に一致することは

$$\frac{1}{1 - x_1 \cdots x_m} = \sum_{n=1}^{\infty} x_1^{n-1} \cdots x_m^{n-1},$$
$$\int_0^1 dx_m \int_0^1 dx_{m-1} \cdots \int_0^1 dx_1\, x_1^n \cdots x_m^n = \left(\int_0^1 x^{n-1}\, dx\right)^m = \frac{1}{n^m}$$

に注意すれば明らかであろう.

2.4 二重対数函数のζ(2)の近似計算への応用

$\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ を計算せよという問題は**Basel問題**と呼ばれているらしい. Basel問題はEulerによって1743年ころに解かれたらしい. Eulerがどのように考えたかについては次の文献を参照せよ.

- 杉本敏夫, バーゼル問題とオイラー (http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1583-12.pdf), 2007年8月23日, 数理解析研究所講究録, 第1583巻, 2008年, pp.159-167

その第6節によれば, Eulerは, 積分 $\displaystyle\int \frac{-\log(1-x)}{x}\, dx$ を2通りに計算して比較することによって, $\zeta(2)$ を定義に基いて直接計算するよりもずっと少ない項数の和で同精度で $\zeta(2)$ の計算する方法を発見している.

現代的には二重対数函数(dilogarithm, 以下ダイログと呼ぶ)を用いてその近似計算法を見付けたことになる. ダイログ $\mathrm{Li}_2(z)$ の定義は

$$\mathrm{Li}_2(z) = \int_0^z \frac{-\log(1-x)}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

であった. $x = 1 - y$ と置換すると,

$$\mathrm{Li}(z) = \int_1^{1-z} \frac{\log y}{1-y}\, dy$$

となり,

$$\frac{d}{dy}(-\mathrm{Li}_2(y) - \log(1-y)\log y) = \frac{\log y}{1-y}$$

なので, $\mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2)$ と $y \to 1$ で $\log(1-y)\log y \to 0$ となることより,

$$\mathrm{Li}_2(z) = \left[-\mathrm{Li}_2(y) - \log(1-y)\log y\right]_1^{1-z} = -\mathrm{Li}_2(1-z) + \zeta(2) - \log z\, \log(1-z).$$

すなわち,

$$\zeta(2) = \mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2(1-z) + \log z\, \log(1-z).$$

特に $z = 1/2$ のとき,

$$\zeta(2) = 2\,\mathrm{Li}_2(1/2) + (\log 2)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1} n^2} + (\log 2)^2.$$

$\zeta(2)$ の定義に基いて最初の10項を足した結果

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2} = 1.54976\ 77311\ 665\cdots$$

は正確な値 $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6} = 1.64493\ 40668\ 482\cdots$ と整数部分しか一致しないが,

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2^{n-1}n^2} + (\log 2)^2 = 1.64492\ 00516\ 736\cdots$$

は正確な値に小数点以下第4桁まで一致している. 最初の30項の和では, 前者は $1.61215\ 01176\ 015\cdots$ で正確な値と小数点以下第1桁までしか一致しないが, 後者は $1.64493\ 40668\ 463\cdots$ は小数点以下第11桁まで一致している.

In [28]:

```
Q(N) = sum(n->1/n^2, 1:N)
R(N) = sum(n->1/(2.0^(n-1)*n^2), 1:N) + log(2)^2
@show Q(10), Q(10)-π^2/6, R(10), R(10)-π^2/6
@show Q(30), Q(30)-π^2/6, R(30), R(30)-π^2/6
[(N, Q(N), Q(N)-π^2/6, R(N), R(N)-π^2/6) for N in 10:10:50]
```

```
(Q(10), Q(10) - π ^ 2 / 6, R(10), R(10) - π ^ 2 / 6) = (1.5497677311665408, -0.09516633568168564, 1.6449200516736
968, -1.4015174529591334e-5)
(Q(30), Q(30) - π ^ 2 / 6, R(30), R(30) - π ^ 2 / 6) = (1.6121501176015975, -0.03278394924662886, 1.6449340668463
974, -1.828981410767483e-12)
```

Out[28]:

```
5-element Array{Tuple{Int64,Float64,Float64,Float64,Float64},1}:
 (10, 1.54977, -0.0951663, 1.64492, -1.40152e-5)
 (20, 1.59616, -0.0487708, 1.64493, -3.98311e-9)
 (30, 1.61215, -0.0327839, 1.64493, -1.82898e-12)
 (40, 1.62024, -0.0246901, 1.64493, -1.11022e-15)
 (50, 1.62513, -0.0198013, 1.64493, -2.22045e-16)
```

2.5 二重対数函数のζ(2)の正確な計算への応用

以下の議論は次のリンク先の方法の引き写しである:

- https://www.theoremoftheday.org/Analysis/Basel/TotDBasel.pdf (https://www.theoremoftheday.org/Analysis/Basel/TotDBasel.pdf)

複素函数としての $\log z = \log|z| + i\arg z$, $-\pi < \arg z < \pi$ を使う.

$|z| < 1$, $-\pi < \arg z < \pi$ と仮定する. このとき, $1 + z^{-1} = \dfrac{1+z}{z}$ より, 図を描いて確認すれば

$$\arg(1+z^{-1}) = \arg(1+z) - \arg z$$

となっていることがわかる. ゆえに

$$\begin{aligned}\log(1+z^{-1}) - \log(1+z) &= \log\left|\frac{1+z^{-1}}{1+z}\right| + i(\arg(1+z^{-1}) - \arg(1+z)) \\ &= -\log|z| - i\arg z = -\log z.\end{aligned}$$

そして,

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Li}_2(-z^{-1}))' = \frac{-\log(1-(-z^{-1}))}{-z^{-1}} z^{-2} = \frac{\log(1+z^{-1})}{z}, \\
&(\mathrm{Li}_2(-z))' = \frac{-\log(1-(-z))}{-z}(-1) = \frac{-\log(1+z)}{z}, \\
&\therefore \quad (\mathrm{Li}_2(-z^{-1}) + \mathrm{Li}_2(-z))' = \frac{\log(1+z^{-1}) - \log(1+z)}{z} = \frac{-\log z}{z} \\
&\left(-\frac{1}{2}(\log z)^2\right)' = \frac{-\log z}{z}
\end{aligned}$$

なので, ある定数 C が存在して,

$$\mathrm{Li}_2(-z^{-1}) + \mathrm{Li}_2(-z) = -\frac{1}{2}(\log z)^2 + C.$$

$-\pi < \arg z < \pi$ と仮定していたことに注意しながら, $z \to 1$ とすると,

$$2\,\mathrm{Li}_2(-1) = C.$$

$-\pi < \arg z < \pi$ と仮定していたことに注意しながら, $z \to -1$ とすると,

$$2\,\mathrm{Li}_2(1) = -\frac{1}{2}(\pm\pi i)^2 + C = \frac{\pi^2}{2} + 2\,\mathrm{Li}_2(-1).$$

$\mathrm{Li}_2(1) + \mathrm{Li}_2(-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(1)$ より, $2\,\mathrm{Li}_2(-1) = -\mathrm{Li}(1)$ なので, 上で示した $2\,\mathrm{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{2} + 2\,\mathrm{Li}_2(-1)$ と合わせて, $\zeta(2) = \mathrm{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6}$ となることがわかる.

要するに, $\zeta(2)$ は二重対数函数の $\mathrm{Li}_2(-z^{-1})$ と $\mathrm{Li}_2(-z)$ のあいだの接続公式のモノドロミー(不定性)を注意深く扱えば自然に計算できてしまうということである. (注意: $\mathrm{Li}_2(z^{-1})$ と $\mathrm{Li}_2(z)$ を使っても同様の方法で示せる.)

2.6 二重対数函数の高木貞治『解析概論』§35の例2(p.113)への応用

問題: 次を示せ:

$$I := \int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

解答例(高木貞治『解析概論』§35の例2(p.113)): $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ より, $I = \int_0^{\pi/2} \log(\cos x))\,dx$. $\sin(\pi - x) = \sin x$ より, $I = \int_{\pi/2}^{\pi} \log(\sin x)\,dx$ なので $\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,dx = 2I$. そこで, $x = 2t$ と置換して, $\sin(2t) = 2\cos t \sin t$ を使うと,

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \log(2\cos t \sin t)\,dt = \frac{\pi}{2}\log 2 + I + I.$$

ゆえに $I = -\frac{\pi}{2}\log 2$. □

注意: 上の問題の定積分は, 高木貞治『解析概論』§35の例2(p.113)だけではなく, 同書§62の例3(p.225)でも扱われている. そこでは

$$\frac{\log(1-z)}{z} = -1 - z - \frac{z^2}{2} - \cdots$$

の原点を中心とする周回積分を用いて,

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2r\cos\theta + r^2)\,\theta = 2\pi\log r \qquad (r > 0)$$

を得ている. そしてこれの $r = 1$ の場合から上の問題の結果を得ている. 二重対数函数の定義は $\frac{-\log(1-z)}{z}$ の不定積分だったので, 上の問題は二重対数函数と関係していることになる. 以下の2つの問題も見よ. □

問題(WolframAlpha): 次の $F(x)$ について $F'(x) = \log(\sin x)$ となることを示せ.

$$F(x) = \frac{i}{2}x^2 + \frac{i}{2}\mathrm{Li}_2(e^{2ix}) - x\log(1 - e^{2ix}) + x\log(\sin x).$$

解答例: $\mathrm{Li}_2'(x) = -\frac{\log(1-x)}{x}$, $(-\log(1-x))' = \frac{1}{1-x}$ より,

$$F'(x) = ix + \frac{i}{2}2ie^{2ix}\frac{-\log(1-e^{2ix})}{e^{2ix}} - \log(1-e^{2ix}) + x\frac{2ie^{2ix}}{1-e^{2ix}} + x\frac{\cos x}{\sin x} + \log(\sin x).$$

第2項と第3項がキャンセルして消える. さらに,

$$x\frac{\cos x}{\sin x} = ix\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = ix\frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1}$$

を代入すると, 第1,4,5項の和を ix で割ったものは

$$1 + \frac{-2e^{2ix}}{e^{2ix} - 1} + \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1} = 0$$

となるので, $F'(x) = \log(\sin x)$ となることがわかる. □

筆者はこの問題の $F(x)$ の式はWolframAlphaによる計算 (http://www.wolframalpha.com/input/?i=%5Cint+log(sin+x)+dx)で知った.

問題: すぐ上の問題の結果を用いて, 次を示せ:

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2, \quad \zeta(2) = \mathrm{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

解答例: $\mathrm{Li}_2(1)$ と $\mathrm{Li}(-1)$ は

$$\mathrm{Li}_2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \mathrm{Li}_2(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

と表わされるので,

$$\mathrm{Li}_2(1) + \mathrm{Li}_2(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(1).$$

ゆえに

$$\mathrm{Li}_2(-1) = -\frac{1}{2}\mathrm{Li}(1). \tag{1}$$

そして, 上の問題の $F(x)$ について

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8}i + \frac{i}{2}\mathrm{Li}_2(-1) - \frac{\pi}{2}\log 2, \quad F(0) = \frac{i}{2}\mathrm{Li}_2(1)$$

なので, 上の問題の結論より,

$$\mathbb{R} \ni \int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx = [F(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}i + \frac{i}{2}\mathrm{Li}_2(-1) - \frac{\pi}{2}\log 2 - \frac{i}{2}\mathrm{Li}_2(1).$$

両辺の実部と虚部(の2倍)を比較して, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$ と

$$0 = \frac{\pi^2}{4} + \mathrm{Li}_2(-1) - \mathrm{Li}_2(1) \tag{2}$$

を得る. 以上の(1),(2)より, $\zeta(2) = \mathrm{Li}_2(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$ が得られる. □

注意: 以上の計算に関連する話題については, [筆者によるツイッターにおける一連の発言 (https://twitter.com/genkuroki/status/830016144933167104)](https://twitter.com/genkuroki/status/830016144933167104)も参照せよ. □

2.7 二重対数函数の五項関係式

[Rogersの二重対数函数 (https://www.google.co.jp/search?q=Rogers+dilogarithm)](https://www.google.co.jp/search?q=Rogers+dilogarithm) $L(z)$ を次のように定義する:

$$L(z) = \frac{1}{2}\int_0^z \left(\frac{-\log(1-x)}{x} + \frac{-\log x}{1-x}\right) dx = \mathrm{Li}_2(z) + \frac{1}{2}\log z\ \log(1-z).$$

1つ目の等号は $L(z)$ の定義であり, 2つ目の等号は次を使えば得られる:

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Li}_2(x) + \log x\ \log(1-x)) = \frac{-\log x}{1-x}.$$

$L(z)$ と $\mathrm{Li}_2(z)$ の違いは初等函数 $\dfrac{1}{2}\log z\ \log(1-z)$ の分だけである.

$\mathrm{Li}_2(0) = 0, \mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ より,

$$L(0) = 0, \quad L(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

この節では次の**五項関係式** (five-term relation)

$$L(x) + L(1-xy) + L(y) + L\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) + L\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) = \frac{\pi^2}{2}. \tag{FTR}$$

を示そう. 二重対数函数の五項関係式については19世紀にすでに先行する研究結果があったが, この形式に整理された五項関係式は

- R. Rogers, On Function Sum Theorems Connected with the Series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$, Proc. London Math. Soc. 4 (1907), 169-189, DOI (https://doi.org/10.1112/plms/s2-4.1.169)

で証明された.

補題: 函数 $f_i(x)$ 達について

$$F(x,X)=\sum_{i=1}^{N}\log(f_i(x))\log(1-f_i(X))$$

は $F(x,X)=F(X,x)$ を満たしていると仮定する. このとき,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N}L(f_i(x))$$

は定数函数になる.

証明: $df=0$ を示せばよい.

$$-2\,dL(x)=\frac{\log(1-x)\,dx}{x}+\frac{\log(x)\,dx}{1-x}=d\log(x)\ \log(1-x)-\log(x)\,d\log(1-x)$$

なので,

$$-2\,df(x)=\sum_{i=1}^{N}d\log(f_i(x))\ \log(1-f_i(x))-\sum_{i=1}^{N}\log(f_i(x))\,d\log(1-f_i(x)).$$

$F(x,X)$ と $F(X,x)$ の x に関する外微分 d を取ると,

$$dF(x,X)=\sum_{i=1}^{N}d\log(f_i(x))\ \log(1-f_i(X)),$$
$$dF(X,x)=\sum_{i=1}^{N}\log(f_i(X))\,d\log(1-f_i(x)).$$

$F(x,X)=F(X,x)$ より, これらは等しい:

$$\sum_{i=1}^{N}d\log(f_i(x))\ \log(1-f_i(X))=\sum_{i=1}^{N}\log(f_i(X))\,d\log(1-f_i(x))$$

$X=x$ とおくと,

$$\sum_{i=1}^{N}d\log(f_i(x))\ \log(1-f_i(x))=\sum_{i=1}^{N}\log(f_i(x))\,d\log(1-f_i(x)).$$

以上を合わせると, $-2df=0$ が得られる. □

五項関係式の証明: $f_i(x,y)$ $(i=1,2,3,4,5)$ をそれぞれ $x,\ 1-xy,\ y,\ \dfrac{1-y}{1-xy},\ \dfrac{1-x}{1-xy}$ と定め, $f(x,y)=\displaystyle\sum_{i=1}^{5}L(f_i(x,y))$ とおく.

$\ds

$f(x,y)$ が定数函数になることを示そう. 上の補題より, そのためには

$$F(x,y;X,Y)=\sum_{i=1}^{}\log(f_i(x,y))\log(1-f_i(X,Y))$$

が $F(x,y;X,Y)=F(X,Y;x,y)$ を満たしていることを示せば十分である. 具体的に計算すると,

$$1-(1-XY)=XY,\quad 1-\frac{1-Y}{1-XY}=\frac{Y(1-X)}{1-XY},\quad 1-\frac{1-X}{1-XY}=\frac{X(1-Y)}{1-XY}$$

より

$$
\begin{aligned}
F(x,y;X,Y) &= \log(x)\log(1-X) + \log(1-xy)\log(1-XY) + \log(y)\log(1-Y) \\
&+ (\log(1-y) - \log(1-xy))(\log(Y) + \log(1-X) - \log(1-XY)) \\
&+ (\log(1-x) - \log(1-xy))(\log(X) + \log(1-Y) - \log(1-XY)) \\
&= \log(x)\log(1-X) + \log(1-x)\log(X) \\
&+ \log(y)\log(1-Y) + \log(1-y)\log(Y) \\
&+ \log(1-x)\log(1-Y) + \log(1-y)\log(1-X) \\
&- \log(1-x)\log(1-XY) - \log(1-xy)\log(1-X) \\
&- \log(1-y)\log(1-XY) - \log(1-xy)\log(1-Y) \\
&+ 2\log(1-xy)\log(1-XY) \\
&+ \log(1-xy)\log(XY) - \log(1-xy)\log(X) - \log(1-xy)\log(Y).
\end{aligned}
$$

最下段の3つの項がキャンセルして消えるので, $F(x,y;X,Y) = F(X,Y;x,y)$ となることがわかる. これで $f(x,y)$ が定数函数であることがわかった.

そして, $L(0) = 0, L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$ より,

$$f(0,0) = L(0) + L(0) + L(1) + L(1) + L(1) = \frac{\pi^2}{2}.$$

以上によって $f(x,y) = \dfrac{\pi^2}{2}$ となることが示された. □

注意: 上の補題を使えば, $L(x) + L(1-x)$ も定数函数になることがわかり, $L(0) = 0, L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$ より,

$$L(x) + L(1-x) = \frac{\pi^2}{6}$$

となることも示される. これを使って, 五項関係式は次のように書き直される:

$$L(x) + L(y) = L(xy) + L\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right) + L\left(\frac{y(1-x)}{1-xy}\right).$$

この形の公式も各種文献でよく見る. □

注意: $x_1 = x, x_2 = 1 - xy$ とおき, 帰納的に x_n を

$$x_{n-1}x_{n+1} = 1 - x_n$$

という関係式で定めると,

$$x_3 = y, \quad x_4 = \frac{1-y}{1-xy}, \quad x_5 = \frac{1-x}{1-xy}, \quad x_6 = x, \quad x_7 = 1 - xy, \quad , \ldots\ldots$$

$x_{n+5} = x_n$ が成立しており, 出て来た x, y の式がちょうど五項関係式の5つの $f_i(x,y)$ に一致していることがわかる. この事実はクラスター代数 (https://www.google.co.jp/search?q=%E3%82%AF%E3%83%A9%E3%82%B9%E3%82%BF%E3%83%BC%E4%BB%A3%E6%95%B0)と dilogarithm identities (https://www.google.co.jp/search?q=dilogarithm+identities) の理論として大幅に一般化されている. クラスター代数の入門的解説については

- 黒木玄, ランク2のクラスター代数 (https://genkuroki.github.io/documents/cluster_algebra_rank2.pdf), 2010年
- 黒木玄, フリーズパターン —— 数の繰返し模様の不思議 (https://genkuroki.github.io/documents/20120810FriezePattern.pdf), 2013年
- 黒木玄, フリーズパターンの不思議 (https://genkuroki.github.io/documents/20121115Akita.pdf), 2013年

などを見よ. 検索すれば他にもたくさん見付かる. □

注意: このノートの下の方で二重対数函数の量子版と五項関係式の量子化とみあされる五角形恒等式について説明する. □

3 無限積

多項式の計算で因数分解が極めて有用であるのと同様に, より一般の函数の無限積への因数分解も極めて有用である. そのためには無限積を正しく扱う方法を知っておかなければいけない.

数列 a_n から作られる無限積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは, 数列 $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n$ が収束することであると定める. そのとき, その無限積の収束先が数列 p_n の収束先で定義される.

無限積については高木貞治『解析概論』の§51(pp.178-181)を参照せよ.

例: 以下では p_i は i 番目の素数であるとする. $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$ である. さらに $s > 1$ であると仮定する. このとき, 素数全体に関する無限積 $\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_i^{-s}}$ がどうなるかを調べてみよう. $Z_N = \displaystyle\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1 - p_i^{-s}}$ とおく. このとき,

$$Z_N = \prod_{i=1}^{N} (1 + p_i^{-s} + p_i^{-2s} + \cdots)$$

なので, Z_N は非負の整数たち $k_1, \ldots, k_N$ に対する

$$p_1^{-k_1 s} \cdots p_N^{-k_N s} = \frac{1}{\left(p_1^{k_1} \cdots p_N^{k_N}\right)^s}$$

達すべての和に等しい. 正の整数は一意的に素因数分解できるので, $N \to \infty$ で Z_N は正の整数 n に対する $\dfrac{1}{n^s}$ 達全体の和に等しくなる:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

左辺をゼータ函数 $\zeta(s)$ の**Euler積**と呼ぶ. □

3.1 無限積の絶対収束

定理: 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束していれば, 無限積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ も収束する. このとき, その無限積は**絶対収束**するという.

証明: 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束していると仮定し,

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k), \quad b_n = p_n - p_{n-1} = p_{n-1} a_n$$

とおく. このとき, $p_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ であり, $x \geqq 0$ のとき $1 + x \leqq e^x$ であることより,

$$|p_n| \leqq \prod_{k=1}^{n} (1 + |a_k|) \leqq \prod_{k=1}^{n} e^{|a_n|} = e^M$$

となり, $|b_k| = |p_{k-1}||a_k| \leqq e^M |a_k|$ となるので,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leqq e^M \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = e^M M < \infty.$$

よって, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は絶対収束する. $p_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ なので無限積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \lim_{n\to\infty} p_n$ が収束することがわかった. □

例: $n \to \infty$ のとき $a_n = O(1/n^2)$ であるとする. このとき, ある定数 $C \geqq 0$ が存在して, $|a_n| \leqq C/n^2$ となる. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = C\zeta(2) < \infty$$

より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束するので, 無限積 $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_n)$ は絶対収束する. 例えば,

$$f(s) = s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)$$

の右辺の無限積は絶対収束している. このとき, すべての整数 $n \in \mathbb{Z}$ について $f(n) = 0$ となる. 実はこの $f(s)$ は $f(s) = \dfrac{\sin(\pi s)}{\pi}$ となっていることを示せる. この一連のノート群の後の方で複数の方法で証明することになるだろう. □

注意: $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ は絶対収束していると仮定する. そのとき, $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-a_n} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_n}{1-a_n}\right)$ も絶対収束している. なぜならば, a_n は 0 に収束しているので, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $|1-a_n| \geqq \dfrac{1}{2}$ となる. 絶対収束性を論じる場合には $N = 1$ の場合だけを考えれば十分なので, $N = 1$ であると仮定する. そのとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{1-a_n}\right| \leqq 2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty.$$

これで, $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-a_n}$ も絶対収束していることが示された. □

例: $|q| < 1$ のとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ は絶対収束しているので, 無限積 $\displaystyle f(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ も絶対収束しており, $\displaystyle\frac{1}{f(q)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}$ も絶対収束している. そして,

$$\frac{1}{f(q)} = \prod_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} q^{mk} = \sum_{k_1,k_2,\ldots=0}^{\infty} q^{k_1+2k_2+3k_3+\cdots} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n.$$

ただし, 有限個を除いて 0 であるような非負の整数たちの組全体を $(k_1, k_2, \ldots)$ は動くとする. その約束のもとで

$$p(n) = \sharp\{\,(k_1, k_2, k_3, \ldots) \mid k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots = n\,\}.$$

ここで $\sharp X$ は集合 X の元の個数を表わす. すなわち, $p(n)$ は n を正の整数の和に分解する方法の個数に等しい. $p(n)$ は n の**分割数**と呼ばれている. 例えば, $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5$ であり,

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$$

なので $p(5) = 7$ である. $\eta(q) = q^{1/24}f(q)$ は**Dedekindoのη函数**と呼ばれるモジュラー変換性を持つ重要な特殊函数である. 分割数のような組み合わせ論的な数とモジュラ。変換性を持つ特殊函数が関係しており, 豊かな数学の世界を作っている. □

In [29]:
```
partition_number(n) = sympy[:functions][:combinatorial][:numbers][:nT](n)
[(n, partition_number(n)) for n in 1:10]
```

Out[29]:
```
10-element Array{Tuple{Int64,Int64},1}:
 (1, 1)
 (2, 2)
 (3, 3)
 (4, 5)
 (5, 7)
 (6, 11)
 (7, 15)
 (8, 22)
 (9, 30)
 (10, 42)
```

In [30]:
```
q = symbols("q")
N = 10
series(prod(1/(1-q^n) for n in 1:N), n=N+1)
```

Out[30]: $1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + 15q^7 + 22q^8 + 30q^9 + 42q^{10} + \mathcal{O}\left(q^{11}\right)$

注意: $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ について

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n-1)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{((6n-1)^2-1)/24}$$

となることが知られている. 次のセルを見よ. □

In [31]:
```
q = symbols("q")
N = 5
M = N*(3N-1)÷2
@time series(sum((-1)^n*q^(n*(3n-1)÷2) for n in -M:M), q, n=M+1) ¦>display
@time series(prod(1-q^n for n in 1:M), q, n=M+1) ¦> display
```

$$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} + \mathcal{O}\left(q^{36}\right)$$

$$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} + \mathcal{O}\left(q^{36}\right)$$

```
 0.414454 seconds (69.06 k allocations: 3.236 MiB)
  5.754514 seconds (26.07 k allocations: 1.200 MiB)
```

3.2 絶対収束する無限積の収束先が積の順序によらないこと

定理: 絶対収束する無限積の収束先は積の順序によらない.

証明: 絶対収束する級数の収束先が和の順序によらないことに帰着する. 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ は絶対収束していると仮定し, $M = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ とおく. その無限積の収束先は

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) = \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}} \prod_{i \in I} a_i$$

の収束先に等しい. さらに,

$$\sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}} \left| \prod_{i \in I} a_i \right| = \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|) \leqq \prod_{k=1}^{n} e^{|a_k|} \leqq e^M < \infty.$$

ゆえに, 正の整数全体の集合の有限部分集合 I に対する積 $\prod_{i \in I} a_i$ 達すべての無限和は絶対収束している. したがって, その無限和の収束先は和の順序によらない. 無限積の積の順序を変えることは, その無限和の和の順序を変える場合の特別な場合になっているので, 無限積の収束先も積の順序によらない. □

3.3 量子二重対数函数

以下, $|q| < 1$ であると仮定する.

このノートでは**量子二重対数函数**(quantum dilogarithm) $E_q(x)$ を

$$E_q(x) = \left(\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + q^{k+1/2} x\right) \right)^{-1} = \frac{1}{(1+q^{1/2}x)(1+q^{1+1/2}x)(1+q^{2+1/2}x)\cdots}.$$

と定める. (注意: $E_q(-x)$ の方を量子二重対数と呼んでいる文献が多い.) この $E_q(x)$ は

$$E_q(qx) = (1+q^{1/2}x)E_q(x), \quad E_q(0) = 1$$

という条件で一意に特徴付けられる.

上の $E_q(x)$ が量子二重対数函数と呼ばれる理由はその対数が次の表示を持つからである:

$$\begin{aligned} \log E_q(-x) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \log(1 - q^{k+1/2}x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(q^{k+1/2}x\right)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^{nk} \right) (q^{1/2}x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q^{1/2}x)^n}{n(1-q^n)}. \end{aligned}$$

ゆえに,

$$(1-q)\log E_q(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q^{1/2}x)^n}{n(n)_q}, \qquad (n)_q = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

ここで, $(n)_q$ は **q数** (q-number)と呼ばれ, $q \to 1$ で n に収束する. ゆえに, $q \to 1$ のとき,

$$(1-q)\log E_q(-x) \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \mathrm{Li}_2(x).$$

$E_q(x)$ の $q \to 1$ での漸近挙動は(古典)二重対数函数 $\mathrm{Li}_2(x)$ を含んでいる.

3.3.1 量子二重対数函数と量子指数函数との関係

量子指数函数 $e_q(x)$ を

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)_q!}, \qquad (n)_q! = (1)_q(2)_q \cdots (n)_q$$

と定める. $(n)_q!$ は**q階乗 (q-factorial)** と呼ばれている. このとき,

$$\frac{e_q(x) - e_q(qx)}{(1-q)x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n)_q x^{n-1}}{(n)_q!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m)_q!} = e_q(x).$$

ゆえに, $n \to \infty$ のとき, $e_q(q^n x) \to e_q(0) = 1$ より,

$$\begin{aligned}
e_q(x) &= \frac{e_q(qx)}{1-(1-q)x} = \frac{e_q(q^2x)}{(1-(1-q)x)(1-(1-q)xq)} \\
&= \frac{e_q(q^3x)}{(1-(1-q)x)(1-(1-q)xq)(1-(1-q)xq^2)} \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \frac{1}{(1-(1-q)x)(1-(1-q)xq)(1-(1-q)xq^2)\cdots} \\
&= \left(\prod_{k=0}^{\infty}(1-(1-q)xq^k)\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

これより,

$$E_q(x) = e_q\left(-\frac{q^{1/2}x}{1-q}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n/2}(-x)^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}.$$

3.3.2 q二項定理

q二項係数 (q-binomial coefficients)$ を

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(n)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!} = \frac{(n)_q(n-1)_q\cdots(n-k+1)_q}{(k)_q!}$$

と定める. このとき,

$$(k)_q + q^k(n-k+1)_q = \frac{1-q^k+q^k(1-q^{n-k+1})}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = (n+1)_q$$

より,

$$\binom{n}{k-1}_q + q^k\binom{n}{k}_q = \binom{n}{k-1}_q \frac{(k)_q + q^k(n-k+1)_q}{(k)_q} = \binom{n+1}{k}_q. \tag{1}$$

文字 x, y は関係式 $yx = qxy$ を満たしていると仮定する. このとき, (1)を使うと, 通常の二項定理の場合と同様に n に関して帰納的に次の公式が成立することを示せる(実際に示してみよ):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k} \qquad (yx = qxy).$$

これを **q二項定理** と呼ぶ.

3.3.3 q指数函数の加法公式

$yx = qxy$ のとき,

$$e_q(x+y) = e_q(x)e_q(y)$$

となることを示そう.

$$
\begin{aligned}
e_q(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{(n)_q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n)_q!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(k)_q!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)_q!} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k)_q!} \frac{y^l}{(l)_q!} = e_q(x)e_q(y).
\end{aligned}
$$

$E_q(x) = e_q\left(-\frac{q^{1/2}x}{1-q}\right)$ より,

$$
E_q(x+y) = E_q(x)E_q(y) \qquad (yx = qxy).
$$

3.3.4 量子二重対数函数の五角形恒等式

$yx = qxy$ と仮定し,

$$
:xy:= q^{1/2}xy = q^{-1/2}yx
$$

とおく. そのとき, $yE_q(x) = E_q(qx)y = E_q(x)(1+q^{1/2}x)y = E_q(x)(:xy: +y)$ より,

$$
y^n E_q(x) = E_q(x)(:xy: +y)^n.
$$

この等式の両辺に適当な係数をかけて n について足し上げると,

$$
E_q(y)E_q(x) = E_q(x)E_q(:xy: +y).
$$

$y :xy:= q :xy: y$ なので, 前節の結果より,

$$
E_q(:xy: +y) = E_q(:xy:)E_q(y).
$$

したがって,

$$
E_q(y)E_q(x) = E_q(x)E_q(:xy:)E_q(y).
$$

これを量子二重対数函数の**五角形恒等式** (pentagon identity)と呼ぶ.

五角形恒等式は量子二重対数函数 $E_q(x)$ の 0 でない形式べき級数として一意に特徴付ける. なぜならば, 五角形恒等式の x, y に 0 を代入すると $E_q(0) = 1$ であることがわかり, 五角形恒等式の両辺の y に関する1次の項を比較すると,

$$
E_q(qx)y = yE_q(x) = E_q(x)(:xy: +y) = E_q(x)(1+q^{1/2}x)y
$$

となるので $E_q(qx) = E_q(1+q^{1/2}x)$ が得られ, 以上で得られた2つの条件で $E_q(x)$ が一意に特徴付けられるからである.

注意: 量子二重対数函数の五角形恒等式は A_2 型の量子クラスター代数から得られる quantum dilogarithm identity とみなされる. さらにアフィン型の場合の無限積版の quantum dilogarithm identitities も存在する. それらの恒等式の背景には量子クラスター代数や量子群の普遍 R 行列の理論が隠れている. 有限積の量子二重対数恒等式の作り方については

- 黒木玄, 量子 dilogarithm 恒等式の作り方 (https://genkuroki.github.io/documents/20101228HowToMakeQDIs.pdf), 2010年12月

にも解説がある. □

In [ ]:

```
1
```

03 π と e とEuler定数 γ

黒木玄

2018-04-18

- Copyright 2018 Gen Kuroki
- License: MIT https://opensource.org/licenses/MIT (https://opensource.org/licenses/MIT)

- Repository: https://github.com/genkuroki/Calculus (https://github.com/genkuroki/Calculus)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/03%20pi%2C%20e%2C%20and%20Euler's%20γ.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/03%20pi%2C%20e%2C%20and%20Euler's%20γ.ipynb)
- https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/03%20pi%2C%20e%2C%20and%20Euler's%20%CE%B3.pdf (https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/03%20pi%2C%20e%2C%20and%20Euler's%20%CE%B3.pdf)

このファイルは Julia Box (https://juliabox.com) で利用できる.

自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ.

論理的に完璧な説明をするつもりはない. 細部のいい加減な部分は自分で訂正・修正せよ.

目次

1 準備: 曲線の長さ
2 円周率
  2.1 円周率の定義1
  2.2 正弦函数の微積分
  2.3 円周率の定義2
  2.4 正接函数の微積分
3 Napier数
  3.1 対数函数と指数函数
  3.2 Napier数の定義
4 Euler定数
  4.1 Euler定数の定義
  4.2 条件収束交代級数への応用
  4.3 Euler定数がガンマ函数の無限積表示に出て来ること
  4.4 Euler定数が高次元単体上の一様分布に関連して自然に出て来ること
  4.5 ζ(s) - 1/(s-1) の s→0 での極限がEuler定数に等しいこと

In [1]:

```
using Plots; gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
clibrary(:misc)

using SymPy
using SpecialFunctions
```

1 準備: 曲線の長さ

高校数学IIIの復習: 曲線の長さは速さの時間積分で定義される. すなわち, 曲線 $(x(t), y(t))$, $a < t < b$ の長さ ℓ は定積分

$$\ell = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

で定義される. 被積分函数は点の運動の速さを意味する.

2 円周率

2.1 円周率の定義1

円周率 π の定義は単位半円周の長さである. 単位半円周 C は

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ x > 0 \}$$

と定義される. これは

$$x(t) = \sqrt{1 - t^2}, \quad y(t) = t$$

によって

$$C = \{ (x(t), y(t)) \mid 1 < t < 1 \}$$

と表わされ, ちょっとした計算で

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

となることがわかる(自分で計算してみよ). ゆえに, 円周率は

$$\pi = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

と表わされる. これを円周率の定義だと思ってもよい.

In [2]:

```
xx(t) = sqrt(1-t^2)
yy(t) = t
t = -1:0.01:1
plot(size=(500, 400), aspect_ratio=1, xlim=(-1.1,1.1), ylim=(-1.1,1.1))
plot!(xx.(t), yy.(t), label="C", legend=:topleft)
hline!([0], color="gray", ls=:dot, label="")
vline!([0], color="gray", ls=:dot, label="")
```

Out[2]:

In [3]:

```
t = symbols("t", real=true)
x = sqrt(1-t^2)
y = t
simplify(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2)
```

Out[3]:

$$-\frac{1}{t^2 - 1}$$

In [4]:
```
integrate(1/sqrt(1-t^2), (t,-1,1))
```

Out[4]: π

2.2 正弦函数の微積分

前節の計算より, $-1 \leqq y \leqq 1$ に対して,

$$F(y) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

は C 上の点 $(1,0)$ から $(\sqrt{1-y^2}, y)$ までの弧の長さの ± 1 倍になる. 符号は $y > 0$ なら $+$ になり, $y < 0$ なら $-$ になる. すなわち, $\theta(y)$ は弧度法の意味での角度である. 単位円上の y 座標を角度 θ の函数とみなしたものを $y = \sin\theta$ と定義するのであった. これは, $y = \sin\theta$ は $\theta = F(y)$ の逆函数であることを意味する. $F(y)$ は $\arcsin y$ と書かれることが多い.

$\dfrac{d\theta}{dy} = F'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ なので, その逆函数の導函数は

$$\frac{d\sin\theta}{d\theta} = \frac{dy}{d\theta} = \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta}.$$

これで $\sin\theta$ の導函数の計算の仕方もわかった.

以上の筋道に従えば, 高校数学IIIまでの範囲内で, 三角函数の微分積分学が適切に展開可能なことがわかる.

2.3 円周率の定義2

傾き t の直線 $y = tx$ と単位半円周 C の交点を $(X, Y) = (X(t), Y(t))$ と書くと,

$$X = X(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad Y = Y(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

このとき,

$$\sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2} = \frac{1}{1+t^2}$$

となる(自分で工夫して楽な計算の仕方を見付けるように努力してみよ). ゆえに円周率は

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

と表わされる. これを円周率の定義だと思ってもよい.

問題: 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ で $t = \dfrac{s}{\sqrt{1-s^2}}$ と置換すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

が得られることを確認せよ. □

注意: $X = 1/\sqrt{1+t^2}$, $Y = t/\sqrt{1+t^2}$ のとき, $X^2 + Y^2 = 1$ より $X = \sqrt{1-Y^2}$ となるので, $t = Y/X = Y/\sqrt{1-Y^2}$. さらに $Y = s$ とおけば上の問題の置換の式が得られる. □.

In [5]:
```
t = symbols("t", real=true)
X = 1/sqrt(1+t^2)
Y = t*X
simplify(sqrt(diff(X,t)^2+diff(Y,t)^2))
```

Out[5]: $\dfrac{1}{t^2+1}$

In [6]:
```
s = symbols("s")
t = s/sqrt(1-s^2)
simplify(diff(t,s)/(1+t^2))
```

Out[6]:
$$\frac{1}{\sqrt{-s^2+1}}$$

2.4 正接函数の微積分

前節の計算より,

$$\theta = G(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t^2}$$

は単位半円周上の点 $(1,0)$ から傾き a の直線 $y = ax$ と単位半円周 C の交点までの弧の長さの ± 1 倍になり, 符号 a の符号に等しくなる. すなわち, 弧度法の意味での角度に等しい.

正接函数の定義は傾きを角度の函数とみたものであった. これは $a = \tan\theta$ が $\theta = G(a)$ の逆函数になっていることを意味している. $G(a)$ は $\arctan a$ と書かれることが多い.

$\dfrac{d\theta}{da} = G'(a) = \dfrac{1}{1+a^2}$ なので, $\dfrac{d\tan\theta}{d\theta} = \dfrac{da}{d\theta} = 1 + a^2 = 1 + \tan^2\theta.$

以下の公式もよく使われる:

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

In [7]:
```
t = symbols("t", real=true)
integrate(1/(1+t^2), (t,0,1)), integrate(1/(1+t^2), (t,0,oo))
```

Out[7]:
```
(pi/4, pi/2)
```

3 Napier数

3.1 対数函数と指数函数

このノートでは $x > 0$ の(自然)対数函数 $y = \log x$ を

$$y = \log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

で定義し, これの逆函数で指数函数 $x = \exp y$ を定義しておく.

このとき, $\log 1 = 0$, $\exp 0 = 1$ となる.

さらに, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\log x}{dx} = \dfrac{1}{x}$ が成立し, その逆函数については $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{d\exp y}{dy} = x = \exp y.$

これらの条件によって $\log x$ と $\exp y$ は一意的に定まることを示せるが, ここではその証明には触れない.

問題: 上の対数函数の定義だけを用いて $\log(x_1x_2) = \log x_1 + \log x_2$ $(x_1, x_2 > 0)$ となることを示せ.

証明:

$$\log(x_1x_2) = \int_1^{x_1x_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{x_1x_2} \frac{dt}{t}.$$

2つ目の項の積分変数を $t = x_1 s$ で置換すると,

$$\int_{x_1}^{x_1x_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_2} \frac{x_1\,ds}{x_1 s} = \int_1^{x_2} \frac{ds}{s}.$$

s を改めて t とおけば欲しい結果が得られる. □

問題: 上の問題の結果を用いて $\exp(y_1 + y_2) = \exp(y_1)\exp(y_2)$ となることを示せ.

証明: $x_i = \exp y_i$ とおくと, $y_i = \log x_i$ であり, 上の問題の結果より, $y_1 + y_2 = \log(x_1 x_2)$ なので

$$\exp(y_1 + y_2) = \exp\log(x_1 x_2) = x_1 x_2 = \exp(y_1)\exp(y_2). \qquad \square$$

$a > 0$ に対して, a^y を

$$a^y = \exp(y \log a)$$

によって定義する. このとき, 整数 n について

$$a^1 = \exp(\log a)) = a, \qquad a^n = \exp(n \log a)) = (n \text{ 個の } \exp(\log a)) \text{ の積}) = (n \text{ 個の } a \text{ の積}).$$

後者で上の問題の結果を使った. これより, 整数の n について, 上の定義に基いた a^n と n 個の a の積が一致することがわかった. 上のように定義しても混乱は生じない.

3.2 Napier数の定義

このノートでは Napier数 e を

$$e = \exp(1)$$

によって定義する. すなわち e は

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1$$

という条件で定義されているものとする.

定理:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \exp(y).$$

証明:

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \exp\left[n \log\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right]$$

である. $d(\log x)/dx = 1/x$ の $x = 1$ の場合より, $h \to 0$ のとき,

$$\frac{\log(1+h)}{h} = \frac{\log(1+h) - \log(1)}{h} \to 1.$$

これを $h = y/n$, $n \to \infty$ の場合に適用すると,

$$\frac{\log(1 + y/n)}{1/n} = y\frac{\log(1 + y/n)}{y/n} \to y.$$

ゆえに, exp の連続性を用いると, $n \to \infty$ のとき,

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \exp\left[n \log\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right] \to \exp(y). \qquad \square$$

上の定理の $y = 1$ の特別な場合として次が得られる.

系:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad \square$$

以上によって, 対数函数と指数函数とNapier数 e の理論が微分積分学を用いてすべて再構成された.

4 Euler定数

以上によって, 数学における基本的な定数 π と e の定義が明瞭になった.

しかし, それだけで終わってしまうと, 高校の数学で習うことを単に再構成したに過ぎなくなってしまう.

そこでこのノートではその次に知っておくべきだと思われるEuler定数 γ について説明しよう.

Euler定数とその歴史については次の文献が詳しい:

- https://arxiv.org/abs/1303.1856 (https://arxiv.org/abs/1303.1856)

4.1 Euler定数の定義

数列 a_n, b_n を次のように定める:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \\ b_n &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n. \end{aligned}$$

$y = 1/x$ は狭義単調減少函数なので

$$\begin{aligned} \log(n+1) - \log n &= \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{n} < \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} = \log n - \log(n-1), \\ \log(n+1) &= \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

となる(図を描いて確認せよ). 後者より,

$$0 < a_n < b_n$$

が成立していることがわかり, 前者より,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \frac{1}{n} + \log n - \log(n+1) > 0, \\ b_n - b_{n-1} &= \frac{1}{n} + \log(n-1) - \log n < 0. \end{aligned}$$

となり, a_n は単調増加し, b_n は単調減少することがわかる. (図を描けば, a_n が単調増加し, b_n が単調減少することは見た目的に明らかになる.)

したがって, a_n も b_n も収束することがわかる.

さらに, $0 < \log(n+1) - \log n < 1/n$ より a_n と b_n の収束先が同じであることもわかる.

それらの収束先を γ と書き, **Euler定数**と呼ぶ.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right).$$

この定義は次のように書き換えられる:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + o(1).$$

ここで $o(1)$ は $n \to \infty$ で 0 に収束する項を表す.

考え方: 解析学では

（調べたい量）=（相対的にわかりやすい量）+（誤差）

の形式で考える. Euler定数の定義は, 調べたいもの

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を相対的にわかりやすい量

$$\log n + \gamma$$

プラス誤差の形式で認識することであるとみなせる. n が大きなとき, 第1項の $\log n$ と比較して第2項の定数項 γ は小さいとみなせ, 第2項 γ と比較して誤差項 $o(1)$ は小さいとみなせる. $1/1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ を $\log n$ で大雑把に近似するより, $\log n + \gamma$ で近似する方がより精密な近似になる.

このように新たに項を付け加えることによって近似の精度を逐次的に高めて行くことは, 解析学における典型的なパターンであり, あらゆる場所で出会うことになる. □

注意: digamma函数 $\psi(s)$ $(s > 0)$ を

$$\psi(s) = -\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \cdots + \frac{1}{s+n} - \log n\right]$$

と定めることができる. これはガンマ函数が

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}$$

と書けることを使えば $\psi(s) = d\log\Gamma(s)/ds$ とも表わされる. ガンマ函数に関するこの公式については

- ガンマ分布の中心極限定理とStirlingの公式 (https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf)

の第8.2節を参照せよ. Euler定数の定義より $\psi(1) = -\gamma$ であることがわかり, digamma函数の定義より $\psi(s+1) = 1/s + \psi(s)$ であることがわかるので, 帰納的に非負の整数 n について

$$\psi(n+1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma$$

であることがわかる. この公式はdigamma函数 $\psi(s+1)$ は調和級数からEuler定数を引いたものの連続的な補間になっていることを意味している. したがって, $\psi(s+1)$ の $s \to \infty$ での漸近挙動がよくわかれば, 調和級数の漸近挙動もよくわかることになる.

ガンマ函数については次のStirlingの近似公式がよく知られている: $s \to \infty$ において

$$\log\Gamma(s+1) = s\log s - s + \frac{1}{2}\log s + \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

これを s で微分することによって,

$$\psi(s+1) = \log s + \frac{1}{2s} - \frac{1}{12s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right) \qquad (s \to \infty).$$

以上をまとめると次が得られる:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (s \to \infty).$$

このように調和級数 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ の $n \to \infty$ における漸近挙動の詳細はガンマ函数に関するStirlingの公式の対数微分によって得られる. □

In [8]:
```
function plot_eulergamma(N, n)
    f(x) = 1/x
    p = plot(xlim=(0,N+2), ylim=(0, 1.2))
    x = 1.0:0.05:n
    plot!(p, x, f.(x), color=:blue, label="log($n)", fill=(0, 1.0, :pink))
    x = n:0.05:n+1
    plot!(p, x, f.(x), color=:blue, label="log($(n+1))", fill=(0, 0.5, :pink))
    plot!(p, [1,1], [0,1], color=:red, label="1/1+1/2+...+1/$n")
    for k in 1:N
        x = k:0.05:k+1
        g(x) = 1/k
        c = ifelse(k > n, :pink, :red)
        plot!(p, x, g.(x), color=c, label="")
        plot!(p, [k+1,k+1], [0,1/k], color=c, label="")
    end
    x = 0.1:0.05:N+2
    plot!(p, x, f.(x), color=:blue, label="y=1/x")
    plot!(title="n = $n", titlefontsize=10)
    p
end

N = 6
p1 = plot_eulergamma(N, N-1)
p2 = plot_eulergamma(N, N)
plot(p1, p2, size=(700, 300))
```

Out[8]:

In [9]:
```
a(n) = sum(k->1/k, 1:n) - log(n+1)
b(n) = sum(k->1/k, 1:n) - log(n)
[(n, a(n), b(n)) for n in [1:9; 10.^(1:7)]]
```

Out[9]:
```
16-element Array{Tuple{Int64,Float64,Float64},1}:
 (1, 0.306853, 1.0)
 (2, 0.401388, 0.806853)
 (3, 0.447039, 0.734721)
 (4, 0.473895, 0.697039)
 (5, 0.491574, 0.673895)
 (6, 0.50409, 0.658241)
 (7, 0.513416, 0.646947)
 (8, 0.520633, 0.638416)
 (9, 0.526383, 0.631744)
 (10, 0.531073, 0.626383)
 (100, 0.572257, 0.582207)
 (1000, 0.576716, 0.577716)
 (10000, 0.577166, 0.577266)
 (100000, 0.577211, 0.577221)
 (1000000, 0.577215, 0.577216)
 (10000000, 0.577216, 0.577216)
```

In [10]:
```
eulergamma
```

Out[10]: γ = 0.5772156649015...

4.2 条件収束交代級数への応用

次の2つの数列を考える:

$$A_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}, \quad B_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

このとき

$$A_n + B_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \log(2n) + \gamma + o(1), \quad 2B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + o(1).$$

ここで $o(1)$ は $n \to \infty$ で 0 に収束する項を意味する. ゆえに,

$$A_n = \log 2 + \frac{1}{2}\log n + \frac{\gamma}{2} + o(1), \quad B_n = \frac{1}{2}\log n + \frac{\gamma}{2} + o(1).$$

これより, $n \to \infty$ で

$$A_n - B_n \to \log 2.$$

すなわち,

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2.$$

より一般に正の整数 p, q について

$$A_{pn} = \log 2 + \frac{1}{2}(\log p + \log n) + \frac{\gamma}{2} + o(1), \quad B_n = \frac{1}{2}(\log q + \log n) + \frac{\gamma}{2} + o(1)$$

なので, $n \to \infty$ のとき

$$A_{pn} - B_{qn} \to \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q}.$$

例: $p = 2, q = 1$ のとき

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2}\log 2.$$

$p = 1, q = 2$ のとき

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\log 2. \qquad \square$$

考え方: 以上のような計算が可能になったのは,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

が大雑把に $\log n$ で近似できることだけではなく, より精密に

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + o(1)$$

の形で漸近挙動がわかっているからである.

In [11]:

```
A(n) = sum(k->1/(2k-1), 1:n)
B(n) = sum(k->1/(2k), 1:n)

n = 10^7
@show S = A(2n) - B(n)
@show T = 3/2*log(2)
@show S - T;
```

```
S = A(2n) - B(n) = 1.039720745839908
T = (3 / 2) * log(2) = 1.0397207708399179
S - T = -2.5000009840070447e-8
```

In [12]:

```
sum(k->1/(4k-3)+1/(4k-1)-1/(2k), 1:10^7) - T
```

Out[12]:

```
-2.5000000736241645e-8
```

4.3 Euler定数がガンマ函数の無限積表示に出て来ること

$s > 0$ のとき, ガンマ函数 $\Gamma(s)$ が

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$$

によって定義され, digamma函数 $\psi(s)$ が

$$\psi(s) = \frac{d}{ds}\log\Gamma(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\log x\, dx$$

によって定義される.

ガンマ函数について次が成立してることが知られている(Weierstrassの公式):

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{\gamma s} s \prod_{n=1}^\infty \left[\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}\right].$$

この公式の証明については

- [ガンマ分布の中心極限定理とStirlingの公式 (https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf)](https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf)

の第8.2節を参照せよ.

Weierstrassの公式より

$$-\psi(s) = \gamma + \frac{1}{s} - \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s}\right].$$

特に

$$-\psi(1) = -\int_0^\infty e^{-x}\log x\, dx = \gamma = 0.5772156649015\cdots.$$

Euler定数 γ は次の積分表示を持つことも示せる:

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t}\right) dt.$$

この公式の証明については上の文献の第8.7節を参照.

In [13]:
```
-digamma(big(1))
```

Out[13]:
```
5.772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672348848677267776685e-01
```

4.4 Euler定数が高次元単体上の一様分布に関連して自然に出て来ること

$r > 0$ に対して, $n-1$ 次元単体 $\Delta^{n-1}(r)$ が

$$\Delta^{n-1}(r) = \{\, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_{\geqq 0} \mid x_1 + \cdots + x_n = r \,\}$$

と定義される. ここで $\mathbb{R}_{\geqq 0}$ は非負の実数全体の集合を表す. 例えば, $n = 3$ のとき

$$\Delta^2(r) = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geqq 0,\ x + y + z = r \,\}.$$

は点 $(r, 0, 0)$, $(0, r, 0)$, $(0, 0, r)$ を頂点とする正三角形になる.

$\Delta^{n-1}(n)$ 上の一様分布(例えば $n = 3$ の場合には正三角形上に一様に分布する確率分布)を考える.

そのとき, $\Delta^{n-1}(n)$ の点の第 i 座標 x_i の分布(例えば x_1 の分布)は $n \to \infty$ のとき確率密度函数が $\exp(-x)$ の指数分布に近付くことを証明できる.

ゆえに, $n \to \infty$ で $\log x_i$ の期待値は $\int_0^\infty e^{-x}\log x\, dx = \psi(1) = -\gamma = -0.5772\cdots$ に近付く.

このような形でも自然にEuler定数 γ が自然に出て来る.

このような現象は「統計力学」ではよく知られている. 詳しくは次のノートを参照せよ:

- [Kullback-Leibler情報量とSanovの定理 (https://genkuroki.github.io/documents/20160616KullbackLeibler.pdf)](https://genkuroki.github.io/documents/20160616KullbackLeibler.pdf)

問題: 次のセルの `rand_Uniform_on_Simplex` 函数がどうして $\Delta^{n-1}(1)$ 上の一様分布に従う擬似乱数を発生させる函数になっているかを説明せよ.

ヒント: $(x_1, \ldots, x_n)$ を $(x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_{n-1})$ に対応させる写像を考えよ. その写像を通して, 単体 $\Delta^{n-1}(1)$ 上の一様分布と $n-1$ 次元立方体 $[0,1]^{n-1}$ 上の一様分布をどのように関係付けられるかについて考えよ. $n-1$ 次元立方体はその成分の並び方の順序で分類することによって $(n-1)!$ 個の部分集合に分割される(境界の重なりは無視してよい). □

In [14]:

```
# r = 1 の場合の n-1 次元単体上の一様分布に従う擬似乱数を発生させる函数
function rand_Uniform_on_Simplex(n)
    Z = sort(rand(n-1))
    return vcat(Z, 1.0) - vcat(0.0, Z)
end

function rand_Uniform_on_Simplex(n, N)
    X = zeros(n, N)
    for j in 1:N
        X[:,j] = rand_Uniform_on_Simplex(n)
    end
    return X
end

# x_1 の分布と log x_i 達の平均の分布をプロットする函数
function plot_Uniform_on_Simplex(n; N=10^4)
    X = n*rand_Uniform_on_Simplex(n, N)
    ElogX = vec(mean(log.(X), 1))

    p1 = plot(xlabel="x", xlim=(0, 7.5), title="n = $n")
    histogram!(p1, X[1,:], normed=true, alpha=0.5, label="x_1")
    plot!(p1, x->exp(-x), 0, 7.5, lw=2, label="exp(-x)")

    p2 = plot(xlabel="x", legend=:topleft, legendfontsize=7)
    xlims!(-eulergamma-0.3, -eulergamma+0.3)
    histogram!(p2, ElogX, normed=true, alpha=0.5, linealpha=0.1, label="mean of log x_i")
    vline!([-eulergamma], lw=2, label="x = $(round(Float64(-eulergamma),5))")

    plot(p1, p2, size=(700, 300), layout=grid(1,2,widths=[0.35, 0.65]))
end
```

Out[14]: `plot_Uniform_on_Simplex (generic function with 1 method)`

In [15]:

```
plot_Uniform_on_Simplex(100)
```

Out[15]:

In [16]:
```
plot_Uniform_on_Simplex(1000)
```

Out[16]:

In [17]:
```
@time plot_Uniform_on_Simplex(10000)
```

```
10.139388 seconds (1.04 M allocations: 5.992 GiB, 10.38% gc time)
```

Out[17]:

問題: $n-1$ 次元単体 $\Delta^{n-1}(n)$ 上の一様分布に関する x_1 の分布が $n \to \infty$ で確率密度函数が $\exp(-x)$ の指数分布に近付くことを示せ. 直観的に明瞭な説明をしていれば必ずしも論理的に厳密な議論でなくてもよい.

解答例: 簡単のため, $\Delta^{n-1}(r)$ を $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1})\}$ への射影の像を $D^{n-1}(r)$ と書くことにする:

$$D^{n-1}(r) = \{\, (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}_{\geqq 0} \mid x_1 + \cdots + x_{n-1} \leqq r \,\}.$$

$\Delta^{n-1}(r)$ 上の一様分布を $D^{n-1}(r)$ に射影して得られる分布は $D^{n-1}(r)$ 上の一様分布になる.

$D^{n-1}(r)$ の体積は $r^{n-1}/(n-1)!$ に等しい. そして, $0 \leqq a \leqq r$ のとき, $D^{n-1}(r)$ を $x_1 \geqq a$ に制限して得られる部分集合は $D^{n-1}(r-a)$ に合同なのでその体積は $(r-a)^{n-1}/(n-1)!$ に等しい. ゆえに, $x_1 \geqq a$ となる確率は $P(x_1 \geqq a)$ は

$$P(x_1 \geqq a) = \frac{(r-a)^{n-1}/(n-1)!}{r^{n-1}/(n-1)!} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{n-1}$$

となるので, $r = n$ のとき, $n \to \infty$ で

$$P(x_1 \geqq a) = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-1} \to \exp(-a).$$

一方, 確率密度函数 $\exp(-x)$ において $x \geqq a$ となる確率は

$$\int_a^\infty \exp(-x)\,dx = [-\exp(-x)]_a^\infty = \exp(-a).$$

以上を比較することによって, $D^{n-1}(n)$ 上の一様分布に関する x_1 の分布は $n \to \infty$ で確率密度函数 $\exp(-x)$ の指数分布に近付くことがわかる. □

注意: 以上の議論において $D^{n-1}(r)$ に射影したことは本質的ではなく, $\Delta^{n-1}(r)$ の体積(面積)が r^{n-1} に比例することだけを使っても同様の議論を遂行できる. $D^{n-1}(r)$ に射影するメリットは比例定数が $1/(n-1)!$ になることが易しく求まることに過ぎない. その比例定数は確率を求めるときに分子分母でキャンセルして消えるので議論の本質には何も影響しない. □

問題: $D^1(r)$, $D^2(r)$, $D^3(r)$ を図示し, それぞれの長さ, 面積, 体積がそれぞれ r, $r^2/2$, $r^3/6$ であることを確認せよ. □

In [18]:

```
plot(size=(300,300), aspect_ratio=1)
plot!([0,1], [0,0], lw=3, color=:blue, label="D^1(1)")
plot!(xlims=(-0.1,1.1), ylims=(-0.5,0.5))
```

Out[18]:

In [19]:

```
plot(size=(300,300), aspect_ratio=1)
plot!([0,1], [1,0], color=:blue, fill=(0, 0.5), label="D^2(1)")
plot!([0,0], [0,1], color=:blue, label="")
plot!([0,1], [0,0], color=:blue, label="")
plot!(xlims=(-0.1,1.1), ylims=(-0.1,1.1))
```

Out[19]:

In [20]:

```
x = 0:0.01:1
y = 0:0.01:1
f(x,y) = ifelse(x+y>1, NaN, 1-x-y)

pyplot()
p = plot(size=(350, 300), zlims=(0,1))
surface!(x, y, f, color=:rainbow, camera=(120, 45))
display(p)
gr();
```

4.5 ζ(s) - 1/(s-1) の s→0 での極限がEuler定数に等しいこと

以下ではこの先に進まないと知らないはずのことを勝手に用いる.

問題: $h > 0$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^h} - \frac{1}{(n+1)^h}\right) = 1.$$

となることを示せ. □

解答略.

問題: $h > 0$ ならば, $n \to \infty$ で

$$\frac{1}{n^{1+h}} - \frac{1}{h}\left(\frac{1}{n^h} + \frac{1}{(n+1)^h}\right) = O\left(\frac{1}{n^{2+h}}\right)$$

となることを示せ.

解答例: 二項展開より

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-h} = 1 - \frac{h}{n} + \frac{h(h+1)}{2n^2} + \cdots = 1 - \frac{h}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

なので

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{1}{hn^h}\left(\frac{h}{n} - 1 + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-h}\right) \\ &= \frac{1}{hn^h}\left(\frac{h}{n} - 1 + 1 - \frac{h}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^{2+h}}\right). \qquad \square\end{aligned}$$

定義: $s > 1$ に対して, $\zeta(s)$ を

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

と定める. この級数は絶対収束している.

問題: $h > 0$ ならば

$$\zeta(1+h) - \frac{1}{h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-h)^k}{k!}\gamma_k, \quad \gamma_k = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(\log n)^k}{n} + \frac{(\log n)^{k+1} - (\log(n+1))^{k+1}}{k+1}\right)$$

となることを示せ. □

解答略.

ヒント: この問題の左辺は上の問題の左辺の n に関する総和に等しい. $1/n^h = \exp(-h\log n)$ と $1/(n+1)^h = \exp(-h\log(n+1))$ に $\exp(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ を適用し, $-h$ に関する同次の項をまとめて整理せよ. そのとき $1/n^{1+h}$ は $\exp(-h\log n)/n$ だとみなせ. □

問題: 上の問題の γ_0 がEulerの定数 γ に等しいことを示せ.

解答例:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \log n - \log(n+1)\right)\\ &= \left(\frac{1}{1} - \log 2\right) + \left(\frac{1}{2} + \log 2 - \log 3\right) + \left(\frac{1}{3} + \log 3 - \log 4\right) + \cdots\end{aligned}$$

であり, この級数の $n = N$ までの和は

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \log(N+1)$$

に等しいので, その級数はEuler定数 γ に収束する. □

以上によって

$$\zeta(1+h) = \frac{1}{h} + \gamma + O(h) \quad (h \to 0)$$

であることが示された.

問題: $\zeta(1+h) = \frac{1}{h} + \gamma + O(h)$ $(h \to 0)$ を以上とは別の方法を使って示してみよ. □

例えばEuler-Maclaurinの和公式を使っても証明可能である.

問題: $h \searrow 0$ のとき, $\zeta(1+h) - \frac{1}{h} \to \gamma$ となることを数値的に確認せよ. □

In [21]:

```
N = 25
@show h = big"0.1"^N
@show c = zeta(1+h)-1/h
@show g = big(eulergamma)
@show round(c, N)
@show round(g, N)
@show c - g;
```

```
h = @big_str("0.1") ^ N = 1.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000053e-25
c = zeta(1 + h) - 1 / h = 5.772156649015328606065120977128413450763009749950989988242121323324325714408041e-01
g = big(eulergamma) = 5.772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672348848677267776685e-01
round(c, N) = 5.772156649015328606065121000000000000000000000000000000000000000000000000000015e-01
round(g, N) = 5.772156649015328606065121000000000000000000000000000000000000000000000000000015e-01
c - g = 7.630438914034141639055175400018444897447564844663135574900855315781988976401014e-27
```

In [ ]:

```
```

04 連続函数 ¶

黒木玄

2018-04-20

- Copyright 2018 Gen Kuroki
- License: MIT https://opensource.org/licenses/MIT (https://opensource.org/licenses/MIT)

- Repository: https://github.com/genkuroki/Calculus (https://github.com/genkuroki/Calculus)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/04%20continous%20functions.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/04%20continous%20functions.ipynb)
- https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/04%20continous%20functions.pdf (https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/04%20continous%20functions.pdf)

このファイルは Julia Box (https://juliabox.com) で利用できる.

自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ.

論理的に完璧な説明をするつもりはない. 細部のいい加減な部分は自分で訂正・修正せよ.

目次

1 連続函数
  1.1 連続函数の定義
  1.2 中間値の定理
  1.3 不動点定理
  1.4 閉区間上の実数値連続函数が最大最小を持つこと
  1.5 例
    1.5.1 例1: コンパクト台を持つ滑らかな連続函数
    1.5.2 例2: 無限に振動する不連続函数
    1.5.3 例3: 無限に振動する連続函数
    1.5.4 例4: Weierstrass函数
    1.5.5 例5: 高木函数
2 一様連続性
  2.1 閉区間上の連続函数が一様連続であること
  2.2 連続だが一様連続ではない函数の例
3 一様収束
  3.1 函数列の各点収束の定義
  3.2 函数列の一様収束の定義
  3.3 連続函数列の一様収束先も連続になること
  3.4 Peano曲線

In [1]:

```
using Plots
gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn) = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    display("text/html", """<img src="data:$mime; base64,$base64">""")
end

using SymPy
using SpecialFunctions
using QuadGK
```

1 連続函数

1.1 連続函数の定義

定義: 函数 $f(x)$ が $x = a$ で**連続**であるとは, $x \to \alpha$ のとき $f(x) \to f(a)$ が成立することであると定める.

これは ε-δ のスタイルでは次のように言い直される.

函数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは次が成立していることである: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となる. □

定理: 以下の2つの条件は互いに同値である:

(1) $f(x)$ は $x = a$ で連続である. (すなわち $x \to a$ のとき $f(x) \to f(a)$ となる.)

(2) 数列 x_n が a に収束するならば数列 $f(x_n)$ は $f(a)$ に収束する. (すなわち $x_n \to a$ のとき $f(x_n) \to f(a)$ となる.)

証明: (1)ならば(2)を示そう. (1)を仮定し, x_n は a に収束する任意の数列であるとし, $\varepsilon > 0$ を任意に取る. (1)より, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となる. $x_n \to a$ なのである番号 N で $n \geqq N$ ならば $|x_n - a| < \delta$ となり, そのとき $f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ となる. これで(1)から(2)が導かれることがわかった.

(2)ならば(1)の対偶を示すために, (1)の否定を仮定する. すなわち, ある $\varepsilon > 0$ で次の条件を満たすものが存在すると仮定する: 任意の $\delta > 0$ に対して, ある x で $|x - a| < \delta$ と $f(x) - f(a)| \geqq \varepsilon$ を満たすものが存在する. そのとき, 任意の正の整数 n に対して, ある x_n で $|x_n - a| < 1/n$ と $|f(x_n) - f(a)| \geqq \varepsilon$ を満たすものが存在する. そのとき, x_n は a に収束しているが, $f(x_n)$ は $f(a)$ に収束していない. これで, (1)の否定から(2)の否定が導かれることがわかった.

これで示すべきことがすべて示された. □

1.2 中間値の定理

中間値の定理: f は閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続函数であるとする. このとき $f(a)$ と $f(b)$ のあいだにある任意の実数 α に対して, ある $\xi \in [a, b]$ で $f(\xi) = \alpha$ を満たすものが存在する. □

補足: x が a と b のあいだにあるとは $a \leqq x \leqq b$ または $a \geqq x \geqq b$ が成立していることだと定める. □

注意: 中間値の定理において, $f(a) < \alpha < f(b)$ または $f(a) > \alpha > f(b)$ ならば $f(\xi) = \alpha$ をみたす $\xi \in [a, b]$ は $a < \xi < b$ となるように取れる. □

中間値の定理の証明: $f(x)$ の代わりに $f(x) - \alpha$ を考えることによって, $\alpha = 0$ の場合に証明すれば十分である. 必要なら $f(x)$ の代わりに $-f(x)$ を考えることによって, $f(a) \leqq 0, f(b) \geqq 0$ の場合に証明すれば十分である. 以下, そのように仮定する.

$(a_1, b_1) = (a, b)$ とおく. n について帰納的に $f(a_n) \leqq 0 \leqq f(b_n)$ を満たす (a_n, b_n) を次のように定めることができる.

- $f((a_n + b_n)/2) \geqq 0$ ならば $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_{n+1}, (a_n + b_n)/2)$.
- $f((a_n + b_n)/2) < 0$ ならば, $(a_{n+1}, b_{n+1}) = ((a_n + b_n)/2, b_n)$.

このとき, $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots, \cdots \leqq b_2 \leqq b_1$ でかつ $|a_n - b_n| = |a - b|/2^{n-1}$ であることから, a_n と b_n は同一の値 ξ に収束する. そのとき, $f(x)$ の連続性より $f(a_n)$ と $f(b_n)$ も同一の値 $f(\xi)$ に収束し, $f(a_n) \leqq 0 \leqq f(b_n)$ なのでその収束先は 0 でなければいけない. ゆえに $f(\xi) = 0$. □

注意: 上の証明法の**二分法 (bisection method)**と呼ぶことがある. 実際の数値計算でも利用可能な方法である. □

In [2]:

```
function bisection(f, a, b; atol=eps(), maxiter=10^3)
    f(a)*f(b) > 0 && return NaN
    aₙ, bₙ = a, b
    k = 0
    while abs(aₙ - bₙ) > atol
        k > maxiter && return NaN
        c = (aₙ+bₙ)/2
        if f(bₙ)*f(c) ≥ 0
            aₙ, bₙ = aₙ, c
        else
            aₙ, bₙ = c, bₙ
        end
        k += 1
    end
    return (aₙ+bₙ)/2
end
```

Out[2]:

```
bisection (generic function with 1 method)
```

In [3]:

```
f(x) = x^2 - 2
@show ξ = bisection(f, 1, 2)
@show √2
@show round(f(ξ), 15)

x = 1:0.005:2
plot(size=(400,250), legend=:topleft)
plot!(x, f.(x), label="y = x^2 - 2")
hline!([0], label="y = 0")
vline!([ξ], label="x = $(round(ξ, 5))", ls=:dash)
```

```
ξ = bisection(f, 1, 2) = 1.414213562373095
√2 = 1.4142135623730951
round(f(ξ), 15) = -0.0
```

Out[3]:

In [4]:
```
f(x) = cos(x) - x
@show ξ = bisection(f, 0, 1)
@show round(f(ξ), 15)

x = 0:0.005:1
plot(size=(400,250))
plot!(x, f.(x), label="y = cos x - x")
hline!([0], label="y = 0")
vline!([ξ], label="x = $(round(ξ, 5))", ls=:dash)
```

```
ξ = bisection(f, 0, 1) = 0.7390851332151606
round(f(ξ), 15) = 0.0
```

Out[4]:

1.3 不動点定理

不動点定理: 閉区間 $[a,b]$ からそれ自身への連続写像 f に対して, ある $\xi \in [a,b]$ で $f(\xi) = \xi$ を満たすものが存在する. (そのような ξ を f の不動点と呼ぶ.)

証明: $g(x) = f(x) - x$ とおく. このとき g は閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続函数であり, $g(a) = f(a) - a \geqq 0$ かつ $g(b) = f(b) - b \leqq 0$ となり, 0 は $g(a)$ と $g(b)$ のあいだにある実数になる. ゆえに中間値の定理より, ある $\xi \in [a,b]$ で $g(\xi) = 0$ すなわち $f(\xi) = \xi$ を満たすものが存在する. $\square$

補足: 以下の形の $\mathbb{R}$ の部分集合を**区間**と呼ぶ:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b \,\}, \\
[a,b) &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b \,\}, \\
(a,b] &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b \,\}, \\
(a,b) &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}.
\end{aligned}
$$

$[a,b]$ は**閉区間**と呼ばれ, (a,b) は**開区間**と呼ばれる. $(-\infty, b]$ のように無限に長い区間を扱うこともある. $\square$

補足: 閉区間 $[a,b]$ からそれ自身への写像とは $x \in [a,b]$ に $f(x) \in [a,b]$ を対応させる函数のことである. そのグラフ $G = \{\, (x, f(x)) \mid a \leqq x \leqq b \,\}$ は正方形 $[a,b] \times [a,b] = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x, y \leqq b \,\}$ に含まれる. $\square$

注意: 上の不動点定理は以下のように説明することもできる. 簡単のため $[a,b] = [-1,1]$ の場合を考える. もしも f の不動点が存在しなかったならば, すべての $x \in [-1,1]$ について $f(x) \neq x$ となる. ゆえに $x \in [-1,1]$ の連続函数 $g(x)$ を

$$
g(x) = \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}
$$

と定めることができる. すべての $x \in [-1,1]$ について $g(x)$ は ± 1 のどちらかになり, $-1 < f(-1)$ なので $g(-1) = -1$ となり, $1 > f(1)$ なので $g(1) = 1$ となる. しかし, そのような $[-1,1]$ 上の連続函数は存在するはずがないので, 不動点が存在するはずである. $\square$

In [5]:
```
f(x) = 0.6 + 0.4x - 0.8x^2 + 0.3sin(10x-0.5)
ξ = bisection(x->f(x)-x, 0, 1)
x = 0:0.01:1
plot(size=(400,400), aspect_ration=1, legend=false)
plot!(xlim=(0,1), ylim=(0,1))
plot!(x, f.(x))
plot!([0,1], [0,1])
hline!([ξ], ls=:dash, color=:red)
vline!([ξ], ls=:dash, color=:red)
```

Out[5]:

注意: 上の易しい不動点定理はBrouwerの不動点定理の次元1の特別な場合である. □

Brouwerの不動点定理: n 次元閉円盤

$$D = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqq 1 \}$$

からそれ自身への連続写像 f は不動点を持つ. すなわち, ある $\xi \in D$ で $f(\xi) = \xi$ を満たすものが存在する. □

このノート群の内容を逸脱する話題なので証明 (https://www.google.co.jp/search?q=Brouwer%E3%81%AE%E4%B8%8D%E5%8B%95%E7%82%B9%E5%AE%9A%E7%90%86+%E8%A8%BC%E6%98%8E)には触れない. 証明する前に直観的にどこまでこの定理が「明らか」であるかについて考えてみた方がよい.

研究課題: $n = 2$ の場合にBrouwerの不動点定理が直観的には当然成立するべき結果であることがわかるような説明を見付けよ. □

ヒント: 上にある注意の方法をこの場合に適用してみよ. □

1.4 閉区間上の実数値連続函数が最大最小を持つこと

定理: 実数の閉区間上の実数値連続函数は最大値と最小値を持つ.

証明: f は閉区間 $I = [a, b]$ 上の実数値連続函数であると仮定する. f を $-f$ で置き換えることによって, f が最大値を持つことを示せば十分である.

まず, f が閉区間 I 上で有界であることを示そう. もしも f が有界でないならばある $a_n \in I$ で $f(a_n) \geqq n$ を満たすものが存在する. Bolzano-Weierstrassの定理より, a_n の部分列 a_{k_n} である実数 α に収束するものが存在する. $a_{k_n} \in I$ すなわち $a \leqq a_{k_n} \leqq b$ より $a \leqq \alpha \leqq b$ すなわち $\alpha \in I$ であることもわかる. f の連続性より, $n \to \infty$ で $f(a_{k_n}) \to f(\alpha)$ でなればいけないが, a_n の取り方より, $f(a_{k_n}) \to \infty$ となる. これは矛盾である. ゆえに, f は閉区間 I 上で有界でなければいけない.

次に, f が閉区間 I 上で最大値を持つことを示そう. $\{ f(x) \mid x \in I \}$ は上に有界なので, 実数の連続性より, それは最小の上界を持つ. その最小上界を M と書くことにする. M が $\{ f(x) \mid x \in I \}$ の最小上界であることより, $n = 1, 2, \dots$ に対して, $M - \frac{1}{n} \leqq f(x_n) \leqq M$ を満たす $x_n \in I$ が存在する. そのとき, $f(x_n)$ は M に収束する. Bolzano-Weierstrassの定理より, x_n のある部分列 x_{l_n} である $\beta \in I$ に収束するものが存在する. このとき,

$$f(\beta) = \lim_{n \to \infty} f(x_{l_n}) = M.$$

これで f が I 上で最大値 M を持つことがわかった. □.

定義(supノルム): 集合 X 上の函数で $|f(x)|$ が上に有界なものに対して,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

を f の**supノルム**と呼ぶ. □

閉区間 $[a,b]$ 上の連続函数 $f(x)$ に対して, $|f(x)|$ も閉区間 $[a,b]$ 上の連続函数になるので, $|f(x)|$ は最大値を持つ. ゆえに $f(x)$ の supノルムも定義され,

$$\|f\|_\infty = \sup_{a\leqq x\leqq b} |f(x)| = \max_{a\leqq x\leqq b} |f(x)|$$

が成立する.

函数の差のsupノルム $\|f-g\|_\infty$ は函数 f,g の違いの大きさの指標としてよく使われる.

問題: 適当に $\varepsilon > 0$ と函数 φ を与え, $\|f-\varphi\|_\infty < \varepsilon$ を満たす函数 f のグラフがどのような領域に含まれるかを図示せよ. □

次のセルを見よ.

In [6]:

```
φ(x) = sin(x) - 0.5x + 0.1x^2
x = -2.5:0.02:3.5
ε = 0.3
plot(size=(500, 350))
plot!(x, φ.(x), label="phi(x)", color=:black, lw=2)
plot!(x, φ.(x).+ε, label="", color=:red, ls=:dash, fill=(:pink, 0.2, φ.(x)))
plot!(x, φ.(x).-ε, label="", color=:red, ls=:dash, fill=(:pink, 0.2, φ.(x)))
```

Out[6]:

問題: その絶対値が上に有界な集合 X 上の函数達 f,g について以下が成立することを示せ:

(1) $\|f+g\|_\infty \leqq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

(2) 数 α について $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$.

(3) $\|f\|_\infty = 0$ ならば f は恒等的に 0.

証明: (1) A,B をそれぞれ $|f(x)|, |g(x)|$ の上界だとすると, $|f(x)+g(x)| \leqq |f(x)| + |g(x)| \leqq A+B$. そして上限は上界の最小値だったので, $\|f+g\|_\infty \leqq \sup_{x\in X}|f(x)| + \sup_{x\in X}|g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

(2) $|\alpha f(x)| = |\alpha||f(x)|$ より, それらの上限は等しい. すなわち, $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$.

(3) $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)| = 0$ であると仮定する. このとき, $|f(x)|$ の上界の最小値は 0 である. これは任意の $x\in X$ について $|f(x)| \leqq 0$ が成立することを意味する. ゆえに f は恒等的に 0 になる. □

参考(L^1 ノルム): 閉区間 $[a,b]$ 上の L^1 ノルム $\|f\|_1$ は次のように定義される:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

これも函数の違いを測るためによく使われる. 次のセルを見よ. 塗りつぶされている部分の面積が $\|f-g\|_1$ に等しい. □

In [7]:
```
f(x) = sin(x) - 0.5x + 0.1x^2
g(x) = cos(x) - 0.5 + 0.1x^3
plot(size=(500, 350), legend=:top)
x = -2.5:0.02:3.5
plot!(x, f.(x), color=:blue, label="f(x)")
plot!(x, g.(x), color=:red,  label="g(x)")
x = -2.0:0.02:3.0
plot!(x, g.(x), color=:red, fill=(0.1, f.(x)), label="")
vline!([minimum(x)], color=:green, label="x=a")
vline!([maximum(x)], color=:green, label="x=b")
```

Out[7]:

問題: 閉区間 $[a,b]$ 上の連続函数 f,g について以下が成立することを示せ:

(1) $\|f+g\|_\infty \leqq \|f\|_1 + \|g\|_\infty$.

(2) 数 α について $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\|f\|_1$.

(3) $\|f\|_1 = 0$ ならば f は恒等的に 0.

解答例: (1) $|f(x)+g(x)| \leqq |f(x)| + |g(x)|$ なので両辺を積分することによって $\|f+g\|_1 \leqq \|f\|_1 + \|g\|_1$ を得る.

(2) $|\alpha f(x)| = |\alpha||f(x)|$ の両辺を積分することによって $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\|f\|_1$ を得る.

(3) 対偶を示すために, ある $x_0 \in [a,b]$ で $f(x_0) \neq 0$ を満たすものが存在すると仮定する. $f(x)$ は連続なので, ある $\delta > 0$ が存在して, $x \in [a,b]$ かつ $|x-x_0| \leqq \delta$ ならば $\leqq |f(x)-f(x_0)| \leqq |f(x_0)|/2$ となり,
$|f(x)| = |f(x_0) - (f(x_0)-f(x))| \geqq |f(x_0)| - |f(x_0)-f(x)| \geqq |f(x_0)| - |f(x_0)|/2 = |f(x_0)|/2$ となる. ゆえに,
$A = \max\{a, x_0-\delta\}, B = \min\{a, x_0+\delta\}$ とおくと,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_A^B |f(x)|\,dx \geqq \int_A^B \frac{|f(x_0)|}{2}\,dx \geqq \frac{|f(x_0)|(B-A)}{2} > 0.$$

これで(3)の対偶が証明された. □

注意: 上の解答例の(3)の証明は, 単に $f(x_0) \neq 0$ ならば x_0 の近くの x について $|f(x)| > 0$ となるので, $|f(x)|$ を積分すると 0 より大きくなることを示しているに過ぎない. 実際に書かれた証明はややこしいが, やっていることはシンプルである. 数学的に詳しく書かれた証明はこういうことになっている場合が実に多い. 直観レベルでは非常にシンプルなことしかやっていなくても, 順番に丁寧に書いたせいで複雑に見えてしまうことがよくある. そのような証明を読むときには, 「シンプルだが雑な直観をもとにして, どのようにして隙の無い証明を書きあげればよいか」という発想で証明を自力で再構成してみるのがよい. 結局のところ他人が書いた証明は他人にとってわかりやすいだけで, 自分にとってはわかりにくい. 自分にとってわかり易い証明は自分で書くしかない. □

まとめ: 閉区間 $[a,b]$ 上の連続函数 f,g に対して, 差のsupノルム $\|f-g\|$ は f,g の同一の x における値の差の最大値に等しく, 差のL^1ノルム $\|f-g\|_1$ は f,g のグラフに挟まれている部分の面積に等しい. このように函数の違いの大きさを測る方法は複数存在する. □

1.5 例

1.5.1 例1: コンパクト台を持つ滑らかな連続函数

函数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqq 0) \\ e^{-1/x} & (x > 0) \end{cases}$$

は $x \searrow 0$ のとき $e^{-1/x} \to 0$ なので連続函数である. ここで $x \searrow 0$ は x が上から(正の値のまま) 0 に近付くことを意味している($x \to +0$ と書くこともある). $f(x)$ は任意有限回微分可能である(そのとき C^∞ 函数であるという).

問題: n が非負の整数のとき, $x \searrow 0$ のとき $\dfrac{e^{-1/x}}{x^n} \to 0$ となることを示せ. □

証明: $t = 1/x$ とおくと, 示すべきことは, $t \to \infty$ のとき $\dfrac{t^n}{e^t} \to 0$ となることと同値である. しかし, それは指数函数が多項式函数より速く増加することを意味しているので, 成立することがすでにわかっている. □

注意: $e^{-1/x}$ の n 階の導函数は $\dfrac{e^{-1/x}}{x^n}$ に x の多項式をかけた形になる. そのことより, $x \searrow 0$ のとき $e^{-1/x}$ の n 階の導函数も 0 に収束することがわかる. □

In [8]:
```
x = symbols("x")
diffexpneginvx(n) = diff(exp(-1/x), x, n)
[diffexpneginvx(n) for n in 0:3]
```

Out[8]:

$$\begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{x}} \\ \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \\ \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\left(-2 + \frac{1}{x}\right) \\ \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}\left(6 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \end{bmatrix}$$

In [9]:
```
f(x) = x > 0 ? exp(-1/x) : zero(x)
g(x) = x > 0 ? exp(-1/x)/x^2 : zero(x)

p1 = plot(ylims=(-0.1, 1.0), legend=:topleft)
plot!(f, -10, 20, label="f(x)")

p2 = plot(ylims=(-0.1, 0.6), legend=:topright)
plot!(g, -10, 20, label="df(x)/dx")

plot(p1, p2, size=(700,200))
```

Out[9]:

問題: $x \leqq 0$ のとき最小値 0 になり, $x \geqq 1$ のとき最大値 1 になる函数で任意有限回微分可能なものが存在することを示せ.

解答例: 函数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqq 0 \text{ or } 1 \geqq x) \\ \exp\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) & (0 < x < 1) \end{cases}$$

は任意有限回微分可能である. $Z = \int_0^1 f(x)\,dx$ とおき, $g(x) = f(x)/Z$ とおくと, $\int_0^1 g(x)\,dx = 1$ となる. このとき, 函数

$$h(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$$

は問題の条件を満たしている. □

In [10]:
```
f(x) = 0 < x < 1 ? exp(-1/x+1/(x-1)) : zero(x)
@show Z, err = quadgk(f, 0, 1) # = ∫_0^1 f(x) dx, error
g(x) = f(x)/Z
h(x) = quadgk(g, -1, x)[1] # = ∫_{-1}^x g(t) dt

p1 = plot(legend=:topleft, ylims=(-0.1,2.7))
plot!(g, -1, 2, label="g(x)")

p2 = plot(legend=:topleft, ylims=(-0.1, 1.1))
plot!(h, -1, 2, label="h(x)")

plot(p1, p2, size=(700,200))
```

```
(Z, err) = quadgk(f, 0, 1) = (0.007029858406609658, 3.23578265950559e-11)
```

Out[10]:

問題: $x \leqq 0$ または $4 \leqq x$ のとき最小値 0 になり, $1 \leqq x \leqq 3$ のとき最大値 1 になる函数で任意有限回微分可能なものが存在することを示せ.

解答例: 上の問題の函数 $h(x)$ を用いて, 函数 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = h(x)h(4-x)$$

と定めると条件を満たしている. □

In [11]:
```
φ(x) = h(x)*h(4-x)

plot(size=(400, 200), ylims=(-0.1, 1.1))
plot!(φ, -1, 5, label="phi(x)")
```

Out[11]:

1.5.2 例2: 無限に振動する不連続函数

函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は $x = 0$ で不連続である. なぜならば $x \to 0$ のとき $f(x)$ は振幅を保ったまま無限に振動するからである.

In [12]:
```
f(x) = x == 0 ? 0 : sin(1/x)

p1 = plot(size=(400, 250), xlabel="x", ylabel="y")
plot!(f, -1.0, 1.0, ylims=(-1.2, 2.0), label="y = sin(1/x)")

p2 = plot(size=(400, 250), xlabel="x", ylabel="y")
plot!(f, -0.1, 0.1, ylims=(-1.2, 2.0), label="y = sin(1/x)")

plot(p1, p2, size=(700, 250))
```

Out[12]:

1.5.3 例3: 無限に振動する連続函数

函数

$$g(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は $x \to 0$ のとき無限に振動しながら 0 に収束するので連続である.

In [13]:
```
f(x) = x == 0 ? 0 : x*sin(1/x)

p1 = plot(size=(400, 250), xlabel="x", ylabel="y")
plot!(f, -3, 3, ylims=(-0.4, 1.5), label="y = x sin(1/x)")

p2 = plot(size=(400, 250), xlabel="x", ylabel="y")
plot!(f, -0.3, 0.3, ylims=(-0.25, 0.3), label="y = x sin(1/x)")

plot(p1, p2, size=(700, 250))
```

Out[13]:

1.5.4 例4: Weierstrass函数

$0 < a < 1$ について, 函数

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

は連続函数であり, Weierstrass 函数と呼ばれる. b が正の奇数であり, $ab > 1 + 3\pi/2$ のとき至るところ微分不可能なことが知られている.

- [ワイエルシュトラス関数 - Wikipedia (https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%AF%E3%82%A4%E3%82%A8%E3%83%AB%E3%82%B7%E3%83%A5%E3%83%88](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%AF%E3%82%A4%E3%82%A8%E3%83%AB%E3%82%B7%E3%83%A5%E3%83%88)

注意: 一般に, 区間 I 上の連続函数列 $f_n(x)$ について, x によらない非負実数列 M_n で

$$|f_n(x)| \leqq M_n \quad (x \in I), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

を満たしているならば,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in I)$$

で定義される函数 $F(x)$ は I 上の連続函数になる. このノートの一様種速の節を参照せよ. □

In [14]:

```
struct WeierstrassFunction{R<:Real, S<:Integer, T<:Integer} <: Function
    a::R;  b::S;  N::T
end
(F::WeierstrassFunction)(x) = sum(n->F.a^n*cos(F.b^n*π*x), 0:F.N)
```

In [15]:

```
F = WeierstrassFunction(0.6, 13, 100)
@show F.a*F.b, 1+3π/2

p1 = plot(legend=false, titlefontsize=11)
plot!(title="Weierstrass function: a = $(F.a), b = $(F.b)")
plot!(size=(600, 420), xlabel="x", ylabel="y")
plot!(F, -2, 2)

p2 = plot(legend=false, titlefontsize=11)
plot!(title="Weierstrass function: a = $(F.a), b = $(F.b)")
plot!(size=(600, 420), xlabel="x", ylabel="y")
plot!(F, -2/F.b, 2/F.b)

plot(p1, p2, size=(700, 250))
```

```
(F.a * F.b, 1 + (3π) / 2) = (7.8, 5.71238898038469)
```

Out[15]:

In [16]:
```
F = WeierstrassFunction(0.85, 7, 100)
@show F.a*F.b, 1+3π/2

p1 = plot(legend=false, titlefontsize=11)
plot!(title="Weierstrass function: a = $(F.a), b = $(F.b)")
plot!(size=(600, 420), xlabel="x", ylabel="y")
plot!(F, -2, 2)

p2 = plot(legend=false, titlefontsize=11)
plot!(title="Weierstrass function: a = $(F.a), b = $(F.b)")
plot!(size=(600, 420), xlabel="x", ylabel="y")
plot!(F, -2/F.b, 2/F.b)

plot(p1, p2, size=(700, 250))
```

```
(F.a * F.b, 1 + (3π) / 2) = (5.95, 5.71238898038469)
```

Out[16]:

In [17]:
```
F = WeierstrassFunction(1/4, 3, 100)
@show F.a*F.b, 1+3π/2

p1 = plot(legend=false, titlefontsize=11)
plot!(title="Weierstrass function: a = $(F.a), b = $(F.b)")
plot!(size=(600, 420), xlabel="x", ylabel="y")
plot!(F, -2, 2)

p2 = plot(legend=false, titlefontsize=11)
plot!(title="Weierstrass function: a = $(F.a), b = $(F.b)")
plot!(size=(600, 420), xlabel="x", ylabel="y")
plot!(F, -2/F.b, 2/F.b)

plot(p1, p2, size=(700, 250))
```

```
(F.a * F.b, 1 + (3π) / 2) = (0.75, 5.71238898038469)
```

Out[17]:

1.5.5 例5: 高木函数

$0 < w < 1$ について

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n s(2^n x), \qquad s(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$$

で定義される函数 $F(x)$ は連続函数である. $w = 1/2$ のとき $F(x)$ は高木函数と呼ばれる.

In [18]:
```
seesaw(x) = abs(x - round(x))
plot(seesaw, size=(400, 250), ylims=(-0.1, 0.7), label="seesaw(x)")
```

Out[18]:

In [19]:
```
struct TakagiFunction{R<:Real, T<:Integer} <: Function
    w::R;  N::T
end
(F::TakagiFunction)(x) = sum(n->F.w^n*seesaw(2^n*x), 0:F.N)
```

In [20]:
```
F = TakagiFunction(0.5, 100)

p1 = plot(legend=false, titlefontsize=11)
plot!(title="Takagi function: w = $(F.w)")
plot!(size=(600, 420), xlabel="x", ylabel="y")
x = 0:0.001:1
plot!(x, F.(x))

p2 = plot(legend=false, titlefontsize=11)
plot!(title="Takagi function: w = $(F.w)")
plot!(size=(600, 420), xlabel="x", ylabel="y")
x = 0.25:0.00025:0.50
plot!(x, F.(x))

plot(p1, p2, size=(700, 250))
```

Out[20]:

In [21]:
```
F = TakagiFunction(0.7, 100)

p1 = plot(legend=false, titlefontsize=11)
plot!(title="Takagi function: w = $(F.w)")
plot!(size=(600, 420), xlabel="x", ylabel="y")
x = 0:0.001:1
plot!(x, F.(x))

p2 = plot(legend=false, titlefontsize=11)
plot!(title="Takagi function: w = $(F.w)")
plot!(size=(600, 420), xlabel="x", ylabel="y")
x = 0.250:0.00025:0.50
plot!(x, F.(x))

plot(p1, p2, size=(700, 250))
```

Out[21]:

In [22]:
```
F = TakagiFunction(1/4, 100)

p1 = plot(legend=false, titlefontsize=11)
plot!(title="Takagi function: w = $(F.w)")
plot!(size=(600, 420), xlabel="x", ylabel="y")
x = 0:0.001:1
plot!(x, F.(x))

p2 = plot(legend=false, titlefontsize=11)
plot!(title="y = x(1-x)")
plot!(size=(600, 420), xlabel="x", ylabel="y")
x = 0:0.001:1
plot!(x, x.*(1.-x))

plot(p1, p2, size=(700, 250))
```

Out[22]:

2 一様連続性

$f(x)$ が $x = a$ で**連続**であるとは, $x \to a$ のとき $f(x) \to f(a)$ となることであった. 区間 I 上で定義された函数 $f(x)$ が**連続**であるとはすべての $x = a \in I$ で $f(x)$ が連続なことであると定める.

しかし, 一般に, 連続な $f(x)$ について, 各 $a \in I$ ごとに $x \to a$ のときの $f(x) \to f(a)$ の「収束の速さ」は一般に異なる. $x \to a$ のときの $f(x) \to f(a)$ の「収束の速さ」がすべての $a \in I$ について同時に上からおさえられるとき, $f(x)$ は I 上で**一様連続**であるという.

正確には一様連続性は次のように定義される.

定義: I 上の函数 f は I 上で**一様連続**であるとは, 任意に $\varepsilon > 0$ を与えたとき, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $a, x \in I$ について $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成立することである. □

$x \to a$ のとき $f(x) \to f(a)$ が成立するということは, x を a に近付けることによって $f(a)$ を $f(x)$ でいくらでも近似できるということである. $x \to a$ のとき $f(x) \to f(a)$ であるということは, 許される誤差 $\varepsilon > 0$ を与えたとき, ある $\delta > 0$ が存在して, $f(x)$ と $f(a)$ の違いを ε 未満におさえるためには x と a の違いを δ 未満におさえればよいということである.

単なる連続性の定義では δ の取り方は各 a ごとに違っていてもよい. δ を小さく取らなければいけない a においては $x \to a$ のときの $f(x) \to f(a)$ の「収束の速さ」は「遅い」ということである.

一様連続の定義は, すべての a について共通の $\delta > 0$ を選べることを意味している(すなわち $\delta > 0$ は $\varepsilon > 0$ に依存するが, $a \in I$ には依存しないようにできることを意味している).

2.1 閉区間上の連続函数が一様連続であること

定理: 閉区間上の連続函数は一様連続である. □

証明: f は閉区間 I 上の連続函数であるとし, $\varepsilon > 0$ であるとする. このとき, 任意の $x \in I$ に対して, ある $\delta_x > 0$ が存在して, $y \in I$ かつ $|y - x| < \delta_x$ ならば $|f(y) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる. $U_x = \left(x - \dfrac{\delta_x}{2}, x + \dfrac{\delta_x}{2}\right)$ とおくと, U_x 達は I を覆う. ゆえに, [閉区間に関するHeine-Borelの定理 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/01%20convergence.ipynb#閉区間に関するHeine-Borelの定理)](http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/01%20convergence.ipynb#閉区間に関するHeine-Borelの定理)より, 有限個の $x_1, \dots, x_r \in I$ で $U_{x_1}, \dots, U_{x_r}$ で I を覆うものが存在する. $\delta = \min\{\dfrac{\delta_1}{2}, \dots, \dfrac{\delta_r}{2}\}$ とおき, $a, x \in I$ かつ $|x - a| < \delta$ と仮定する. a はある U_{x_i} に含まれるので, $|a - x_i| < \dfrac{\delta_{x_i}}{2} < \delta_{x_i}$ となり,

$$|x - x_i| \leqq |x - a| + |a - x_i| < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leqq \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}$$

となるので,

$$|f(x) - f(a)| \leqq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで f が一様連続であることが示された. □

注意: 閉区間上の函数については, 連続函数と一様連続函数を区別しなくてもよい. □

問題: $\mathbb{R}$ 上の連続函数 $f(x)$ で $|x| \to \infty$ のとき $f(x) \to 0$ となるものが一様連続になることを示せ.

解答例: $\varepsilon > 0$ を任意に取る. $|x| \to \infty$ のとき $f(x) \to 0$ となるで, ある $R > 0$ が存在して, $|x| \geqq R$ ならば $|f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる. 閉区間 $[-3R, 3R]$ 上で連続函数 $f(x)$ は一様連続になるので, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x|, |y| \leqq 3R$ かつ $|x - y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となる. このとき, 実数 x, y が $|x - y| < \min\{\delta, R\}$ を満たしているならば, $|x| \leqq 2R$ のとき, $|y| \leqq R$, $|x - y| < \delta$ となるので, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となり, $|x| > 2R$ のとき, $|y| \geqq R$ となるので,

$$|f(x) - f(y)| \leqq |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる. これで, $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 全体で一様連続であることがわかった. □

2.2 連続だが一様連続ではない函数の例

問題: $x > 0$ の連続函数 $f(x) = 1/x$ は区間 $(0, 1]$ 上では一様連続ではないことを示せ.

解答例: 図を描けば, $\varepsilon > 0$ と $a > 0$ について,

$$x > 0,\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{$*$}$$

すなわち

$$x > 0,\ a - \delta < x < a + \delta \implies \frac{1}{a} - \varepsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{a} + \varepsilon$$

かつ $\delta > 0$ となるためには,

$$\delta \leqq a - \frac{1}{1/a + \varepsilon} = \frac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon} < a^2\varepsilon$$

でなければいけないことがわかる. したがって $a > 0$ を小さくすれば $\delta > 0$ はいくらでも小さくなる. ゆえに a と無関係に$(*)$を満たす $\delta > 0$ を取ることは不可能である. つまり $f(x)$ は $(0, 1]$ 上で一様連続ではない. □

問題: 任意に与えられた $r > 0$ について, $f(x) = 1/x$ は区間 $[r, \infty)$ 上で一様連続であることを示せ.

解答例: $\varepsilon > 0$ であるとする. $a^2\varepsilon/(1 + a\varepsilon)$ は a について単調増加函数なので, a が $[r, \infty)$ 内を動くとき, その最小値は $r^2\varepsilon/(1 + r\varepsilon)$ になる. それを δ とおけばすべての $a \in [r, \infty)$ について同時に $(*)$ が成立する. これで $f(x) = 1/x$ が $[r, \infty)$ 上一様連続であることがわかった. □

注意: 微分可能函数については, 区間 I 上でのグラフの傾きが幾らでも大きくなる函数は I 上で一様連続ではなくなるが, 区間 I 上でのグラフの傾きに上限がある場合には一様連続になる. □

In [23]:

```
f(x) = 1/x
x = 0.1:0.001:1

ε = 0.7

plot(xlims=(0,1), ylims=(0,10), size=(500, 350))
plot!(x, f.(x), label="y = 1/x", lw=2)

a = 0.15
δ₀ = a - 1/(1/a+ε)
δ₁ = 1/(1/a-ε) - a
c = :red
plot!([a-δ₀,a-δ₀], [0,f(a-δ₀)], color=c, label="")
plot!([a,a], [0,f(a)], color=c, lw=2, label="x = $a")
plot!([a+δ₁,a+δ₁], [0,f(a+δ₁)], color=c, label="")
plot!([0,a-δ₀], [f(a-δ₀),f(a-δ₀)], ls=:dash, color=c, label="y = 1/$a+$ε")
plot!([0,a], [f(a),f(a)], color=c, ls=:dash, lw=2, label="y = 1/$a")
plot!([0,a+δ₁], [f(a+δ₁),f(a+δ₁)], ls=:dashdot, color=c, label="y = 1/$a-$ε")

a = 0.5
δ₀ = a - 1/(1/a+ε)
δ₁ = 1/(1/a-ε) - a
c = :orange
plot!([a-δ₀,a-δ₀], [0,f(a-δ₀)], color=c, label="")
plot!([a,a], [0,f(a)], color=c, lw=2, label="x = $a")
plot!([a+δ₁,a+δ₁], [0,f(a+δ₁)], color=c, label="")
plot!([0,a-δ₀], [f(a-δ₀),f(a-δ₀)], ls=:dash, color=c, label="y = 1/$a+$ε")
plot!([0,a], [f(a),f(a)], color=c, ls=:dash, lw=2, label="y = 1/$a")
plot!([0,a+δ₁], [f(a+δ₁),f(a+δ₁)], ls=:dashdot, color=c, label="y = 1/$a-$ε")
```

Out[23]:

3 一様収束

3.1 函数列の各点収束の定義

各点収束の定義: 区間 I 上の函数の列 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ が函数 $\varphi(x)$ に**各点収束**するとは, **各** $x \in I$ **ごとに,** 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある番号 N が存在して,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (n \geqq N)$$

が成立することだと定める.

$$|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad (n \geqq N,\ x \in I)$$

が成立することだと定める. すなわち, 各 $x \in I$ ごとに,

$$f_n(x) \to \varphi(x) \quad (n \to \infty)$$

が成立するとき, 函数列 $f_n(x)$ は I 上で $\varphi(x)$ に各点収束するという. 各点収束においては, 各点 $x \in I$ ごとに $f_n(x)$ の $\varphi(x)$ への収束の速さは全く違っていてもよい. □

問題: 閉区間 $I = [0, 1]$ 上で函数列 $f_n(x) = x^n$ は函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

に各点収束することを示せ. $0 \leqq x < 1$ が 1 に近ければ近いほど, $f_n(x) = x^n$ の 0 に収束する速さは遅くなることに注意せよ. □

In [24]:

```
f(n,x) = x^n

x = 0:0.005:1
p1 = plot(xlims=(0,1), legend=:topleft)
for n in 1:12
    plot!(x, f.(n,x), label="n = $n")
end
plot(p1, size=(350,350), aspect_ratio=1, title="y = x^n")
```

Out[24]:

3.2 函数列の一様収束の定義

一様収束の定理: 区間 I 上の函数の列 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ が函数 $\varphi(x)$ に**一様収束**するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある番号 N が存在して, $x \geqq N$ ならば, **すべての** $x \in I$ **について一様に**

$$|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

が成立することだと定める. □

注意: 函数列 $f_n(x)$ の数値計算では, 区間 I 内の無限個の点から有限個の点 $x_1 < \cdots < x_L$ $(x_i \in I)$を選んで, 函数 $f_n(x)$ の代わりに配列 $[f_n(x_1), \ldots, f_n(x_L)]$ を扱うことが普通である. そのとき収束するかどうかの判定を $f_n(x_i)$ と $f_{n+1}(x_i)$ の違いの大きさがすべての $i = 1, \ldots, L$ について一斉に最初に決めておいた「許される誤差」 $\varepsilon > 0$ より小さくなったかどうかで判定することは, 一様収束に近い考え方で収束を判定していることになる. □

問題: 区間 I 上の函数 $\varphi(x)$ と函数の列 $f_n(x)$ について以下の条件が互いに同値であることを示せ:

(1) f_n は φ に I 上一様収束する.

(2) I 上の函数のsupノルム $\| \ \|_\infty$ について, $n \to \infty$ のとき $\|f_n - \varphi\|_\infty \to 0$ が成立する.

(3) 0 に収束する非負実数の列 c_n で $n \to \infty$ のとき $|f_n(x) - \varphi(x)| \leqq c_n$ $(x \in I)$を満たすものが存在する.

解答例: (1)ならば(2)を示そう. 条件(1)を仮定し, $\varepsilon > 0$ とする. (1)より, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならばすべての $x \in I$ について $|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon/2$ となる. そのとき, $n \geqq N$ ならば

$$\|f_n - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - \varphi(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

これで, $\|f_n - \varphi\|_\infty \to 0$ となることが示された. (1)ならば(2)であることがわかった.

(2)ならば(1)を示そう. (2)を仮定し, $\varepsilon > 0$ とする. (2)より, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $\|f_n - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ となる. そのとき, $n \geqq N$ かつ $x \in I$ ならば

$$|f_n(x) - \varphi(x)| \leqq \sup_{x \in I} |f_n(x) - \varphi(x)| = \|f_n - \varphi\|_\infty < \varepsilon.$$

これで, f_n が φ に I 上一様収束することが示された. (2)ならば(1)であることがわかった.

(2)ならば(3)を示そう. (2)の仮定のもとで, $c_n = \|f_n - \varphi\|_\infty$ とおくと, c_n は 0 に収束する非負実数列であり, $x \in I$ のとき

$$|f_n(x) - \varphi(x)| \leqq \sup_{x \in I} |f_n(x) - \varphi(x)| = \|f_n - \varphi\|_\infty = c_n.$$

これで(2)ならば(3)であることがわかった.

(3)ならば(2)を示そう. (3)の仮定のもとで, $n \to \infty$ のとき

$$\|f_n - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - \varphi(x)| \leqq c_n \to 0.$$

これで(3)ならば(2)であることがわかった. □

注意: 特に, supノルムに関する収束と一様収束は同じ意味であることがわかった. 一様収束を扱うときにはsupノルムを使うと議論がシンプルになりやすい. □

問題: 閉区間 $I = [0, 1]$ 上で函数列 $f_n(x) = x^n$ は函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

に一様収束**しない**ことを示せ.

解答例: $0 < x < 1$ のとき $|x| \geqq 1/2^{1/n}$ とすると, $f_n(x) \geqq 1/2$ となる. これで, $f_n(x)$ と $\varphi(x)$ の差の絶対値の大きさをすべての $x \in I$ について一斉に $1/2$ より小さくできないことがわかった. □

In [25]:

```
f(n,x) = x^n

x = 0:0.005:1

n = 3
p1 = plot(xlims=(-0.01,1.01), legend=:topleft, aspect_ratio=1)
plot!(x, f.(n,x), label="y = x^$n")
plot!(x[1:end-1], 1/2*ones(x[1:end-1]), label="", color=:red, ls=:dash, fill=(0.1, 0))
plot!([1,1], [1/2,1], label="", color=:red, alpha=0.1, lw=3)
plot!([1/2^(1/n), 1/2^(1/n)], [0, 1/2], label="x = 1/2^{1/$n}")

n = 9
p2 = plot(xlims=(-0.01,1.01), legend=:topleft, aspect_ratio=1)
plot!(x, f.(n,x), label="y = x^$n")
plot!(x[1:end-1], 1/2*ones(x[1:end-1]), label="", color=:red, ls=:dash, fill=(0.1, 0))
plot!([1,1], [1/2,1], label="", color=:red, alpha=0.1, lw=3)
plot!([1/2^(1/n), 1/2^(1/n)], [0, 1/2], label="x = 1/2^{1/$n}")

plot(p1, p2, size=(600, 250))
```

Out[25]:

3.3 連続函数列の一様収束先も連続になること

定理: 区間 I 上の連続な函数の列 f_n が函数 φ に一様収束するとき, 収束先の $\varphi(x)$ も I 上の連続函数になる.

証明: 区間 I 上の連続な函数の列 f_n が函数 φ に一様収束すると仮定し, $\varepsilon > 0$ であるとする. f_n が φ に一様収束することより, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ かつ $x \in I$ ならば $|f_n(x) - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ となる. $x_0 \in I$ を任意に取る. 函数 f_N の x_0 における連続性より, ある $\delta > 0$ が存在して, $x \in I$ かつ $|x - x_0| < \delta$ ならば $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ となる. ゆえに, $x \in I$ かつ $|x - x_0| < \delta$ ならば

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqq |\varphi(x) - f_n(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

これで, $\varphi(x)$ が任意の $x_0 \in I$ で連続なこと, すなわち, φ が I 上の連続函数であることが示された. □

定理: 区間 I 上の函数の列 $f_n(x)$ について, 函数列

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$$

が有限の値を持つ函数に I 上一様収束するとき, 函数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ も一様収束する. このとき, その函数項級数は**一様絶対収束**するという. □

証明: $F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$ は有限の値を持つ函数 $\Phi(x)$ に一様収束すると仮定する. F_n は Φ に一様収束しているので, $\|F_n - \Phi\|_\infty \to 0$ かつ $\Phi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ $(x \in I)$ となる. このとき, $x \in I$ かつ $m \geqq n$ とすると,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| &= \left|-\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \\ &\leqq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| = \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)| - \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \\ &\leqq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| - \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| = \Phi(x) - F_n(x) = |F_n(x) - \Phi(x)| \\ &\leqq \sup_{x\in I} |F_n(x) - \Phi(x)| \leqq \|F_n - \Phi\|_\infty.\end{aligned}$$

各 $x \in I$ ごとに $F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$ が有限の値に収束することから, $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ も収束するので(絶対収束), その収束先を $\varphi(x)$ と書く. すぐ上で示した不等式で $m \to \infty$ とすると, 任意の番号 n と $x \in I$ について,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \varphi(x)\right| \leqq \|F_n - \Phi\|_\infty$$

が得られる. 右辺は x に依存しない数列であり 0 に収束するので, $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ が $\varphi(x)$ に一様収束していることがわかる. □

次の定理は以上の2つの定理からただちに得られる.

定理: すべての $f_n(x)$ が区間 I 上の連続函数であり, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上一様絶対収束するならば, その収束先も連続函数になる. □

定理: 区間 I 上の函数の列 $f_n(x)$ に対して, 非負実数列 c_n で

$$|f_n(x)| \leqq c_n \quad (x \in I), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$$

を満たすものが存在するならば, 函数列 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上一様絶対収束する.

証明: 非負実数列 c_n で

$$|f_n(x)| \leqq c_n \quad (x \in I), \qquad C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$$

を満たすものが存在すると仮定する. そのとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty \qquad (x \in I)$$

となるので, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ は有限の値に収束する. その値を $\Phi(x)$ と書く. このとき, $x \in I$ ならば

$$0 \leqq \Phi(x) - \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k = C - \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

$C - \sum_{k=1}^{n} c_k$ は $n \to \infty$ で 0 に収束し, x に依存しないので, $\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$ が $\Phi(x)$ に一様収束することもわかった. これで, 函数列 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上一様絶対収束することがわかった. □

注意: 上の定理を使えば, 収束先の函数が不明であっても収束することがわかる場合がある. □

問題: $s > 1$ の函数 $f_n(s)$ を

$$f_n(s) = \frac{1}{n^s}$$

と定める. 1 より真に大きい実数 a を任意に取る. このとき $s \geqq a$ において, 函数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

が一様絶対収束することを示せ.

解答例: 各 $n \geqq 1$ ごとに $f_n(s) = 1/n^s$ は s に関する単調減少函数である. ゆえに

$$|f_n(s)| = \frac{1}{n^s} \leqq \frac{1}{n^a} \quad (s \geqq a).$$

そして, $a > 1$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ は有限の値に収束する. 以上によって, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は $s \geqq a$ で絶対収束する. □

注意: 上の問題の $a > 1$ はいくらでも 1 に近付けることができるので,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1)$$

は $s > 1$ における連続函数になることがわかる. □

注意: 実際にはもっとよいことが言える. $\zeta(s)$ は $s > 1$ でいくらでも項別微分可能であり, $s = 1$ を除いた複素平面全体に解析接続される. □

In [26]:

```
g(N, s) = sum(n->1/n^s, 1:N)
s = 1.01:0.01:5.00

p1 = plot(title="sum of 1/n^s for n=1,...,N")
plot!(ylims=(0.8, 5), xlabel="s")
plot!(s, zeta.(s), label="zeta(s)", lw=2)
for N in [3,10,30,100,300,1000]
    plot!(s, g.(N,s), label="N = $N", ls=:dash)
end
plot(p1, size=(500, 350))
```

Out[26]:

問題: $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続函数であり, $|x| \to \infty$ のとき $f(x) \to 0$ となっていると仮定する. このとき, 函数列 $f_n(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$ が $f(x)$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ.

解答例: 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. 上の方の問題の解答例で示したように, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続になる. ゆえに, ある $\delta > 0$ が存在して, $x, y \in \mathbb{R}$ かつ $|y - x| < \delta$ ならば $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ となる. そのとき $n > \dfrac{1}{\delta}$ とすると,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right| < \varepsilon$$

となる. これで, f_n が f に $\mathbb{R}$ 上一様収束することがわかった. □

3.4 Peano曲線

以下のプログラムのように n について帰納的に定義された $\leqq t \leqq 1$ の連続函数 $x_n(t) = \mathrm{Peano_}x(n,t)$ と $y_n(t) = \mathrm{Peano_}y(n,t)$ は $n \to \infty$ で一様収束し, その収束先 $x(t), y(t)$ は平面上の連続曲線 $(x(t), y(t))$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ を定める. その曲線は**Peano曲線**と呼ばれており, 正方形 $[0,1] \times [0,1]$ の内側を埋め尽くす.

問題: $x_n(t), y_n(t)$ がともに閉区間 $[0,1]$ 上で一様収束することを示せ.

解答例: $f_n(t)$ は $x_n(t)$ または $y_n(t)$ であるとする. そのとき

$$|f_n(t) - f_{n-1}(t)| \leqq \frac{1}{2^n} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

となっているので(下の方のプロットを参照せよ), $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f_{n-1}(t)| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$$

となる. ゆえに函数項級数

$$f_0(t) + (f_1(t) - f_0(t)) + (f_2(t) - f_1(t)) + (f_3(t) - f_2(t)) + \cdots$$

は閉区間 $[0,1]$ 上で一様絶対収束する. これは $f_n(t)$ が一様収束することを意味する. □

注意: $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$f(t) = f_n(t) + \sum_{k=n}^{\infty} (f_{k+1}(t) - f_k(t)), \qquad \sum_{k=n}^{\infty} |f_{k+1}(t) - f_k(t)| \leqq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n}$$

なので,

$$|f_n(t) - f(t)| \leqq \frac{1}{2^n} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

であることもわかる. □

問題: $x_n(t), y_n(t)$ の極限をそれぞれ $x(t), y(t)$ と書く. そのとき, 任意の正方形上の点 $(a,b) \in [0,1] \times [0,1]$ に対して, ある実数 $t \in [0,1]$ で $(x(t), y(t)) = (a,b)$ を満たすものが存在することを示せ.

解答例: $x_n(t), y_n(t)$ の作り方より(下の方のプロットを参照せよ), 任意の正の整数 n に対して, ある $t_n \in [0,1]$ で

$$|x_n(t_n) - a| \leqq \frac{1}{2^n}, \quad |y_n(t_n) - b| \leqq \frac{1}{2^n}$$

を満たすものが存在する. 数列 t_n は閉区間 $[0,1]$ 上の数列なので, そのある部分列 t_{n_k} $(1 \leqq n_1 < n_2 < \cdots)$ で収束するものが存在する. その収束先を $t \in [0,1]$ と書く. 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. $x(t), y(t)$ の連続性より, 十分に k を大きくすると

$$|x(t) - x(t_{n_k})| \leqq \varepsilon, \quad |y(t) - y(t_{n_k})| \leqq \varepsilon.$$

ゆえに, 以上と上の注意の内容を合わせると, $k \to \infty$ で,

$$|x(t) - a| \leqq |x(t) - x(t_{n_k})| + |x(t_{n_k}) - x_{n_k}(t_{n_k})| + |x_{n_k}(t_{n_k}) - a| \leqq \varepsilon + \frac{1}{2^{n_k}} + \frac{1}{2^{n_k}} \to \varepsilon,$$
$$|y(t) - b| \leqq |y(t) - y(t_{n_k})| + |y(t_{n_k}) - y_{n_k}(t_{n_k})| + |y_{n_k}(t_{n_k}) - b| \leqq \varepsilon + \frac{1}{2^{n_k}} + \frac{1}{2^{n_k}} \to \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ はいくらでも小さくできるので, $(x(t), y(t)) = (a,b)$. □

In [27]:

```
peano_x₀(t) = t < 1/2 ? 1/2 : t
peano_y₀(t) = t < 1/2 ? t : 1/2

n = 0
t = 0:1/(2*4^n):1
x = peano_x₀.(t)
y = peano_y₀.(t)
plot(size=(200,200))
plot!(title="Peano($n)", titlefontsize=10)
plot!(xlims=(0,1), ylims=(0,1))
plot!(aspect_ratio=1, legend=:false)
plot!(x, y)
```

Out[27]:

In [28]:

```
function peano_x(n, t)
    if n == 0
        peano_x₀(t)
    else
        if t < 1/(2*4^n)
            1/(2*2^n)
        elseif t < 1/4
            peano_y(n-1, 4t)/2
        elseif t < 2/4
            peano_x(n-1, 4t-1)/2
        elseif t < 3/4
            (1-peano_x(n-1, 3-4t))/2 + 1/2
        else
            (1-peano_y(n-1, 4-4t))/2 + 1/2
        end
    end
end

function peano_y(n, t)
    if n == 0
        peano_y₀(t)
    else
        if t < 1/(2*4^n)
            2^n*t
        elseif t < 1/4
            peano_x(n-1, 4t)/2
        elseif t < 2/4
            peano_y(n-1, 4t-1)/2 + 1/2
        elseif t < 3/4
            peano_y(n-1, 3-4t)/2 + 1/2
        else
            peano_x(n-1, 4-4t)/2
        end
    end
end

P = Plots.Plot[]
for n in 0:8
    t = 0:1/(2*4^n):1
    x = peano_x.(n,t)
    y = peano_y.(n,t)
    p = plot()
    plot!(title="Peano($n)", titlefontsize=10)
    plot!(xlims=(0,1), ylims=(0,1))
    plot!(aspect_ratio=1, legend=:false)
    plot!(x, y)
    push!(P, p)
end
plot(P..., size=(800,800), layout=@layout(grid(3,3)))
pngplot()
```

Peano(0)
Peano(1)
Peano(2)
Peano(3)
Peano(4)
Peano(5)
Peano(6)
Peano(7)
Peano(8)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

In [29]:

```
P = Plots.Plot[]
for n in 0:8
    t = 0:1/(2*4^n):1
    x = peano_x.(n,t)
    y = peano_y.(n,t)
    p = plot()
    plot!(title="Peano($n)", titlefontsize=10)
    plot!(xlims=(0,1), ylims=(0,1))
    plot!(aspect_ratio=1, legend=:false)
    plot!(t, x)
    plot!(t, y)
    push!(P, p)
end
plot(P..., size=(800,800), layout=@layout(grid(3,3)))
pngplot()
```

In [30]:

```
n = 8
px = plot()
py = plot()
t = 0:1/(2*4^n):1
x = peano_x.(n,t)
y = peano_y.(n,t)
plot!(px, title="Peano_x($n)", titlefontsize=10)
plot!(py, title="Peano_y($n)", titlefontsize=10)
plot!(px, xlims=(0,1), ylims=(0,1))
plot!(py, xlims=(0,1), ylims=(0,1))
plot!(px, legend=:topleft)
plot!(py, legend=:topleft)
plot!(px, t, x, label="$n", lw=0.3)
plot!(py, t, y, label="$n", lw=0.3)
plot(px, py, size=(600,500), layout=@layout(grid(2,1)), legend=false)
pngplot()
```

In [31]:

```
P = Plots.Plot[]
for n in 1:9
    t = 0:1/(2*4^n):1
    dx = peano_x.(n,t) - peano_x.(n-1,t)
    dy = peano_y.(n,t) - peano_y.(n-1,t)
    p = plot()
    plot!(title="Peano($n) - Peano($(n-1))", titlefontsize=10)
    plot!(xlims=(0,1), ylims=(-1/2,1/2))
    plot!(legend=:false)
    plot!(t, dx, lw=0.7)
    plot!(t, dy, lw=0.7)
    push!(P, p)
end
plot(P..., size=(800,600))
pngplot()
```

In [ ]:

```
```

05 微分可能函数 ¶

黒木玄

2018-04-20

- Copyright 2018 Gen Kuroki
- License: MIT https://opensource.org/licenses/MIT (https://opensource.org/licenses/MIT)

- Repository: https://github.com/genkuroki/Calculus (https://github.com/genkuroki/Calculus)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/05%20differentiable%20functions.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/05%20differentiable%20functions.ipynb)
- https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/05%20differentiable%20functions.pdf (https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/05%20differentiable%20functions.pdf)

このファイルは Julia Box (https://juliabox.com) で利用できる.

自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ.

論理的に完璧な説明をするつもりはない. 細部のいい加減な部分は自分で訂正・修正せよ.

目次

1 Landau記号
  1.1 数列版
  1.2 連続版
2 Laudau記号を使った微分可能性の定義
  2.1 連続函数
  2.2 微分可能函数
  2.3 C^n 級函数
3 微分商の記号法について
  3.1 微分商は真の分数商ではないという誤解について
  3.2 微分商の正当化
4 微分の基本性質
  4.1 Leibnitz則
  4.2 合成函数の微分則
5 平均値の定理
  5.1 Rolleの定理
  5.2 微分可能函数の平均値の定理
  5.3 C^1 級函数の積分版平均値の定理
  5.4 Cauchyの平均値の定理
6 極限の微分・積分の順序交換
  6.1 極限と積分の順序交換
  6.2 極限と微分の順序交換

In [1]:

```
using Plots
gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn) = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    display("text/html", """<img src="data:$mime; base64,$base64">""")
end

using SymPy
#sympy[:init_printing](order="lex") # default
#sympy[:init_printing](order="rev-lex")

using SpecialFunctions
using QuadGK
import PyPlot
```

1 Landau記号

1.1 数列版

数列 a_n, b_n について

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成立するとき, 量 a_n を $o(b_n)$ と書くことがある:

$$a_n = o(b_n).$$

例えば

- $n = o(n^2)$.
- $n^{100} = o(e^n)$.
- $\log n = o(n)$.

ある非負の定数 M が存在して, 十分大きな n について

$$|a_n| \leqq M|b_n|$$

が成立するとき, 量 a_n を $O(b_n)$ と書くことがある:

$$a_n = O(b_n).$$

例えば

- $3n^2 + 100n + 26 = O(n^2)$.
- $n \log n - n + \frac{1}{2}\log(2\pi n) = O(n \log n)$.

以上で定義した $o(b_n)$ と $O(b_n)$ を**Landau記号**と呼ぶ.

違うものを同じLandau記号の $o(b_n)$ や $O(b_n)$ で表すことのがあるので注意しなければいけない. 例えば $O(n) - O(n) = 0$ とはならず, $O(n) - O(n) = O(n)$ となる.

$o(b_n)$ の量は $O(b_n)$ の量にもなる.

問題: $n \to \infty$ のとき a_n/b_n が収束するならば $a_n = O(b_n)$ であることを示せ.

解答例: a_n/b_n が C に収束しているなら, $|a_n/b_n|$ は $|C|$ に収束するので, $M = |C| + 1$ とおくと, 十分大きな n について $|a_n/b_n| \leqq |C| + 1 = M$ すなわち $|a_n| \leqq M|b_n|$ が成立する. □

1.2 連続版

$x \to \infty$ におけるLandau記号 $o(g(x))$, $O(g(x))$ は上の数列の場合と同様に定義される.

有限の a に関する $x \to a$ におけるLandau記号 $o(g(x))$, $O(g(x))$ も同様に定義される.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \quad (x \to a)$$

が成立するとき, $f(x) = o(g(x))$ と書き, ある非負の定数 M とある $\delta > 0$ が存在して

$$|f(x)| \leqq M|g(x)| \quad (|x-a| \leqq \delta)$$

が成立するとき, $f(x) = O(g(x))$ と書く.

例えば,

- $x \to 0$ において $x \log x \to 0$ なので

$$x = o(1/\log x), \quad \log x = o(1/x) \quad (x \to 0).$$

- $x \to a$ において,

$$(x-a)^2 + (x-a)^3 + (x-a)^4 + \cdots = O\left((x-a)^2\right) = o(x-a) \quad (x \to a).$$

- どんなに大きな n についても, $x \searrow 0$ において $e^{-1/x}/x^n \to 0$ なので

$$\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = o(x^n) \quad (x \searrow 0).$$

問題: 以上に出て来た例を確認(証明)せよ. さらに以上に出て来ていない例で面白そうなものを自分で作れ. □

2 Laudau記号を使った微分可能性の定義

2.1 連続函数

函数 $f(x)$ が x において**連続**であることの定義は, Landau記号を使うと

$$f(x+h) = f(x) + o(1) \quad (h \to 0)$$

と書ける. $o(1)$ は $h \to 0$ で 0 に収束する項を意味する. 定義域に含まれるすべての x において函数 $f(x)$ が連続であるとき, 函数 $f(x)$ は**連続函数**であるという.

2.2 微分可能函数

函数 $f(x)$ が x において**微分可能**であることの定義は, ある数 $f'(x)$ が存在して,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to f'(x) \quad (h \to 0)$$

が成立することである. この条件はLandau記号を使うと,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$$

と書き直される. ここで $o(h)$ は $h \to 0$ のとき $o(h)/h \to 0$ となるような量を意味する. $o(h)$ を h より**高次の微小量**と呼ぶことがある.

定義域に含まれるすべての x において函数 $f(x)$ が微分可能であるとき, 函数 $f(x)$ は**微分可能函数**であるという. x を**微係数** $f'(x)$ に対応させる函数を $f(x)$ の**導函数**(derivative)と呼ぶ.

以上をまとめると,

連続性: $f(x+h) = f(x) + o(1)$ $(h \to 0)$.

微分可能性: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$ $(h \to 0)$.

このように書けばこれらは

$$f(x+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h + \cdots + a_k h^k + o(h^k)$$

の形に一般化可能であることが明瞭になる. 後で実際にこの一般化を実行する(Taylorの定理).

注意: 解析学では

知りたい量 = 相対的によくわかる量 + 誤差

というような理解の仕方が重要になる場合が多い. 函数の連続性の定義の

$$f(x+h) = f(x) + o(1) \quad (h \to 0)$$

においては, $f(x+h), f(x), o(1)$ のそれぞれ「知りたい量」「想定的によくわかる量」「誤差」とも解釈できる. 函数の微分可能性の定義

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h) \quad (h \to 0)$$

においては, $f(x+h), f(x) + f'(x)h, o(h)$ のそれぞれ「知りたい量」「想定的によくわかる量」「誤差」とも解釈できる. $f(x) + f'(x)h$ の中には h と同オーダーの微小量 $f'(x)h$ を含んでいるので, 誤差の部分は h より微小なオーダーになっていなければいけない. 実際, 微分可能性の定義において, 誤差の部分は $o(h)$ のオーダーになっていなければいけないとしている. $o(h)$ は h で割って, $h \to 0$ としたときに 0 に収束する量なので, h よりも微小なオーダーになっていると思える. □

2.3 C^n 級函数

連続函数を C^0 **級**函数と呼ぶ.

函数 f が微分可能でかつ導函数が連続なとき f は C^1 **級**であるという. そのとき f は**連続微分可能**であると言うこともある.

より一般に, f が n 回微分可能でかつその n 階の導函数 $f^{(n)}$ が連続なとき, f は C^n **級**であるという.

任意有限回微分可能な函数を C^∞ **級函数**と呼ぶ.

C^n 級函数(class-C^n function)を C^n **函数** (C^n-function) と呼ぶことも多い.

問題: 微分可能だが C^1 級でない函数の例を挙げよ.

解答例: 函数 f を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定める. このとき, $x \neq 0$ ならば $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ である. そして, $x \to 0$ のとき

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = x\sin(1/x) \to 0$$

なので, f は $x = 0$ でも微分可能であり, $f'(0) = 0$ である. これで f が微分可能であることがわかった. しかし, $x \to 0$ で $f'(x)$ の中の $\cos(1/x)$ が無限に振動して収束しないので, f' は $x = 0$ で不連続である. これで f は C^1 級ではないことがわかった. □

問題: 上の問題の $x^2 \sin(1/x)$ を非負の整数 n に対する $x^n \sin(1/x)$ で置き換えた場合について考えてみよ. その場合に得らえる函数は何回微分可能であるか? 最大回数の微分の結果得られる導函数は連続であるか? まず, $n = 0, 1, 3, 4$ の場合について考えてみよ. □

解答例略.

In [2]:
```
f(x) = x == 0 ? 0 : x^2*sin(1/x)
g(x) = x == 0 ? 0 : 2x*sin(1/x) - cos(1/x)

p1 = plot(size=(400, 250), xlabel="x", ylabel="y", legend=:topleft)
plot!(f, -0.2, 0.2, ylims=(-0.05, 0.05), label="y = x^2 sin(1/x)")

p2 = plot(size=(400, 250), xlabel="x", ylabel="y", legend=:topleft)
plot!(g, -0.2, 0.2, ylims=(-1.1, 2.0), label="y = 2x sin(1/x) - cos(1/x)")

plot(p1, p2, size=(700, 250))
```

Out[2]:

3 微分商の記号法について

3.1 微分商は真の分数商ではないという誤解について

微分可能函数 $y = f(x)$ の導函数を

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

など色々な記号で書くことがある. そのときに,

> $\dfrac{dy}{dx}$ は分数ではない.

> $\dfrac{dy}{dx}$ は正確には dy わる dx を意味しない.

などと**困ったこと**をいう人達が存在する.

実際には適切に dy, $df(x)$, dx などの記号を定義することによって, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx}$ を一切の誤差がない正確な分数を意味するとみなすこともできる. そのスタイルは現代的な微分形式の定義にも繋がる話でもあるので, 「分数ではない」などと誤解したままにしておくことはもったいないことである.

例えば, 高木貞治著『解析概論』の第13節の最後(p.37)には次のように書いてある:

> 〜, 記号 $\dfrac{dy}{dx}$ において dx および dy が各々独立の意味を有するから, $\dfrac{dy}{dx}$ は商としての意味を有する. すなわち'微分商'というものである.

> このように, 現代的の精密論法によって, Leibnitzの漠然たる'微分商'が合理化された. 〜

もちろん, 高木貞治が正しい.

3.2 微分商の正当化

$y = f(x)$ は微分可能であるとし, x を任意に固定しておく.

$y = f(x)$ は x で微分可能なので, ある数 $f'(x)$ が存在して,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$$

が成立している. h を

$$h = dx = \Delta x$$

と書くことにし,

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x), \quad dy = df(x) = f'(x)\,dx$$

とおく. このとき,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \quad \Delta f(x) = f(x+dx) - f(x) = df(x) + o(dx).$$

$\Delta y = \Delta f(x)$ と $dy = df(x)$ の定義の違いに注意せよ. それらは $\Delta x = dx$ よりも高次の微小量 $o(\Delta) = o(dx)$ の分だけ違う. このように定義しておけば, 自明に真の分数商として,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

が成立している. このような「みもふたもない方法」によって dy や $df(x)$ のような量を定義することは現代数学の特徴の一つでもある. dx や $dy = df(x)$ は「微小」である必要はまったくない. 例えば $dx = 100$ であっても構わない.

In [3]:

```
f(x) = x^2
df(x,dx) = 2x*dx
g(x,ξ) = f(x) + df(x, ξ-x)
x = 3
dx = 2
ξ = 2:0.01:6.5

P = PyPlot.figure(figsize=(6.4,6))
PyPlot.ylim(minimum(g.(x, ξ)), 40)
PyPlot.xlabel("ξ")
PyPlot.ylabel("y")
PyPlot.plot(ξ, f.(ξ), label="y = f(ξ)", color="black")
PyPlot.plot(ξ, g.(x, ξ), label="y = f(x) + f'(x)(ξ-x)", color="blue")
PyPlot.plot([x, x], [minimum(g.(x, ξ)), f(x)], label="ξ = x", color="gray", ls="dashed")
PyPlot.plot([x+dx, x+dx], [minimum(g.(x, ξ)), f(x+dx)], color="lightgrey", ls="dotted")
PyPlot.plot([x+dx, x+dx], [f(x), g(x,x+dx)], label="ξ = x + dx", color="orange", ls="dotted")
PyPlot.plot([minimum(ξ), maximum(ξ)], [f(x), f(x)], color="gray", ls="dotted")
PyPlot.plot([x, x+dx], [f(x), f(x)], label="y = f(x)", color="red", ls="dotted")
PyPlot.plot([minimum(ξ), maximum(ξ)], [f(x+dx), f(x+dx)], label="y = f(x+dx)", color="black", ls="dotted")
PyPlot.plot([minimum(ξ), maximum(ξ)], [g(x,x+dx), g(x,x+dx)], label="y = f(x) + df(x)dx", color="blue",
ls="dotted")
PyPlot.text(2.8, 5, "x")
PyPlot.text(5.1, 5, "x + dx")
PyPlot.text(2.5, 10, "y")
PyPlot.text(3.8, 22, "y + dy", color="blue")
PyPlot.text(3.8, 26, "y + Δy", color="black")
PyPlot.text(5, 33, "y = f(ξ)", color="black")
PyPlot.text(5.8, 30.5, "tangent line", color="blue")
PyPlot.annotate("dx", xy=(3.01, 8), xytext=(3.9, 7.5), arrowprops=Dict("arrowstyle" => "->"))
PyPlot.annotate("", xy=(4.99, 8), xytext=(4.1, 8), arrowprops=Dict("arrowstyle" => "->"))
PyPlot.annotate("dy", xy=(5.1, 9.01), xytext=(5.01, 15), arrowprops=Dict("arrowstyle" => "->"))
PyPlot.annotate("", xy=(5.1, 21), xytext=(5.1, 16), arrowprops=Dict("arrowstyle" => "->"))
PyPlot.annotate("Δy", xy=(5.4, 9.01), xytext=(5.31, 15), arrowprops=Dict("arrowstyle" => "->"))
PyPlot.annotate("", xy=(5.4, 25), xytext=(5.4, 16), arrowprops=Dict("arrowstyle" => "->"))
PyPlot.text(2, 38, "Δy = f(x+Δx) - f(x),  Δx = dx")
PyPlot.text(2, 34, "tangent line: y = f(x) + f'(x)(ξ - x)", color="blue")
PyPlot.text(2, 32, "     dy = f'(x)dx,    dy/dx = f'(x)", color="blue")
#PyPlot.legend()
#display(P)
;
```

4 微分の基本性質

4.1 Leibnitz則

微分可能な函数 $f(x)$, $g(x)$ の積 $h(x) = f(x)g(x)$ も微分可能であり,

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

証明: f, g は微分可能なので,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \varepsilon(h)h, \qquad \varepsilon(h) \to 0 \quad (h \to 0), \\ g(x+h) &= g(x) + g'(x)h + \delta(h)h, \qquad \delta(h) \to 0 \quad (h \to 0) \end{aligned}$$

と書ける. ゆえに

$$\begin{aligned} h(x+h) &= f(x+h)g(x+h) = f(x)g(x) + (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))h + \eta(h)h, \\ \eta(h) &= f'(x)g'(x)h + (f(x) + f'(x)h)\delta(h) + (g(x) + g'(x)h)\varepsilon(h) + \varepsilon(h)\delta(h)h \end{aligned}$$

となることを確認できる. そして, $h \to 0$ のとき $\eta(h) \to 0$ なので, h も微分可能で $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ となることがわかる. □

問題: 部分可能な函数 f, g について

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

となることを示せ.

解法1: n に関する帰納法. $n = 0$ のとき

$$(fg)^{(0)} = fg = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(0-k)} g^{(k)}.$$

$n = 1$ のとき

$$(fg)' = f'g + fg' = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(1-k)} g^{(k)}.$$

$n = 2$ のとき

$$\begin{aligned} (fg)'' &= (f'g + fg')' \\ &= f''g + f'g' + f'g' + fg'' \\ &= f''g + 2f'g' + fg'' = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} f^{(2-k)} g^{(k)}. \end{aligned}$$

$n = 3$ のとき

$$\begin{aligned} (fg)''' &= (f''g + 2f'g' + fg'')' \\ &= f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg''' \\ &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''' = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} f^{(3-k)} g^{(k)}. \end{aligned}$$

$n = 4$ のとき

$$\begin{aligned} (fg)''' &= (f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''')' \\ &= f''''g + f'''g' + 3f'''g' + 3f''g'' + 3f''g'' + 3f'g''' + f'g''' + fg'''' \\ &= f''''g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + fg'''' = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} f^{(4-k)} g^{(k)}. \end{aligned}$$

n の場合に成立しているならば, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ より,

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(n+1-k)}g^{(k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)}.
\end{aligned}
$$

と $n+1$ の場合も成立している. □

解法2: 二項定理より,

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-k}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k
$$

なので, これを $f(x)g(y)$ に作用させると,

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^n (f(x)g(y)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(y).
$$

以上において $y=x$ と置けば欲しい結果が得られる. □

4.2 合成函数の微分則

微分可能な函数 $f(y)$, $g(x)$ の合成 $h(x)=f(g(x))$ も微分可能であり,

$$
h'(x) = f'(g(x))g'(x).
$$

証明: f, g は微分可能なので,

$$
\begin{aligned}
f(y+k) &= f(y)+f'(y)k+\varepsilon(k)k, \qquad \varepsilon(k)\to 0 \quad (k\to 0), \\
g(x+h) &= g(x)+g'(x)h+\delta(h)h, \qquad \delta(h)\to 0 \quad (h\to 0)
\end{aligned}
$$

と書ける. ゆえに $y=g(x)$, $k=g'(x)h+\delta(h)h$ とおくと, $h\to 0$ のとき $k\to 0$ であり,

$$
\begin{aligned}
&h(x+h) = f(g(x+h)) = f(y+k) = f(g(x))+f'(g(x))g'(x)h+\eta(h)h, \\
&\eta(h) = f'(g(x))\delta(h)+\varepsilon(k)(g'(x)+\delta(h))
\end{aligned}
$$

であり, $h\to 0$ のとき $\eta(h)\to 0$ となるので, h も微分可能でかつ $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ となることがわかる. □

5 平均値の定理

5.1 Rolleの定理

Rolleの定理: $a<b$ であるとし, f は閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続函数であり, 開区間 (a,b) 上で微分可能であると仮定する. もしも $f(a)=f(b)$ ならばある $\xi\in(a,b)$ で $f'(\xi)=0$ を満たすものが存在する.

証明: 閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続函数 f は最大値 $f(\xi)$, $\xi\in[a,b]$ と最小値 $f(\eta)$, $\eta\in[a,b]$ を持つ. もしも f が $[a,b]$ 上の定数函数ならば任意の $x\in(a,b)$ で $f'(x)=0$ となる. f は $[a,b]$ 上の定数函数ではないと仮定する. そのとき, f の最大値 $f(\xi)$ または最小値 $f(\eta)$ は $f(a)=f(b)$ と一致しない. 最大値 $f(\xi)$ が $f(a)=f(b)$ と一致しないと仮定しよう. (最小値の側が一致しない場合も以下の議論は同様である. もしくは f の代わりに $-f$ を考えればよい.) そのとき $\xi\neq a,b$ となるので $\xi\in(a,b)$ である. $f(\xi)$ は f の I 上での最大値なので, $0<h<\min\{\xi-a, b-\xi\}$ のとき, $\dfrac{f(\xi-h)-f(\xi)}{-h}\geqq 0$ なので $h\searrow 0$ として $f'(\xi)\geqq 0$ となり, $\dfrac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\leqq 0$ なので $h\searrow 0$ として $f'(\xi)\leqq 0$ となることがわかる. ゆえに $f'(\xi)=0$. □

注意: Rolleの定理の証明は $f(a)=f(b)$ のとき, a と b のあいだで $f(x)$ が極値を取り, そこで微係数が 0 になることを意味している. グラフを描いてみれば当然成立して欲しい結果であることがわかる. □

5.2 微分可能函数の平均値の定理

平均値の定理: $a < b$ であるとし, f が閉区間 $[a,b]$ 上の連続函数であり, 開区間 (a,b) 上で微分可能函数ならば, ある実数 ξ で

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi), \quad a < \xi < b$$

を満たすものが存在する.

証明: $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ とおくと, $g(a) = g(b) = \dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$ なので, Rolleの定理より, ある $\xi \in (a,b)$ で $g'(\xi) = 0$ を満たすものが存在する. $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ なので欲しい結果が得られた. □

注意: 平均値の定理は $(a,f(a))$ と $(b,f(b))$ を通る直線 $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ を平行移動して $y = f(x)$ のグラフに接するようにできるという意味を持っている. 次のセルの図も見よ. □

In [4]:

```
f(x) = 2 - 3x + x^2
g(x) = x - 2
x = 0.9:0.05:3.1
plot(size=(500,350))
plot!(legend=:topleft)
plot!(x, f.(x), label="y = f(x)")
plot!([1,3], [f(1), f(3)], label="straight line from (a,f(a)) to (b,f(b))")
plot!([1,3], [g(1), g(3)], ls=:dash, label="parallel tangent line")
plot!([2,2], [-1,0], ls=:dash, label="x = xi")
```

Out[4]:

平均値の定理の不等式版: f は微分可能函数であるとし, $a < b$ であるとする. $a < t < b$ で $|f'(t)| \leqq M$ となっているならば $|f(b)-f(a)| \leqq M|b-a|$ となる.

証明: 平均値の定理より, ある実数 c で $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$, $a < c < b$ を満たすものが存在する. そのとき

$$|f(b)-f(a)| = |f'(c)||b-a| \leqq M|b-a|. \qquad \square$$

平均値の定理はこの不等式版の形式で使われることが多い.

問題: f は微分可能函数であるとし, $a < b$ であるとする. $a < t < b$ で $f'(t) = 0$ ならば $f(b) = f(a)$ でなることを示せ.

解答例1: 平均値の定理より, ある実数 c で $a < c < b, f(b)-f(a) \leqq f'(c)(b-a)$ を満たすものが存在する. $a < t < b$ で $f'(t) = 0$ なので $f'(c) = 0$ となるので, $f(b)-f(b) = f'(c)(b-a) = 0$ である. ゆえに $f(b) = f(a)$ となる. □

解答例2: $a < t < b$ で $|f'(t)| = 0$ なので, 平均値の定理(の不等式版)より, $|f(b)-f(a)| \leqq 0|b-a| = 0$. ゆえに $f(b) = f(a)$ となる. □

上の問題の結果は, 導函数が恒等的に 0 になる微分可能函数は定数函数になることを意味している.

問題: f, g は区間 I 上の微分可能函数であるとする. 区間 I 上で恒等的に $f' = g'$ ならば $f-g$ は区間 I 上の定数函数になる.

解答例: $h = f-g$ とおくと, 区間 I 上で恒等的に $f' = g'$ ならば区間 I 上で恒等的に $h' = 0$ となるので, 上の問題の結果より, h は区間 I 上の定数函数になる. □

5.3 C^1 級函数の積分版平均値の定理

平均値の定理の積分版: $a < b$ であるとする. 閉区間 $[a, b]$ 上の C^1 級函数 f について

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt. \qquad \square$$

証明についてはノート「積分 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/09%20integration.ipynb)」の対応する節 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/09%20integration.ipynb#性質(G)-微分積分学の基本定理2)を参照せよ.

注意: 解析学ユーザー的には C^1 級まで条件を強めても困ることはない. 多くの議論を微分可能性の仮定だけで実行可能なのだが, 導函数が連続函数になるとは限らないので, 議論が技巧的になってしまう傾向がある. そうなることを避けたければ C^1 級まで仮定を強めた方がよい. その場合に利用できる平均値の定理の積分版の式は積分について知っている人ならばみんな知っている公式に過ぎない. $\square$

平均値の定理の不等式版: f は C^1 級函数であるとし, $a < b$ であるとする. $a < t < b$ で $|f'(t)| \leqq M$ となっているならば $|f(b) - f(a)| \leqq M|b - a|$ となる.

証明:

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_a^b f'(t)\,dt\right| \leqq \int_a^b |f'(t)|\,dt \leqq \int_a^b M\,dt = M|b - a|. \qquad \square$$

中間値の定理から導かれる補題: $a < b$ であるとする. 閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続函数 $g(t)$ に対して, ある実数 $c \in [a, b]$ で

$$\int_a^b g(t)\,dt = g(c)(b - a)$$

を満たすものが存在する. (数値例が下の方で計算されている.)

証明: $[a, b]$ 上での $g(t)$ の最小値と最大値をそれぞれ $g(\alpha)$, $g(\beta)$ $(\alpha, \beta \in [a, b])$ と書くと,

$$\int_a^b g(t)\,dt \geqq \int_a^b g(\alpha)\,dt = g(\alpha)(b - a), \qquad \int_a^b g(t)\,dt \leqq \int_a^b g(\beta)\,dt = g(\beta)(b - a)$$

より

$$g(\alpha) \leqq \frac{1}{b - a}\int_a^b g(t)\,dt \leqq g(\beta).$$

ゆえに, 中間値の定理より, ある実数 $c \in [a, b]$ で

$$g(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b g(t)\,dt, \qquad \text{すなわち} \qquad \int_a^b g(t)\,dt = g(c)(b - a)$$

を満たすものが存在する. $\square$

上の中間値の定理から導かれる補題を平均値の定理の積分版に適用すると次が得られる.

平均値の定理の積分版2: $a < b$ であるとする. f が $[a, b]$ 上の実数値 C^1 級函数ならば, ある実数 $c \in [a, b]$ が存在して,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt = f(c)(b - a). \qquad \square$$

In [5]:

```
# 中間値の定理の証明に使われる二分法の函数としての実装
function bisection(f, a, b; atol=eps(), maxiter=10^3)
    f(a)*f(b) > 0 && return NaN
    aₙ, bₙ = a, b
    k = 0
    while abs(aₙ - bₙ) > atol
        k > maxiter && return NaN
        c = (aₙ+bₙ)/2
        if f(bₙ)*f(c) ≥ 0
            aₙ, bₙ = aₙ, c
        else
            aₙ, bₙ = c, bₙ
        end
        k += 1
    end
    return (aₙ+bₙ)/2
end

# 中間値の定理から導かれる補題を次の g(x) と a,b に適用してみる.
g(x) = 5 + x + 2sin(x)
a, b = -3, 5
x = a:0.05:b

t = symbols("t", real=true)
@show g(t)
@show S = integrate(g(t), (t,a,b))
@show S = N(S)

h(x) = g(x) - S/(b-a)
@show h(t)
@show c = bisection(h, a, b)

plot(size=(400,250), legend=:topleft)
plot!(xlims=(a-0.5, b+0.5), lims=(0,9))
plot!(x, g.(x), label="int_a^b g(t) dt", fill=(0, 0.2))
plot!([c,c], [0,g(c)], ls=:dash, label="x = c")
plot!(x, fill(g(c), length(x)), fill=(g, 0.5), color=:pink, label="")
```

```
g(t) = t + 2*sin(t) + 5
S = integrate(g(t), (t, a, b)) = 2*cos(3) - 2*cos(5) + 48
S = N(S) = 45.452690635872656
h(t) = t + 2*sin(t) - 0.681586329484082
c = bisection(h, a, b) = 0.22851790816319195
```

Out[5]:

5.4 Cauchyの平均値の定理

Cauchyの平均値の定理: $f(t)$, $g(t)$ は微分可能函数であるとし, $a < b$ であるとし, $f(b) \neq f(a)$ であると仮定する. このとき, ある実数 c で

$$\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}, \qquad a < c < b \tag{$*$}$$

を満たすものが存在する. □

この定理はこのノート群では使用しない. Cauchyの平均値の定理については高木貞治『解析概論』の第18節の定理21とその証明を参照せよ.

$(f(t), g(t))$ の描く軌跡は平面上の曲線になる. $(*)$ の最初の式の左辺は, 曲線上の点 $(f(a), g(a))$, $(f(b), g(b))$ を通る直線の傾きになる. その直線を平行移動して曲線に接するようにできる. 接点 $(f(c), g(c))$ における測度ベクトル $(f'(c), g'(c))$ の傾きが $(*)$ の最初の式の右辺になる.

問題: 図を描いてみよ. □

In [6]:

```
f(t) = t/2
g(t) = 2 - 3t/2 + t^2/4
h(x) = x - 2
t = 1.8:0.05:6.2
plot(size=(500,350))
plot!(legend=:topleft)
scatter!([f(2)], [g(2)], markersize=3, label="(f(a),g(a))")
scatter!([f(6)], [g(6)], markersize=3, label="(f(b),g(b))")
plot!(f.(t), g.(t), label="(f(t),g(t))")
plot!([f(2),f(6)], [g(2), g(6)], label="")
plot!([1,3], [h(1), h(3)], ls=:dash, label="")
scatter!([f(4)], [g(4)], markersize=3, label="(f(c),g(c))")
plot!([2,2.5], [h(2), h(2.5)], line=:arrow, lw=2, label="velocity vector (f'(c),g'(c))")
```

Out[6]:

6 極限の微分・積分の順序交換

一様収束極限と積分の順序交換が可能であることの証明は易しい. その易しい積分の場合の結果を使って, ある適切な条件を満たす極限と微分の交換可能性を証明しよう.

注意: 計算するときに極限の交換の条件を気にし過ぎて, 必要な計算をできなくなったりしないように注意して欲しい. 極限の順序交換の議論に慣れてくれば, ノータイムで極限の順序交換を論理的に正当化できる場合が増える. そういうやり方に慣れていない段階で「極限の順序交換をしてよいのかどうか気になって計算を先に進められない」ということになるのは非常にまずい. 極限の順序交換を気にせずに, 非常に複雑な微積分の計算をスムーズに行う能力も重要である. 複雑な計算を最後までやり遂げて, 論理的に厳密な正当化を行う価値があることが判明してから, 極限の順序交換に関する細かい議論を行っても遅くない. □

余談: 筆者は学生時代に複数の解析学が専門の数学者達から「計算するときには極限の順序交換の正当化については気にするべきではない」と教わった. □

6.1 極限と積分の順序交換

定理: $a < b$ であるとし, f_n は閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続函数の列であり, I 上で一様収束しているならば, その収束先の函数も連続函数になり,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

が成立している.

証明: f_n の収束先の函数を f と書く. ノート「[連続函数 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/04%20continous%20functions.ipynb)](http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/04%20continous%20functions.ipynb)」で f も連続函数になることはすでに示してある. そして, 閉区間 $[a, b]$ 上のsupノルム $\|g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$ について

$$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty \leqq \|f_n - f\|_\infty \quad (x \in [a,b])$$

であり, f_n が f に一様収束することと $\|f_n(x) - f(x)\|_\infty \to 0$ は同値なので,

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \leqq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$
$$\leqq (b-a)\|f_n(x) - f(x)\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty).$$

これで, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ が示された.

6.2 極限と微分の順序交換

定理(極限と微分の順序交換): $a < b$ であるし, f_n は開区間 (a,b) 上の C^1 級函数の列であり, 開区間 (a,b) に含まれる任意の閉区間 I 上で f_n と f_n' は一様収束していると仮定する(このとき f_n, f_n' は**局所一様収束**しているという). このとき, f_n は開区間 (a,b) 全体で各点収束しており, その収束先の函数も C^1 級になり, 任意の $x \in (a,b)$ において,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x) = \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

が成立している.

証明: $x \in (a,b)$ を任意に取り, $a < a' < x < b' < b$ を満たす a', b' を任意に選んで, $I = [a', b']$ とおく.

f_n, f_n' は I 上で一様収束しているので, 特に数列 $f_n(x), f_n'(x)$ も収束している. これで f_n, f_n' が開区間 (a,b) 全体で各点収束していることがわかった. f_n, f_n' それぞれの各点収束先の函数を f, g と書くことにする.

f_n, f_n' は閉区間 I 上でそれぞれ f, g に一様収束するので, f, g も閉区間 I 上の連続函数になる. 閉区間 I の両端は a, b に幾らでも近付けることができるので, f, g は開区間 (a,b) 全体で連続函数になる.

$x_0, x \in (a,b)$ であるとし, $x_0, x \in (a', b')$, $a < a' < b' < a$ を満たす a', b' を任意に選んで, $I = [a', b']$ とおく. f_n は C^1 級なので,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(\xi)\,d\xi.$$

I 上で f_n は f に各点収束し, f_n' は g に一様収束するので, $n \to \infty$ のとき, 極限と積分を交換できて,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(\xi)\,d\xi.$$

を得る. これより, $f'(x) = g(x)$ となることがわかる. □

別証明: f_n, f_n' の収束先の函数をそれぞれ f, g と書いて, f, g が連続函数であることを示すところまでは同様.

$x \in (a,b)$ であるとし, $a < a' < x < b' < a$ を満たす a', b' を任意に選んで, $I = [a', b']$ とおく. 以下, 実数 h は $x + h \in I$ を満たしていると仮定する. $\varepsilon > 0$ を任意に取る.

f_n' は I 上で g に一様収束するので, ある番号 N が存在して, $m, n \geqq N$ ならば任意の $\xi \in I$ について

$$|f_n'(\xi) - g(\xi)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| \leqq |f_m'(\xi) - g(\xi)| + |g(\xi) - f_n'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

f_n は C^1 級なので

$$f_n(x+h) - f_n(x) = \int_x^{x+h} f_n'(\xi)\,\xi = \int_0^1 f_n'(x+ht)\,dt$$

となるので, $m, n \geqq N$ のとき,

$$|f_m(x+h) - f_m(x) - (f_n(x+h) - f_n(x))| = \left|\int_0^1 (f_m'(x+ht) - f_n'(x+ht))\,dt\right|$$
$$\leqq |h| \sup_{0\leqq t\leqq 1}|f_m'(x+ht) - f_n'(x+ht)| \leqq |h|\frac{\varepsilon}{2}.$$

$m \to \infty$ とすると, $n \geqq N$ のとき,

$$|f(x+h) - f(x) - (f_n(x+h) - f_n(x))| \leqq |h|\frac{\varepsilon}{2}.$$

以下, $n \geqq N$ と仮定する. f_n は C^1 級函数なので, ある $\delta > 0$ が存在して, $|h| < \delta$ ならば

$$|f_n'(x+ht) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

となり,

$$\begin{aligned}|f_n(x+h) - f_n(x) - f_n'(x)h| &= \left| h \int_0^1 (f_n'(x+ht) - f_n'(x))\, dt \right| \\ &\leqq |h| \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |f_n'(x+ht) - f_n'(x)| \leqq |h| \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

したがって, $|h| < \delta$ のとき,

$$\begin{aligned}&|f(x+h) - f(x) - g(x)h| \\ &\leqq |f(x+h) - f(x) - (f_n(x+h) - f_n(x))| + |f_n(x+h) - f_n(x) - f_n'(x)h| + |f_n'(x) - g(x)||h| \\ &\leqq |h| \frac{\varepsilon}{2} + |h| \frac{\varepsilon}{4} + |h| \frac{\varepsilon}{4} = |h|\varepsilon.\end{aligned}$$

これで, f は微分可能であり, $f' = g$ となることが示された. □

以上の別証明については, ラング『現代の解析学』(共立出版, 1981)の第5章§9を参考にした.

In [ ]:

```
1
```

06 Taylorの定理

黒木玄

2018-04-20

- Copyright 2018 Gen Kuroki
- License: MIT https://opensource.org/licenses/MIT (https://opensource.org/licenses/MIT)

- Repository: https://github.com/genkuroki/Calculus (https://github.com/genkuroki/Calculus)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/06%20Taylor%27s%20theorems.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/06%20Taylor%27s%20theorems.ipynb)
- https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/06%20Taylor%27s%20theorems.pdf (https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/06%20Taylor%27s%20theorems.pdf)

このファイルは Julia Box (https://juliabox.com) で利用できる.

自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ.

論理的に完璧な説明をするつもりはない. 細部のいい加減な部分は自分で訂正・修正せよ.

目次

1 Taylorの定理
  1.1 積分型剰余項型Taylorの定理
    1.1.1 積分型剰余項の絶対値の上からの評価
    1.1.2 積分型剰余項の書き直し: 1重積分の形
    1.1.3 積分型剰余項の書き直し: 積分を使わない形
    1.1.4 Landau記号を用いたTaylorの定理
  1.2 n 回の微分可能性だけを仮定したTaylorの定理について
2 Taylor展開
  2.1 基本的なTaylor展開の例
  2.2 コンピューターを用いた計算例
3 Bernoulli数とEuler数を用いたTaylor展開
  3.1 Bernoulli数とEuler数の定義
  3.2 tan, cot, sec, cosec の展開
4 べき級数の収束
  4.1 べき級数の定義
  4.2 べき級数の収束
  4.3 収束円盤の境界上でのべき級数の収束
    4.3.1 Abelの連続性定理
    4.3.2 準備: Vitaliの定理
    4.3.3 M. Riesz の補題とその応用
5 超幾何級数

In [1]:
```
using Plots
gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn) = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    display("text/html", """<img src="data:$mime; base64,$base64">""")
end

using SymPy
#sympy[:init_printing](order="lex") # default
#sympy[:init_printing](order="rev-lex")

using SpecialFunctions
using QuadGK
```

1 Taylorの定理

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k + \cdots$$

の最後の $+\cdots$ の部分を f の $k+1$ 階の導函数の式で書いた結果を**Taylorの定理**と呼ぶことにする. その表示の仕方には様々な形がある.

1.1 積分型剰余項型Taylorの定理

f は C^n 級函数であると仮定する.

まず, $n=4$ の場合を例として扱う. そのとき

$$f'''(x) = f'''(a) + \int_a^x f^{(4)}(x_4)\,dx_4.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f''(x) &= f''(a) + \int_0^x f'''(x_3)\,dx_3 \\ &= f''(a) + f'''(a)(x-a) + \int_a^x \left[\int_a^{x_3} f^{(4)}(x_4)\,dx_4\right] dx_3. \end{aligned}$$

括弧が増えると書くのが面倒になるので

$$\int_a^x dx_3 \int_a^{x_3} dx_4\, f^{(4)}(x_4) := \int_a^x \left[\int_a^{x_3} f^{(4)}(x_4)\,dx_4\right] dx_3$$

と書くことにする. 積分が3重以上でも同様に書くことにする. そのように書くと,

$$f''(x) = f''(a) + f'''(a)(x-a) + \int_a^x dx_3 \int_a^{x_3} dx_4\, f^{(4)}(x_4).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(a) + \int_a^x dx_2\, f''(x_2) \\ &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{1}{2}f'''(a)(x-a)^2 + \int_a^x dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 \int_a^{x_3} dx_4\, f^{(4)}(x_4). \end{aligned}$$

さらに,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x dx_1\, f'(x_1) \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 \int_a^{x_3} dx_4\, f^{(4)}(x_4).
\end{aligned}
$$

以上をまとめると,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + R_4, \\
R_4 &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 \int_a^{x_3} dx_4\, f^{(4)}(x_4).
\end{aligned}
$$

上と同様にして次が成立することを示せる.

Taylorの定理: f は C^n 級函数であると仮定する. そのとき,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + R_n, \\
R_n &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} dx_n\, f^{(n)}(x_n).
\end{aligned}
$$

R_n を**剰余項**と呼ぶ. □

この形のTaylorの定理は $f^{(n)}(x)$ を何度も積分するだけで得られ, 技巧的な証明の工夫をする必要が一切ない.

問題: 上の形のTaylorの定理の証明を完成せよ. □

1.1.1 積分型剰余項の絶対値の上からの評価

以下, a と x のあいだの t について $|f^{(n)}(t)| \leqq M$ が成立しているとき,

$$
|R_n| \leqq \left| \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} dx_n\ M \right| = \frac{1}{n!}M|x-a|^n.
$$

ここで,

$$
\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} dx_n\ 1 = \frac{1}{n!}(x-a)^n
$$

となることを使った. 1 を a から x まで積分する操作を n 回繰り返すとそうなることは容易に確かめられる.

$$
|R_n| \leqq \frac{M|x-a|^n}{n!}
$$

の形の不等式はよく使われる.

1.1.2 積分型剰余項の書き直し: 1重積分の形

定理:

$$
R_n = \int_a^x f^{(n)}(x_n) \frac{(x-x_n)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx_n.
$$

証明: 簡単のため $a < x$ と仮定する($a > x$ の場合も同様である). そのとき, 積分

$$
R_n = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} dx_n\, f^{(n)}(x_n)
$$

の中の x_i たちは $a \leqq x_n \leqq x_{n-1} \leqq \cdots x_2 \leqq x_1 \leqq x$ を動く. ゆえに, この積分は

$$
R_n = \int_a^x \left[f^{(n)}(x_n) \int_{x_n}^x dx_1 \int_{x_n}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{x_n}^{x_{n-2}} dx_{n-1}\ 1 \right] dx_n
$$

と書き直される. そして,

$$
\int_{x_n}^x dx_1 \int_{x_n}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{x_n}^{x_{n-2}} dx_{n-1}\ 1 = \frac{(x-x_n)^{n-1}}{(n-1)!}
$$

なので上の定理が得られる. □

注意: f が C^{n+1} 級函数ならば, 上の定理の n の場合の結果から, 部分積分によって

$$R_n = f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_{n+1}$$

が得られる(問題: 示してみよ). ゆえに, 部分積分を用いた n に関する帰納法によっても上の定理を示せる. 部分積分を用いる計算法はよく使われる. □

1.1.3 積分型剰余項の書き直し: 積分を使わない形

簡単のため $a < x$ であると仮定する.

f は C^n 級函数であるとする. そのとき $f^{(n)}$ は連続函数になる. $f^{(n)}(t)$ の $a \leqq t \leqq x$ における最小値と最大値はそれぞれ $f^{(n)}(\alpha)$, $f^{(n)}(\beta)$ であるとする. そのとき,

$$f^{(n)}(\alpha)\frac{(x-a)^n}{n!} \leqq R_n \leqq f^{(n)}(\beta)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

が成立する. なぜならば R_n の中の $f^{(n)}(x_n)$ を定数 C で置き換えると R_n の値は $C(x-a)^n/n!$ に変わるからである. 中間値の定理より, ある実数 ξ で

$$R_n = f^{(n)}(\xi)\frac{(x-a)^n}{n!}, \quad a < \xi < x$$

を満たすものが存在する. $a < x$ の仮定を $a > x$ で置き換えると, $a < \xi < x$ は $a > \xi > x$ に変わる.

剰余項の

$$R_n = f^{(n)}(\xi)\frac{(x-a)^n}{n!}, \quad a \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \xi \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} x$$

の形もよく使われる.

1.1.4 Landau記号を用いたTaylorの定理

C^n 級函数 f について a と x のあいだのある実数 ξ で

$$R_n = f^{(n)}(\xi)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

を満たすものが存在することを上で示した. $f^{(n)}$ は連続なので $x \to a$ のとき $f^{(n)}(\xi) \to f^{(n)}(a)$ となる. ゆえに

$$R_n - f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = (f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(a))\frac{(x-a)^n}{n!} = o((x-a)^n) \quad (x \to a).$$

これで次が成立することがわかった:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \to a).$$

Taylorの定理はこの形でもよく使われる.

さらに f が C^{n+1} 級ならば, $n+1$ 次の剰余項は

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1} = O((x-a)^{n+1}), \quad (\xi \text{ は } a \text{ と } x \text{ のあいだにある})$$

の形をしているので,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + O((x-a)^{n+1}) \quad (x \to a).$$

も成立していることがわかる.

1.2 n 回の微分可能性だけを仮定したTaylorの定理について

以上では C^n 級の仮定のもとでTaylorの定理を証明したが, n 回微分可能の仮定のもとでもTaylorの定理を導くことができる. 例えば,

- 高木貞治『解析概論』改定第三版

の第25節のpp.61-63に詳しい説明がある. このノートでは技巧的になり過ぎるので扱わないことにする.

2 Taylor展開

C^∞ 函数 f について, ある $r > 0$ が存在して,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

が $|x-a| < r$ で収束するとき f は $x = a$ で**Taylor展開**可能であるという. そのような r の最大値をTaylor展開の**収束半径**と呼ぶ. Taylor展開は**べき級数展開**と呼ばれることも多い.

$x = 0$ におけるTaylor展開は**Maclaurin展開**と呼ばれることがある.

2.1 基本的なTaylor展開の例

以下のTaylor展開はよく使われる.

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \qquad (|x| < 1), \qquad \binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}.$$

$$(1-x)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k \qquad (|x| < 1), \qquad (a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1).$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (|x| < \infty).$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad (|x| < \infty).$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (|x| < \infty).$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (|x| < \infty).$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (|x| < \infty).$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, \qquad (|x| < 1).$$

$$-\log(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \qquad (|x| < 1).$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (|x| < 1).$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (|x| < 1).$$

問題: 以上の公式をすべて示せ. □

解答は略す. まずは自分で $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0)$ を計算してみよう. そして, 個人的には最初の段階ではTaylor展開が収束するか否かにはあまり神経を使わなくてもよいと思う.

他人が書いた解説に単に従うだけだと数学は決して理解できない. 自分で何を計算するべきであるかを考え, 自分が持っている力でその計算を実行してみて, その計算結果を見て次に何を計算するべきであるかを考え, また計算を繰り返す. 試行錯誤抜きに数学をまともに理解できるようになることはありえない.

しかし, 以下の説明も読んでおくこと.

復習: $\binom{a}{k}$ は二項係数を表すのであった:

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}.$$

例えば

$$\binom{a}{0} = 1, \quad \binom{a}{1} = a, \quad \binom{a}{2} = \frac{a(a-1)}{2}, \quad \binom{a}{3} = \frac{a(a-1)(a-2)}{6}.$$

$(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ もよく使われる記号法である. 例えば

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_1 = a, \quad (a)_2 = a(a+1), \quad (a)_3 = a(a+1)(a+2).$$

参考: 収束半径については複素解析によって以下が知られている. $x = a$ でTaylor展開可能な函数 $f(x)$ を $|z-a| < r$ を満たす複素数 z の正則函数に拡張できるとき, そのTaylor展開の収束半径は r 以上になる. だから, $f(x)$ を可能な限り解析接続したものを $f(z)$ と書くとき, f の $x = a$ でのTaylor展開の収束半径は a から $f(z)$ の正則ではない点までの最短距離に等しい.

例えば, a が非負の整数以外であるとき, $f(x) = (1+x)^a = \exp(a\log(1+x))$ を複素平面に解析接続によって拡張すると, $x = 0$ に最も近い f の正則ではない点は $x = -1$ なので収束半径は 1 になる. 例えば $a = -1$ のとき

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

と公比 $-x$ の等比級数が出て来るが, これが成立するのは $|x| < 1$ においてである. $x = 0$ から最も近い函数 $f(x) = 1/(1+x)$ の特異点は $x = -1$ である.

同様の理由で $f(x) = \log(1+x)$ や $f(x) = -\log(1-x)$ の場合も $x = 0$ でのTaylor展開の収束半径は 1 になる.

例えば, $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$ は複素平面全体上の正則函数に拡張できることと, それらのTaylor展開の収束半径が ∞ になることは同値になり, 実際にどちらも成立している.

逆三角函数に関するヒント: $\arcsin x$ と $\arctan x$ については

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

を用いてよい. さらに $|t| < 1$ で

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-1/2}{k}t^{2k}, \qquad \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}.$$

これを項別に積分すれば欲しい結果が得られる.

二項係数 $\binom{-1/2}{k}$ の部分は以下のように処理できる:

$$\begin{aligned}
(-1)^k\binom{-1/2}{k} &= (-1)^k\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1\right)}{k!} = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k\ k!} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k\ k!}\frac{2\cdot 4\cdots(2k)}{2^k\ k!} = \frac{1}{2^{2k}}\frac{(2k)!}{(k!)^2}. \qquad \square
\end{aligned}$$

問題: e^x と $\cos x$ と $\sin x$ の $x = 0$ におけるTaylor展開が x が複素数である場合にも成立していると仮定して,

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

が成立していることを示せ. □

解答例:

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos x + i\sin x.
\end{aligned}$$

1つ目の等号で e^z の $z = 0$ におけるTaylor展開を $z = ix$ に適用した. 2つ目の等号では和を n が偶数の場合と奇数の場合に分けた. 3つ目の等号では $i^{2k} = (-1)^k$ を使った. 4つ目の等号では $\cos z$, $\sin z$ の $z = 0$ におけるTaylor展開を $z = x$ に適用した. □

問題: $\sqrt{10}$ を

$$(1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}x^k = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^3}{16} + O(x^4) \qquad (|x| < 1)$$

を用いて小数点以下第2桁まで求めよ.

解答例:

$$\sqrt{10} = (9+1)^{1/2} = 3(1+1/9)^{1/2} = 3 + 3\frac{1}{2}\frac{1}{9} - 3\frac{1}{8}\frac{1}{9^2} + 3\frac{1}{16}\frac{1}{9^3} + \cdots.$$

そして,

$$3\frac{1}{2}\frac{1}{9} = \frac{1}{6} = 0.166666\cdots, \quad -3\frac{1}{8}\frac{1}{9^2} = -\frac{1}{216} = -0.004629\cdots, \quad 3\frac{1}{16}\frac{1}{9^3} = 0.000257\cdots,$$

より

$$3 + 3\frac{1}{2}\frac{1}{9} - 3\frac{1}{8}\frac{1}{9^2} = 3.162\cdots$$

$\sqrt{10} = 3.16\cdots$ である. □

注意: 上では誤差項をきちんと評価せずに計算したがきちんと評価するには次のようにすればよい. 剰余項付きのTaylorの定理より, $0 < x < 1$ のとき ある実数 ξ が存在して,

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x}{8} + \frac{x^3}{16(1+\xi)^{5/2}}, \quad 0 < \xi < x,$$
$$0 < \frac{x^3}{16(1+\xi)^{5/2}} < \frac{x^3}{16}.$$

ゆえに, $x = 1/9$ のとき, $\sqrt{10}$ と $3 + 1/6 - 1/216 = 3.162\cdots$ の差は

$$3\frac{1}{16}\frac{1}{9^3} = 0.000257\cdots$$

より小さい. このことに注意すれば本当に小数点以下第2桁まで正確に計算できているという数学的な証明が得られる. □

In [2]:
```
x = symbols("x")
series((1+x)^(Sym(1)/2), n=5)
```

Out[2]:

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \mathcal{O}\left(x^5\right)$$

In [3]:
```
3/2/9, -3/8/9^2, 3/16/9^3
```

Out[3]:
```
(0.16666666666666666, -0.004629629629629629, 0.000257201646090535)
```

In [4]:
```
3 + 3/2/9 -3/8/9^2, 3/16/9^3
```

Out[4]:
```
(3.1620370370370368, 0.000257201646090535)
```

√ は \sqrt TAB で入力できる.

https://docs.julialang.org/en/stable/manual/unicode-input/ (https://docs.julialang.org/en/stable/manual/unicode-input/)

In [5]:
```
√(10)
```

Out[5]:
```
3.1622776601683795
```

In [6]:
```
factorial(10)
```

Out[6]:
```
3628800
```

問題: $\tan x$ の $x = 0$ でのTaylor展開 5 次の項まで求めよ.

解答例: $f(x) = \tan x$ とおくと $f' = 1 + \tan^2 x = 1 + f^2$ となので,

$$
\begin{aligned}
f'' &= 2ff' = 2f + 2f^3, \\
f''' &= 2f' + 6f^2 f' = 2 + 8f^2 + 6f^4, \\
f^{(4)} &= 16ff' + 24f^3 f' = 16f + 40f^3 + 24f^5, \\
f^{(5)} &= 16f' + 120f^2 f' + 120f^4 f' = 16 + 136f^2 + 240f^4 + 120f^6.
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(5)}(0) = 16.
$$

したがって,

$$
\tan x = f(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \cdots = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots. \qquad \square
$$

別の解答例: $\sin x$ と $\cos x$ のMaclaurin展開から $\tan x$ のMaclaurin展開を求めよう:

$$
\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{1 - (1 - \cos(x))} \\
&= \sin x\,(1 + (1 - \cos x) + (1 - \cos x)^2 + \cdots) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right)\left(1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + O(x^6)\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right)x^4 + O(x^6)\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\right) \\
&= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + O(x^7) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7). \qquad \square
\end{aligned}
$$

In [7]:

```
x = symbols("x")
sympy[:init_printing](order="rev-lex")
for k in 0:5
    expand(diff(tan(x), x, k)) |> display
end
sympy[:init_printing](order="lex") # default

x = symbols("x")
series(tan(x), n=10)
```

$\tan(x)$

$1 + \tan^2(x)$

$2\tan(x) + 2\tan^3(x)$

$2 + 8\tan^2(x) + 6\tan^4(x)$

$16\tan(x) + 40\tan^3(x) + 24\tan^5(x)$

$16 + 136\tan^2(x) + 240\tan^4(x) + 120\tan^6(x)$

Out[7]:

$$
x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \mathcal{O}\left(x^{10}\right)
$$

In [8]:
```
s = series(sin(x), n=7)
cinv = series(1/cos(x), n=6)
display(s)
display(cinv)
expand(s * cinv)
```

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}\left(x^7\right)$$

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \mathcal{O}\left(x^6\right)$$

Out[8]:

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}\left(x^7\right)$$

問題: $e = e^1$ の値を e^x のMaclaurin展開を用いて誤差100万の1以下で正確に計算するためには $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} \frac{1}{k!}$ を計算すれば十分であることを示せ. $e < 3$ と $10! = 3628800$ を認めて使ってよい.

解答例: Taylorの定理より, 0 と 1 のあいだにある実数 ξ で次を満たすものが存在する.

$$e^1 = \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{k!} + \frac{e^\xi}{10!}, \qquad \frac{e^\xi}{10!} < \frac{e}{10!} < \frac{3}{3000000} = \frac{1}{10^6}.$$

不等式は $\xi < 1$ と $e < 3$, $10! > 3000000$ より得られる. これで示すべきことが示された. □

Taylorの定理を使えば誤差項の大きさを上から評価できる.

In [9]:
```
sum(1/factorial(k) for k in 0:9), exp(1)
```

Out[9]: (2.7182815255731922, 2.718281828459045)

次の問題の解答例のように, Taylorの定理の剰余項を用いるのではなく, Taylor展開の残りの部分の総和を上から評価することによって誤差項を評価することもできる.

問題: $\log 2$ を小数点以下第2桁まで求めよ.

解答例: $|x| < 1$ とし,

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$

とおくと, $0 \leqq x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_{2n+1}, \\ 0 \leqq R_{2n+1} &= 2\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2n+1}{2k+1} x^{2k+1-(2n+1)} \\ &\leqq \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \sum_{j=0}^{\infty} x^{2j} = \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

ゆえに, $n = 2, x = \dfrac{1}{3}$ のとき,

$$\begin{aligned} \log 2 &= f\left(\frac{1}{3}\right) = f(x) = \alpha + R, \\ \alpha &= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{(1/3)^3}{3}\right) = 0.69135802\cdots, \\ 0 \leqq R_5 &\leqq \frac{9}{4}\frac{(1/3)^5}{5} = \frac{1}{540} = 0.00185185\cdots \end{aligned}$$

これより, $\log 2 = 0.69\cdots$ であることがわかる. □

注意: $y = f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$ は $x = \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1} = \dfrac{e^{y/2} - e^{-y/2}}{e^{y/2} + e^{-y/2}} = \tanh \dfrac{y}{2}$ の逆函数である. すなわち

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \qquad \square$$

注意(70%ルール): $\log 2 = 0.69314718\cdots$ が 0.7 に近いことはよく以下のように使われる. 年利 r パーセントの金利で資産を運用するとき, 約 $70/r$ 年後に資産は倍になる. 例えば r が 5 パーセントのとき $1.05^{70/5} = 1.97993\cdots$. r が 7 パーセントのとき $1.07^{70/7} = 1.96715\cdots$. 確かにほぼ 2 になっている. このような形で $100\log 2 \approx 70$ は我々の金融社会の中で便利に利用されている. $\square$

問題: 70%ルールの概算法がうまく行く理由を説明せよ.

解答例: $\log 2 \approx 0.7$ と近似すると, $\left(1+\frac{r}{100}\right)^x \approx e^{rx/100} = 2$ を満たす x は $x = \frac{100\log 2}{r} \approx \frac{70}{r}$ で概算可能である. $\square$

In [10]:
```
f(x) = log((1+x)/(1-x))
g(n,x) = 2*sum(k->x^(2k+1)/(2k+1), 0:n-1)
R(n,x) = 2*x^(2n+1)/(2n+1)/(1-x^2)

sympy[:init_printing](order="rev-lex")
x = symbols("x", positive=true)
g(2, x) ¦> display
sympy[:init_printing](order="lex") # default

n = 2
y = 2
x = (y-1)/(y+1)
log(y), f(x), g(n,x), f(x) - g(n,x), R(n,x)
```

$$2x + \frac{2x^3}{3}$$

Out[10]: (0.6931471805599453, 0.6931471805599452, 0.691358024691358, 0.0017891558685871889, 0.0018518518518518515)

In [11]:
```
f(x) = log((1+x)/(1-x))
g(n,x) = 2*sum(k->x^(2k+1)/(2k+1), 0:n-1)
R(n,x) = 2*x^(2n+1)/(2n+1)/(1-x^2)

n = 3
y = 2
x = (y-1)/(y+1)
log(y), f(x), g(n,x), f(x) - g(n,x), R(n,x)
```

Out[11]: (0.6931471805599453, 0.6931471805599452, 0.6930041152263374, 0.0001430653336077503, 0.00014697236919459136)

問題: 少し上の方でやった計算と同様の方法で $\log 1.5$ を小数点以下第3桁まで計算せよ. $\square$

In [12]:
```
f(x) = log((1+x)/(1-x))
g(n,x) = 2*sum(k->x^(2k+1)/(2k+1), 0:n-1)
R(n,x) = 2*x^(2n+1)/(2n+1)/(1-x^2)

n = 2
y = 1.5
x = (y-1)/(y+1)
log(y), f(x), g(n,x), f(x) - g(n,x), R(n,x)
```

Out[12]: (0.4054651081081644, 0.4054651081081642, 0.4053333333333334, 0.00013177477483083955, 0.00013333333333333337)

In [13]:
```
f(x) = log((1+x)/(1-x))
g(n,x) = 2*sum(k->x^(2k+1)/(2k+1), 0:n-1)
R(n,x) = 2*x^(2n+1)/(2n+1)/(1-x^2)

n = 3
y = 1.5
x = (y-1)/(y+1)
log(y), f(x), g(n,x), f(x) - g(n,x), R(n,x)
```

Out[13]: (0.4054651081081644, 0.4054651081081642, 0.4054613333333334, 3.774774830822558e-6, 3.809523809523811e-6)

問題: $\arcsin x$, $\arctan x$ の $x = 0$ でのTaylor展開の $x \to 1$ の極限を取ることによって

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \frac{1}{2k+1}, \qquad \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

が得られることを確認せよ. □

解答略. 次の節におけるコンピューターによる計算例も参照せよ.

問題: $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 函数 $f(x)$ で, 任意の実数 x について $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ が収束しているのに, その収束先が $x \neq 0$ のとき $f(x)$ と一致しないものが存在する. そのような $f(x)$ の例を1つ挙げよ.

解答例: $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/|x|) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定めると, f は C^∞ 函数でかつ $f^{(n)}(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ となることを示せる(自分で示してみよ). ゆえにそのとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ は常に 0 に収束する. しかし, $x \neq 0$ のとき $f(x) > 0$ なので収束先の 0 は $f(x)$ に一致しない. □

In [14]:
```
f(x) = x == 0 ? zero(x) : exp(-1/abs(x))
x = -2:0.001:2
plot(x, f.(x), label="y = f(x)", size=(400,250), legend=:top)
```

Out[14]:

2.2 コンピューターを用いた計算例

私が個人的に知る限りの範囲内では, 手計算もきちんとできる人の方がコンピューターを上手に使っている場合が多い. おそらく, その人自身がコンピューターを頼らなくてもある程度の計算ができるおかげで, コンピューターを使った人間には不可能な計算の価値をよく理解できるからなのだろう.

In [15]:
```
x = symbols("x")
series(e^x, n=10)
```

Out[15]:

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} + \mathcal{O}\left(x^{10}\right)$$

In [16]:
```
series(cos(x), n=10)
```

Out[16]:

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + \mathcal{O}\left(x^{10}\right)$$

In [17]:
```
series(sin(x), n=10)
```

Out[17]:

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + \mathcal{O}\left(x^{10}\right)$$

In [18]:
```
series(cosh(x), n=10)
```

Out[18]:
$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + \mathcal{O}\left(x^{10}\right)$$

In [19]:
```
series(sinh(x), n=10)
```

Out[19]:
$$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + \mathcal{O}\left(x^{10}\right)$$

In [20]:
```
series(log(1+x), n=10)
```

Out[20]:
$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} + \mathcal{O}\left(x^{10}\right)$$

In [21]:
```
series(-log(1-x), n=10)
```

Out[21]:
$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} + \mathcal{O}\left(x^{10}\right)$$

In [22]:
```
series(asin(x), n=10)
```

Out[22]:
$$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} + \mathcal{O}\left(x^{10}\right)$$

In [23]:
```
k = symbols("k", integer=true)
doit(Sum(1/2^(2k)*factorial(2k)/(factorial(k)^2)*x^(2k+1)/(2k+1), (k,0,4)))
```

Out[23]:
$$\frac{35x^9}{1152} + \frac{5x^7}{112} + \frac{3x^5}{40} + \frac{x^3}{6} + x$$

In [24]:
```
series(atan(x), n=10)
```

Out[24]:
$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \mathcal{O}\left(x^{10}\right)$$

In [25]:
```
series(atanh(x), n=10)
```

Out[25]:
$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \mathcal{O}\left(x^{10}\right)$$

In [26]:
```
Sum((-1)^k/(2k+1), (k,0,oo))
```

Out[26]:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

In [27]:
```
doit(Sum((-1)^k/(2k+1), (k,0,oo)))
```

Out[27]:
$$\frac{\pi}{4}$$

次のセルの f(n,k) は

$$f(n,k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \frac{1}{2^n}\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

を意味している. これは $p = 1/2$ に対する二項分布における確率である.

lgamma(n+1) = log(nの階乗)

であることに注意せよ.

次のセルで一度全体の対数を取った式を計算してから exponential を取っている理由は階乗を単体で計算すると簡単にオーバーフローしてしまうからである. 階乗の対数ならばオーバーフローしない. さらに, $\binom{n}{k}$ と $1/2^n$ を別々に計算した後で掛け合わせる計算の仕方もよくない. 巨大な数を巨大な数で割る数値計算はオーバーフローやアンダーフローを起こしやすい. 対数を取って適度な大きさの数値にして差を取ってから, まとめて exponential するのがよい.

しかし, そのように注意深く書いたコードであっても, もとの級数の収束は極めて遅いので, 1億項を足し合わせても小数点以下第4桁までしか正確に計算できていない.

In [28]:
```
f(n,k) = exp(lgamma(n+1)-lgamma(k+1)-lgamma(n-k+1)-n*log(2))
@time sum(k->f(2k,k)/(2k+1), 0:10^8-1), π/2
```

```
13.193891 seconds (26.82 k allocations: 1.376 MiB)
```

Out[28]:
```
(1.5707399078387505, 1.5707963267948966)
```

3 Bernoulli数とEuler数を用いたTaylor展開

3.1 Bernoulli数とEuler数の定義

Bernoulli数 B_n とEuler数 E_n を次のように定める:

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}, \qquad \frac{2}{e^z+e^{-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{z^n}{n!}.$$

注意: これらの母函数はある確率分布のモーメント母函数分の1になっている:

$$\int_0^1 e^{zx}\,dx = \frac{e^z-1}{z}, \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{zx}\frac{\delta(x-1)+\delta(x+1)}{2}\,dx = \frac{e^z+e^{-z}}{2}.$$

ここで $\delta(x-a)$ はデルタ(超)函数 (https://www.google.co.jp/search?q=%E3%83%87%E3%83%AB%E3%82%BF%E5%87%BD%E6%95%B0)である:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\delta(x-a)\,dx = \varphi(a).$$

モーメント母函数は統計力学における分配函数に対応しており, モーメント母函数分の e^{xz} はカノニカル分布の確率密度函数に対応している. このような視点からのBernoulli数およびBernoulli多項式の一般化については

- 黒木玄, Euler-Maclaurinの和公式の一般化 (https://genkuroki.github.io/documents/20170724EulerMaclaurin.pdf)

を参照せよ. □

問題: $B_0 = 1, B_1 = -1/2$ であることを示せ.

解答例: 以下の計算から得られる:

$$\frac{z}{e^z-1} = \frac{1}{1+z/2+O(z^2)} = 1 - \frac{z}{2} + O(z^2). \qquad \square$$

この問題の結果と,

$$\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{z}{2}\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}$$

が偶函数になることより, B_n は n が3以上の奇数のとき 0 になることがわかる.

$\dfrac{2}{e^z+e^{-z}}$ が偶函数であることより, n が奇数のとき $E_n = 0$ となることがわかる.

後で次の公式を用いる:

$$\frac{z}{2}\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}, \qquad \frac{2}{e^z+e^{-z}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k)!}z^{2k}. \tag{$*$}$$

問題: Bernoulli数 B_n とEuler数 E_{2n} が次の漸化式を満たすことを示せ: $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して,

$$B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k, \quad E_{2n} = -\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k}E_{2k}.$$

注意: これらの漸化式と $B_0 = E_0 = 1$ を用いて, Bernoulli数 B_n とEuler数 E_{2n} を順次求めることができる. □

解答例: B_n の漸化式は $\dfrac{z}{e^z-1}\dfrac{e^z-1}{z} = 1$ から得られる.

$$1 = \frac{z}{e^z-1}\frac{e^z-1}{z} = \sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!(l+1)!}z^{k+l} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k+1)!}B_k\right)\frac{z^n}{n!}.$$

すなわち

$$\delta_{n,0} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k+1)!}B_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k + B_n.$$

これより B_n の漸化式が得られる.

E_{2n} の漸化式は $\dfrac{2}{e^z-e^{-z}}\dfrac{e^z-e^{-z}}{2} = 1$ から得られる.

$$1 = \frac{2}{e^z+e^{-z}}\frac{e^z+e^{-z}}{2} = \sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k)!(2l)!}z^{2k+2l} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}E_{2k}\right)\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

すなわち

$$\delta_{n,0} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}E_{2k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k}E_{2k} + E_{2n}.$$

これより E_{2n} の漸化式が得られる. □

In [29]:

```
# Bernoulli数 B_{2k} の例

BernoulliNumber(n) = sympy[:bernoulli](n)
B = [BernoulliNumber(2k) for k in 0:8]
```

Out[29]:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{42} \\ -\frac{1}{30} \\ \frac{5}{66} \\ -\frac{691}{2730} \\ \frac{7}{6} \\ -\frac{3617}{510} \end{bmatrix}$$

In [30]:

```
# Euler数 E_{2k} の例

EulerNumber(n) = sympy[:euler](n)
E = [EulerNumber(2k) for k in 0:8]
```

Out[30]:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ -61 \\ 1385 \\ -50521 \\ 2702765 \\ -199360981 \\ 19391512145 \end{bmatrix}$$

3.2 tan, cot, sec, cosec の展開

B_{2k}, E_{2k} に関する公式(*)を使うと,

$$\frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} = \frac{iz}{2}\frac{e^{iz/2}+e^{-iz/2}}{e^{iz/2}-e^{-iz/2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(iz)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k},$$

$$\cot z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1},$$

$$\tan z = \frac{\cos z}{\sin z} = \cot z - 2\cot(2z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}(1-2^{2k})B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1},$$

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z} = \cot\frac{z}{2} - \cot z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}(2^{-(2k-1)}-1)B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2(1-2^{2k-1})B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1},$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz}-e^{-iz}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k)!}(iz)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{E_{2k}}{(2k)!}z^{2k}.$$

B_{2k} は本質的に $\frac{z}{2}\cot\frac{z}{2}$ のMaclaurin展開の係数であり, E_{2k} は $\sec z$ のMaclaurin展開の係数である.

In [31]:
```
z = symbols("z")
series((z/2)*cot(z/2), z, n=10)
```

Out[31]:
$$1 - \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} - \frac{z^6}{30240} - \frac{z^8}{1209600} + \mathcal{O}\left(z^{10}\right)$$

In [32]:
```
z = symbols("z")
series(cot(z), z, n=10)
```

Out[32]:
$$\frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \frac{z^7}{4725} - \frac{2z^9}{93555} + \mathcal{O}\left(z^{10}\right)$$

In [33]:
```
z = symbols("z")
series(tan(z), z, n=10)
```

Out[33]:
$$z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \frac{17z^7}{315} + \frac{62z^9}{2835} + \mathcal{O}\left(z^{10}\right)$$

In [34]:
```
z = symbols("z")
series(csc(z), z, n=10)
```

Out[34]:
$$\frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + \frac{31z^5}{15120} + \frac{127z^7}{604800} + \frac{73z^9}{3421440} + \mathcal{O}\left(z^{10}\right)$$

In [35]:
```
z = symbols("z")
series(sec(z), z, n=10)
```

Out[35]:
$$1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5z^4}{24} + \frac{61z^6}{720} + \frac{277z^8}{8064} + \mathcal{O}\left(z^{10}\right)$$

4 べき級数の収束

4.1 べき級数の定義

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ の形式の級数を**べき級数**と呼ぶ.

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ が収束するとき, べき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は絶対収束するという.

4.2 べき級数の収束

準備: 実数列 α_n が $n \to \infty$ のとき $\alpha_n \to \infty$ となることを, 任意の実数 M に対して(どんなに大きな実数 M に対して), ある番号 N で

$$\alpha_n \geqq M \quad (n \geqq N)$$

を満たすものが存在すること(すなわちある番号以降のすべての n について $\alpha_n \geqq M$ 成立すること)であると定める. □

定理(d'Alembert の判定法): $k \to \infty$ のとき $\dfrac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \to \rho > 0$ が成立していると仮定する(上の準備のもとで $\rho = \infty$ であってもよいとする). このとき, べき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は $|x| < \rho$ のとき絶対収束し, $|x| > \rho$ のとき収束しない.

注意: 実際には $0 < r < \rho$ のとき $|x| \leqq r$ でべき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ が一様絶対収束することも示される.

注意: このような ρ をべき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ の**収束半径**と呼ぶ.

証明: $0 < r < \rho$ と仮定する. r は幾らでも ρ に近付き得るので, $|x| < \rho$ のときべき級数が絶対収束することを示すためには, $|x| \leqq r$ のときべき級数が絶対収束することを示せば十分である. $r < R < \rho$ を満たす実数 R が存在する. $|x| \leqq r$ と仮定する. $|a_k|/|a_{k+1}| \to \rho > R > 0$ より, ある番号 N が存在して, $k \geqq N$ のとき,

$$\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \geqq R, \quad \text{i.e.} \quad |a_{k+1}| \leqq \frac{1}{R}|a_k|.$$

ゆえに, $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して,

$$|a_{N+n}| \leqq \frac{1}{R^n}|a_N|.$$

したがって, $|x| \leqq r$ という仮定より, $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して,

$$|a_{N+n}x^{N+n}| \leqq \frac{1}{R^n}|a_N||x|^{N+n} = |a_N|r^N\left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

$r < R$ という仮定より, $r/R < 1$ なので, 右辺の $n = 0, 1, 2, \ldots$ に関する和は有限の値に収束する. ゆえに左辺の同様の和も有限の値に収束する. これより, べき級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_{N+n}x^{N+n}$$

が絶対収束することがわかる. (**注意:** 以上の議論によって $|x| \leqq r$ で**一様**絶対収束することも示されている.)

$|x| > \rho$ であると仮定する. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ が収束しないことを示したい. $|x| > \rho$ と $|a_k|/|a_{k+1}| \to \rho < |x|$ より, ある番号 N が存在して, $k \geqq N$ ならば, $|a_k| \neq 0$ かつ

$$\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \leqq |x|, \quad \text{i.e.} \quad |a_{k+1}| \geqq \frac{1}{|x|}|a_k|.$$

ゆえに, $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して,

$$|a_{N+n}| \geqq \frac{1}{|x|^n}|a_N|.$$

したがって, $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して,

$$|a_{N+n}x^{N+n}| \geqq \frac{1}{|x|^n}|a_N||x|^{N+n} = |a_N||x|^N \neq 0.$$

ゆえに $a_n x^n$ は 0 に収束しない. これより, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ が収束しないことがわかる. □

例: べき級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ について, $k \to \infty$ のとき,

$$\frac{1/k!}{1/(k+1)!} = k+1 \to \infty$$

なので, そのべき級数は $|x| < \infty$ で絶対収束する. □

例: べき級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ を x^2 のべき級数とみなす.

$$\frac{1/(2k)!}{1/(2(k+1))!} = (2k+1)(2k+2) \to \infty \quad (k \to \infty)$$

なので, そのべき級数は $|x| < \infty$ で絶対収束する.

問題: べき級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ が $|x| < \infty$ で絶対収束することを示せ.

ヒント: そのべき級数と x^2 のべき級数と x の積とみなしてから, d'Alembertの判定法を適用せよ. □

d'Alembertの判定法だけで十分な場合が多いが, 次のより精密な定理も知られている.

Cauchy-Hadamard定理: $\rho = \displaystyle\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ とおき, $\rho > 0$ と仮定する. このとき, べき級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は $|x| < \rho$ のとき絶対収束し, $|x| > \rho$ のとき収束しない.

注意: 実際には $0 < r < \rho$ のとき $|x| \leqq r$ でべき級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ が一様絶対収束することも示される.

注意: Cauchy-Hadamardの定理はべき級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ の**収束半径** ρ は $\rho = \displaystyle\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ で計算可能なことを意味している.

証明: $\rho = \displaystyle\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ とおく.

$0 < r < \rho$ と仮定する. $r < R < \rho$ を満たす実数 R が存在する. $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \rho < \frac{1}{R}$ より, ある番号 N が存在し, $n \geqq N$ ならば $\displaystyle\sup_{k\geqq n} |a_k|^{1/k} \leqq \frac{1}{R}$ となる. そのとき特に $k \geqq N$ のとき $|a_k| \leqq \dfrac{1}{R^k}$ となる. したがって, $|x| \geqq r$ のとき, $k \geqq N$ のとき,

$$|a_k x^k| \leqq \left(\frac{r}{R}\right)^k$$

となる. $|r/R| < 1$ なので, $|x| \leqq r$ で $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ が一様絶対収束することがわかった.

$|x| > \rho$ と仮定する. このとき,

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \inf_{n\geqq 0} \sup_{k\geqq n} |a_k|^{1/k}$$

より, $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $\sup_{k\geqq n} |a_k|^{1/k} \geqq \rho$ なので, $\rho > \dfrac{1}{|x|}$ より, 各 n ごとにある $k \geqq n$ で $|a_k|^{1/k} \geqq \dfrac{1}{|x|}$ を満たすものが存在し,

$$|a_k x^k| \geqq 1$$

となる. ゆえに, $|a_k x^k|$ は 0 に収束しないので, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ も収束しない. □

例: べき級数

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

の収束半径は数列 $|-1|^{1/1} = 1, |1|^{1/2} = 1, |-1|^{1/3} = 1, |1|^{1/4} = 1, \ldots$ の上極限の 1 であり, $|x| < 1$ で $\dfrac{1}{1+x}$ に収束するので, このべき級数は $x \nearrow 1$ で 1 に収束する.

それではべき級数

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2^n} = x - x^2 + x^4 - x^8 + x^{16} - x^{32} + \cdots$$

についてはどうなるだろうか? これの収束半径も数列 $|1|^{1/1} = 1, |-1|^{1/2} = 1, |1|^{1/4} = 1, |-1|^{1/8} = 1, \ldots$ の上極限の 1 になる.

もしも $x \nearrow 1$ で $f(x)$ が α に収束するならば, $F(x^2) = x - F(x)$ なので, $x \nearrow 1$ の極限を取って $\alpha = 1 - \alpha$ すなわち $\alpha = \dfrac{1}{2}$ となる.

そこで実際に $x \nearrow 1$ のとき $F(x) \to 1/2$ となるかどうかを確認するために1000項足した結果を計算してみると, 例えば

```
F(0.9) = 0.4677755990574414
F(0.99) = 0.49409849522830906
F(0.999) = 0.5001242215513184
F(0.9999) = 0.5020251448564931
F(0.99999) = 0.4973598550256996
F(0.999999) = 0.5007394876031053
```

を得る. これらは確かに $\dfrac{1}{2} = 0.5$ にかなり近いように見える.

しかし, べき級数の $F(x)$ の値は $x \nearrow 1$ で収束しない!!! この事実のTauber型定理を使った証明については

- 黒木玄, [ガンマ分布の中心極限定理とStirlingの公式 (https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf)](https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf)

の第10.4節を見よ. □

In [36]:

```julia
# 上のセルのべき級数の数値計算例

F(x; N=10^3) = sum(n->(-1)^n*x^(2.0^n), 0:N)
@show F(0.9)
@show F(0.99)
@show F(0.999)
@show F(0.9999)
@show F(0.99999)
@show F(0.999999);
```

```
F(0.9) = 0.4677755990574414
F(0.99) = 0.49409849522830906
F(0.999) = 0.5001242215513184
F(0.9999) = 0.5020251448564931
F(0.99999) = 0.4973598550256996
F(0.999999) = 0.5007394876031053
```

In [37]:

```
# 上の f(x) が x→1 で収束しないことの数値的確認

F(x; N=10^3) = sum(n->(-1)^n*x^(2.0^n), 0:N)
x = 0:0.001:0.999
P1 = plot(x, F.(x), label="F(x)", ylims=(0,0.5), xlims=(0,1))
x = 0.999:0.000001:0.999999
P2 = plot(x, F.(x), label="F(x)", ylims=(0.497, 0.503), xlims=(0.999,1))
plot(P1, P2, size=(600, 240), legend=:topleft)
```

Out[37]:

4.3 収束円盤の境界上でのべき級数の収束

4.3.1 Abelの連続性定理

Abelの連続性定理: 収束半径 1 の複素べき級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ は $z=1$ で収束していると仮定する. このとき, $R \geqq 1$ で決まる閉集合

$$K_R = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < 1,\ \frac{|1-z|}{1-|z|} \leqq R \right\}$$

内で $z \to 1$ とするとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

証明: a_0 を $a_0 - \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ で置き換えることによって, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$ の場合に帰着できるので, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$ と仮定しておく. K_R 内で $z \to 1$ とするとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \to 0$ となることを示せばよい.

$|z| < 1$ と仮定する. $s_{-1} = 0$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ とおくと, $s_n \to 0$ でかつ $a_k = s_k - s_{k-1}$ となる. ゆえに,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1}) z^k = (1-z) \sum_{k=0}^{n-1} s_k z^k + s_n z^n$$

なので, $s_n \to 0$ より, $n \to \infty$ とすることによって,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = (1-z) \sum_{k=0}^{n-1} s_k z^k + (1-z) \sum_{k=n}^{\infty} s_k z^k.$$

任意に $\varepsilon >$ を取る. $s_n \to 0$ より, 数列 s_n は有界になり, ある $M > 0$ が存在してすべての番号 k について $|s_k| \leqq M$ となり, そして, ある番号 N が存在して, $k \geqq N$ ならば $|s_k| \leqq \dfrac{2\varepsilon}{R}$ となる. このとき, $z \in K_R$ ならば

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right| &\leqq |1-z| \sum_{k=0}^{N-1} M|z|^k + |1-z| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2R} |z|^k \\
&= |1-z| M \sum_{k=0}^{N-1} |z|^k + \frac{\varepsilon}{2R} \frac{|1-z||z|^N}{1-|z|} \\
&\leqq |1-z| MN + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

ゆえに, $|1-z| \leqq \dfrac{\varepsilon}{2MN}$ とすると,

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで K_R 内で $z \to 1$ とすると $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \to 0$ となることがわかった. □

注意: $z \in \mathbb{R}$ かつ $0 \leqq z < 1$ のとき, $\dfrac{|1-z|}{1-|z|} = \dfrac{1-z}{1-z} = 1$ となるので, 任意の $R \geqq 1$ に対して, $[0,1) \subset K_R$ となる. K_R の形については次のセルのプロットを見よ. □

In [38]:

```
x = -1:0.005:1
y = -1:0.005:1
z = x' .+ im.*y
f(z, R) = (abs2(z)<1 && abs(1-z) ≤ R*(1-abs(z))) ? 0.0 : 1.0
t = 0:0.01:2π

PP = []
for R in [1.0, 2.0, 5.0, 10.0]
    P = plot(aspectratio=1)
    plot!(xlim=(-1,1), ylim=(-1,1))
    plot!(title="R = $R", titlefontsize=10)
    heatmap!(x, y, f.(z, R), colorbar=false, color=:plasma)
    plot!(cos.(t), sin.(t), label="")
    push!(PP, P)
end

plot(PP..., size=(750, 170), layout=@layout([a b c d]))
```

```
invalid redefinition of constant R

Stacktrace:
 [1] anonymous at .\<missing>:?
```

問題: $a_k \geqq 0$ かつ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ ならば, $x \nearrow 1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \to \infty$ となることを示せ.

解答例: $a_k \geqq 0$ かつ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ と仮定し, $M > 0$ であるとする. ある番号 N が存在して $n \geqq N$ ならば $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \geqq 2M$ となる. ゆえに $\dfrac{1}{2^{1/N}} \leqq x < 1$ とすると,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \geqq \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \geqq x^N \sum_{k=0}^{N} a_k \geqq \frac{1}{2} 2M = M.$$

これで $x \nearrow 1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \to \infty$ となることが示された. □

例: $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2\cdot 3^k} - z^{3^k}}{k}$ とおく. 右辺のべき級数の収束半径は 1 であり, $z = 1$ でも収束しており, $f(1) = 0$ となっている. ゆえに, Abelの連続性定理より, ある $R \geqq 1$ について, z が $\dfrac{|1-z|}{1-|z|} \leqq R$ を満たしながら 1 に近付くと(特に $z \nearrow 1$ のとき) $f(z)$ は $f(0) = 0$ に近付く.

しかし, $z_m = e^{\pi i/3^m}$ とおくと, $m \to \infty$ で $z_m \to 1$ であり, さらに $k \geqq m$, $0 \leqq r \leqq 1$, $z = rz_m$ ならば $z^{2\cdot 3^k} - z^{3^k} = r^{2\cdot 3^k} + r^{3^k}$ となり, r のべき級数 $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} \frac{r^{2\cdot 3^k} + r^{3^k}}{k}$ は $r = 1$ のとき ∞ になるので, 上の問題の結果より, $r \nearrow 1$ で $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} \frac{r^{2\cdot 3^k} + r^{3^k}}{k} \to \infty$ となる. このことから, $|z| < 1$ を満たす z を 1 に自由に近付けてよいことにすると, $f(z)$ は 0 に収束しなくなることがわかる. □

In [39]:
```
f(z; N=39) = sum(k->(z^(2*3^k)-z^(3^k))/k, 1:N)
@show f(1)
@show f(0.9*e^(π*im/3^1))
@show f(0.9999*e^(π*im/3^2))
@show f(0.9999999*e^(π*im/3^3))
@show f(0.9999999999*e^(π*im/3^4))
@show f(0.9999999999999*e^(π*im/3^5));
```

```
f(1) = 0.0
f(0.9 * e ^ ((π * im) / 3 ^ 1)) = 1.5497581048837092 - 1.447746731035876e-15im
f(0.9999 * e ^ ((π * im) / 3 ^ 2)) = 2.1652569095059886 - 0.00025970371463305745im
f(0.9999999 * e ^ ((π * im) / 3 ^ 3)) = 2.7262170557818766 + 0.3007667935718108im
f(0.9999999999 * e ^ ((π * im) / 3 ^ 4)) = 3.046854906145112 + 0.2649066855815363im
f(0.9999999999999 * e ^ ((π * im) / 3 ^ 5)) = 3.2124675281844013 + 0.1962355974206421im
```

4.3.2 準備: Vitaliの定理

複素函数論を使うことができれば, べき級数の収束円盤の境界の一部分までべき級数で定義された函数が解析接続されているというAbelの連続性定理の仮定も強い仮定のもとで, Abelの定理よりも強い結論を得ることができる. そういう結果を示すための準備として, 次のVitaliの定理を引用しておく.

Vitaliの定理: D は$\mathbb{C}$ の連結開集合であり, f_n は D 上の正則函数列であるとする. もしも f_n が D 上で広義一様有界でかつ複素数列 $f_n(z)$ が収束するような $z \in D$ の全体が集積点を持つならば, 正則函数列 f_n は D 上で広義一様収束する. □

ここで, f_n が広義一様有界であるとは, D の任意のコンパクト部分集合 K に対してある定数 $M > 0$ が存在して, K 上ですべての番号 n について $|f_n| \leqq M$ となることであり, f_n が D 上で広義一様収束するとは, D の任意のコンパクト部分集合 K 上で f_n が一様収束することである. 正則函数列の広義一様収束先の函数も正則函数になる.

Vitaliの定理の証明はこのノートで扱わないが, その定理は極めて有用である. Vitaliの定理を使えば, 領域 D 内のほんの一部分での収束さえ証明すれば, 領域 D 全体での収束が証明できてしまうことがある. 実際に次の節でVitaliの定理がそのような使われ方をする.

Vitaliの証明については以下の文献を参照せよ:

- 大島利雄, 関数論 (http://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/CAMPUS/ca.pdf), 2003年
- 斎藤恭司述, 松本佳彦記, 複素解析学特論 (http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/web/htdocs/publication/documents/saito-lectures), 1978年, 2009年

4.3.3 M. Riesz の補題とその応用

この節の内容については

- Remmert, Reinhold. Classical topics in complex function theory. Graduate Texts in Mathematics 172, Springer, 1998

の第11章 "Boundary Behavior of Power Series" の§1 "Convergent on the Boundary" (pp.244-249)を参照した. この文献のこの章は収束円盤の境界上でのべき級数の振る舞いに関する結果やアイデアに関する歴史的覚え書きについても非常に詳しい.

基本は次の補題である. g_n の定義の仕方が絶妙で本質を突いている.

M. Rieszの補題: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ は収束半径が1の複素べき級数であるとし, 複素数列 a_n は有界であると仮定する.

$$a < b \leqq a + 2\pi, \quad c > 1, \quad K = K_{a,b,c} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid a \leqq \arg(z) \leqq b,\ |z| \leqq c \,\}$$

であるとし, $|z| < 1$ における正則函数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ は K を含む $\mathbb{C}$ の開集合上の正則函数 f に拡張されると仮定する. K 上の函数列 g_n を次のように定める:

$$g_n(z) = \frac{f(z) - s_n(z)}{z^{n+1}}(z-\alpha)(z-\beta), \quad s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad \alpha = e^{ia}, \quad \beta = e^{ib}.$$

このとき, 函数列 g_n は K 上で一様有界である. □

証明: $\kappa = ce^{ia}$, $\lambda = ce^{ib}$ とおく. 最大値の原理より, K の境界上で, すなわち, 線分 $[0,\kappa]$, $[0,\lambda]$ および円弧 $L = \{\, ce^{i\theta} \mid a \leqq \theta \leqq b \,\}$ の上で函数列 g_n が一様有界であることを示せば十分である. 線分 $[0,\kappa]$ を 0, α, $(0,\alpha)$, $(\alpha,\lambda]$ に分割して考える.

複素数列 $|a_k|$ の上界の一つを $A > 0$ と書き, $|f|$ の K 上での上界の一つを $M > 0$ と書く.

$z=0$ において, $|g_n(0)| = |a_{n+1}||0-\alpha||0-\beta| = |a_{n+1}| \leqq A$.

$z=\alpha$ において, $|g_n(\alpha)| = 0$.

$z \in (0,\alpha)$ は $z = re^{ia}$, $0<r<1$ と表わされる. そのとき,

$$|f(z)-s_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k\right| \leqq A \sum_{k=n+1}^{\infty} r^k = \frac{Ar^{n+1}}{1-r},$$
$$|z-\alpha| = 1-r, \quad |z-\beta| \leqq 2$$

なので,

$$|g_n(z)| \leqq \frac{Ar^{n+1}}{1-r}\frac{1}{r^{n+1}}(1-r)2 = 2A.$$

$z \in (\alpha,\kappa]$ は $z = re^{ia}$, $1<r\leqq c$ と表わされる. そのとき,

$$|f(z)-s_n(z)| \leqq |f(z)| + A\sum_{k=0}^{n} r^k \leqq M + \frac{A(r^{n+1}-1)}{r-1} \leqq M + A\frac{r^{n+1}}{r-1},$$
$$|z-\alpha| = r-1, \quad |z-\beta| \leqq c+1,$$
$$r^{n+1} \geqq r \geqq r-1$$

なでの,

$$|g_n(z)| \leqq \left(M + A\frac{r^{n+1}}{r-1}\right)\frac{1}{r^{n+1}}(r-1)(c+1) \leqq (M+A)(c+1).$$

$z \in [0,\lambda]$ 上での $|g_n|$ の上からの評価は以上における $z \in [0,\lambda]$ の場合と同様である.

$z \in L$ は $z = ce^{i\theta}$, $a \leqq \theta \leqq b$ と表わされる. そのとき, $|z| = c > 1$ なので,

$$|f(z)-s_n(z)| \leqq |f(z)| + A\sum_{k=0}^{n} c^k \leqq M + \frac{A(c^{n+1}-1)}{c-1} \leqq M + A\frac{c^{n+1}}{c-1},$$
$$|z-\alpha| \leqq c+1, \quad |z-\beta| \leqq c+1,$$

なので,

$$|g_n(z)| \leqq \left(M + A\frac{c^{n+1}}{c-1}\right)\frac{1}{c^{n+1}}(c+1)(c+1) \leqq \left(M + \frac{A}{c-1}\right)(c+1)^2.$$

以上によって, $|g_n|$ が K の境界上で一様有界であることが示されたので, 最大値の原理から K 全体で一様有界であることも導かれる. □.

M. Rieszの有界性定理: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ は収束半径が1の複素べき級数であるとし, 複素数列 a_n は有界であると仮定する.

$$S = \{\, z \in \mathbb{C} \mid A < \arg(z) < B,\ |z| < C \,\}, \quad A < B \leqq A + 2\pi, \quad C > 1$$

であるとし, $|z|<1$ における正則函数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ は S 上の正則函数 f に拡張されると仮定する. このとき, 部分和の函数列 $s_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ は

$$S_{|z|\leqq 1} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid A < \arg(z) < B,\ |z| \leqq 1 \,\}$$

上で広義一様有界である. □

証明: $S_{|z|\leqq 1}$ の任意のコンパクト部分集合 Z は M. Rieszの補題におけるある $K = K_{a,b,c}$ で $A<a<b<B$, $1<c<C$ を満たすものの内部に含まれる. 以下では M. Rieszの補題とその証明における記号をそのまま用いる. Z から K の境界への最短距離を $d>0$ と書く. M. Rieszの補題より, ある定数 $G>0$ が存在して, すべての番号 n について K 上で $|g_n| \leqq G$ となる. ゆえに, $z \in Z$ のとき, $|z| \leqq 1$ でもあるので,

$$|s_n(z)| = \left|f(z) - \frac{g_n(z)z^{n+1}}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right| \leqq |f(z)| + \frac{|g_n(z)||z^{n+1}|}{|z-\alpha||z-\beta|} \leqq M + \frac{G}{d^2}.$$

これで $s_n(z)$ が Z 上で一様有界であることが確かめられた. □

FatouとM. Rieszの収束定理: M. Rieszの有界性定理の状況において, さらに複素数列 a_n が 0 に収束していると仮定すると, べき

級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ は $S_{|z|\leqq 1}$ 上で f に広義一様収束する. □

証明: $S_{|z|\leqq 1}$ の任意のコンパクト部分集合 Z は M. Rieszの補題におけるある $K = K_{a,b,c}$ で $A < a < b < B$, $1 < c < C$ を満たすものの内部に含まれる. 以下では M. Rieszの補題とその証明における記号をそのまま用いる. Z から K の境界への最短距離を $d > 0$ と書く. このとき, $z \in Z$ ならば, $|z| \leqq 1$ でもあるので,

$$|f(z) - s_n(z)| = \frac{|g_n(z)||z^{n+1}|}{|z-\alpha||z-\beta|} \leqq \frac{|g_n(z)|}{d^2}.$$

したがって, $s_n(z)$ が $f(z)$ に一様収束することを示すためには, $g_n(z)$ が Z 上で 0 に一様収束することを示せば十分である. さらに, そのためには, Vitaliも定理より, $0 < r < 1$ を満たす r を任意に固定して, $z \in K$, $|z| = r$ のときに, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(z) = 0$ となることを示せば十分である.

$0 < r < 1$, $z \in K$, $|z| = r$ と仮定し, 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. この場合には, a_n が 0 に収束すると仮定してあったので, ある番号 N が存在して, $k \geqq N$ ならば $|a_k| \leqq \varepsilon \dfrac{1-r}{(r+1)^2}$ となる. 以下, $n \geqq N$ と仮定する. このとき, $|z-\alpha| \leqq r+1$, $|z-\beta| \leqq r+1$,

$$|f(z) - s_n(z)| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| q^k \leqq \varepsilon \frac{1-r}{(r+1)^2} \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

なので,

$$|g_n(z)| \leqq \varepsilon \frac{1-r}{(r+1)^2} \frac{r^{n+1}}{1-r} \frac{1}{r^{n+1}} (r+1)^2 = \varepsilon.$$

これで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(z) = 0$ が示された. □

注意: FatouとM. Rieszの収束定理より, 収束半径 1 のべき級数で定義された $|z| < 1$ における正則函数 $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ が $z = 1$ まで解析接続されているとき, 複素数列 a_n が 0 に収束することと $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ が収束することが同値であることがわかる. 後者ならば前者は自明であるが, その逆向きはFatouとM. Rieszの収束定理の証明を読めばかなり非自明である. □

例: FatouとM. Rieszの収束定理(もしくはRieszの有界性定理)において, べき級数の係数が 0 に収束する(もしくは有界である)という仮定を除くことはできないことは次の例を見ればわかる. 有理函数 $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)^2}$ は $z \neq -1$ 以外で正則であり, そのべき級数展開

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n z^n$$

の収束半径は 1 であり, $f(1) = \dfrac{1}{4}$ である. しかし, 右辺のべき級数の係数 $(-1)^{n-1}n$ は 0 に収束していないし(有界でさえない), そのべき級数は $z = 1$ のとき

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{N-1} N = (-1)^{N-1} \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor,$$
$$s_1 = 1,\ s_2 = -1,\ s_3 = 2,\ s_4 = -2,\ s_5 = 3,\ s_6 = -3,\ \ldots$$

となって収束しない(有界でさえない). □

例: $\log(1+z) = \displaystyle\int_0^z \frac{dt}{1+t}$ は $z \neq -1$ 以外では多価正則であり, そのべき級数展開

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

の収束半径は 1 であり, その係数 $(-1)^n/n$ は 0 に収束している. ゆえに, FatouとM. Rieszの収束定理より, このべき級数は

$$|z| \leqq 1, \quad -\pi < \arg(z) < \pi$$

において $\log(1+z)$ に広義一様収束している. □

例: $\mathrm{Li}_2(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{-\log(1-t)}{t}\, dt$ は $z = 1$ 以外では多価正則であり, そのべき級数展開

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

は $|z| \leqq 1$ において一様絶対収束している. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ なので, Abelの定理より, $z \nearrow 1$ のとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \to \zeta(2)$ となる. □

5 超幾何級数

次のべき級数を**Gaussの超幾何級数** (Gauss's hypergeometric series)と呼ぶ:

$$ {}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} x^k. $$

ここで

$$ (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1). $$

より一般に

$$ {}_rF_s(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_r)_k}{(b_1)_k \cdots (b_s)_k k!} x^k $$

と定める.

問題: Gaussの超幾何級数 ${}_2F_1$ が $|x| < 1$ で絶対収束することを示せ.

解答例: d'Alembertの判定法を使おう.

$$ \frac{(a)_k (b)_k / ((c)_k k!)}{(a)_{k+1} (b)_{k+1} / ((c)_{k+1} (k+1)!)} = \frac{(c+k)(k+1)}{(a+k)(b+k)} \to 1 \qquad (k \to \infty) $$

より, Gaussの超幾何級数は $|x| < 1$ で絶対収束する. □

問題: 以下を示せ:

$$ (1)_k = k!, \quad (2)_k = (k+1)!, \quad (1/2)_k k! = \frac{(2k)!}{4^k}, \quad (2k+1)(1/2)_k = (3/2)_k. $$

ヒント: 3つ目の公式を除けば易しい. 3つ目の公式は以下のようにして示される:

$$ (1/2)_k k! = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-1}{2} k! = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k}\frac{2\cdot 4\cdots(2k)}{2^k} = \frac{(2k)!}{4^k}. \qquad \square $$

例: 初等函数を以下のように表すことができる:

$$ {}_0F_0(;;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x. $$

$$ {}_0F_1(;1/2;-x^2/4) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^k}{(1/2)_k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{(2k)!} = \cos x. $$

$$ {}_1F_0(a;;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k = (1-x)^{-a}. $$

$$ {}_2F_1(1,1;2;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!k!}{(k+1)!k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} = -\frac{\log(1-x)}{x}. $$

$$ x\ {}_2F_1(1/2,1;3/2;-x^2) = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k k!}{(3/2)_k k!}(-x^2)^k = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{2k+1} = \arctan x. $$

問題: 上の例の結果を確認せよ. □

問題: $\sin x$ を ${}_0F_1$ を使って表せ. □

問題: $\arcsin x$ を ${}_2F_1$ を使って表せ. □

ヒント: 「超幾何 初等函数」を検索 (https://www.google.co.jp/search?q=%E8%B6%85%E5%B9%BE%E4%BD%95+%E5%88%9D%E7%AD%89%E5%87%BD%E6%95%B0).

問題: ガンマ函数とベータ函数を

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx, \quad B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \quad (s,p,q>0)$$

と定めると,

$$(x)_k = \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}, \quad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

が成立することを認めて, $c > b > 0$ のとき

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\,dt$$

が成立することを示せ. これを**Gaussの超幾何函数の積分表示**と呼ぶ.

解答例:

$$\begin{aligned}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}x^k &= \frac{\Gamma(b+k)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(x+k)}\frac{(a)_k}{k!}x^k = \frac{B(b+k,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{(a)_k}{k!}x^k \\ &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\frac{(a)_k}{k!}(xt)^k\,dt.\end{aligned}$$

ゆえに, これを $k = 0, 1, 2, \dots$ について足し上げて目的の公式を得る. □

問題: 以下の公式を示せ: $c > b > 0$ のとき,

$${}_1F_1(b;c;x) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\,e^{xt}\,dt$$

となることを示せ. これを**Kummerの合流型超幾何函数の積分表示**と呼ぶ.

解答例:

$$\begin{aligned}\frac{(b)_k}{(c)_k k!}x^k &= \frac{\Gamma(b+k)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(x+k)}\frac{x^k}{k!} = \frac{B(b+k,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{x^k}{k!} \\ &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\frac{(xt)^k}{k!}\,dt.\end{aligned}$$

ゆえに, これを $k = 0, 1, 2, \dots$ について足し上げて目的の公式を得る. □

問題(Gaussの超幾何微分方程式): $y = {}_2F_1(a,b;c;x)$ が

$$x(1-x)y'' + (c-(a+b+1)x)y' - ab = 0$$

を満たしていることを示せ. これを**Gaussの超幾何微分方程式**と呼ぶ.

解答例: $\partial = \frac{d}{dx}$ とおく. $x\partial x^k = kx^k$ となる. ゆえに, ${}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}x^k$ より,

$$\begin{aligned}(x\partial + a)y &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}(a+k)x^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{a(a+1)_k(b)_k}{(c)_k k!}x^k = a\,{}_2F_1(a+1,b;c;x), \\ \therefore\quad (x\partial+a)(x\partial+b)y &= ab\,{}_2F_1(a+1,b+1;c;x). \\ \partial(x\partial+c-1)y &= \sum_{k=1}^\infty \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}(c+k-1)kx^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{a(a+1)_{k-1}b(b+1)_{k-1}}{(c)_{k-1}(k-1)!}x^{k-1} = ab\,{}_2F_1(a+1,b+1;c;x), \\ \therefore\quad [\partial(x\partial+c-1) - (x\partial+a)(x\partial+b)]y &= 0.\end{aligned}$$

そして,

$$\begin{aligned}\partial(x\partial+c-1) - (x\partial+a)(x\partial+b) &= x\partial^2 + c\partial - (x^2\partial^2 + (a+b+1)x\partial + ab) \\ &= x(1-x)\partial^2 + (c-(a+b+1)x)\partial - ab.\end{aligned}$$

これで示したい公式が示された. □

注意: Gaussの超幾何函数に関する詳しい結果を用いて, Virasoro代数の対称性を持つBelavin-Polyakov-Zamolodchikovの共形場理論の $c = 1$ の場合を詳しく分析すると, Painlevé VI 方程式の τ 函数を構成できるという面白い結果については, 次の集中講義のノートを参照せよ.

- 名古屋創, 共形場理論とPainlevé方程式 (https://genkuroki.github.io/documents/201805NagoyaHajime/), 東北大学数学教室における集中講義, 2018年5月7日〜10日

この集中講義の第2回目 (https://genkuroki.github.io/documents/201805NagoyaHajime/2018-05-09%20%E5%90%8D%E5%8F%A4%E5%B1%8B%E5%89%B5%20%E5%85%B1%E5%BD%A2%E5%A0%B4%E7%90%86%E8%
はGaussの超幾何微分方程式の易しい入門的解説になっている. □

問題(Kummerの合流型超幾何微分方程式): $y = {}_1F_1(b;c;x)$ が

$$xy'' + (c-x)y' - b = 0$$

を満たしていることを示せ. これを**Kummerの合流型超幾何微分方程式**と呼ぶ.

解答例: $\partial = \frac{d}{dx}$ とおく. $x\partial x^k = kx^k$ となる. ゆえに, ${}_1F_1(b;c;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b)_k}{(c)_k k!} x^k$ より,

$$\begin{aligned}
(x\partial + b)y &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b)_k}{(c)_k k!}(b+k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b(b+1)_k}{(c)_k k!} x^k = b\,{}_2F_1(b+1;c;x), \\
\partial(x\partial + c - 1)y &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(b)_k}{(c)_k k!}(c+k-1)kx^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(b+1)_{k-1}}{(c)_{k-1}(k-1)!} x^{k-1} = b\,{}_1F_1(b+1;c;x), \\
\therefore \quad & [\partial(x\partial + c - 1) - (x\partial + b)]y = 0.
\end{aligned}$$

そして,

$$\begin{aligned}
\partial(x\partial + c - 1) - (x\partial + b) &= x\partial^2 + c\partial - (x\partial + b) \\
&= x(1-x)\partial^2 + (c-x)\partial - b.
\end{aligned}$$

これで示したい公式が示された. □

In [ ]:
```
1
```

07 漸近展開の有名な例

黒木玄

2018-05-20

- Copyright 2018 Gen Kuroki
- License: MIT https://opensource.org/licenses/MIT (https://opensource.org/licenses/MIT)

- Repository: https://github.com/genkuroki/Calculus (https://github.com/genkuroki/Calculus)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/07%20example%20of%20asymptotic%20expansion.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/07%20example%20of%20asymptotic%20expansion.ipynb)
- https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/07%20example%20of%20asymptotic%20expansion.pdf (https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/07%20example%20of%20asymptotic%20expansion.pdf)

このファイルは Julia Box (https://juliabox.com) で利用できる.

自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ.

論理的に完璧な説明をするつもりはない. 細部のいい加減な部分は自分で訂正・修正せよ.

目次

1 漸近展開の有名な例
  1.1 $F_n(x)$ の定義
  1.2 $F_n(x) = O(x^{n+1})$
  1.3 $F_0(x)$ の漸近展開
  1.4 $F_0(x)$ の漸近展開の別の導出の仕方
  1.5 以上のまとめ
  1.6 $F_0(1/10)$ の漸近展開を用いた数値計算
  1.7 漸近展開の入門書
  1.8 指数積分函数
  1.9 連分数展開による数値計算

In [1]:

```
using Plots
gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn) = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    display("text/html", """<img src="data:$mime; base64,$base64">""")
end

using SymPy
#sympy[:init_printing](order="lex") # default
#sympy[:init_printing](order="rev-lex")

using SpecialFunctions
using QuadGK
```

1 漸近展開の有名な例

1.1 $F_n(x)$ の定義

n は非負の整数であるとする. $x > 0$ の函数 $F_n(x)$ を

$$F_n(x) = n!\, e^{1/x} \int_{1/x}^{\infty} e^{-t} t^{-n-1}\, dt$$

と定める. $F_n(x)$ の $x > 0$ が 0 に近いときの様子を調べたい.

1.2 $F_n(x) = O(x^{n+1})$

$x > 0$ のとき $t \geqq 1/x$ ならば $t^{-n-1} \leqq x^{n+1}$ なので

$$0 < F_n(x) \leqq n!\, e^{1/x} \int_{1/x}^{\infty} e^{-t} x^{n+1}\, dt = n!\, x^{n+1}.$$

ゆえに,

$$F_n(x) = O(x^{n+1}) \quad (x \searrow 0).$$

1.3 $F_0(x)$ の漸近展開

$(-e^{-t})' = e^{-t}$ を用いた部分積分によって

$$\begin{aligned} F_n(x) &= n!\, e^{1/x} \left(\left[-e^{-t} t^{-n-1} \right]_{1/x}^{\infty} + \int_{1/x}^{\infty} e^{-t} (-(n+1) t^{-n-2}) dt \right) \\ &= n!\, x^{n+1} - F_{n+1}(x). \end{aligned}$$

ゆえに $x > 0$ において,

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 0!\, x - F_1(x) = 0!\, x - 1!\, x^2 + F_2(x) = \cdots \\ &= 0!\, x - 1!\, x^2 + \cdots + (-1)^n n! x^{n+1} + (-1)^{n+1} F_{n+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k!\, x^{k+1} + (-1)^{n+1} F_{n+1}(x). \end{aligned}$$

1.4 $F_0(x)$ の漸近展開の別の導出の仕方

$x > 0$ であるとする. $F_0(x)$ は $t = 1/x + u$ という置換によって次のように書き直される:

$$F_0(x) = e^{1/x}\int_{1/x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt = x\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{1+xu}\,du.$$

ゆえに

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k z^k + (-1)^n\frac{z^n}{1+z}$$

を $z = xu$ に適用した結果を使うと,

$$\begin{aligned}F_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{k+1}\int_0^{\infty}e^{-u}u^k\,du + (-1)^n x^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}u^n}{1+xu}\,du\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k! x^{k+1} + (-1)^n x^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}u^n}{1+xu}\,du.\end{aligned}$$

さらに

$$0 < x^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}u^n}{1+xu}\,du \leqq x^{n+1}\int_0^{\infty}e^{-u}u^n\,du = n!\,x^{n+1}$$

なので

$$x^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}u^n}{1+xu}\,du = O(x^{n+1}) \qquad (x \searrow 0).$$

1.5 以上のまとめ

以上をまとめると

$$F_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!\,x^{k+1} + (-1)^n F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!\,x^{k+1} + O(x^{n+1}) \quad (x \searrow 0).$$

ここで

$$F_n(x) = n!e^{1/x}\int_{1/x}^{\infty}e^{-t}t^{-n-1}\,dt = x^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}u^n}{1+xu}\,du = O(x^{n+1}) \quad (x \searrow 0).$$

しかし, $x > 0$ で

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k!\,x^{k+1} = 0!\,x - 1!\,x^2 + 2!\,x^3 - 3!\,x^4 + \cdots$$

は決して収束しない.

このように全てを足し上げると発散する場合であっても, 有限項と剰余項の和の形式で表わせば, すべてがwell-definedな量だけを使って議論を進めることができる場合がある. 上の場合には剰余項は $(-1)^n F_n(x)$ である.

1.6 $F_0(1/10)$ の漸近展開を用いた数値計算

$x > 0$ のとき $0 < F_n(x) \leqq n!\,x^{n+1}$ となるのであった. $x = 1/10$ のとき $n!\,x^{n+1}$ が最小になる n は $n = 9, 10$ であることを確認できる. そのとき $n!\,x^{n+1} = 3.6288 \times 10^{-5}$ である. したがって, $n = 9, 10$ のときの $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!\,x^{k+1}$ による $F_0(x)$ の近似は最良になると予想される.

In [2]:
```
[(n, factorial(n)*(1/10)^(n+1)) for n in 7:13]
```

Out[2]:
```
7-element Array{Tuple{Int64,Float64},1}:
 (7, 5.04e-5)
 (8, 4.032e-5)
 (9, 3.6288e-5)
 (10, 3.6288e-5)
 (11, 3.99168e-5)
 (12, 4.79002e-5)
 (13, 6.22702e-5)
```

In [3]:
```
F₀(x) = exp(1/x)*quadgk(u->exp(-1/(x*u))/u, 0, 1)[1]
F₀_ae(x, n=10) = sum(k->(-1)^k*factorial(k)*x^(k+1), 0:n-1)

@show Y = F₀(1/10)
@show Y_ae9 = F₀_ae(1/10, 9)
@show Y_ae10 = F₀_ae(1/10, 10)

n = 1:20
plot(size=(500,350))
plot!(ylims=(-0.0001,0.0001))
plot!(legend=:top)
plot!(n, F₀_ae.(1/10, n)-Y, label="error")
```

```
Y = F₀(1 / 10) = 0.09156333393978826
Y_ae9 = F₀_ae(1 / 10, 9) = 0.09158192
Y_ae10 = F₀_ae(1 / 10, 10) = 0.091545632
```

Out[3]:

1.7 漸近展開の入門書

このように $x > 0$ で決して収束しないべき級数であっても, 適切な解釈のもとで数学的に十分な意味を持つことがある. このような理由で数学では発散級数に関するたくさんの深い研究がある.

その方面の入門書としては次の文献がある. 非常に面白い本なのでおすすめできる.

- 大久保謙二郎・河野實彦共著『漸近展開』, 新しい応用の数学12, 教育出版, 1976, 1996 (https://www.amazon.co.jp/dp/4316376306).

1.8 指数積分函数

$F_0(x)$ は実用的にも重要な函数である. それと本質的に同じ

$$E_1(z) = e^{-z}F_0(1/z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{-z/u}}{u}du$$

は指数積分函数と呼ばれる特殊函数の1つである($t = z/u$). この函数の数値計算については

- http://nbviewer.jupyter.org/github/stevengj/18S096/blob/iap2017/pset3/pset3-solutions.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/stevengj/18S096/blob/iap2017/pset3/pset3-solutions.ipynb)

が非常に面白い解説になっている. 特殊函数の数値計算の最適化に興味がある人は是非とも閲覧して欲しい.

1.9 連分数展開による数値計算

以下は $x = 1/z$ のときの

$$G(z) = F_0(1/z) = e^z E_1(z) = e^z \int_0^1 \frac{e^{-z/u}}{u}du$$

の連分数展開による数値計算である. この函数の連分数展開については

- 一松信著『特殊関数入門』数学選書, 森北出版, 1999 (https://www.amazon.co.jp/dp/4627038216)

の第3章の最後のp.74にある例3.10および第6章のpp.132-133にある例6.4を参照せよ. この本も非常に面白い本なのでおすすめできる.

In [4]:
```
function G_cf(z; n::Int=2)
    cf = 1 + (n+1)/z
    for i = n:-1:1
        cf = z + (1+i)/cf
        cf = 1 + i/cf
    end
    return 1 / (z + 1/cf)
end

G(z) = exp(z)*quadgk(u->exp(-z/u)/u, 0, 1)[1]
```

Out[4]: G (generic function with 1 method)

In [5]:
```
sympy[:init_printing](order="lex")
z = symbols("z")
for n in 1:3
    cf = G_cf(z, n=n)
    display(cf)
end
```

$$\frac{1}{z+\frac{1}{1+\frac{1}{z+\frac{2}{1+\frac{2}{z}}}}}$$

$$\frac{1}{z+\frac{1}{1+\frac{1}{z+\frac{2}{1+\frac{2}{z+\frac{3}{1+\frac{3}{z}}}}}}}$$

$$\frac{1}{z+\frac{1}{1+\frac{1}{z+\frac{2}{1+\frac{2}{z+\frac{3}{1+\frac{3}{z+\frac{4}{1+\frac{4}{z}}}}}}}}}$$

In [6]:
```
sympy[:init_printing](order="rev-lex")
display(series(sum((-1)^n*factorial(n)*z^(n+1) for n in 0:9), n=11))
for n in 1:3
    display(series(G_cf(1/z, n=n), n=11))
end
```

$$z - z^2 + 2z^3 - 6z^4 + 24z^5 - 120z^6 + 720z^7 - 5040z^8 + 40320z^9 - 362880z^{10}$$

$$z - z^2 + 2z^3 - 6z^4 + 24z^5 - 108z^6 + 504z^7 - 2376z^8 + 11232z^9 - 53136z^{10} + \mathcal{O}\left(z^{11}\right)$$

$$z - z^2 + 2z^3 - 6z^4 + 24z^5 - 120z^6 + 720z^7 - 4896z^8 + 35712z^9 - 269568z^{10} + \mathcal{O}\left(z^{11}\right)$$

$$z - z^2 + 2z^3 - 6z^4 + 24z^5 - 120z^6 + 720z^7 - 5040z^8 + 40320z^9 - 360000z^{10} + \mathcal{O}\left(z^{11}\right)$$

$n = 1, 2, 3$ の連分数近似であっても, 大きめの z における近似が相当にうまく行っていることを以下で確認する.

In [7]:
```
G_cf(4), G(4)
```

Out[7]: (0.20636792452830188, 0.20634564990105575)

In [8]:

```
x = 0.05:0.05:4
@time y = G.(x)
@time y_cf1 = G_cf.(x, n=1)
@time y_cf2 = G_cf.(x, n=2)
@time y_cf3 = G_cf.(x, n=3)
plot(size=(500,350))
plot!(title="y = G(x) = e^x E_1(x)", titlefontsize=11)
plot!(xlims=(0,maximum(x)), ylims=(0,2.3))
plot!(x, y, label="numetical integration")
plot!(x, y_cf1, label="continued fractional approximation n=1", ls=:dash)
plot!(x, y_cf2, label="continued fractional approximation n=2", ls=:dash)
plot!(x, y_cf3, label="continued fractional approximation n=3", ls=:dash)
```

```
2.022534 seconds (266.78 k allocations: 13.742 MiB)
0.047182 seconds (16.07 k allocations: 832.076 KiB)
0.016745 seconds (5.59 k allocations: 284.821 KiB)
0.016846 seconds (5.59 k allocations: 285.634 KiB)
```

Out[8]:

In [ ]:

```
```

08 函数の凸性と不等式への応用

黒木玄

2018-06-11

- Copyright 2018 Gen Kuroki
- License: MIT https://opensource.org/licenses/MIT (https://opensource.org/licenses/MIT)

- Repository: https://github.com/genkuroki/Calculus (https://github.com/genkuroki/Calculus)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/08%20convexity.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/08%20convexity.ipynb)
- https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/08%20convexity.pdf (https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/08%20convexity.pdf)

このファイルは Julia Box (https://juliabox.com) で利用できる.

自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ.

論理的に完璧な説明をするつもりはない. 細部のいい加減な部分は自分で訂正・修正せよ.

Table of Contents

1 凸函数の定義
2 2階の導函数の符号と函数の凸性
  2.1 2階の導函数の符号と接線の関係
  2.2 2階の導函数の符号と函数の凸性の関係
  2.3 指数・対数函数への応用
3 Jensenの不等式
  3.1 期待値汎函数
  3.2 Jensenの不等式とその証明
  3.3 相加相乗平均の不等式
  3.4 Youngの不等式
  3.5 Hölderの不等式
    3.5.1 L^p ノルム
    3.5.2 一般化されたHölderの不等式
    3.5.3 Cauchy-Schwarzの不等式
    3.5.4 分配函数の対数凸性
  3.6 Minkowskiの不等式

In [1]:

```
using Plots
gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn) = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    display("text/html", """<img src="data:$mime; base64,$base64">""")
end

using SymPy
#sympy[:init_printing](order="lex") # default
#sympy[:init_printing](order="rev-lex")

using SpecialFunctions
using QuadGK
```

1 凸函数の定義

定義: 区間 I 上の実数値函数 f が**下に凸**な函数であるとは, 任意の $a, b \in I$ と実数 t について,

$$0 \leqq t \leqq 1 \implies f((1-t)a + tb) \leqq (1-t)f(a) + tf(b)$$

を満たしていることである. 逆向きの不等式で上に凸な函数を定義する. すなわち, 区間 I 上の実数値函数 f が**上に凸**な函数であるとは, 任意の $a, b \in I$ と実数 t について,

$$0 \leqq t \leqq 1 \implies f((1-t)a + tb) \geqq (1-t)f(a) + tf(b)$$

を満たしていることである.

In [2]:

```
# log x は上に凸な函数

x = 0:0.01:2.0
a, b = 0.3, 1.5
f(x) = log(x)
t = 0:0.01:1.0
g(a,b,t) = (1-t)*f(a) + t*f(b)
X(a,b,t) = (1-t)*a + t*b
plot(size=(400,250), legend=:topleft, xlims=(0,2.0), ylims=(-2.0, 0.8))
plot!(x, f.(x), label="y = log x")
plot!(X.(a,b,t), g.(a,b,t), label="")
plot!([a,a], [-10.0, f(a)], label="x = a", ls=:dash)
plot!([b,b], [-10.0, f(b)], label="x = b", ls=:dash)
```

Out[2]:

In [3]:

```
# e^x は下に凸な函数

x = -1:0.01:2
a, b = -0.3, 1.5
f(x) = e^x
t = 0:0.01:1.0
g(a,b,t) = (1-t)*f(a) + t*f(b)
X(a,b,t) = (1-t)*a + t*b
plot(size=(400,250), legend=:topleft, xlims=(-1,2), ylims=(0,8))
plot!(x, f.(x), label="y = e^x")
plot!(X.(a,b,t), g.(a,b,t), label="")
plot!([a,a], [-0.0, f(a)], label="x = a", ls=:dash)
plot!([b,b], [-0.0, f(b)], label="x = b", ls=:dash)
```

Out[3]:

2 2階の導函数の符号と函数の凸性

2.1 2階の導函数の符号と接線の関係

定理: 区間 I 上の実数値函数 f が C^2 級でかつ I 上で $f'' \geqq 0$ ならば, $a \in I$ における $y = f(x)$ のグラフは接線 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ の上側にある. 同様に区間 I 上の実数値函数 f が C^2 級でかつ I 上で $f'' \leqq 0$ ならば $a \in I$ における $y = f(x)$ のグラフは接線 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ の下側にある.

証明: 前半のみを証明する. 区間 I 上の実数値函数 f が C^2 級でかつ I 上で $f'' \geqq 0$ であると仮定し, $a \in I$ とする. f は C^2 級なのでTaylorの公式より, $x \in I$ について,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R, \qquad R = f''(\xi)\frac{(x-a)^2}{2}.$$

ここで ξ は a と x のあいだのある実数である. $f'' \geqq 0$ より, $R \geqq 0$ となる. ゆえに, $f(x) \geqq f(a) + f'(a)(x-a)$ となる. これで, $y = f(x)$ のグラフは接線 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ の上側にあることがわかった. □

注意: 上の定理の C^2 級の仮定は2回微分可能性の仮定に弱めることができる. □

注意: 上の定理の証明中の剰余項は

$$R = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2\, f''(x_2)$$

とも書ける. $f'' \geqq 0$ のとき, $x > a$ ならば x_1, x_2 は $a < x_1 < x_2 < x$ の範囲を動くので積分の結果は 0 以上になり, $x < a$ ならば x_1, x_2 は $x < x_1 < x_2 < a$ の範囲を動き, x_2 のみに関する積分の結果は 0 以下になり, さらに x_1 についても積分すると 0 以上になる. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ であることに注意せよ. □

2.2 2階の導函数の符号と函数の凸性の関係

定理: 区間 I 上の実数値函数 f が C^2 級でかつ I 上で $f'' \geqq 0$ ならば f は下に凸である. 同様に区間 I 上の実数値函数 f が C^2 級でかつ I 上で $f'' \leqq 0$ ならば f は上に凸である.

証明: 前半のみを証明する. 区間 I 上の実数値函数 f が C^2 級でかつ I 上で $f'' \geqq 0$ であると仮定する. $a, b \in I$ と仮定し, $c = (1-t)a + tb$ とおく. $0 \leqq t \leqq 1$ であると仮定する. $(1-t)f(a) + tf(b) \geqq f(c)$ を示せばよい. f は C^2 級なので Taylor の公式より,

$$
\begin{aligned}
f(a) &= f(c) + f'(c)(a-c) + R(a),\\
f(b) &= f(c) + f'(c)(b-c) + R(b),\\
R(x) &= f''(\xi_x)\frac{(x-c)^2}{2}.
\end{aligned}
$$

ここで, ξ_x は c と x のあいだのある実数である. $f'' \geqq 0$ という仮定より, $R(x) \geqq 0$ となることがわかる. ゆえに

$$
\begin{aligned}
f(a) &\geqq f(c) + f'(c)(a-c),\\
f(b) &\geqq f(c) + f'(c)(b-c).
\end{aligned}
$$

1つ目の不等式の両辺に $(1-t)$ をかけ, 2つめの不等式の両辺に t をかけると

$$
\begin{aligned}
(1-t)f(a) &\geqq (1-t)f(c) + f'(c)((1-t)a - (1-t)c),\\
t\,f(b) &\geqq tf(c) + f'(c)(tb - tc).
\end{aligned}
$$

これらをたすと, $c = (1-t)a + tb$ とおいたことより,

$$
(1-t)f(a) + tf(b) \geqq f(c) + f'(c)((1-t)a + tb - c) = f(c).
$$

これで f が下に凸であることが示された. □

注意: 上の証明の本質はTaylorの公式の剰余項が0以上になることである. f が C^2 級であるという仮定を2回微分可能性の仮定に弱めても, c と x のあいだのある実数 ξ_x が存在して,

$$
f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + R, \quad R = \frac{1}{2}f''(\xi_x)(x-c)
$$

となるという形でTaylorの定理が成立している. このことを使えば上の定理における C^2 級の仮定を2回微分可能性の仮定に弱めることができる. □

問題: 上と同様にして $f'' \leqq 0$ ならば f が上に凸であることの証明を書き下せ. □

例: $f(x) = e^{ax}$ とおくと $f'(x) = ae^{ax}, f''(x) = a^2e^{ax} \geqq 0$ を満たしているので, f は下に凸な函数である. □

例: $x > 0$ に対して $f(x) = \log x$ とおくと $f'(x) = 1/x, f''(x) = -1/x^2 < 0$ なので, f は上に凸な函数である. □

例題: a は実数であるとし, $x > 0$ に対して $f(x) = x^a$ とおく. $f(x)$ は凸性について調べよ.

解答例: $x > 0$ であるとする. $f'(x) = ax^{a-1}, f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$ であり, $x^{a-2} > 0$ である. ゆえに, $a(a-1) \geqq 0$ のとき, すなわち $a \leqq 0$ または $1 \leqq a$ のとき, f は下に凸になり, $a(a-1) \leqq 0$ のとき, すなわち $0 \leqq a \leqq 1$ のとき, f は上に凸になる. □

2.3 指数・対数函数への応用

問題: すべての $x \in \mathbb{R}$ について $1 + x \leqq e^x$ となることを示せ.

解答例: $y = e^x$ の $x = 0$ での接線は $y = 1 + x$ であり, $f''(x) = e^x \geqq 0$ であるから, 上の定理より, $1 + x \leqq ex$. □

注意: この問題の結果より, $1 - x \leqq e^{-x}$ なので, $x < 1$ のとき $e^x \leqq (1-x)^{-1}$ となる. これで

$$
1 + x \leqq e^x \leqq (1-x)^{-1} \qquad (x < 1)
$$

となることがわかった. $a > 0$, $-a \leqq t < a$ のとき, この不等式の $x = \dfrac{t}{a}$ を代入して全体を a 乗すると次が得られる:

$$
\left(1 + \frac{t}{a}\right)^a \leqq e^t \leqq \left(1 - \frac{t}{a}\right)^{-a} \qquad (-a \leqq t < a). \qquad \square
$$

注意: 上の問題の結果より, $x > -1$ のとき, $\log(1+x) \leqq x$ となることもわかる. □

問題: $x > -1$ のとき $\dfrac{x}{1+x} \leqq \log(1+x)$ となることを示せ.

解答例: $f(x) = \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$ とおく. $f(0) = 0$ である. $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ と使って, f を微分すると,

$$
f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}
$$

なので, $x < 0$ において $f' < 0$ で f は単調減少し, $x > 0$ において $f' > 0$ で f は単調増加する. さらに $f(0) = 0$ なので, $f(x) \geqq 0$ すなわち, $\dfrac{x}{1+x} \leqq \log(1+x)$ である. □

注意: $f''(x) = \dfrac{1-x}{(x+1)^3}$ なので, $-1 < x \leqq 1$ で $f''(x) \geqq 0$ となるが, $x > 1$ で $f''(x) < 0$ となってしまうので, 上の問題と同様にこの問題を解くことはできない. □

以上のまとめ: $x > -1$ のとき

$$\frac{x}{1+x} \leqq \log(1+x) \leqq x. \qquad \square$$

In [4]:

```
f(x) = x/(1+x)
g(x) = log(1+x)
x = -0.99:0.01:3
plot(size=(400, 250), legend=:bottomright, xlim=(-1,3), ylims=(-6,1.5))
plot!(x, f.(x), label="x/(1+x)")
plot!(x, g.(x), label="log(1+x)")
```

Out[4]:

問題: $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ ならば $\log(1+x) \geqq 2x$ となることを示せ.

解答例: $f(x) = \log(1+x) - 2x$ とおく. $f(0) = 0$ である. ゆえに $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ で単調減少するならば, $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ で $f(x) \leqq 0$ となり, 示したいことが示される. そのことを確認するために $f(x)$ を微分すると,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 2 = \frac{-(2x+1)}{1+x}$$

なので $x \geqq -\dfrac{1}{2}$ ならば $f'(x) \leqq 0$ となるので, そこで $f(x)$ は単調減少する. □

注意: $f(x) = \log(1+x) - 2x$ は上に凸な函数なので, $f(a) = 0$ となる $a < 0$ を取れば $f(x) \geqq 0$ と $a \leqq x \leqq 0$ は同値になる. 実際に a を計算すると $a = -0.79681213\cdots$ となる. □

In [5]:

```
f(x) = log(1+x) - 2x
@show f(-0.79681213)
@show f(-0.79681214)

a = -0.79681213
x = -0.999:0.001:0.1
plot(size=(400,250), legend=:bottomright, ylims=(-1,0.5))
plot!(x, f.(x), label="log(1+x) - 2x")
plot!(x, zeros(x), label="", color="black", ls=:dot)
plot!([a,a], [-1,0], label="x=$a", color=:red, ls=:dash)
```

```
f(-0.79681213) = 5.84896575617222e-11
f(-0.79681214) = -2.9157047887196086e-8
```

Out[5]:

問題: $a > 0$ であるとし, $-a < t < a$ であるとする. $\left(1+\frac{t}{a}\right)^a$ は a について単調増加し, $\left(1-\frac{t}{a}\right)^{-a}$ は a について単調減少することを示せ.

解答例: それぞれの対数を取ってから a で微分する, 上の方の問題で示した $\log(1+x)$ に関する不等式

$$\frac{x}{1+x} \leqq \log(1+x) \qquad (x > -1)$$

より,

$$\frac{\partial}{\partial a}\log\left(1+\frac{t}{a}\right)^a = \log\left(1+\frac{t}{a}\right) - \frac{t/a}{1+t/a} \geqq 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial a}\log\left(1-\frac{t}{a}\right)^{-a} = -\log\left(1-\frac{t}{a}\right) + \frac{-t/a}{1-t/a} \leqq 0.$$

ゆえに, $\left(1+\frac{t}{a}\right)^a$ は a について単調増加し, $\left(1-\frac{t}{a}\right)^{-a}$ は a について単調減少する. □

問題: 以上の結果をまとめて用いて,

$$\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{t}{a}\right)^a = \lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{-a} = e^t$$

を証明せよ.

解答例: 上の方の注意では

$$\left(1+\frac{t}{a}\right)^a \leqq e^t \leqq \left(1-\frac{t}{a}\right)^{-a} \qquad (-a < t < a) \tag{$*$}$$

という不等式が成立していることを指摘している. さらにすぐ上の問題によって, $\left(1+\frac{t}{a}\right)^a$, $\left(1-\frac{t}{a}\right)^{-a}$ はそれぞれ a について単調増加, 単調減少するので, どちらも $a \to \infty$ で収束する. a を十分に大きくして $\frac{t^2}{a^2} \leqq \frac{1}{2}$ となるようにすると, 上の方の問題で示した不等式

$$\log(1+x) \geqq 2x \qquad \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 0\right)$$

を使うことができて,

$$0 \geqq \log\frac{(1+t/a)^a}{(1-t/a)^{-a}} = a\log\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right) \geqq a\cdot 2\left(-\frac{t^2}{a^2}\right) = -\frac{2t^2}{a} \to 0 \quad (q \to \infty).$$

となるので, $a \to \infty$ のとき $\log \dfrac{(1+t/a)^a}{(1-t/a)^{-a}} \to 0$ すなわち $\dfrac{(1+t/a)^a}{(1-t/a)^{-a}} \to 1$ となる. これで $\left(1+\dfrac{t}{a}\right)^a, \left(1-\dfrac{t}{a}\right)^{-a}$ が同じ値に収束することがわかった. したがって不等式(∗)より, 欲しい結果が得られる. □

注意: 不等式(∗)は極限で指数函数が現われる結果の極限操作を初等的に実行したいときに便利な不等式である. □

In [6]:

```
f(t) = e^t
g(a,t) = (1+t/a)^a
h(a,t) = (1-t/a)^(-a)
t = -3:0.01:3

PP = []
for a in [5, 10, 20, 40]
    P = plot(title="a=$a", titlefontsize=10, legendfontsize=7)
    plot!(legend=:topleft, yscale=:log, ylims=(10^(-1.3), 10^1.3))
    plot!(t, h.(a,t), label="(1-t/a)^(-a)", ls=:dash)
    plot!(t, f.(t), label="e^t")
    plot!(t, g.(a,t), label="(1+t/a)^a", ls=:dash)
    push!(PP, P)
end
plot(PP[1:2]..., size=(750,250), layout=@layout([a b]))
```

Out[6]:

In [7]:

```
plot(PP[3:4]..., size=(750,250), layout=@layout([a b]))
```

Out[7]:

3 Jensenの不等式

3.1 期待値汎函数

函数を数に対応させる函数を**汎函数** (functional)と呼ぶことがある.

函数の例: x を x に対応させる函数を x と書く.

すべての x を一定の値 α に対応させる函数も同じ記号の α で書き, 定数函数と呼ぶ. $f(x) = \alpha$ とおいて記号 f を利用すると煩雑になるので, 単に α と書いて代用するということである. 数としての α と定数函数としての α を同じ記号で書くので混乱しないように注意して欲しい.

例えば, すべての x を 1 に対応させる函数も単に 1 と書く. □

定義: 函数 f を数 $E[f]$ に対応させる函数 $E[\ ]$ (汎函数)が以下の条件を満たしているとき, $E[\ ]$ は**期待値汎函数** (expextation functional)であると言うことにする:

(1) 線形性: 函数 f, g と数 α, β に対して, $E[\alpha f + \beta g] = \alpha E[f] + \beta E[g]$.

(2) 単調性: 函数 f, g のあいだで常に $f \leqq g$ が成立しているならば $E[f] \leqq E[g]$.

(3) 規格化条件: 定数函数 α について, $E[\alpha] = \alpha$. □

例: 区間 I 上の函数を数 $E[f]$ に対応させる函数 $E[\ ]$ を以下のように定めると, $E[\ ]$ は期待値汎函数になる. まず $a_1, \dots, a_n \in I$ を任意に取る. $w_1, \dots, w_n$ は0以上の実数でかつ $w_1 + \cdots + w_n = 1$ を満たしていると仮定する. そして区間 I 上の函数 f に対して

$$E[f] = \sum_{i=1}^{n} w_i f(a_i) = w_1 f(a_1) + \cdots + w_n f(a_n)$$

と定める. このようにして定められた $E[\ ]$ が実際に期待値汎函数の性質を満たしていることは以下のようにして確認できる.

(1) 区間 I 上の函数 f, g と数 α, β について

$$\begin{aligned} E[\alpha f + \beta g] &= \sum_{i=1}^{n} w_i(\alpha f(a_i) + \beta g(a_i)) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha w_i f(a_i) + \beta w_i g(a_i)) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} w_i f(a_i) + \beta \sum_{i=1}^{n} w_i g(a_i) = \alpha E[f] + \beta E[g]. \end{aligned}$$

(2) 区間 I 上で $f \leqq g$ が成立していると仮定すると, $w_i \geqq 0$ より $w_i f(a_i) \leqq w_i g(a_i)$ も成立するので

$$E[f] = \sum_{i=1}^{n} w_i f(a_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} w_i g(a_i) = E[g].$$

(3) 定数函数 $f(x) = \alpha$ について $f(a_i) = \alpha$ が成立しているので, $w_1 + \cdots + w_n = 1$ という仮定より,

$$E[\alpha] = E[f] = \sum_{i=1}^{n} w_i f(a_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha = \alpha.$$

これで示すべきことがすべて示された.

特に $w_i = 1/n$ であるとき, $E[f]$ は

$$E[f] = \frac{f(a_1) + \cdots + f(a_n)}{n}$$

と $f(a_i)$ たちの加法平均になる. □

抽象的な期待値汎函数の概念が難しいと感じる人は, 一般的な期待値汎函数の定義を忘れてこの例の $E[f]$ またはさらにその特別な場合である加法平均の場合のみを考えれば十分である.

問題: $a < b$ であるとする. 閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続函数 f を

$$E[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

に対応させる函数 $E[\ ]$ は期待値汎函数であることを示せ. □

問題: $\mathbb{R}$ 上の函数 $p(x)$ は $p(x) \geqq 0$ $(x \in \mathbb{R})$ と $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1$ を満たしていると仮定する. (このような $p(x)$ は**確率密度函数**と呼ばれる.) このとき, $\mathbb{R}$ 上の(適当によい条件を仮定した)函数 f を

$$E[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x)\, dx$$

に対応させる函数 $E[\ ]$ が期待値汎函数であることを示せ. ($E[f]$ は確率密度函数 $p(x)$ が定める確率分布に関する**確率変数** f の期待値と呼ばれる.)

注意: 上の問題はこの問題で

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (a \leqq x \leqq b) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とした場合になっている. □

解答例: 以下では $\int_{-\infty}^{\infty}$ を $\int$ と略記する.

(1) 数 α, β と函数 f, g について

$$E[\alpha f + \beta g] = \int (\alpha f(x) + \beta g(x))p(x)\,dx = \alpha \int f(x)p(x)\,dx + \beta \int g(x)p(x)\,dx = \alpha E[f] + \beta E[g].$$

(2) $\mathbb{R}$ 上で $f \leqq g$ が成立していると仮定すると, $p(x) \geqq 0$ より $f(x)p(x) \leqq g(x)p(x)$ も成立するので

$$E[f] = \int f(x)p(x)\,dx \leqq \int g(x)p(x)\,dx = E[g].$$

(3) 定数函数 $f(x) = \alpha$ について, $\int p(x)\,dx = 1$ という仮定より,

$$E[\alpha] = \int \alpha p(x)\,dx = \alpha.$$

これで示すべきことがすべて示された. □

3.2 Jensenの不等式とその証明

Jensenの不等式: $E[\ ]$ は区間 I 上の函数の期待値汎函数であるとし, f は区間 I 上の上に凸(もしくは下に凸)な函数であるとする. このとき

$$E[f(x)] \leqq f(E[x]) \qquad (\text{もしくは } E[f(x)] \geqq f(E[x])).$$

例えば

$$E[f(x)] = \sum_{i=1}^{n} w_i f(a_i), \quad w_i \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

のとき,

$$\begin{aligned} &w_1 f(a_1) + \cdots + w_n f(a_n) \leqq f(w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n) \\ &(\text{もしくは } w_1 f(a_1) + \cdots + w_n f(a_n) \geqq f(w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n)). \end{aligned}$$

特にこれの $n = 2$ の場合には f が上に凸(もしくは下に凸)であることの定義とこれらは同値であることに注意せよ. すなわち, 函数 f がJensenの不等式を満たすことと上(もしくは下)に凸なことは同値になる. この意味でJensenの不等式は函数の凸性を言い換えた結果になっている.

証明: 簡単のため f は C^1 級であると仮定する. (C^1 級でない場合にも同様の方法で証明できるが, 「接線」の存在を別に証明する必要が生じる.)

f は上に凸であると仮定する.

$\mu = E[x]$ とおく. $E[f(x)] \leqq f(\mu)$ を示せばよい. $x = \mu$ における $y = f(x)$ の接線を $y = \alpha(x - \mu) + f(\mu)$ と書く. f は上に凸であると仮定したので

$$f(x) \leqq \alpha(x - \mu) + f(\mu)$$

が成立している(図を描いてみよ). ゆえに $E[\ ]$ の性質より

$$E[f(x)] \leqq E[\alpha(x - \mu) + f(\mu)] = \alpha(E[x] - E[\mu]) + E[f(\mu)] = f(\mu).$$

最初の不等号は期待値汎函数の単調性より, 1つ目の等号は線形性より, 2つ目の等号は規格化条件より. これで示すべきことがすべて示された. □

In [8]:

```
x = 0:0.01:2.0
μ = 0.7
f(x) = log(x)
g(μ,x) = (1/μ)*(x-μ) + f(μ)
plot(size=(500,350), legend=:topleft, xlims=(0,1.7), ylims=(-2.2, 0.8))
plot!(x, f.(x), label="y = log x")
plot!(x, g.(μ,x), label="y = a(x-mu)+f(mu)")
plot!([μ, μ], [-3.0, f(μ)], label="x=mu", ls=:dash)
```

Out[8]:

問題: 上に凸な函数 $f(x)$ と

$$E[g(x)] = w_1 g(a_1) + \cdots + w_n g(a_n), \quad w_i \geqq 0, \quad w_1 + \cdots + w_n = 1$$

に関するJensenの不等式

$$w_1 f(a_1) + \cdots + w_n f(a_n) \leqq f(w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n) \tag{$*$}$$

を n に関する数学的帰納法を用いて直接証明せよ.

解答例: $n = 1$ のとき, $(*)$ は $f(a_1) \leqq f(a_1)$ を意味するので, 自明に正しい.

$n = N \geqq 1$ に関する $(*)$ が常に成立していると仮定し(帰納法の仮定),

$$w_i \geqq 0, \quad w_1 + \cdots + w_N + w_{N+1} = 1$$

と仮定する. もしも $w_{N+1} = 1$ ならば $n = N + 1$ の場合の $(*)$ は自明に成立している. 以下では $w_{N+1} < 1$ と仮定し,

$$t_i = \frac{w_i}{1 - w_{N+1}}$$

とおく. このとき, $w_i \geqq 0$, $w_1 + \cdots + w_N = 1 - w_{N+1}$ より,

$$t_i \geqq 0, \quad t_1 + \cdots + t_N = \frac{w_1 + \cdots + w_N}{1 - w_{N+1}} = 1.$$

したがって, $n = N$ の場合の$(*)$より,

$$t_1 f(a_1) + \cdots + t_N f(a_N) \leqq f(t_1 a_1 + \cdots + t_N a_N).$$

f は上に凸と仮定してあったので, $w_i = (1 - w_{N+1}) t_i$ を使うと,

$$\begin{aligned} w_1 f(a_1) + \cdots + w_N f(a_N) + w_{N+1} f(a_{N+1}) &= (1 - w_{N+1})(t_1 f(a_1) + \cdots + t_N f(a_N)) + w_{N+1} f(a_{N+1}) \\ &\leqq (1 - w_{N+1}) f(t_1 a_1 + \cdots + t_N a_N) + w_{N+1} f(a_{N+1}) \\ &\leqq f((1 - w_{N+1})(t_1 a_1 + \cdots + t_N a_N) + w_{N+1} a_{N+1}) \\ &= f(w_1 a_1 + \cdots + w_N a_N + w_{N+1} a_{N+1}). \end{aligned}$$

ここで, 2行目で $n = N$ の場合の$(*)$を使い, 3行目で f が上に凸であることを使った.

ゆえに数学的帰納法によってすべての n について $(*)$ が成立する. □

3.3 相加相乗平均の不等式

例: $a_i > 0$ であるとし,

$$E[f(x)] = \frac{f(a_1) + \cdots + f(a_n)}{n}$$

とおく. $x > 0$ に対して $f(x) = \log x$ とおく. このとき, $f(x) = \log x$ は下に凸なので, Jensenの不等式より $E[f(x)] \leqq f(E[x])$. そして,

$$E[f(x)] = \frac{\log a_1 + \cdots + \log a_n}{n} = \log(a_1 \cdots a_n)^{1/n}, \quad f(E[x]) = \log \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

なので, log の単調増加性より,

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leqq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

これでJensenの不等式が相加相乗平均の不等式を含んでいることがわかった. □

例題: 下に凸な函数 $f(x) = e^x$ に関するJensenの不等式を用いて相加相乗平均の不等式を証明し直せ.

解答例: $a_i > 0$ であるとし, $A_i = \log a_i$, $E[f(x)] = \dfrac{f(A_1) + \cdots + f(A_n)}{n}$ とおくと, $f(x) = e^x$ のとき

$$E[f(x)] = E[e^x] = \frac{e^{A_1} + \cdots + e^{A_n}}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$
$$f(E[x]) = e^{(A_1 + \cdots + A_n)/n} = \left(e^{A_1} \cdots e^{A_n}\right)^{1/n} = (a_1 \cdots a_n)^{1/n}.$$

下に凸な函数 $f(x) = e^x$ に関するJensenの不等式 $E[f(x)] \geqq f(E[x])$ より,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geqq (a_1 \cdots a_n)^{1/n}.$$

これで示すべきことが示された. □

3.4 Youngの不等式

Youngの不等式の一般化: $p_i > 0$, $\dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_n} = 1$, $a_i > 0$ のとき

$$a_1 \cdots a_n \leqq \frac{a_1^{p_1}}{p_1} + \cdots + \frac{a_n^{p_n}}{p_n}$$

$n = 2$ の場合をYoungの不等式と呼ぶ. すなわち $p > 0, q > 0, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, a > 0, b > 0$ のときの

$$ab \leqq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

という不等式を**Youngの不等式**と呼ぶ.

証明: 上に凸な函数 $f(x) = \log x$ に関するJensenの不等式より

$$\log(a_1 \cdots a_n) = \frac{\log a_1^{p_1}}{p_1} + \cdots + \frac{\log a_n^{p_n}}{p_n} \leqq \log\left(\frac{a_1^{p_1}}{p_1} + \cdots + \frac{a_n^{p_n}}{p_n}\right)$$

ゆえに

$$a_1 \cdots a_n \leqq \frac{a_1^{p_1}}{p_1} + \cdots + \frac{a_n^{p_n}}{p_n} \qquad \square$$

問題: $a, b > 0, p, q > 0, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ のとき

$$ab \leqq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$$

となること(つまりYoungの不等式)を直接的に証明してみよ.

解答例1: $f(x) = \log x$ が上に凸であることより, $A, B > 0$ について

$$\frac{1}{p}\log A + \frac{1}{q}\log B \leqq \log\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right).$$

ゆえに $A = a^p$, $B = b^q$ とおくと,

$$\log(ab) = \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q \leqq \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right).$$

したがって,

$$ab \leqq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}. \qquad \square$$

解答例2: $f(x) = e^x$ が下に凸であることより, 実数 A, B について

$$\frac{1}{p}e^A + \frac{1}{q}e^B \geqq e^{A/p+B/q} = e^{A/p}e^{B/q}.$$

ゆえに $A = \log a^p$, $B = \log b^q$ とおくと,

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqq ab. \qquad \square$$

解答例3: $f(x)$ は $x \geqq 0$ の狭義単調増加連続函数で $f(0) = 0$ を満たすものであるとし,

$$X = \{\ (x, y) \mid 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq f(x)\ \}, \quad Y = \{\ (x, y) \mid 0 \leqq x \leqq f^{-1}(y),\ 0 \leqq y \leqq b\ \}$$

とおくと, $[0, a] \times [0, b] \subset X \cup Y$ となるので(図を描いてみよ), 面積を比較することによって

$$ab \leqq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy. \qquad (\star)$$

$f(x) = x^{p-1}$ とおくと,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff (p-1)(q-1) = 1$$

より, $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)} = y^{q-1}$ となることがわかる. これに上の不等式を適用すると

$$ab \leqq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$$

が得られる. $\square$

注意: $a^{p-1} = b$ ならば $(\star)$ で等号が成立する.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff (p-1)(q-1) = 1 \iff (p-1)q = p$$

なので $a^{p-1} = b$ と $a^p = b^q$ は同値である(前者の両辺を q 乗すると後者になる). $\square$

In [9]:

```
function plot_Young(a, b; p=2.5, kwarg...)
    q = p/(p-1)
    f(x) = x^(p-1)
    g(y) = y^(q-1)
    A = max(a, g(b))
    x = 0:a/200:a
    y = 0:b/200:b
    x1 = 0:A/200:A
    P = plot(legend=false; kwarg...)
    plot!([a,a], [0,b], color=:black)
    plot!([0,a], [b,b], color=:black)
    plot!(x, f.(x), color=:red, fill=(0, 0.4, :pink))
    plot!(x1, f.(x1), color=:red, fill=(b, 0.4, :pink))
    if A > a
        x2 = a:(A-a)/200:A
        plot!(x2, f.(x2), color=:red, fill=(b, 0.4, :pink))
    end
    P
end

P1 = plot_Young(3,2)
P2 = plot_Young(2,5)
plot(P1, P2, size=(600, 300))
```

Out[9]:

3.5 Hölderの不等式

3.5.1 L^p ノルム

区間 $[a,b]$ 乗の連続函数 f に対して $\|f\|_p$ を

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

と定める. これを函数 f の L^p ノルムと呼ぶ.

問題: 定数 α について $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$ が成立していることを示せ.

解答例:

$$\|\alpha f\|_p = \left(\int_a^b |\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = |\alpha|\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = |\alpha|\|f\|_p. \qquad \square$$

注意: 上の問題の結果より, 特に $g = \dfrac{f}{\|f\|_p}$ とおくと $\|g\|_p = 1$ となることがわかる. $\square$

3.5.2 一般化されたHölderの不等式

$p > 0, p_i > 0$ であるとし,

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p}$$

と仮定する. このとき, 区間 $[a, b]$ 上の連続函数 f_i 達について

$$\|f_1 \cdots f_n\|_p \leqq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n} \tag{$*$}$$

が成立する. これを**一般化されたHölderの不等式**と呼ぶことにする. $n = 2, p = 1$ の場合はHölderの不等式と呼ばれる. すなわち, $p > 0, q > 0$ かつ

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

のときの

$$\|fg\|_1 \leqq \|f\|_p \|g\|_q$$

という不等式は**Hölderの不等式**と呼ばれる. さらにこれの $p = q = 2$ の場合は**Cauchy-Schwarzの不等式**の特別な場合である.

一般化されたHölderの不等式の証明の概略: $g_i(x) = \dfrac{f_i(x)}{\|f_i\|_{p_i}}$ とおく. そのとき $\|g_i\|_{p_i} = 1$ となる.

$\dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_n} = \dfrac{1}{p}$ は $\dfrac{p}{p_1} + \cdots + \dfrac{p}{p_n} = 1$ と同値なので, $q_i = p_i/p$ とおくと,

$$q_i > 0, \quad pq_i = p_i, \quad \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n} = 1.$$

ゆえに $a_i = |g_i(x)|^p$ にYoungの不等式の一般化を適用することによって,

$$|g_1(x) \cdots g_n(x)|^p = |g_1(x)|^p \cdots |g_n(x)|^p \leqq \frac{|g_1(x)|^{pq_1}}{q_1} + \cdots + \frac{|g_n(x)|^{pq_n}}{q_n} = \frac{|g_1(x)|^{p_1}}{q_1} + \cdots + \frac{|g_n(x)|^{p_n}}{q_n}.$$

これを x で積分すると,

$$(\|g_1 \cdots g_n\|_p)^p \leqq \frac{(\|g_1(x)\|_{p_1})^{p_1}}{q_1} + \cdots + \frac{(\|g_n(x)\|_{p_n})^{p_n}}{q_n} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n} = 1.$$

ゆえに,

$$\frac{\|f_1 \cdots f_n\|_p}{\|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}} = \|g_1 \cdots g_n\|_p \leqq 1.$$

.

したがって,

$$\|f_1 \cdots f_n\|_p \leqq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}. \qquad \square$$

問題: (一般化されていない)Youngの不等式から(一般化されていない)Hölderの不等式を導け.

解答例の概略: $p, q > 0, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ と仮定する.

$$\|fg\|_1 \leqq \|f\|_p \|g\|_q$$

を証明したい. 左辺を右辺で割ったものが 1 以下になることを示せばよい.

$$a(x) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b(x) = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

とおくと, $\|a\|_p = \|b\|_q = 1$ となる. $a(x), b(x)$ にYoungの不等式を適用すると,

$$a(x)b(x) \leqq \frac{a(x)^p}{p} + \frac{b(x)^q}{q}.$$

両辺を x について積分すると,

$$\int_a^b a(x)b(x)\,dx = \|ab\|_1 = \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q},$$
$$\int_a^b \left(\frac{a(x)^p}{p} + \frac{b(x)^q}{q}\right) dx = \frac{(\|a\|_p)^p}{p} + \frac{(\|b\|_q)^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

ゆえに

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} \leqq 1.$$

これより, Hölderの不等式が成立することがわかる. □

3.5.3 Cauchy-Schwarzの不等式

$p, q > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ と仮定する. このとき, $\|f\|_p < \infty$, $\|g\|_q < \infty$ を満たす函数 f, g の内積を

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x)\, dx$$

と定義できる. ここで $\overline{f(x)}$ は $f(x)$ の複素共役を意味している. $f(x)$ が実数ならば $\overline{f(x)} = f(x)$ である. このとき, Hölderの不等式より,

$$|\langle f, g\rangle| \leqq \int_a^b \left|\overline{f(x)}\right| |g(x)|\, dx = \int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\, dx = \|fg\|_1 \leqq \|f\|_p\|g\|_q.$$

すなわち,

$$|\langle f, g\rangle| \leqq \|fg\|_1 \leqq \|f\|_p\|g\|_q.$$

この不等式の $p = q = 1/2$ の場合は**Cauchy-Schwarzの不等式**と呼ばれている.

3.5.4 分配函数の対数凸性

問題: $a < b$ と仮定する. $Z(\beta) = \int_a^b e^{-\beta f(x)+g(x)}\, dx$ の形の函数 $Z(\beta)$ について, $\log Z(\beta)$ が β の下に凸な函数になることをHölderの不等式を使って示せ.

解答例: $0 < t < 1$ であるとし, $p = 1/(1-t)$, $q = 1/t$ とおく. そのとき $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ となる. ゆえにHölderの不等式より,

$$\begin{aligned}
Z((1-t)\alpha + t\beta) = Z\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}\right) &= \int_a^b e^{-(\alpha/p+\beta/q)f(x)+(1/p+1/q)g(x)}\, dx = \int_a^b \left(e^{-\alpha f(x)+g(x)}\right)^{1/p}\left(e^{-\beta f(x)+g(x)}\right)^{1/q} dx \\
&\leqq \left(\int_a^b e^{-\alpha f(x)+g(x)}\, dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b e^{-\beta f(x)+g(x)}\, dx\right)^{1/q} \\
&= Z(\alpha)^{1/p}\, Z(\beta)^{1/q} = Z(\alpha)^{1-t}\, Z(\beta)^t.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\log Z((1-t)\alpha + t\beta) \leqq (1-t)\log Z(\alpha) + t\log Z(\beta).$$

これは $\log Z(\beta)$ が β に関する下に凸な函数であることを意味している. □

注意: 上の問題の $Z(\beta)$ の形の函数を**分配函数**と呼ぶことがある(統計力学). 上の問題より, Hölderの不等式は分配函数の対数が下に凸な函数になることを意味していることがわかる. □

例(ガンマ函数の対数凸性): $s > 0$ に対して $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\, dx = \int_0^\infty e^{(s-1)\log x - x}\, dx$ とおくと, その対数 $\log\Gamma(s)$ は $s > 0$ の下に凸な函数になる. □

注意: 上の問題の記号のもとで, 函数 $h(x)$ に対する $\langle h(x)\rangle = \langle h(y)\rangle$ を次のように定める:

$$\langle h(x)\rangle = \frac{1}{Z(\beta)}\int_a^b h(x)e^{-\beta f(x)+g(x)}\, dx, \quad \langle h(y)\rangle = \frac{1}{Z(\beta)}\int_a^b h(y)e^{-\beta f(y)+g(y)}\, dy.$$

さらに函数 $h(x, y)$ に対する $\langle h(x, y)\rangle$ を次のように定める:

$$\langle h(x, y)\rangle = \frac{1}{Z(\beta)^2}\int_a^b\int_a^b h(x, y)e^{-\beta f(x)+g(x)}\, e^{-\beta f(y)+g(y)}\, dx\, dy.$$

このとき $\langle f(x)\rangle^2 = \langle f(x)f(y)\rangle$ などが成立している.

もしも上の問題の $Z(\beta)$ について β に関する微分と積分の順序交換を自由にできるならば

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{d\beta}\log Z(\beta) &= \frac{\int_a^b e^{-\beta f(x)+g(x)} f(x)\,dx}{Z(\beta)} = \langle f(x)\rangle, \\
\frac{d^2}{d\beta^2}\log Z(\beta) &= \langle f(x)^2\rangle - \langle f(x)\rangle^2 = \langle f(x)f(x)\rangle - \langle f(x)f(y)\rangle \\
&= \frac{1}{2}(\langle f(x)f(x)\rangle - 2\langle f(x)f(y)\rangle + \langle f(y)f(y)\rangle) = \frac{1}{2}\langle (f(x)+f(y))^2\rangle \geqq 0.
\end{aligned}
$$

これからも, $\log Z(\beta)$ が下に凸な函数であることがわかる. □

3.6 Minkowskiの不等式

L^1 ノルムについては, 三角不等式 $|f(x)+g(x)| \leqq |f(x)| + |g(x)|$ より,

$$
\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \leqq \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)\,dx = \|f\|_1 + \|g\|_1
$$

が成立している. この L^1 ノルムに関する三角不等式はそのまま L^p ノルム $(p>1)$ に一般化される.

$p>1$ であると仮定する. $q = \dfrac{p}{p-1}$ とおくと, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. このとき,

$$
\left\| |\varphi|^{p-1} \right\|_q = \left\| |\varphi|^{p-1} \right\|_{p/(p-1)} = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx \right)^{(p-1)/p} = (\|\varphi\|_p)^{p-1}.
$$

これを $\varphi = f+g$ に適用することによって,

$$
\begin{aligned}
(\|f+g\|_p)^p &= \int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx = \int_a^b |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \\
&\leqq \int_a^b |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_a^b |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \\
&\leqq \|f\|_p \left\| |f(x)+g(x)|^{p-1} \right\|_q + \|g\|_p \left\| |f(x)+g(x)|^{p-1} \right\|_q \\
&= \|f\|_p (\|f(x)+g(x)\|_p)^{p-1} + \|g\|_p (\|f(x)+g(x)\|_p)^{p-1} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)(\|f(x)+g(x)\|_p)^{p-1}
\end{aligned}
$$

ここで, 2行目の不等号で三角不等式 $|f(x)+g(x)| \leqq |f(x)| + |g(x)|$ を使い, 3行目の不等号でHölderの不等式を使った. したがって,

$$
\|f+g\|_p \leqq \|f\|_p + \|g\|_p.
$$

これを**Minkowskiの不等式**と呼ぶ.

定義: $\|f\|_p < \infty$ すなわち $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p\,dx < \infty$ を満たす函数を L^p **函数** もしくは p **乗可積分函数** と呼ぶ. 特に L^1 函数を単に**可積分函数**と呼ぶ. □

Minkowskiの不等式より, L^p 函数の和も L^p 函数になる.

In [ ]:
```
1
```

09 積分

黒木玄

2018-06-21

- Copyright 2018 Gen Kuroki
- License: MIT https://opensource.org/licenses/MIT (https://opensource.org/licenses/MIT)

- Repository: https://github.com/genkuroki/Calculus (https://github.com/genkuroki/Calculus)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/09%20integration.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/09%20integration.ipynb)
- https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/09%20integration.pdf (https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/09%20integration.pdf)

このファイルは Julia Box (https://juliabox.com) で利用できる.

自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ.

論理的に完璧な説明をするつもりはない. 細部のいい加減な部分は自分で訂正・修正せよ.

Table of Contents

1 積分の基本性質
  1.1 基本性質(A)線形性, (B)積分区間の連結, (C)定数の積分, (D)単調性
  1.2 性質(E) 積分の絶対値の上からの評価
  1.3 性質(F) 微分積分学の基本定理1
  1.4 性質(G) 微分積分学の基本定理2
2 部分積分と置換積分
  2.1 置換積分
  2.2 部分積分
3 積分の近似
  3.1 Riemann和
  3.2 台形公式
  3.3 Simpsonの公式
4 広義積分
  4.1 絶対収束する広義積分の例
  4.2 条件収束する広義積分の例
5 積分と極限の交換
  5.1 積分と極限が交換できない場合
  5.2 Dirichlet積分とその一般化

In [1]:
```
using Plots
gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn) = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    display("text/html", """<img src="data:$mime; base64,$base64">""")
end

using SymPy
#sympy[:init_printing](order="lex") # default
#sympy[:init_printing](order="rev-lex")

using SpecialFunctions
using QuadGK
```

1 積分の基本性質

1変数函数 $f(x)$ の積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ の構成の仕方は無数に存在する.

Riemann積分とLebesgue積分は有名であり, それら以外にも様々な方法が存在する. 例えば,

- S. ラング, 『ラング 現代の解析学』, 共立出版, 1981 (原書: Serge Lang, Real Analysis, 1969)

の第5章「微分法」の第1節では,

$$f(t) = v_i \quad (a_{i-1} < t < a_i,\ a = a_0 \leqq a_1 \leqq \cdots \leqq a_n = b)$$

を満たす函数(階段函数と呼ぶことにする)の積分を

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^n v_i(a_i - a_{i-1})$$

と定め, これを階段函数の一様収束先に拡張することによって, 積分を導入している. 閉区間上の連続函数は階段函数の一様収束先になっているので, 連続函数の積分もこれによって定義されることになる.

積分の構成の仕方は無数にあるが, 積分は構成の仕方によらない基本性質を持つ. だから, その基本性質のみを使って示された結果はどの積分論においても利用可能になる.

このノートでは積分の構成の仕方には深く踏み込まずに, 積分の基本性質のみを使って積分論を展開する.

ただし, 積分の基本性質の厳密な説明を避けて, 大らかなスタイルで議論を進めることにする.

1.1 基本性質(A)線形性, (B)積分区間の連結, (C)定数の積分, (D)単調性

基本性質(A) 線形性: 定数 α, β について

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

基本性質(B) 積分区間の連結:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

注意: (1) (B)において $a = b = c$ と仮定すると $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ が導かれる.

(2) (B)において $c = a$ と仮定すると $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ が導かれる.

(3) ゆえに $a \leqq b$ のときに $\int_a^b f(x)\,dx$ が定義されていれば, $a > b$ の場合には $\int_a^b f(x)\,dx$ を $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ で定義することによって, a, b の大小に条件を付ける必要がなくなる.

(4) (B)は $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx$ と同値である. 基本性質(B)はこの形でもよく使われる.

基本性質(C) 定数の積分: 定数 α について,

$$\int_a^b \alpha\,dx = \alpha(b-a).$$

注意: (1) $\int_a^b 1\,dx = b - a$ と(A)から(C)が導かれる.

(2) 函数 $f(x)$ が $a < x < b$ で一定の値 α の値を取るならば(すなわち $f(x) = \alpha$ $(a < x < b)$) ならば $\int_a^b f(x)\,dx = \alpha(b-a)$ となるという(C)の一般化を仮定すると, (B)と合わせて, 階段函数の積分が確定する.

基本性質(D) 単調性: $a \leqq b$ と仮定する. 1変数実数値函数 $f(x)$, $g(x)$ について

$$f(x) \leqq g(x) \quad (a < x < b) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx.$$

1.2 性質(E) 積分の絶対値の上からの評価

(E) $a \leqq b$ と仮定する. 1変数実数値函数 $f(x)$ について

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{1}$$

さらに $a \leqq x \leqq b$ で $|f(x)| \leqq M$ ならば

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq M|b-a|. \tag{2}$$

注意: (2)は $a > b$ であっても成立している. そのために絶対値を付けた.

証明: $-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$ なので積分の単調性(D)より

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

これは(1)が成立することを意味する. $a \leqq x \leqq b$ で $|f(x)| \leqq M$ ならば積分の単調性(D)と(C)より,

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \leqq \int_a^b M\,dx = M(b-a) = M|b-a|.$$

これで(2)も成立することが示された. □

解説: 多くの場面で「小さいこと」を示したい誤差項は積分で表わされる. (Taylorの定理における積分型剰余項はその典型例である.) 成立(E)は積分の絶対値が「小さいこと」を示すためによく使われることになる. □

注意: $f(x)$ が複素数値函数であっても性質(E)は成立している. さらに絶対値を任意のノルムで置き換えればベクトル値函数であっても性質(E)は成立している. しかし, そのことを示すためには性質(A)〜(D)を仮定するだけでは足りないので, 複素数値函数やベクトル値函数まで拡張された性質(E)も必要ならば, 最初から拡張された性質(E)も仮定しておく方がよいかもしれない.

拡張された性質(E)が主要などの積分論でも成立する理由は, どの積分論においても積分が有限和 $v_1 + \cdots + v_n$ の極限で構成されているからである. ここで v_i は複素数またはベクトルである. 絶対値およびより一般にノルムは三角不等式

$$\|v_1 + \cdots + v_n\| \leqq \|v_1\| + \cdots + \|v_n\|$$

を満たしている. これの極限として複素数値もしくはベクトル値函数 $f(x)$ についても

$$\left\|\int_a^b f(x)\,dx\right\| \leqq \int_a^b \|f(x)\|\,dx$$

が成立することが示される. この不等式を点の運動 $x(t)$ の速度ベクトル $v(t) = x'(t)$ に適用した結果は

$$\|x(b) - x(a)\| = \left\|\int_a^b v(t)\,dt\right\| \leqq \int_a^b \|v(t)\|\,dt$$

となる. 速さ $\|v(t)\| = \|x'(t)\|$ の時刻 a から b までの積分の値は点の運動の軌跡(曲線)の長さなので, この不等式は $x(a)$ と $x(b)$ の距離は $x(a)$ と $x(b)$ を結ぶ曲線の長さ以下になることを意味する.

これより, ベクトル値函数に拡張された性質(E)は, 直観的には当然そうなるべき結果を意味していることがわかる. □

1.3 性質(F) 微分積分学の基本定理1

(F) 微分積分学の基本定理1: 連続函数 $f(x)$ について

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)\,d\xi = f(x).$$

証明: $F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ とおく. このとき(B)より

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(\xi)\,d\xi - \int_a^x f(\xi)\,d\xi = \int_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi.$$

さらに $f(x)$ は積分変数 ξ について定数なので, (C)より

$$f(x)h = f(x)((x+h)-x) = \int_x^{x+h} f(x)\,d\xi.$$

ゆえに

$$F(x+h) - F(x) - f(x)h = \int_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi - \int_x^{x+h} f(x)\,d\xi = \int_x^{x+h} (f(\xi) - f(x))\,d\xi.$$

任意の $\varepsilon > 0$ を取る. $f(\xi)$ は ξ の連続函数なので $|h|$ を十分に小さくすると

$$|f(\xi) - f(x)| \leqq \varepsilon$$

となる(図を描いてみよ). ゆえに(E)より

$$|F(x+h) - F(x) - f(x)h| = \left|\int_x^{x+h} (f(\xi) - f(x))\,d\xi\right| \leqq \varepsilon|(x+h) - x| = \varepsilon|h|.$$

両辺を $|h|$ で割ることによって, $\varepsilon > 0$ ごとに $|h| > 0$ を十分に小さくすることによって,

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x) - f(x)h}{h}\right| \leqq \varepsilon$$

となることわかる. これは $h \to 0$ のとき

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{F(x+h) - F(x) - f(x)h}{h} \to 0$$

が成立することを意味する. これで $F'(x) = f(x)$ となることを示せた. □

注意: 上の証明では ε-δ 論法を使った. ε-δ 論法を未習もしくはまだ理解していない人であっても, $f(x)$ のグラフを適当に描いて, 積分が「面積」を表すことを思い出しながら, 証明の各ステップに現われる積分がグラフのどの部分の「面積」になっているかを確認すれば, 直観的には明らかな議論しか行っていないことがわかるだろう. むしろ ε-δ 論法を使った証明を使いこなせるようになるためには, ε-δ 論法を理解していない段階でのそのような直観的な議論を十分にしておいた方がよい. 慣れてしまえば, ε-δ 論法自体が直観的に明らかな議論に見えて来ることになるだろう. □

1.4 性質(G) 微分積分学の基本定理2

準備: 微分可能函数 $f(x)$ の導函数 $f'(x)$ が恒等的に 0 ならば $f(x)$ は定数函数になることを(G)の証明では認めて使うことにする. その結果は平均値の定理

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) \quad (\xi = a + t(x-a),\ 0 < t < 1)$$

を使えば容易に導かれる(ξ は a, x のあいだのある実数である). f' が恒等的に 0 ならば特に $f'(\xi) = 0$ となるので $f(x) = f(a)$ となり, $f(x)$ の値は x の値によらず $f(a)$ に等しくなる. □

(G) 微分積分学の基本定理2: $F(x)$ は C^1 級函数(微分可能かつ導函数が連続な函数)であるとすると,

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

注意: (1)の右辺を $[F(x)]_a^b$ と書くことが多い:

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

証明: $G(x) = \int_a^x F'(\xi)\,d\xi - (F(x) - F(a))$ とおく. このとき, (B)より

$$G(a) = \int_a^a F'(\xi)\,d\xi - (F(a) - F(a)) = 0$$

となり, (F)より

$$G'(x) = F'(x) - F'(x) = 0.$$

ゆえに $G(x)$ は定数函数になり, 恒等的に 0 になる. ゆえに

$$0 = G(b) = \int_a^b F'(x)\,dx - (F(b) - F(a)).$$

これは(1)が成立することを意味する. □

以上によって, 実1変数実数値函数の微分積分学の基本定理が積分の基本性質(A)〜(D)だけから導かれることがわかった.

注意: 実1変数の複素数値函数もしくはベクトル値函数に関する微分積分学の基本定理は積分の基本性質(A)〜(D)と拡張された性質(E)のみを使って導き出せる. 性質(A)〜(E)は高校数学レベルの積分に関する直観があれば「明らか」だと感じられるシンプルな性質の集まりである. そのような「明らか」でかつシンプルな性質のみを使って微分積分学の基本定理は導出可能なのである. □

2 部分積分と置換積分

微分積分学の基本定理さえ証明できてしまえば, 部分積分と置換積分の導出は微分学の結果をそのまま積分学に応用する話に過ぎなくなる.

2.1 置換積分

$f(x)$, $g(t)$ は C^1 級函数であると仮定し,

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

とおく. 微分の性質

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

に微分積分学の基本定理(G)を適用すると, $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ のとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = [F(g(t))]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(g(t))\,dt = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

つまり, 次が成立している.

(H) 置換積分: $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ のとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

左辺の積分を右辺で計算することを**置換積分**と呼ぶ. $x(t) = g(t)$ とおいて,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx(t)}{dt}\,dt$$

と書き直すと, 「分子分母の dt が約分で消える公式」のように見えて見易い.

問題: 任意の微積分の教科書を参照して, 置換積分を使って計算する積分計算の面白い問題を見付けて, 計算練習せよ. □

2.2 部分積分

$f(x)$, $g(x)$ は C^1 級函数であると仮定する.

微分の性質

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

に微分積分学の基本定理(G)と積分の線形性(A)を適用すると

$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

これは以下と同値である.

(I) 部分積分: $f(x)$, $g(x)$ は C^1 級函数であるとき,

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx,$$
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

左辺の積分を右辺で計算することを**部分積分**と呼ぶ.

問題: 任意の微積分の教科書を参照して, 部分積分を使って計算する積分計算の面白い問題を見付けて, 計算練習せよ. □

3 積分の近似

$a < b$ であると仮定し, f は閉区間 $[a, b]$ 上の連続函数であると仮定する.

3.1 Riemann和

閉区間 $[a, b]$ の分割 $a = x_0 \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_N = b$ と $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ と $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ に対して, 和

$$\sum_{i=1}^N f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^N f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

を**Riemann和**と呼ぶ. Δx_i の最大値を小さくすることによって(分割を細かくすることによって), Riemann和で積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を幾らでも近似できることを積分の基本性質のみを使って証明しよう.

証明: 任意の $\varepsilon > 0$ を取る. $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上の連続函数であると仮定してあったので, $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上の一様連続函数になる. Δx_i 達の最大値を十分小さくすれば

$$|f(x) - f(x_i^*)| \leqq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (x_{i-1} \leqq x \leqq x_i)$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^N f(x_i^*)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i^*)\,dx - \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x_i^*) - f(x))\,dx\right| \\
&\leqq \sum_{i=1}^N \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x_i^*) - f(x))\,dx\right| \\
&\leqq \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x_i^*) - f(x)|\,dx \\
&\leqq \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon
\end{aligned}$$

以上によって, 閉区間 $[a, b]$ の分割を細かくすることによって, Riemann和で積分を誤差 ε 以下で近似できることを示せた. □

定理: 閉区間 $[a, b]$ の分割のデータ

$$a = x_0 \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_N = b, \quad x_i^* \in [x_{i-1}, x_i], \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

において, Δx_i の最大値を 0 に近付ける極限を, $\lim_{\max\{\Delta x_i\} \searrow 0}$ と書くと, $[a, b]$ 上の連続函数 $f(x)$ について,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max\{\Delta x_i\}\searrow 0} \sum_{i=1}^N f(x_i^*)\Delta x_i$$

が成立する. □

注意(Riemann積分): 積分の基本性質とは無関係に, 閉区間 $[a,b]$ 上の連続函数 $f(x)$ に対して, 極限

$$\lim_{\max\{\Delta x_i\}\searrow 0} \sum_{i=1}^N f(x_i^*)\Delta x_i$$

が存在することを示せる. この極限が存在するような閉区間 $[a,b]$ 上の函数は**Riemann積分可能**な函数と呼ばれ, その極限の値は**Riemann積分**と呼ばれる. 特に閉区間上の連続函数はRiemann積分可能である. そして, Riemann積分で積分を定義すると, Riemann積分可能な函数について, 積分の基本性質をすべて示すことができる. □

3.2 台形公式

閉区間 $[a,b]$ の分割 $a = x_0 \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_N = b$ に対する和

$$\sum_{i=1}^N \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x_i$$

で積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を近似することもできる. これを**台形公式**(trapezoidal rule)と呼ぶ.

3.3 Simpsonの公式

閉区間 $[a,b]$ の分割 $a = x_0 \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_N = b$ に対する和

$$\sum_{i=1}^N \frac{f(x_{i-1}) + 4f((x_{i-1}+x_i)/2) + f(x_i)}{6}\Delta x_i$$

で積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を近似することもできる. これを**Simpsonの公式**(Simpson's rule)と呼ぶ.

Simpsonの公式の由来: $a < b$ であるとし, $c = (a+b)/2$ とおく. このとき, $f(a) = \alpha, f(c) = \gamma, f(b) = \beta$ を満たす2次以下の多項式 $f(x)$ が一意的に決まり,

$$f(x) = \alpha\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \beta\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \gamma\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

と一意に表わされる. このとき,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}\,dx &= \frac{1}{6}(b-a), \\
\int_a^b \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}\,dx &= \frac{1}{6}(b-a), \\
\int_a^b \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}\,dx &= \frac{4}{6}(b-a)
\end{aligned}$$

となることを確認できるので

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)}{6}(b-a)$$

となることがわかる.

つまり, $f(x)$ が2次函数のとき閉区間 $[a,b]$ の自明な分割 $a = a_0 < a_1 = b$ に関するSimpsonの公式は誤差無しで積分の値を計算する公式になっている. □

Simpsonの公式の他の解釈については

- 黒木玄, Euler-Maclaurinの和公式の一般化 (https://genkuroki.github.io/documents/20170724EulerMaclaurin.pdf)

の第3.5と第3.6節を参照せよ.

問題: 上のSimpsonの公式の由来の解説において結果だけを書いた積分計算を自分で実行せよ. □

解答略.

In [2]:
```
a, b, x = symbols("a b x", real=true)
c = (a+b)/2
[
    factor(simplify(integrate((x-b)*(x-c), (x, a, b)))/((a-b)*(a-c))),
    factor(simplify(integrate((x-a)*(x-c), (x, a, b)))/((b-a)*(b-c))),
    factor(simplify(integrate((x-a)*(x-b), (x, a, b)))/((c-a)*(c-b))),
]
```

Out[2]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6}(a-b) \\ -\frac{1}{6}(a-b) \\ -\frac{2}{3}(a-b) \end{bmatrix}$$

問題: Simpsonの公式の由来の説明に基いて, 以下の公式を導け.

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^3}{6}, \qquad \int_a^b (x-a)\left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)\,dx = \frac{(b-a)^3}{12}. \qquad \square$$

解答略.

In [3]:
```
a, b, x = symbols("a b x", real=true)
c = (a+b)/2

sol = [
    integrate((x-a)*(x-b), (x,a,b)),
    integrate((x-a)*(x-c), (x,a,b)),
]
factor.(simplify.(sol))
```

Out[3]:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6}(a-b)^3 \\ -\frac{1}{12}(a-b)^3 \end{bmatrix}$$

問題: 円周率を表わす2種類の積分

$$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi, \qquad 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

の近似計算を, 閉区間 $[0,1]$ の分割 $x_i = i/N\ (i=0,1,\ldots,N)$ と $x_i^* = (x_{i-1}+x_i)/2$ に関するRiemann和と台形公式とSimpsonの公式を用いて実行してみよ. $N=10$ の場合にどうなるか? $\square$

In [4]:
```
function RiemannSum(f, a, b, N)
    Δx = (b-a)/N
    sum(i->f(a+(i-1/2)*Δx)*Δx, 1:N)
end

function TrapezoidalRule(f, a, b, N)
    Δx = (b-a)/N
    sum(i->(f(a+(i-1)*Δx)+f(a+i*Δx))/2*Δx, 1:N)
end

function SimpsonRule(f, a, b, N)
    Δx = (b-a)/N
    sum(i->(f(a+(i-1)*Δx)+4f(a+(i-1/2)*Δx)+f(a+i*Δx))/6*Δx, 1:N)
end

function SymPyIntegrate(f, a, b)
    x = symbols("x", real=true)
    integrate(f(x), (x, a, b))
end
```

Out[4]:
```
SymPyIntegrate (generic function with 1 method)
```

In [5]:
```
f(x) = 4x + 3
a, b = 0.0, 1.0
N = 10

@show RiemannSum(f, a, b, N)
@show TrapezoidalRule(f, a, b, N)
@show SimpsonRule(f, a, b, N)
@show s = SymPyIntegrate(f, Sym(0), Sym(1))
float(s)
```

```
RiemannSum(f, a, b, N) = 5.0
TrapezoidalRule(f, a, b, N) = 5.0
SimpsonRule(f, a, b, N) = 5.0
s = SymPyIntegrate(f, Sym(0), Sym(1)) = 5
```

Out[5]: 5.0

In [6]:
```
f(x) = 2x^2 - x + 3
a, b = 0.0, 1.0
N = 10

@show RiemannSum(f, a, b, N)
@show TrapezoidalRule(f, a, b, N)
@show SimpsonRule(f, a, b, N)
@show s = SymPyIntegrate(f, Sym(0), Sym(1))
float(s)
```

```
RiemannSum(f, a, b, N) = 3.1650000000000005
TrapezoidalRule(f, a, b, N) = 3.170000000000001
SimpsonRule(f, a, b, N) = 3.166666666666667
s = SymPyIntegrate(f, Sym(0), Sym(1)) = 19/6
```

Out[6]: 3.1666666666666665

In [7]:
```
f(x) = 4*√(1-x^2)
a, b = 0.0, 1.0
N = 10

@show RiemannSum(f, a, b, N)
@show TrapezoidalRule(f, a, b, N)
@show SimpsonRule(f, a, b, N)
@show s = SymPyIntegrate(f, Sym(0), Sym(1))
float(s)
```

```
RiemannSum(f, a, b, N) = 3.1524114332616446
TrapezoidalRule(f, a, b, N) = 3.1045183262483182
SimpsonRule(f, a, b, N) = 3.136447064257202
s = SymPyIntegrate(f, Sym(0), Sym(1)) = pi
```

Out[7]: 3.141592653589793

In [8]:
```
f(x) = 4/(1+x^2)
a, b = 0.0, 1.0
N = 10

@show RiemannSum(f, a, b, N)
@show TrapezoidalRule(f, a, b, N)
@show SimpsonRule(f, a, b, N)
@show s = SymPyIntegrate(f, Sym(0), Sym(1))
float(s)
```

```
RiemannSum(f, a, b, N) = 3.142425985001098
TrapezoidalRule(f, a, b, N) = 3.1399259889071587
SimpsonRule(f, a, b, N) = 3.1415926529697855
s = SymPyIntegrate(f, Sym(0), Sym(1)) = pi
```

Out[8]: 3.141592653589793

In [9]:
```
SimpsonRule(f, a, b, N) - π
```

Out[9]: -6.200076008155975e-10

$4\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ の左辺を10分割のSimpsonの公式で計算すると, 小数点以下8桁まで円周率を正確に求めることができている！たったの10分割しかしていないのに！

注意: 数値積分 (https://www.google.co.jp/search?q=%22%E6%95%B0%E5%80%A4%E7%A9%8D%E5%88%86%22)は非常に深い分野である. 巧妙な幾つかの方法が開発されており, 多くの場合に以上で説明した方法よりもずっと効率的である. □

4 広義積分

無限区間もしくは区間 (a, b) の端で発散しているかもしれない函数 $f(x)$ について極限

$$\lim_{\alpha\searrow a,\,\beta\nearrow b}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

を**広義積分**と呼ぶ. 極限が存在しなければ広義積分は存在しない. 広義積分は

$$\lim_{\alpha\searrow a,\,\beta\nearrow b}\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx \tag{$*$}$$

が有限の値に収束するとき収束し, そのときその広義積分は**絶対収束**するという. もとの広義積分は収束するが, $(*)$が有限の値に収束しないとき, その広義積分は**条件収束**するという.

応用上重要な積分のかなりの割合が無限区間 $(-\infty, \infty)$, $(0, \infty)$ 上の積分になり, 有限区間 (a, b) 上の積分であっても広義積分になっていることが多い.

例えば, **Gauss積分**や**Fourier変換**は無限区間 $(-\infty, \infty)$ 上の積分で定義され, **ガンマ函数**は半無限区間 $(0, \infty)$ 上の積分で定義され, **ベータ函数**は有限開区間 $(0, 1)$ 上の広義積分で定義される.

注意: 広義積分を表すときに毎回 $\lim$ 記号を書くのは面倒なので, 通常の積分と同じ記号法で

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\searrow a,\,\beta\nearrow b}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

と書くことが多い. さらに $f(x) = F'(x)$ のとき,

$$\lim_{\alpha\searrow a,\,\beta\nearrow b}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{\alpha\searrow a,\,\beta\nearrow b}[F(x)]_\alpha^\beta = \lim_{\beta\nearrow b}F(\beta) - \lim_{\alpha\searrow a}F(\alpha).$$

であるが, これの右辺を記号の簡単のため

$$[F(x)]_a^b = \lim_{\beta\nearrow b}F(\beta) - \lim_{\alpha\searrow a}F(\alpha)$$

と書くことにする. □

問題: 積分は積分の基本性質を満たしていると仮定する. $a < \alpha \leqq \beta < b$ のとき積分 $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ が定義されており,

$$\lim_{\alpha\searrow a,\,\beta\nearrow b}\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx$$

が有限の値に収束するならば,

$$\lim_{\alpha\searrow a,\,\beta\nearrow b}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

も収束することを示せ.

解答例: a に収束する単調減少数列 a_n と b に収束する単調増加数列 b_n で $a_n \leqq b_n$ を満たすものを任意に取る. このとき仮定より

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\,dx$$

は有限の値に収束する. この条件のもとで

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx$$

が収束することを示せばよい. A_n, B_n を

$$A_1 = \int_{a_1}^{b_1} |f(x)|\,dx, \qquad A_n = \int_{a_n}^{a_{n-1}} |f(x)|\,dx + \int_{b_{n-1}}^{b_n} |f(x)|\,dx \qquad (n \geqq 2)$$
$$B_1 = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx, \qquad B_n = \int_{a_n}^{a_{n-1}} f(x)\,dx + \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,dx \qquad (n \geqq 2)$$

と定める. このとき,

$$|B_k| \leqq A_k, \quad \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k, \quad \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} B_k.$$

そして,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\,dx < \infty$$

なので, 「級数の各項の絶対値を足し上げた結果が有限の値になればもとの級数は収束する」(所謂絶対収束)という結果より, 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} B_k$ は収束する. それは $\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx$ が $n \to \infty$ で収束することを意味する. □

注意: 部分積分や置換積分は極限操作に注意を払えばそのまま広義積分にも適用可能である. □

注意: 部分積分

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

は, 特に $[f(x)g(x)]_a^b = 0$ すなわち

$$\lim_{\alpha\searrow a} f(\alpha)g(\alpha) = \lim_{\beta\nearrow b} f(\beta)g(\beta)$$

のときに便利である. そのとき, 部分積分の公式は

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

となる. これは f の微分を g に移動すると -1 倍になることを意味している. 部分積分はこの形で使われることが多い.

特に, $[f(x)g(x)]_a^b = 0$ の十分条件として,

$$\lim_{\alpha\searrow a} f(\alpha)g(\alpha) = 0, \quad \lim_{\beta\nearrow b} f(\beta)g(\beta) = 0$$

という条件は非常によく出て来る. □

問題(Fourier変換): 函数 $f(x)$ は C^1 級であり, $x \to \pm\infty$ で $|f(x)|$ と $|f'(x)|$ は十分な速さで 0 に近付くと仮定し,

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x)\,dx$$

とおく. $\hat{f}(p)$ は $f(x)$ のFourier変換と呼ばれる. このとき

$$(xf)^\wedge(p) = -i\frac{\partial}{\partial p}\hat{f}(p), \quad \left(-i\frac{\partial}{\partial x}f\right)^\wedge(p) = p\hat{f}(p)$$

が成立することを示せ.

解答例: 前者は次のように示される:

$$-i\frac{\partial}{\partial p}\hat{f}(p) = -i\int_{-\infty}^{\infty} (-ix)e^{-ipx} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} x f(x)\,dx = (xf)^\wedge(p).$$

後者を示そう. この場合にはすぐ上の注意のタイプの部分積分を利用できるので,

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x}f\right)^\wedge(p) = -i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\frac{\partial}{\partial x}f(x)\,dx = i\int_{-\infty}^{\infty} (-ip)e^{-ipx} f(x)\,dx = p\hat{f}(p).$$

2つ目の等号で部分積分を使った. □

このようにFourier変換には x をかける操作と微分する操作を交換する性質を持っている.

4.1 絶対収束する広義積分の例

以下は絶対収束する広義積分の例である.

(1) $\arcsin y = \displaystyle\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ なので $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi$. 積分区間 $(-1,1)$ の両端で被積分函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ は発散している.

(2) $\arctan a = \displaystyle\int_0^a \frac{dt}{1+t^2}$ なので $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \pi$. これは無限区間の積分になっている.

以上の2つの π は単位半円周の長さを意味する.

(3) $s>0$ に対するガンマ函数の定義 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は無限区間の積分になっており, $0<s<1$ のとき $x \searrow 0$ で被積分函数は発散している.

$x \to \infty$ で $e^{-x}x^{s-1}$ は急速に 0 に近付くので $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ はどんな s の値に対しても収束している.

$s \neq 0$ のとき $\displaystyle\int x^{s-1}\,dx = \frac{x^s}{s}$ なので $s>0$ ならば $s<1$ であっても $\displaystyle\int_0^1 x^{s-1}\,ds = \frac{1}{s}$ (有限の値)となる. これより $s>0$ のとき $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx$ も収束することがわかる. ($x>0$ で $e^{-x}<1$ となることに注意せよ.)

問題: $0<s$ のとき($s<1$ であっても), 積分 $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx$ が有限の値に収束することを示せ.

解答例: $x>0$ のとき $e^{-x}<1$ なので, $s>0$ のとき, $x \searrow 0$ で $x^s \to 0$ となることより,

$$\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx \leqq \int_0^2 x^{s-1}\,dx = \left[\frac{x^s}{s}\right]_0^1 = \frac{1}{s} < \infty. \qquad \square$$

問題: 任意の実数 s に対して, 積分 $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ が有限の値に収束することを示せ.

解答例: 指数函数は多項式函数よりも速く増大するので, $R>1$ を十分大きくすると, $x \geqq R$ で $e^{-x/2}x^{s-1} \leqq 1$ となる. ゆえに

$$e^{-x}x^{s-1} \leqq e^{-x/2} \quad (x \geqq R).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx &= \int_1^R e^{-x}x^{s-1}\,dx + \int_R^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx \\ &\leqq \int_1^R e^{-x}x^{s-1}\,dx + \int_R^\infty e^{-x/2}\,dx \\ &= \int_1^R e^{-x}x^{s-1}\,dx + 2e^{-R/2} < \infty. \qquad \square\end{aligned}$$

注意: 指数函数部分 e^{-x} を $e^{-x/2}$ と $e^{-x/2}$ に分けてその片方をもう1つの因子と比較するというような方法はよく使われる. $\square$

(4) $p>0, q>0$ に対するベータ函数の定義 $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ の被積分函数は, $0<p<1$ ならば積分区間の左端で, $0<q<1$ ならば積分区間の右端で発散している.

しかし, $p>0$ ならば $p<1$ であっても $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\,ds = \frac{1}{p}$ (有限の値)となることから左端でも積分は収束する. 同様にして, $q>0$ ならば右端でも積分は収束する.

(5) $a>0$ と仮定する. $f(x) = e^{-x^2/a}$ のFourier変換

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ipx}f(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/a}\cos(px)\,dx$$

の積分区間は無限区間である. $x \to \pm\infty$ で $e^{-x^2/a}$ が急速に 0 に近付くのでこの積分は絶対収束する.

問題(三角函数のLaplace変換): $s > 0$ と仮定する. 次の公式を示せ:

$$\int_0^\infty e^{-st}\cos(pt)\,dt = \frac{s}{s^2+p^2}, \qquad \int_0^\infty e^{-st}\sin(pt)\,dt = \frac{p}{s^2+p^2}.$$

解答例1: $f(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\cos(pt)\,dt$ とおく. $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{e^{-st}}{-s}\right) = e^{-st}$ を使った部分積分を2回行う.

$$\begin{aligned}
f(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\cos(pt)\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\cos(pt)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\,(-p\sin(pt))\,dt \\
&= \frac{1}{s} - \frac{p}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin(pt)\,dt = \frac{1}{s} - \frac{p}{s}\left(\left[\frac{e^{-st}}{-s}\sin(pt)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\,p\cos(pt)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{s} - \frac{p^2}{s^2}f(s).
\end{aligned}$$

これを $f(s)$ について解けば前者の公式が得られる.

$g(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\sin(pt)\,dt$ とおく. 上と同様にして,

$$\begin{aligned}
g(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\sin(pt)\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\sin(pt)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\,p\cos(pt)\,dt \\
&= \frac{p}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(pt)\,dt = \frac{p}{s}\left(\left[\frac{e^{-st}}{-s}\cos(pt)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\,(-p\sin(pt))\,dt\right) \\
&= \frac{p}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{p}{s}g(s)\right).
\end{aligned}$$

これを $g(s)$ について解けば後者の公式が得られる. □

解答例2: $e^{ipx} = \cos(px) + i\sin(px)$ を用いて一挙に計算する.

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{ipx}\,dx = \int_0^\infty e^{-(s-ip)t}\,dx = \left[\frac{e^{-(s-ip)t}}{-(s-ip)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-ip} = \frac{s+ip}{s^2+p^2}.$$

この結果の実部と虚部のそれぞれから示したい公式の前者と後者が得られる. □

部分積分を2回繰り返すよりも計算が圧倒的に平易になっている.

In [10]:

```
t, s, p = symbols("t s p", positive=true)
[
    simplify(integrate(exp(-s*t)*cos(p*t), (t,0,oo))),
    simplify(integrate(exp(-s*t)*sin(p*t), (t,0,oo)))
]
```

Out[10]:

$$\left[\begin{matrix}\frac{s}{p^2+s^2} \\ \frac{p}{p^2+s^2}\end{matrix}\right]$$

4.2 条件収束する広義積分の例

以下は条件収束する広義積分に関する有名な公式である.

(1) Dirichlet積分(ディリクレ積分): $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$

(2) Dirichelet積分の一般化:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,dx = \int_a^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan a \qquad (a \geqq 0).$$

これはDirichlet積分になる $a = 0$ の場合にのみ条件収束する.

(3) Fresnel積分の特殊値(フレネル積分の特殊値):

$$\int_{-\infty}^\infty \cos(t^2)\,dt = \int_{-\infty}^\infty \sin(t^2)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(4) 上の続き. (3)における被積分函数は t の偶函数なので $(0,\infty)$ 上の積分に書き直して, $t = \sqrt{x}$ と置換すると

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

これらの公式の証明については

- 黒木玄, ガンマ分布の中心極限定理とStirlingの公式 (https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf)

を参照せよ. (1), (2)の証明は第5.5節とを参照せよ. (1), (3), (4)の証明は第8.6節を参照せよ.

問題: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ と $F(R) = \displaystyle\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx$ のグラフをプロットせよ. □

次のセルを見よ.

In [11]:

```
f(x) = iszero(x) ? one(x) : sin(x)/x
F(R) = quadgk(f, 0, R)[1]
x = 0:0.05:100
R = 0:0.05:100

P1 = plot(x, f.(x), label="(sin x)/x", legend=:topright, ylims=(-0.4, 1.2))
hline!([0], ls=:dash, label="0")
P2 = plot(R, F.(R), label="int_0^R (sin x)/x dx", legend=:bottomright, ylims=(0,2))
hline!([π/2], ls=:dash, label="pi/2")
plot(P1, P2, size=(700,250))
```

Out[11]:

問題: $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$ を示せ.

解答例: $|\sin(x+\pi)| = |\sin x|$ と $\int_0^\pi \sin x\,dx = 2$ より,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqq \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{n\pi}\,dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty. \qquad \square\end{aligned}$$

注意: 上の解答例の計算の仕方より,

$$\int_0^{N\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqq \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sim \frac{2}{\pi}\log N$$

となることがわかる.

問題: $G(R) = \displaystyle\int_0^R \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ とプロットせよ. □

次のセルを見よ.

In [12]:

```
g(x) = abs(iszero(x) ? one(x) : sin(x)/x)
G(R) = quadgk(g, 0, R)[1]
@show G(π)

N = 1:0.1:10
R = N.*π
P1 = plot(size=(600, 300), legend=:topleft, xscale=:log)
plot!(R, G.(R), label="G(R)", lw=2)
plot!(R, @.(2/π*log(R/π)+G(π)), label="(2/pi) log(R/pi) + G(pi)", ls=:dash, lw=2)

N = 1:100
R = N.*π
P2 = plot(size=(600, 300), legend=:topleft, xscale=:log)
plot!(R, G.(R), label="G(R)", lw=2)
plot!(R, @.(2/π*log(R/π)+G(π)), label="(2/pi) log(R/pi) + G(pi)", ls=:dash, lw=2)

plot(P1, P2, size=(800, 300))
```

```
G(π) = 1.8519370519824665
```

Out[12]:

Fresnel積分: 次の不定積分をFresnel積分と呼ぶ:

$$C(t) = \int_0^t \cos(s^2)\,ds, \qquad S(t) = \int_0^t \sin(s^2)\,ds.$$

上で紹介したように, 条件収束する広義積分の例として,

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \lim_{t\to\infty} S(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

は有名である. $C'(t)^2 + S'(t)^2 = 1$ なので点 $(C(t), S(t))$ の運動の速さは常に 1 である. だから時刻 0 から t までの軌跡の長さは t に等しい. だから軌跡の長さは $t \to \infty$ で無限大に発散する. 無限に長い軌跡の最終到着地点が $a = (1/2)\sqrt{\pi/2}$ に対する点 (a, a) になる.

Fresnel積分 $C(t), S(t)$ のそれぞれをプロットすると以下のようになる. それらが $t \to \infty$ で $a = (1/2)\sqrt{\pi/2}$ に収束する様子も確認できる.

In [13]:

```
C(t) = quadgk(s->cos(s^2), 0, t)[1]
S(t) = quadgk(s->sin(s^2), 0, t)[1]
a = sqrt(π/2)/2

PP = []

tmin, tmax = 0, 20
t = tmin:(tmax-tmin)/1000:tmax
PC = plot(t, C.(t), label="C(t)"); hline!([a], label="a")
PS = plot(t, C.(t), label="S(t)"); hline!([a], label="a")
push!(PP, PC, PS)

plot(PP..., size=(700, 250), legend=:bottomright)
```

Out[13]:

次のセルで $(C(t), S(t))$ の軌跡をプロットしてみよう.

In [14]:
```
C(t) = quadgk(s->cos(s^2), 0, t)[1]
S(t) = quadgk(s->sin(s^2), 0, t)[1]
a = sqrt(π/2)/2

P = []
for (lw, tmax) in [(1,7), (0.6,10), (0.4,20), (0.25,40)]
    t = 0:0.01:tmax
    p = plot(xlims=(0,1), ylims=(0,1), legend=false)
    plot!(title="Euler spiral (t = 0 to $tmax)", titlefontsize=10)
    plot!(C.(t), S.(t), lw=lw)
    scatter!([a],[a])
    push!(P, p)
end
plot(P..., size=(600, 600))
#pngplot(P..., size=(600, 600))
```

Out[14]:

In [15]:
```
x = symbols("x", positive=true)
integrate(x^(-1)*sin(x), (x,0,oo))
```

Out[15]: $\frac{\pi}{2}$

In [16]:
```
a, x = symbols("a, x", positive=true)
integrate(exp(-a*x)*x^(-1)*sin(x), (x,0,oo))
```

Out[16]: $-\operatorname{atan}(a) + \frac{\pi}{2}$

In [17]:
```
x = symbols("x", positive=true)
[
    integrate(cos(x^2), (x,-oo,oo)),
    integrate(sin(x^2), (x,-oo,oo))
]
```

Out[17]:
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2} \end{bmatrix}$$

In [18]:
```
x = symbols("x", positive=true)
[
    integrate(x^(-Sym(1)/2)*cos(x), (x,0,oo)),
    integrate(x^(-Sym(1)/2)*sin(x), (x,0,oo))
]
```

Out[18]:
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2} \end{bmatrix}$$

問題: $a > 0$ のとき, 広義積分

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\sin x}{x^a}\,dx$$

が収束することを示せ.

解答例: 部分積分によって

$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{\sin a}{x^a}\,dx &= \int_1^R x^{-a}(-\cos x)'\,dx \\ &= [-x^{-a}\cos x]_1^R - \int_1^R (x^{-a})'(-\cos x)\,dx \\ &= -R^{-a}\cos R + \cos 1 - a\int_1^R x^{-a-1}\cos x\,dx.\end{aligned}$$

第1項の $-R^{-a}\cos R$ は $R\to\infty$ で 0 に収束し, 第3項の積分は

$$\int_1^R |x^{-a-1}\cos x|\,dx \leqq \int_1^R x^{-a-1}\,dx = \left[\frac{x^{-a}}{-a}\right]_1^R = \frac{1-R^{-a}}{a}$$

なので $R\to\infty$ で絶対収束する. これで示すべきことがすべて示された. □

解説:

$$\int_1^R x^{-a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1-R^{1-a}}{1-a} & (a\neq 1) \\ \log R & (a=1)\end{cases}$$

なので, $a \leqq 1$ のとき, この積分は $R\to\infty$ で無限大に発散する. しかし, x^{-a} を微分すると, $-ax^{-(a+1)}$ になり, $a>0$ ならば $a+1>1$ となり, $x^{-(a+1)}$ の 1 から ∞ までの積分が収束することを使える. 上の問題の解答例では, 部分積分によってそれを実現している. 絶対収束しない積分を上手に部分積分すると絶対収束する形に直せることがよくある. 部分積分はこの意味での非常に有用である. □

問題: $a(x)$, $b(x)$ は $x \geqq 1$ の連続函数であるとし, $A(x) = \int_1^x a(\xi)\,d\xi$ とおく. $A(x)$ は $x\geqq 1$ で有界であると仮定する: $A(x)\leqq M$ $(x\geqq 1)$. さらに $b(x)$ は単調減少な C^1 函数でかつ $x\to\infty$ で $b(x)\to 0$ となっていると仮定する(特に $b(x)\geqq 0$ $(x\geqq 0)$ である). このとき, 広義積分

$$\int_1^\infty a(x)b(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R a(x)b(x)\,dx \tag{1}$$

が収束することを示せ.

解答例: 部分積分によって,

$$\int_1^R a(x)b(x)\,dx = A(R)b(R) - A(1)b(1) - \int_1^R A(x)b'(x)\,dx. \tag{2}$$

そして, $x \geqq 1$ のとき, $|A(x)| \leqq M$ かつ $b(x)$ の単調減少性より $b'(x) \leqq 0$ なので,

$$|A(x)b'(x)| \leqq -Mb'(x) \quad (x \geqq 1).$$

ゆえに, $b(x) \geqq 0$ であることも使うと,

$$\int_1^R |A(x)b'(x)|\,dx \leqq -\int_1^R Mb'(x)\,dx = M(b(1) - b(R)) \leqq Mb(1) < \infty.$$

これで, 上の(2)の右辺の積分が絶対収束することがわかった. (2)の右辺の $A(R)b(R)$ は $R \to \infty$ のとき $b(R) \to 0$ より 0 に収束する. これで, (1)の広義積分が収束することがわかった. □

注意: 上の解答例と

- 黒木玄, 02 級数 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/02%20series.ipynb) の 2.2 条件収束する複素級数の例 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/02%20series.ipynb#%E6%9D%A1%E4%BB%B6%E5%8F%

にある「例の解説のための一般論」を比較してみよ. 積分と和の違いに過ぎず, 本質的には同じ内容であることがわかる. □

5 積分と極限の交換

このノートを含む一連のノート群では安全な極限の交換しか扱わない.

読者は積分と極限の交換, 積分と微分の交換, 積分順序の交換などを形式的に自由にできることを認めて読んで欲しい.

もしくは以下の結果が証明抜きで自由に使用されると考えてもよい.

(J) 積分の順序交換: $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|\,dy\right) dx < \infty$ ならば

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$

(K) 積分記号化での微分: 各パラメーター α について $\int_a^b |f(\alpha,x)|\,dx < \infty$ であり, 各 $x \in (a,b)$ について偏導函数(偏微分に値を持つ函数)

$$\frac{\partial f(\alpha,x)}{\partial \alpha} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h,x) - f(\alpha,x)}{h}$$

が存在し, ある非負値函数 $\varphi(x) \geqq 0$ でかつ

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \infty, \qquad \left|\frac{\partial f(\alpha,x)}{\partial \alpha}\right| \leqq \varphi(x) \quad (a < x < b)$$

を満たすものが存在するならば,

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(\alpha,x)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(\alpha,x)}{\partial \alpha}\,dx.$$

(L) Lebesgue(ルベーグ)の収束定理: 函数列 $f_n(x)$ は各点収束している(すなわち各 $x \in (a,b)$ ごとに数列 $f_n(x)$ が収束している)とし, ある非負値函数 $\varphi(x) \geqq 0$ で

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \infty$$

を満たすものが存在すると仮定する. このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

以上は少々荒い説明の仕方になっている. 正確でかつより一般的な結果およびその証明については

- 猪狩惺, 『実解析入門 (https://www.amazon.co.jp/dp/4000054449)』, 岩波書店, 1996

など多くの教科書に書いてある. この本は品切れで中古本にプレミア価格がついている. 大学の図書館などで借りて読めば安上がりである. その本において, (L)はp.78の定理3.23に, (K)はp.79の例3.3に, (J)のより正確な表現であるFubiniの定理はpp.120-123に書いてある.

5.1 積分と極限が交換できない場合

このノートを含む一連のノート群では安全な極限の交換しか行わないが, 積分と極限が交換できない例は非常に簡単に作れる. 以下を見よ.

例(Lebesgueの収束定理の結論が成立しない場合1): 函数列 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n & (0 < x \leqq n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定める. さらに函数 $g(x)$ を

$$g(x) = \max\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \begin{cases} 1/n & (n-1 < x \leqq n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定める. このとき, 任意の実数 x について $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ だが, $\int_0^\infty f_n(x)\,dx = 1$ なので,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

となる. そして,

$$\int_0^\infty g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

であることにも注意せよ. □

問題: 上の問題の $f_n(x)$, $g(x)$ のグラフを描け.

解答例: 次のセルをみよ. □

In [19]:

```
f(n,x) = 0 < x ≤ n ? 1/n : zero(x)
g(x) = x > 0 ? 1/ceil(x) : zero(x)
x = 0.0:0.02:10.0

P = []
for n in 1:8
    p = plot(x, f.(n,x), label="f_$n(x)")
    push!(P, p)
end
p = plot(x, g.(x), label="g(x)")
push!(P, p)
plot(P..., size=(750, 600), ylims=(0,1))
#pngplot(P..., size=(750, 600), ylims=(0,1))
```

Out[19]:

5.2 Dirichlet積分とその一般化

条件収束する広義積分に関する有名な公式

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

の左辺はよく**Dirichlet積分**と呼ばれる.

Dirichlet積分の公式の様々な証明については以下の文献を参照せよ.

- D. H. Hardy, The Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ (https://www.jstor.org/stable/3602798), The Mathematical Gazette Vol. 5, No. 80 (Jun. - Jul., 1909), pp. 98-103
- A. C. Dixon, Proof That $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (https://www.jstor.org/stable/3604314), The Mathematical Gazette Vol. 6, No. 96 (Jan., 1912), pp. 223-224

この一連のノート群ではDirichlet積分の公式の導出を何度も繰り返し扱うが, そこで使った方法の多くはこの2つの文献で紹介されている方法の範囲に含まれている.

Dirichlet積分の公式は, ノート「12 Fourier解析 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb)」でFourier変換の逆変換の収束性に関するDiniの条件を扱うときに用いられる.

問題: Dirichlet積分の一般化に関する公式

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,dx = \int_a^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan a \quad (a \geqq 0)$$

を $a > 0$ の場合について示せ.

注意: 上の問題の公式の $a \searrow 0$ の極限としてDirichlet積分の公式が得られる.

解答例1: $a > 0$ と仮定し, $I(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,dx$ とおく.

$a \to \infty$ で $I(a) \to 0$ である($I(\infty) = 0$ とおく). 積分記号化での微分(K)と上の方にある三角函数のLaplace変換の問題の結果より

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}\frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,dx = -\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx = \frac{-1}{1+a^2}.$$

ゆえに

$$I(a) = I(\infty) + \int_\infty^a \frac{-1}{1+t^2}\,dt = \int_a^\infty \frac{dt}{1+t^2}.$$

さらに

$$\int_a^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^a \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan a.$$

これで示すべきことがすべて示された. □

解答例2: $a > 0$ であると仮定する. $x > 0$ のとき, $\dfrac{e^{-ax}}{x} = \displaystyle\int_a^\infty e^{-tx}\,dt$ なので

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \left(\int_a^\infty e^{-tx}\sin x\,dt\right)dx.$$

積分の順序交換(J)によって,

$$\int_0^\infty \left(\int_a^\infty e^{-tx}\sin x\,dt\right)dx = \int_a^\infty \left(\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx\right)dt.$$

上の方の三角函数のLaplace変換の問題の結果より,

$$\int_a^\infty \left(\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx\right)dt = \int_a^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

これで $a > 0$ の場合の公式(2)が示された. □

注意: $a > 0$ の場合には絶対収束する積分しか出て来ないので積分順序を自由に交換できて簡単である. $a = 0$ の場合にも積分順序の交換が可能なことを示せれば $a = 0$ の場合の(1)も証明される. □

問題(次の問題の解答例1のための準備): 次の公式を示せ: $t > 0$ のとき,

$$\int e^{-tx}\sin x\,dx = \frac{-e^{-tx}}{1+t^2}(t\cos x - \sin x), \qquad \int e^{-tx}\sin x\,dx = \frac{-e^{-tx}}{1+t^2}(t\sin x + \cos x).$$

解答例:

$$\begin{aligned}\int e^{-tx}e^{ix}\,dx = \int e^{-(t-i)x}\,dx &= \frac{e^{-(t-i)x}}{-(t-i)} = -\frac{t+i}{t^2+1}e^{-tx}(\cos x + i\sin x)\\ &= \frac{-e^{-tx}}{1+t^2}((t\cos x - \sin x) + i(t\sin x + \cos x)).\end{aligned}$$

この等式の両辺の実部と虚部が示すべき公式にちょうどなっている. □

この問題の結果より, $t > 0$ のとき,

$$\int_0^R e^{-tx}\cos x\,dx = \frac{-e^{-tR}}{1+t^2}(t\cos R - \sin R) + \frac{t}{1+t^2},$$
$$\int_0^R e^{-tx}\sin x\,dx = \frac{-e^{-tR}}{1+t^2}(t\sin R + \cos R) + \frac{1}{1+t^2}.$$

In [20]:
```
t, x = symbols("t x", positive=true)
[
    factor(integrate(exp(-t*x)*cos(x), x)),
    factor(integrate(exp(-t*x)*sin(x), x))
]
```

Out[20]:
$$\begin{bmatrix} -\frac{e^{-tx}}{t^2+1}(t\cos(x) - \sin(x)) \\ -\frac{e^{-tx}}{t^2+1}(t\sin(x) + \cos(x)) \end{bmatrix}$$

問題: Dirichlet積分の公式

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

を示せ. (1つ目の等号は広義積分の定義であり, 示す必要はない.)

解答例1: $R > 0$ であるとする. $x > 0$ のとき, $\dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\,dt$ なので

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^R \left(\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dt\right)dx.$$

積分の順序交換(J)によって

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \left(\int_0^R e^{-tx}\sin x\,dx\right)dt.$$

すぐ上の問題の結果より,

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{-e^{-tR}}{1+t^2}(t\sin R + \cos R)\,dt + \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}.$$

右辺の前者の積分は $R \to \infty$ で 0 に収束し, 後者の積分は $\pi/2$ に等しいので,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

これで公式(1)が示された. □

解答例2: N は正の整数であるとする.

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ikx} = e^{-2\pi iNx}\frac{e^{2\pi i(2N+1)x}-1}{e^{2\pi ix}-1} = \frac{e^{\pi i(2N+1)x}-e^{-\pi i(2N+1)x}}{e^{\pi ix}-e^{-\pi ix}} = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$$

なので, $N \to \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-1/2}^{1/2}\sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ikx}\,dx = \int_{-1/2}^{1/2}\frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}\,dx = 2\int_0^{1/2}\frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi(2N+1)/2}\frac{\sin t}{(2N+1)\sin\left(\frac{t}{2N+1}\right)}\,dt \to \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt. \end{aligned}$$

4つ目の等号で $x = \dfrac{t}{\pi(2N+1)}$ とおいた. $N \to \infty$ の極限操作では $(2N+1)\sin\left(\dfrac{t}{2N+1}\right) \to t$ を用いた.

ゆえに $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$. □

解答例2': 上の解答例2で $N \to \infty$ での極限を雑に扱った部分を, Fourier解析におけるRiemann-Lebesgueの定理を認めて使うことによって, より正確に扱ってみよう.

$\dfrac{1}{\sin(\pi x)} - \dfrac{1}{\pi x}$ は $x = 0$ まで連続函数として延長され, $[-1/2, 1/2]$ 上の連続函数になる. ゆえにRiemann-Lebesgueの定理より, $N \to \infty$ のとき

$$\varepsilon_N := 2\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}\right) \sin(\pi(2N+1)x)\, dx \to 0.$$

一方, $x = \dfrac{t}{\pi(2N+1)}$ とおくと, $N \to \infty$ のとき

$$2\int_0^{1/2} \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\pi x}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi(2N+1)/2} \frac{\sin t}{t}\, dt \to \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

ゆえに, $N \to \infty$ のとき, 途中まで解答例1と同様にして,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi i k x}\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}\, dx = 2\int_0^{1/2} \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}\, dx \\ &= \varepsilon_N + 2\int_0^{1/2} \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\pi x}\, dx \to \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \end{aligned}$$

ゆえに $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$. □

問題(次の問題の準備): 次を示せ.

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{\infty} \frac{t^2\, dt}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$$

In [21]:

```
t = symbols("t", real=true)
[
    integrate(t^2/(t^4+1), (t,0,oo)),
    integrate(1/(t^4+1), (t,0,oo)),
]
```

Out[21]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \end{bmatrix}$$

解答例1: $t = 1/u$ とおくと,

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_{\infty}^{0} \frac{-u^{-2}\, du}{1+u^{-4}} = \int_0^{\infty} \frac{u^2\, du}{u^4+1} = \int_0^{\infty} \frac{t^2\, dt}{1+t^4}.$$

天下りになってしまうが, $F(t)$ を次のように定める:

$$F(t) = \frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{t^2+\sqrt{2}\,t+1}{t^2-\sqrt{2}\,t+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan\left(\sqrt{2}\,t+1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}\,t-1\right)\right).$$

これの導函数を計算すると $F'(t) = 1/(1+t^4)$ となることを確認できる(かなり面倒な計算が必要になる). したがって,

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = [F(t)]_0^{\infty} = F(\infty) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi. \qquad \square$$

$1/(1+t^4)$ の原始函数の求め方については

- E. ハイラー, G. ワナー, 『解析教程 上 (https://www.amazon.co.jp/dp/4621062034)』

の第2章(5.16)式の周辺(pp.172-174)が詳しい. $1/(1+t^4)$ の部分分数展開を使う. 下の方の解答例2の直後の問題とその解答例も見よ.

In [22]:
```
t = symbols("t")
r = sqrt(Sym(2))
H = r/8*log((t^2+r*t+1)/(t^2-r*t+1)) + r/4*(atan(r*t+1)+atan(r*t-1))
display(H)
simplify(diff(H, t))
```

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}t-1\right)+\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}t+1\right)\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}\log\left(\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)$$

Out[22]: $\dfrac{1}{t^4+1}$

解答例2: 複素解析を使う方法. $R>0$ とし, C_1 は 0 から R への線分 t, $0\leqq t\leqq R$ であるとし, C_2 は R から iR への曲線 $Re^{i\theta}$, $0\leqq\theta\leqq\pi/2$, C_3 は Ri から 0 への線分であるとする. このとき,

$$\int_{C_3}\frac{dz}{1+z^4}=-\int_0^R\frac{d(it)}{1+(it)^4}=-i\int_0^R\frac{dt}{1+t^4}=-i\int_{C_1}\frac{dt}{1+t^4}.$$

$1/(1+z^4)$ の $z=e^{i\pi/4}$ における留数は

$$\frac{1}{(e^{i\pi/4}-e^{i3\pi/4})(e^{i\pi/4}-e^{i5\pi/4})(e^{i\pi/4}-e^{i7\pi/4})}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(1+i)\cdot\sqrt{2}\,i}=\frac{1}{2\sqrt{2}\,(1+i)i}$$

なので, 留数定理より,

$$\frac{2\pi i}{2\sqrt{2}\,(1+i)i}=(1-i)\int_{C_1}\frac{dz}{1+z^4}+\int_{C_2}\frac{dz}{1+z^4}.$$

$R\to\infty$ で右辺の C_1 上での積分は $\int_0^\infty dt/(1+t^4)$ に収束し, C_2 上での積分は 0 に収束するので,

$$\frac{2\pi i}{2\sqrt{2}\,(1+i)i}=(1-i)\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^4}.$$

ゆえに,

$$\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^4}=\frac{2\pi}{2\sqrt{2}\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.\qquad\square$$

問題(上の解答例1で使った結果): $1/(t^4+1)$ の原始函数を求めよ.

解答例: 以下, 記号の簡単のため $r=\sqrt{2}$ とおく($r^2=2$). 因数分解

$$t^4+1=(t^2+rt+1)(t^2-rt+1)$$

より,

$$\frac{2r}{t^4+1}=\frac{t+r}{t^2+rt+1}-\frac{t-r}{t^2-rt+1}.$$

一般に $a>0$ のとき

$$\int\frac{s\,ds}{s^2+a^2}=\frac{1}{2}\log(s^2+a^2),\qquad\int\frac{ds}{s^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{s}{a}.$$

$t=s-r/2$ とおくと

$$\begin{aligned}\int\frac{t+r}{t^2+rt+1}\,dt&=\int\frac{s+r/2}{s^2+1/2}\,ds=\frac{1}{2}\log(2s^2+1)+\arctan(rs)\\&=\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log(t^2+rt+1)+\arctan(rt+1).\end{aligned}$$

$t=s+r/2$ とおくと

$$\begin{aligned}-\int\frac{t-r}{t^2-rt+1}\,dt&=-\int\frac{s-r/2}{s^2+1/2}\,ds=-\frac{1}{2}\log(2s^2+1)+\arctan(rs)\\&=-\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\log(t^2-rt+1)+\arctan(rt-1).\end{aligned}$$

ゆえに

$$2r\int\frac{dt}{t^4+1}=\frac{1}{2}\log\frac{t^2+rt+1}{t^2-rt+1}+\arctan(rt+1)+\arctan(rt-1).$$

したがって,

$$\int\frac{dt}{t^4+1}=\frac{1}{4r}\log\frac{t^2+rt+1}{t^2-rt+1}+\frac{1}{2r}(\arctan(rt+1)+\arctan(rt-1)). \qquad \square$$

In [23]:

```
s = symbols("s", real=true)
a = symbols("a", positive=true)
display(integrate(s/(s^2+a^2), s))
display(integrate(1/(s^2+a^2), s))
```

$$\frac{1}{2}\log\left(a^2+s^2\right)$$

$$\frac{1}{a}\operatorname{atan}\left(\frac{s}{a}\right)$$

In [24]:

```
r, s, t = symbols("r s t", real=true)
v = sqrt(Sym(2))

A =  (t + r)/(t^2 + r*t + 1)
B = -(t - r)/(t^2 - r*t + 1)
H = expand(1/((t^2 + r*t + 1)*(t^2 - r*t + 1)))

display(A)
display(B)
display(H(r=>v))
display(simplify(A+B-2r*H)) # Verify 2r*H == A+B

# integrate A
As = simplify(simplify(A(t=>s-r/2))(r^2=>2))
intAs = integrate(s/(s^2+Sym(1)/2), s) + integrate(r/2/(s^2+Sym(1)/2), s)
intA = simplify(expand(intAs(s=>t+r/2)))
display(As)
display(simplify(intAs(r=>v)))
display(simplify(intA(r=>v)))

# integrate B
Bs = simplify(simplify(B(t=>s+r/2))(r^2=>2))
intBs = -integrate(s/(s^2+Sym(1)/2), s) + integrate(r/2/(s^2+Sym(1)/2), s)
intB = simplify(expand(intBs(s=>t-r/2)))
display(Bs)
display(simplify(intBs(r=>v)))
display(simplify(intB(r=>v)))

K = simplify((1/(2r)*(intA + intB))(r=>v))
display(K)
simplify(diff(K, t)) # Verification of dF/dt = 1/(t^4+1)
```

$$\frac{r+t}{rt+t^2+1}$$

$$\frac{r-t}{-rt+t^2+1}$$

$$\frac{1}{t^4+1}$$

$$0$$

$$\frac{r+2s}{2s^2+1}$$

$$\frac{1}{2}\log\left(2s^2+1\right)+\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}s\right)$$

$$\frac{1}{2}\log\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)+\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}t+1\right)+\frac{1}{2}\log(2)$$

$$\frac{r-2s}{2s^2+1}$$

$$-\frac{1}{2}\log\left(2s^2+1\right)+\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}s\right)$$

$$-\frac{1}{2}\log\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)+\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}t-1\right)-\frac{1}{2}\log(2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8}\left(-\log\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)+\log\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)+2\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}t-1\right)+2\operatorname{atan}\left(\sqrt{2}t+1\right)\right)$$

Out[24]:

$$\frac{1}{t^4+1}$$

問題: Fresnel積分の特殊値の公式

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

を示せ.

解答例: Gauss積分の公式より, $x > 0$ のとき

$$2\int_0^\infty e^{-xt^2}\,dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-xt^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

ゆえに

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xt^2}e^{ix}\,dt\right)\,dx$$

積分順序を交換すると(本当はこの部分を上の問題と同様の方法で正当化する必要がある),

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xt^2}e^{ix}\,dt\right)\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xt^2}e^{ix}\,dx\right)\,dt.$$

三角函数のLaplace変換の問題の解答例2より,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xt^2}e^{ix}\,dx\right)\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{t^2+i}{t^4+1}\,dt$$

上の問題の結果より,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{t^2+i}{t^4+1}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1+i)\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4} = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

したがって,

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\,dx = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

両辺の実部と虚部を見れば示したい結果が得られる. □

上の解答例と本質的に同じ解答の詳しい解説が

- E. ハイラー, G. ワナー, 『解析教程 下 (https://www.amazon.co.jp/dp/4621061909)』

の第4章の演習問題5.14(p.254, この問題はこの本の最後に載っている問題)の解答解説(pp.313-314)にある.

注意: 複素解析を使えばFresnel積分の特殊値の公式

$$\int_0^\infty \cos t^2\,dt = \int_0^\infty \sin t^2\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

を以下のように比較的容易に示すことができる.

$R>0$ であるとし, C_1 は 0 から R への線分, C_2 は R から $Re^{\pi i/4}$ への円弧, C_3 は 0 から $Re^{\pi i/4}$ への線分とすると, Cauchyの積分定理より,

$$\int_{C_3} e^{-z^2}\,dz = \int_{C_1} e^{-z^2}\,dz + \int_{C_2} e^{-z^2}\,dz.$$

そして,

$$\begin{aligned}
&\int_{C_3} e^{-z^2}\,dz = \int_0^R \exp(-(e^{\pi i/4}t)^2)d(e^{\pi i/4}t)\,dt = e^{\pi i/4}\int_0^R e^{-it^2}\,dt,\\
&\int_{C_1} e^{-z^2}\,dz = \int_0^R e^{-t^2}\,dt \to \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (R\to\infty),\\
&\int_{C_2} e^{-z^2}\,dz \to 0 \quad (R\to\infty).
\end{aligned}$$

したがって,

$$e^{\pi i/4}\int_0^\infty e^{-it^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

両辺に $e^{-\pi i/4} = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ をかけると,

$$\int_0^\infty e^{-it^2}\,dt = (1-i)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$e^{-it^2} = \cos t^2 - i \sin t^2$ に注意して, 両辺の実部と虚部を比較すれば欲しい結果が得られる. □

上の複素解析を用いたFresnel積分の特殊値の導出のより詳しい解説が

- 高木貞治, 『解析概論 (https://www.amazon.co.jp/dp/4000051717)』

の第62節の例2(pp.224-225)にある.

ガンマ函数との関連については

- 黒木玄, ガンマ分布の中心極限定理とStirlingの公式 (https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf)

の第8.6節を参照せよ. 一般に, ちょっとした複素解析の利用によって, $0 \leqq s < 1$ のとき

$$\int_0^\infty x^{s-1} \sin x \, dx = \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2} = \Gamma(s+1) \frac{\sin(\pi s/2)}{s}$$

となることを示せる. $(\sin(\pi s/2)/s$ の $s = 0$ での値は極限を取ることによって自然に $\pi/2$ だと定義される.) これの $s = 0$ の場合が $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$ であり, $s = 1/2$ の場合が $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ である. このように, Dirichlet積分とFresnel積分(の特殊値)はガンマ函数によって統一的に取り扱うことができる. 別々に公式を証明する必要はない. □

In [ ]:

```
1
```

10 Gauss積分, ガンマ函数, ベータ函数

黒木玄

2018-06-21

- Copyright 2018 Gen Kuroki
- License: MIT https://opensource.org/licenses/MIT (https://opensource.org/licenses/MIT)

- Repository: https://github.com/genkuroki/Calculus (https://github.com/genkuroki/Calculus)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/10%20Gauss%2C%20Gamma%2C%20Beta.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/10%20Gauss%2C%20Gamma%2C%20Beta.ipynb)
- https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/10%20Gauss%2C%20Gamma%2C%20Beta.pdf (https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/10%20Gauss%2C%20Gamma%2C%20Beta.pdf)

このファイルは Julia Box (https://juliabox.com) で利用できる.

自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ.

論理的に完璧な説明をするつもりはない. 細部のいい加減な部分は自分で訂正・修正せよ.

Table of Contents

1 Gauss積分
- 1.1 Gauss積分の公式
- 1.2 Gauss積分を使う簡単な計算例
- 1.3 Gauss分布のFourier変換
- 1.4 Gauss積分の公式の導出
  - 1.4.1 方法1: 高さ z で輪切りにする方法
  - 1.4.2 方法2: 極座標を使う方法
  - 1.4.3 方法3: $y = x\tan\theta$ と変数変換する方法

2 ガンマ函数とベータ函数
- 2.1 ガンマ函数とベータ函数の定義
- 2.2 ガンマ函数の特殊値と函数等式
- 2.3 Riemannのゼータ函数の積分表示と函数等式と負の整数と正の偶数における特殊値
  - 2.3.1 Riemannのゼータ函数の積分表示1
  - 2.3.2 Hurwitzのゼータ函数の積分表示1
  - 2.3.3 Riemannのゼータ函数の積分表示2と函数等式
- 2.4 ベータ函数とガンマ函数の関係
  - 2.4.1 方法1: 置換積分と積分の順序交換のみを使う方法
  - 2.4.2 方法2: 極座標変換を使う方法
  - 2.4.3 方法3: y = tx と変数変換する方法
  - 2.4.4 ベータ函数とガンマ函数の関係の簡単な計算問題への応用
  - 2.4.5 B(s, 1/2)の級数展開
- 2.5 ガンマ函数の無限積表示
- 2.6 sinとガンマ函数の関係
  - 2.6.1 sinの無限積表示
  - 2.6.2 Euler's reflection formula
- 2.7 Wallisの公式
- 2.8 Legendre's duplication formula
- 2.9 Lerchの定理とゼータ正規化積
  - 2.9.1 Lerchの定理 (Hurwitzのゼータ函数とガンマ函数の関係)
  - 2.9.2 ゼータ正規化積

3 Stirlingの公式とLaplaceの方法
- 3.1 Stirlingの公式
- 3.2 Wallisの公式のStirlingの公式を使った証明
- 3.3 Gauss's multiplication formula

3.4 Laplaceの方法
3.5 Laplaceの方法の弱形

In [1]:

```
using Plots
gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn) = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    display("text/html", """<img src="data:$mime; base64,$base64">""")
end

using SymPy
#sympy[:init_printing](order="lex") # default
#sympy[:init_printing](order="rev-lex")

using SpecialFunctions
using QuadGK
```

1 Gauss積分

1.1 Gauss積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

を**Gauss積分の公式**と呼ぶことにする. 証明は後で行う.

このノートの筆者は大学新入生が習う積分の公式の中でこれが**最も重要**であると考えている. ガウス積分が重要だと考える理由は以下の通り.

(1) この公式自体が非常に面白い形をしている. 左辺を見てもどこにも円周率は見えないが, 右辺には円周率が出て来る. しかも円周率がそのまま出て来るのではなく, その平方根が出て来る.

(2) 様々な方法を使ってGauss積分の公式を証明できる.

(3) Gauss積分の公式は確率論や統計学で正規分布を扱うときには必須である. 正規分布は中心極限定理によって特別に重要な役目を果たす確率分布である.

(4) Gauss積分はガンマ函数に一般化される.

(5) Gauss積分はLaplaceの方法の基礎である. Laplaceの方法はある種の積分の漸近挙動を調べるための最も基本的な方法であり, 解析学の応用において基本的かつ重要である.

(6) 特にGauss積分で階乗に等しい積分を近似することによって, Stirlingの公式が得られる. (Stirlingの公式 $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ の平行根の因子はGauss積分を経由して得られる.)

以上のようにGauss積分は純粋数学的にも応用数学的にも基本的かつ重要である.

1.2 Gauss積分を使う簡単な計算例

問題: 上の公式を使って, $a > 0$ のとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/a}\,dy = \sqrt{a\pi}$$

となることを示せ.

注意: a を $1/a$ で置き換えれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

も得られる.

解答例: Gauss積分の公式で $x = \dfrac{y}{\sqrt{a}}$ と置換積分すると

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/a}\,dy$$

なので, 両辺に $\sqrt{a}$ をかければ示したい公式が得られる. □

問題: 分散 $\sigma^2 > 0$, 平均 μ の正規分布の確率密度函数 $p(x)$ が

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

で定義される. このとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$$

となることを示せ. (この問題より, 確率統計学においてGauss積分の公式は必須であることがわかる.)

解答例: $x = y + \mu$ と置換し, 上の問題の結果を使うと,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/(2\sigma^2)}\,dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\sqrt{2\sigma^2\pi} = 1. \qquad \square\end{aligned}$$

問題(Lebesgueの収束定理の結論が成立しない場合2): 函数列 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}e^{-x^2/n}$$

と定める. 以下を示せ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1.$

(2) 各 $x \in \mathbb{R}$ ごとに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$

(3) したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx \neq \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$

解答例: (1)はGauss積分の公式から得られる(詳細は自分で計算して確認せよ). (3)は(1)と(2)からただちに得られるので, あとは(2)のみを示せば十分である. $x \in \mathbb{R}$ を任意に取って固定する. このとき $n \to \infty$ で $\dfrac{x^2}{n} \to 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0$ となるので, $f_n(x) \to 0$ となることもわかる. □

問題: すぐ上の問題の函数 $f_n(x)$ のグラフを描いてみよ.

解答例: 以下のセルのようになる.

n が大きくなると, $f_n(x)$ の「分布」は広く拡がる. □

In [2]:
```
f(n,x) = exp(-x^2/n)/√(n*π)
x = -10.0:0.05:10.0
P = plot(size=(400,250))
for n in [1,2,3,4,5,10, 30, 100]
    plot!(x, f.(n,x), label="n = $n")
end
P
```

Out[2]:

問題: 次を示せ: $a > 0$ と $k = 0, 1, 2, \ldots$ について

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^{2k}\, dx = \sqrt{\pi}\, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k} a^{-(2k+1)/2} = \sqrt{\pi}\, \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} a^{-(2k+1)/2}. \tag{1}$$

注意: a を $1/a$ で置き換えれば次も得られる:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a} x^{2k}\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k} \sqrt{a^{2k+1}\pi} = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \sqrt{a^{2k+1}\pi}. \tag{2}$$

解答例: Gauss積分の公式から得られる公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\pi}\, a^{-1/2}$$

の両辺を a で微分して -1 倍する操作を繰り返すと((K)を使う),

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^2\, dx &= \sqrt{\pi}\, \frac{1}{2} a^{-3/2}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^4\, dx &= \sqrt{\pi}\, \frac{1}{2}\frac{3}{2} a^{-5/2}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^6\, dx &= \sqrt{\pi}\, \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2} a^{-7/2}.
\end{aligned}$$

k 回その操作を繰り返すと,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^{2k}\, dx = \sqrt{\pi}\, \frac{1}{2}\frac{3}{2} \cdots \frac{2k-1}{2} a^{-(2k+1)/2}.$$

これより, (1)の前半が成立することがわかる. 後半の成立は

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k} \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{2^k k!} = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \tag{3}$$

によって確認できる. □

注意: 奇数の積 $1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$ について(3)の計算法はよく使われる:

$$1 \cdot 3 \cdots (2k-1) = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1) \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{2^k k!} = \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

例えば二項係数に関する

$$\begin{aligned}
(-1)^k \binom{-1/2}{k} &= (-1)^k \frac{(-1/2)(-3/2) \cdots (-(2k-1)/2)}{k!} \\
&= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k k!} = \frac{(2k)!}{2^{2k} k! k!} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}
\end{aligned}$$

もよく出て来る. □

1.3 Gauss分布のFourier変換

$a > 0$ であるとする. $e^{-x^2/a}$ 型の函数を**Gauss分布函数**と呼ぶことがある.

一般に函数 $f(x)$ に対して,

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x)\, dx$$

を f の**Fourier変換**(フーリエ変換)と呼ぶ. もしも実数値函数 $f(x)$ が偶函数であれば,

$$e^{-ipx} f(x) = f(x)\cos(px) - if(x)\sin(px)$$

の虚部は奇函数になり, その積分は消えるので

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(px)\, dx$$

となる.

問題: $a > 0$ とする. $f(x) = e^{-x^2/a}$ のFourier変換を求めよ.

解答例1: $\cos(px) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p^2)^k x^{2k}}{(2k)!}$ より,

$$\begin{aligned}\hat{f}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a}\cos(px)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p^2)^k}{(2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a} x^{2k}\, dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p^2)^k}{(2k)!} \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \sqrt{a^{2k+1}\pi} = \sqrt{a\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ap^2/4)^k}{k!} = \sqrt{a\pi}\, e^{-ap^2/4}.\end{aligned}$$

3つ目の等号で上の方の問題の結果を用いた. □

解答例2: 複素解析を用いる. 複素解析さえ認めて使えば, 形式的によりわかり易く計算できる.

$$-\frac{x^2}{a} - ipx = -\frac{1}{a}\left(x^2 + iapx\right) = -\frac{1}{a}\left(\left(x + \frac{iap}{2}\right)^2 - \frac{-a^2p^2}{4}\right) = -\frac{1}{a}\left(x + \frac{iap}{2}\right)^2 - \frac{ap^2}{4}$$

と平方完成し, $x = y - \dfrac{iap}{2}$ と置換すると,

$$\begin{aligned}\hat{f}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a} e^{-ipx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2/a + ipx)}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{a}\left(x + \frac{iap}{2}\right)^2 - \frac{ap^2}{4}\right) dx = e^{-ap^2/4} \int_{-\infty+iap/2}^{\infty+iap/2} e^{-y^2/a}\, dy.\end{aligned}$$

Cauchyの積分定理より,

$$\int_{-\infty+iap/2}^{\infty+iap/2} e^{-y^2/a}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/a}\, dy = \sqrt{a\pi}.$$

したがって,

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a} e^{-ipx}\, dx = \sqrt{a\pi}\, e^{-ap^2/4}. \qquad \square$$

補足: 複素平面上の経路 C を次のように定める: まず $-R$ から R に直線的に移動する. 次に R から $R + iap/2$ に直線的に移動する. その次に $R + iap/2$ から $-R + iap/2$ に直線的に移動する. 最後に $-R + iap/2$ から $-R$ に直線的に移動する. これによって得られる長方形型の経路が C である. 上の解答例2の中のCauchyの積分定理をこの経路 C_R に適用した場合を使っている.
$R \to \infty$ とすると, 左右の縦方向に移動する経路上での積分が 0 に収束することを使う. □

e^{-ax^2} のFourier変換については

- 黒木玄, [ガンマ分布の中心極限定理とStirlingの公式 (https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf)](https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf)

の第6節も参照せよ.

1.4 Gauss積分の公式の導出

Gauss積分の計算の仕方については

- 黒木玄, ガンマ分布の中心極限定理とStirlingの公式 (https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf)

の第7節および

- 高木貞治, 解析概論, 岩波書店 (1983)

の第3章§35の例5,6 (https://twitter.com/genkuroki/status/1018654177164083201)を参照せよ.

$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ とおく. $I = \sqrt{\pi}$ であることを示したい. そのためには

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right) e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\right) dy \end{aligned}$$

が π に等しいことを証明すればよい. 上の計算の2つ目と3つ目の等号で積分の線形性(A)を用いた.

1.4.1 方法1: 高さ z で輪切りにする方法

$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\right) dy$ は2変数函数 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ の xyz 空間内のグラフと xy 平面 $z = 0$ のあいだに挟まれた山型の領域の体積を意味する.

なぜならば, $S(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx$ はその領域の y を固定したときの切断面の面積に等しく, $\int_{-\infty}^{\infty} S(y)\,dy$ はその切断面の面積の積分なので領域全体の体積に等しいからである. 一般に, 長さを積分すれば面積になり、面積を積分すれば体積になる.

その山型の領域の体積は高さ z での切断面の面積の $z = 0$ から $z = 1$ までの積分に等しい. 高さ z での切断面は半径 $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{-\log z}$ の円盤になり, その面積は $-\pi \log z$ になる. ゆえに

$$I^2 = \int_0^1 (-\pi \log z)\,dz = -\pi\,[z \log z - z]_0^1 = \pi.$$

これより $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ であることがわかる.

1.4.2 方法2: 極座標を使う方法

以下の方法は2重積分の積分変数の変換の仕方(Jacobianが出て来る)を知っておかなければ使えない.

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと,

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr = 2\pi \left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^{\infty} = 2\pi\frac{1}{2} = \pi.$$

ゆえに $I = \sqrt{\pi}$.

1.4.3 方法3: $y = x\tan\theta$ と変数変換する方法

I^2 は次のようにも表せる:

$$I^2 = 2\int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\right) dx.$$

この積分内で x は $x > 0$ を動くと考える.

内側の積分で積分変数を $-\infty < y < \infty$ から $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ に $y = x\tan\theta$ によって変換すると,

$$\cos\theta > 0, \quad dy = \frac{x}{\cos^2\theta}\,d\theta, \quad x^2 + y^2 = x^2(1+\tan^2\theta) = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$$

なので

$$I^2 = 2\int_0^\infty \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)\frac{x}{\cos^2\theta}\,d\theta\right)\,dx.$$

ゆえに積分の順序を交換すると((J)を使う),

$$\begin{aligned} I^2 &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)\frac{x}{\cos^2\theta}\,dx\right)\,d\theta \\ &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{1}{-2}\exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)\right]_{x=0}^{x=\infty} d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}\,d\theta = 2\frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

したがって $I = \sqrt{\pi}$.

注意: 極座標変換 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ が有効な場面では, $y = x\tan\theta$ という変数変換も有効なことが多い. $\tan\theta$ の幾何的な意味は「原点を通る直線の傾き」であった. その意味でも $y = x\tan\theta$ は自然な変数変換だと言える. □

2 ガンマ函数とベータ函数

2.1 ガンマ函数とベータ函数の定義

$s > 0, p > 0, q > 0$ と仮定する. $\Gamma(s)$ と $B(p, q)$ を次の積分で定義する:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx, \quad B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

$\Gamma(s)$ をガンマ函数と, $B(p, q)$ をベータ函数と呼ぶ.

問題(ガンマ函数のGauss積分型の表示): 次を示せ:

$$\Gamma(s) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2s-1}\,dy.$$

解答例: ガンマ函数の積分による定義式において $x = y^2$ と置換すると,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y^2}y^{2s-2}\,2y\,dy = 2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2s-1}\,dy. \qquad \square$$

注意: この公式より, ガンマ函数は本質的にGauss積分の一般化になっていることがわかる. □

In [3]:
```
y = symbols("y")
s = symbols("s", positive=true)
2*integrate(e^(-y^2)*y^(2s-1), (y,0,oo))
```

Out[3]: $\Gamma(s)$

問題: 次を示せ: $r > 0$ について

$$\int_0^\infty e^{-x^r}\,dx = \frac{1}{r}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right).$$

略解: $x = t^{1/r}$ と置換すればただちに得られる. □

注意: ガンマ函数の函数等式(下の方で示す)もしくは部分積分によって $\frac{1}{r}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)$ が成立することもわかる. □

In [4]:
```
x = symbols("x")
r = symbols("r", positive=true)
integrate(e^(-x^r), (x,0,oo))
```

Out[4]: $\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)$

問題(ガンマ函数のスケール変換): 次を示せ:

$$\int_0^\infty e^{-x/\theta} x^{s-1}\,dx = \theta^s \Gamma(s) \quad (\theta > 0,\ s > 0).$$

ガンマ函数はこの形式でも非常によく使われる.

解答例: $x = \theta y$ と置換すると, $x^{s-1}\,dx = \theta^s y^{s-1}\,dy$ なので示したい公式が得られる. $\square$.

In [5]:
```
x = symbols("x")
s = symbols("s", positive=true)
t = symbols("t", positive=true)
simplify(integrate(e^(-x/t)*x^(s-1), (x,0,oo)))
```

Out[5]: $t^s\Gamma(s)$

問題(ベータ函数の別の表示): 次を示せ:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^{1/p})^{p+q}}.$$

ベータ函数のこれらの表示もよく使われる.

解答例: $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ で $x = \cos^2\theta$ と置換すると,

$$dx = -2\cos\theta\ \sin\theta\,d\theta$$

より,

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta.$$

$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ で $x = \dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$ と置換すると,

$$dx = \frac{dt}{1+t}$$

より,

$$B(p,q) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{1+t}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{q-1}\frac{dt}{(1+t)^2} = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$$

さらに $t = u^{1/p}$ と置換すると,

$$t^{p-1}\,dt = \frac{1}{p}\,du$$

より,

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^{1/p})^{p+q}}. \qquad \square$$

問題: 次を示せ. $a < b, p > 0, q > 0$ のとき,

$$\int_a^b (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}\,dx = (b-a)^{p+q-1}B(p,q).$$

証明: $x = (1-t)a + tb = a + (b-a)t$ と積分変数を置換すると,

$$\int_a^b (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}\,dx = \int_0^1 ((b-a)t)^{p-1}((b-a)(1-t))^{q-1}(b-a)\,dt = (b-a)^{p+q-1}B(p,q). \qquad \square$$

例: $B(2,2) = \displaystyle\int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ なので

$$\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx = (b-a)^3 B(2,2) = \frac{(b-a)^3}{6}. \qquad \square$$

問題: ガンマ函数を定義する積分の被積分函数のグラフを色々な $s > 0$ について描いてみよ.

解答例: 次のセルを見よ. $\square$

In [6]:
```
# ガンマ函数の積分の被積分函数のグラフ

f(s,x) = e^(-x)*x^(s-1)
x = 0.00:0.05:30.0
PP = []
for s in [1/2, 1, 2, 3, 6, 10]
    P = plot(x, f.(s,x), title="s = $s", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end
for s in [15, 20, 30]
    x = 0:0.02:2.2s
    P = plot(x, f.(s,x), title="s = $s", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end
plot(PP[1:3]..., size=(750, 200), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[6]:

In [7]:
```
plot(PP[4:6]..., size=(750, 200), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[7]:

In [8]:
```
plot(PP[7:9]..., size=(750, 200), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[8]:

s を大きくすると, ガンマ函数の被積分函数(を函数で割ったもの)は正規分布の確率密度函数とほとんどぴったり一致するようになる. 次のセルを見よ.

In [9]:

```
# f(s,x) = e^{-x} x^{s-1} / Γ(s)
# g(s,x) = e^{-(x-s)^2/(2s)} / √(2πs)

f(s,x) = e^(-x+(s-1)*log(x)-lgamma(s))
g(s,x) = e^(-(x-s)^2/(2s)) / √(2π*s)
s = 100
x = 0:0.5:2s
plot(size=(400, 250))
plot!(title="y = e^(-x) x^(s-1)/Gamma(s),  s = $s", titlefontsize=11)
plot!(x, f.(s,x), label="Gamma dist", lw=2)
plot!(x, g.(s,x), label="normal dist", ls=:dash, lw=2)
```

Out[9]:

問題: ベータ函数を定義する積分の被積分函数のグラフを色々な $p, q > 0$ について描いてみよ.

解答例: 次のセルを見よ. □

In [10]:

```
# ベータ函数の積分の被積分函数のグラフ

f(p,q,x) = x^(p-1)*(1-x)^(q-1)
x = 0.002:0.002:0.998
PP = []
for (p,q) in [(1/2,1/2), (1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (2,4), (4,6), (8, 12), (16, 24)]
    y = f.(p,q,x)
    P = plot(x, y, title="(p,q) = ($p,$q)", titlefontsize=10, xlims=(0,1), ylims=(0,1.05*maximum(y)))
    push!(PP, P)
end
plot(PP[1:3]..., size=(750, 200), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[10]:

In [11]:

```
plot(PP[4:6]..., size=(750, 200), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[11]:

In [12]:
```
plot(PP[7:9]..., size=(750, 200), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[12]:

p, q がそれらの比を保ちながら大きくすると, ベータ函数の被積分函数をベータ函数で割ったものは正規分布の被積分函数にほとんどぴったり一致するようになる. 次のセルを見よ.

In [13]:
```
# f(p,q,x) = x^{p-1} (1-x)^{q-1} / B(p,q)
# μ = p/(p+q)
# σ² = pq/((p+q)^2(p+q+1))
# g(μ,σ²,x) = e^{-(x-μ)^2/(2σ²)} / √(2πσ²)

f(p,q,x) = x^(p-1)*(1-x)^(q-1)/beta(p,q)
g(μ,σ²,x) = e^(-(x-μ)^2/(2*σ²)) / √(2π*σ²)
p, q = 45,55
μ = p/(p+q)
σ² = p*q/((p+q)^2*(p+q+1))
x = 0.000:0.002:1.000
plot(size=(400, 250))
plot!(title="y = x^(p-1) (1-x)^(q-1) / B(p,q),  (p,q) = ($p,$q)", titlefontsize=10)
plot!(x, f.(p,q,x), label="Beta dist", lw=2)
plot!(x, g.(μ,σ²,x), label="normal dist", lw=2, ls=:dash)
```

Out[13]:

2.2 ガンマ函数の特殊値と函数等式

問題(ガンマ函数の最も簡単な特殊値): $\Gamma(1) = 1$ と $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を示せ.

解答例: 前者は

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1.$$

と容易に示される. 後者を示すためには $\Gamma(1/2)$ がGauss積分 $\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$ に等しいことを示せばよい. $x = y^2$ で置換積分すると,

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2) &= \int_0^\infty e^{-x}x^{1/2-1}\,dx = \int_0^\infty e^{-y^2}\frac{1}{y}2y\,dy \\ &= 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}. \qquad \square\end{aligned}$$

注意: 上の問題の解答より, $\Gamma(1/2)$ は本質的にGauss積分に等しい. その意味でガンマ函数はGauss積分の一般化になっていると言える. $\square$

問題(ガンマ函数の函数等式): $s > 0$ のとき $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ となることを示せ.

解答例: 部分積分を使う. $s > 0$ と仮定する. このとき

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-x}x^s\,dx = \int_0^\infty (-e^{-x})'x^s\,dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x}(x^s)'\,dx = \int_0^\infty e^{-x}sx^{s-1}\,dx = s\Gamma(s).\end{aligned}$$

3つ目の等号で部分積分を行った. そのとき, $x \searrow 0$ でも $x \to \infty$ でも $e^{-x}x^s \to 0$ となることを使った($s > 0$ と仮定したことに注意せよ). (積分以外の項が消える.) □

注意: 上の問題の結果を使えば, $s < 0$, $s \neq 0, -1, -2, \dots$ のとき $s + n > 0$ となる整数 n を取れば,

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}$$

の右辺はwell-definedになるので, この公式によってガンマ函数を $s < 0$, $s \neq 0, -1, -2, \dots$ の場合に自然に拡張できる. □

注意(ガンマ函数は階乗の一般化): 以上の問題の結果より, 非負の整数 n について

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots 1\,\Gamma(1) = n!.$$

すなわち, $\Gamma(s+1)$ は階乗 $n!$ の連続変数 s への拡張になっていることがわかる. □

問題(ガンマ函数の正の半整数での値): 次を示せ: 非負の整数 k に対して

$$\Gamma((2k+1)/2) = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\sqrt{\pi}$$

解答例1: ガンマ函数の函数等式と $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ より

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) &= \frac{2k-1}{2}\Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right) = \frac{2k-1}{2}\frac{2k-3}{2}\Gamma\left(\frac{2k-3}{2}\right) = \cdots \\ &= \frac{2k-1}{2}\frac{2k-3}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

これで示したい公式の1つ目の等号は示せた. 2つ目の等号は上の方のGauss積分の応用問題で使った方法を使えば同様に示される. □

解答例2: ガンマ函数の $\Gamma(s) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2s-1}\,dy$ という表示を使うと,

$$\Gamma((2k+1)/2) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2k}\,dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}y^{2k}\,dy$$

なので, 上の方のGauss積分の応用問題に関する結果から欲しい公式が得られる. □

2.3 Riemannのゼータ函数の積分表示と函数等式と負の整数と正の偶数における特殊値

この節はこのノートを最初に読むときには飛ばして読んでも構わない. ガンマ函数の理論がRiemannのゼータ函数の理論と密接に関係していることを認識しておけば問題ない.

Bernoulli数やBernoulli多項式に関してはノート「13 Euler-Maclaurinの和公式 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/13%20Euler-Maclaurin%20summation%20formula.ipynb)」により詳しい解説がある.

2.3.1 Riemannのゼータ函数の積分表示1

問題(Riemannのゼータ函数の積分表示1): 次をが成立することを示せ.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1} \quad (s > 1).$$

注意: $x \to 0$ のとき $\dfrac{e^x-1}{x} \to 1$ となるので, $\dfrac{x}{e^x-1}$ は $x = 0$ まで連続的に拡張され, この公式の積分は

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1} = \int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}x^{s-2}\,dx$$

と書けるので, $s - 2 > -1$ すなわち $s > 1$ ならば収束している. □

解答例: 上の問題の結果より, $\dfrac{1}{n^s} = \dfrac{1}{\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}\,dx$ なので,

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}\,dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}x^{s-1}\,dx = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}. \qquad \square\end{aligned}$$

定義: Bernoulli数 B_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ を次の条件によって定める:

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{B_n}{n!}z^n. \qquad \square$$

問題: $B_0 = 1, B_1 = -\dfrac{1}{2}$ であり, n が3以上の奇数のとき $B_n = 0$ となることを示せ.

解答例: $z \to 0$ のとき, $\dfrac{z}{e^z-1} \to 1$ より $B_0 = 1$ となる.

$$\frac{z}{e^z-1} - \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{z}{2}\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}$$

であることと, これが偶函数であることから, $B_1 = -\dfrac{1}{2}$ で n が3以上の奇数ならば $B_n = 0$ となることがわかる. $\square$

問題(Riemannのゼータ函数の積分表示1'): 非負の整数 N に対して, 次を示せ:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\left[\int_1^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1} + \int_0^1 \left(\frac{x}{e^x-1} - \sum_{k=0}^N \frac{B_k}{k!}x^k\right)x^{s-2}\,dx + \sum_{k=0}^N \frac{B_k}{k!}\frac{1}{s+k-1}\right].$$

さらに右辺の括弧の内側の2つ目の積分が $s > -N$ で絶対収束していることを示せ.

解答例: Riemannのゼータ函数の積分表示1の公式で積分を $\int_1^\infty$ と $\int_0^1$ に分けて, $k = 0, 1, \dots, N$ に対する

$$\int_0^1 \frac{B_k}{k!}x^{s+k-2}\,dx = \frac{B_k}{k!}\frac{1}{s+k-1}$$

を足して引けば示したい公式が得られる.

$$\frac{x}{e^x-1} - \sum_{k=0}^N \frac{B_k}{k!}x^k = O(x^{N+1})$$

であり, $\displaystyle\int_0^1 x^{N+1}x^{s-2}\,dx = \int_0^1 x^{s+N-1}\,dx$ が $s > -N$ で絶対収束していることから, 右辺の括弧の内側の2つ目の積分もそこで収束している. $\square$

問題: Riemannのゼータ函数の積分表示1'の右辺で $\zeta(s)$ を $s > -N$ まで拡張しておくとき,

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-r) = -\frac{B_{r+1}}{r+1} \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

となることを示せ. (r が2以上の偶数のとき $B_{r+1} = 0$ となることに注意せよ.)

解答例: ガンマ函数の函数等式より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(s)}\frac{B_k}{k!}\frac{1}{s+k-1} &= \frac{s(s+1)\cdots(s+k-2)(s+k-1)}{\Gamma(s+k)}\frac{B_k}{k!}\frac{1}{s+k-1} \\ &= \frac{s(s+1)\cdots(s+k-2)}{\Gamma(s+k)}\frac{B_k}{k!}\end{aligned}$$

なので, 非負の整数 r に対して, $k = r+1$ とおいて $s \to -r$ とすると,

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\frac{B_k}{k!}\frac{1}{s+k-1} \to (-1)^r\frac{B_{r+1}}{r+1} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & (r = 0) \\ -\dfrac{B_{r+1}}{r+1} & (r = 1, 2, 3, \dots)\end{cases}.$$

ただし, 等号で, $B_1 = -\dfrac{1}{2}$ と $r+1$ が3以上の奇数のとき $B_{r+1} = 0$ となることを使った. これをRiemannのゼータ函数の積分表示1'

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\left[\int_1^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1} + \int_0^1 \left(\frac{x}{e^x-1} - \sum_{k=0}^N \frac{B_k}{k!}x^k\right)x^{s-2}\,dx + \sum_{k=0}^N \frac{B_k}{k!}\frac{1}{s+k-1}\right]$$

に適用すれば,

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-r) = -\frac{B_{r+1}}{r+1} \quad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

が得られる. □

2.3.2 Hurwitzのゼータ函数の積分表示1

問題: Hurwitzのゼータ函数 $\zeta(s,x)$ と**Bernoulli多項式** $B_k(x)$ を

$$\zeta(s,x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(x+k)^s} \quad (x>0,\ \ s>1), \qquad \frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k(x)}{k!}t^k$$

と定める. $\zeta(s) = \zeta(s,1)$ なのでHurwitzのゼータ函数はRiemannのゼータ函数の拡張になっている. 以下を示せ:

(1) $\quad \zeta(s,x) = \dfrac{1}{\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{(1-x)t}t^{s-1}}{e^t-1}\,dt.$

(2) $\quad \zeta(s,x) = \dfrac{1}{\Gamma(s)}\left[\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{(1-x)t}t^{s-1}}{e^t-1}\,dt + \int_1^\infty \left(\frac{te^{(1-x)t}}{e^t-1} - \sum_{k=0}^N \frac{B_k(1-x)}{k!}t^k\right)t^{s-2}\,dt + \sum_{k=0}^N \frac{B_k(1-x)}{k!}\frac{1}{s+k-1}\right].$

(3) Hurwitzのゼータ函数を(2)によって $s<1$ に拡張すると, 0 以上の整数 m について

$$\zeta(-m,x) = \frac{(-1)^m B_{m+1}(1-x)}{m+1} = -\frac{B_{m+1}(x)}{m+1}.$$

解答例: (1) $x, s > 0$, $k \geqq 0$ に対して, $\dfrac{1}{(x+k)^s} = \dfrac{1}{\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^\infty e^{-(x+k)t}t^{s-1}\,dt$ を使うと,

$$\begin{aligned}\zeta(s,x) &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-(x+k)t}t^{s-1}\,dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^\infty e^{-kt}\right)e^{-xt}t^{s-1}\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}t^{s-1}}{1-e^{-t}}\,dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{e^{(1-x)t}t^{s-1}}{e^t-1}\,dt.\end{aligned}$$

(2) 上の(1)の結果の右辺の積分を 0 から 1 への積分と 1 から ∞ の積分に分けて, 0 から 1 への積分の被積分函数に $\displaystyle\sum_{k=0}^N \frac{B_k(1-x)}{k!}t^k$ を足して引き, 引いた方の積分を計算すれば, (2)の公式が得られる.

(3) Bernoulli多項式の定義より, $\left(\dfrac{te^{(1-x)t}}{e^t-1} - \displaystyle\sum_{k=0}^N \frac{B_k(1-x)}{k!}t^k\right)t^{s-1} = O(t^{s+N-1})$ となるので, (2)の右辺の 0 から 1 への積分は $s > -N$ で絶対収束している. $N > m$ と仮定する. s が 0 以下の整数に近付くと $\dfrac{1}{\Gamma(s)} \to 0$ となり,

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\frac{1}{s+(m+1)-1} = \frac{s(s+1)\cdots(s+m-1)}{\Gamma(s+m+1)} \to (-1)^m m! \quad (s \to -m)$$

より, $s \to -m$ のとき,

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\frac{B_{m+1}(1-x)}{(m+1)!}\frac{1}{s+(m+1)-1} \to (-1)^m m!\frac{B_{m+1}(1-x)}{(m+1)!} = \frac{(-1)^m B_{m+1}(1-x)}{m+1}$$

となることから, $\zeta(s,x) = \dfrac{(-1)^m B_{m+1}(1-x)}{m+1}$ が得られる. さらに, $\dfrac{te^{(1-x)t}}{e^t-1} = \dfrac{(-t)e^{a(-t)}}{e^{-t}-1}$ によって, $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$ となることがわかるので, $\dfrac{(-1)^m B_{m+1}(1-x)}{m+1} = -\dfrac{B_{m+1}(x)}{m+1}$ も得られる. □

問題: 次を示せ.

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x+1} \quad (s>1).$$

注意: この公式の積分は $s>0$ という条件を外して, s が任意の複素数にしても絶対収束している. この公式は $(1-2^{1-s})\zeta(s)$ の複素平面全体への解析接続を与える. □

解答例: 1つ目の等号を示そう:

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \\
2^{1-s}\zeta(s) &= \frac{2}{2^s} + \frac{2}{4^s} + \frac{2}{6^s} + \frac{2}{8^s} + \cdots, \\
(1-2^{1-s})\zeta(s) &= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.
\end{aligned}$$

2つ目の等号を示そう. 上の問題の解答例と同様にして, $\dfrac{1}{n^s} = \dfrac{1}{\Gamma(s)} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-nx}x^{s-1}\,dx$ なので,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} e^{-nx}x^{s-1}\,dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-nx}x^{s-1}\,dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x+1}\,dx. \qquad \square
\end{aligned}$$

注意: 以上の計算は統計力学における[Fermi-Dirac統計 (https://www.google.co.jp/search?q=Dirac-Fermi%E5%88%86%E5%B8%83+%CE%B6)](https://www.google.co.jp/search?q=Dirac-Fermi%E5%88%86%E5%B8%83+%CE%B6)に関する議論に登場する. ゼータ函数は数論の基本であるだけではなく, 統計力学的にも意味を持っている. □

2.3.3 Riemannのゼータ函数の積分表示2と函数等式

問題(Riemannのゼータ函数の積分表示2): $\theta(t)$ を

$$\theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \quad (t>0)$$

とおくと, 次が成立することを示せ:

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \theta(t)t^{s/2-1}\,dt \quad (s>2).$$

解答例:

$$\begin{aligned}
\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s/2)}{(\pi n^2)^{s/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t}t^{s/2-1}\,dx \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}t^{s/2-1}\,dx = \int_0^{\infty} \theta(t)t^{s/2-1}\,dt. \qquad \square
\end{aligned}$$

問題(Riemannのゼータ函数の積分表示2'): 上の問題の続き. $\theta(t)$ が

$$1+2\theta(1/t) = t^{1/2}(1+2\theta(t)) \quad (t>0)$$

すなわち

$$\theta(1/t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^{1/2} + t^{1/2}\theta(t)$$

を満たしていることを認めて, 次を示せ:

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \int_1^{\infty} \theta(t)(t^{s/2} + t^{(1-s)/2})\,\frac{dt}{t}.$$

$\theta(t)$ に関する上の公式の証明についてはノート「[12 Fourier解析 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb)](http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb)」におけるPoissonの和公式の解説を見よ.

注意: 上の問題の公式の右辺の積分は s が任意の複素数であってもしているので, 右辺は左辺の複素平面上への解析接続を与える. さらに, 右辺は s を $1-s$ で置き換える操作で不変であるから,

$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

とおくと,

$$\hat{\zeta}(1-s) = \hat{\zeta}(s)$$

が成立している. これを**ゼータ函数の函数等式**と呼ぶ. □

解答例: 上の問題と以下の計算を合わせれば欲しい結果が得られる. 積分区間を 0 から 1 と 1 から ∞ に分けて, $t = 1/u$ とおくと, $t^{s/2-1}\,dt = -u^{-s/2+1}u^{-2}\,du = -u^{-s/2-1}\,du$ を使うと,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \theta(t)t^{s/2-1}\,dt &= \int_0^1 \theta(t)t^{s/2-1}\,dt + \int_1^\infty \theta(t)t^{s/2}\,dt, \\
\int_0^1 \theta(t)t^{s/2-1}\,dt &= \int_1^\infty \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^{1/2} + t^{1/2}\theta(t)\right)t^{-s/2-1}\,dt \\
&= \int_1^\infty \left(-\frac{1}{2}t^{-s/2-1} + \frac{1}{2}t^{(1-s)/2-1} + \theta(t)t^{(1-s)/2-1}\right)dt \\
&= -\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty \theta(t)t^{(1-s)/2-1}\,dt.
\end{aligned}$$

上の問題の結果と以上の計算をまとめると, 欲しい結果が得られる. □

問題: 上の問題の続き. ガンマ函数が Euler's reflection formula

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

と Legendre's duplication formula

$$\Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = 2^{1-2s}\pi^{1/2}\Gamma(2s)$$

を満たしていることを認めて, 上の問題の注意におけるゼータ函数の函数等式 $\hat{\zeta}(1-s) = \hat{\zeta}(s)$ が

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s)$$

と書き直されることを示せ.

Legendre's duplication formula と Euler's reflection formula はこのノートの下の方で初等的に証明される. Euler's reflection formulaの証明についてはノート「12 Fourier解析 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb)」のガンマ函数とsinの関係の節も参照せよ.

解答例: $\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$, $\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$ より,

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s).$$

これは以下のように書き直される:

$$\zeta(s) = \pi^{s-1/2}\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}\zeta(s).$$

一方, Euler's reflection formula の s に $s/2$ を代入すると,

$$\Gamma(s/2)\Gamma(1-s/2) = \frac{\pi}{\sin(\pi s/2)}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{\Gamma(s/2)} = \pi^{-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s/2)$$

となり, Legendre's duplication formula の s に $(1-s)/2$ を代入すると,

$$\Gamma((1-s)/2)\Gamma(1-s/2) = 2^s\pi^{1/2}\,\Gamma(1-s),$$

となるので, それらを上の公式に代入すると,

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s)$$

が得られる. □

問題: k が正の整数であるとき $\zeta(-(2k-1)) = -\dfrac{B_{2k}}{2k}$ であるという事実と上の問題の結果から

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}(-1)^{k-1}B_{2k}}{(2k)!}\pi^{2k}$$

が導かれることを示せ.

解答例: $\zeta(-(2k-1)) = -\dfrac{B_{2k}}{2k}$ と上の問題の結果より,

$$-\frac{B_{2k}}{2k} = \zeta(-(2k-1)) = 2^{-(2k-1)}\pi^{-2k}(-1)^k(2k-1)!\zeta(2k).$$

これより示したい公式が得られる. □

2.4 ベータ函数とガンマ函数の関係

ベータ函数はガンマ函数によって

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{$*$}$$

と表わされる. これを証明したい. そのためには

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}\,dy\right)\,dx$$

が

$$\Gamma(p+q)B(p,q) = \int_0^\infty e^{-z}z^{p+q-1}\,dz\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

に等しいことを示せばよい. ガンマ函数とベータ函数の別の表示を使えば右辺も別の形になることに注意せよ.

2.4.1 方法1: 置換積分と積分の順序交換のみを使う方法

ガンマ函数とベータ函数のあいだの関係式は1変数の置換積分と積分の順序交換のみを使って証明可能である. 条件 A に対して, x,y が条件 A をみたすとき値が 1 になり, それ以外のときに値が 0 になる x,y の函数を $1_A(x,y)$ と書くことにすると,

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}\,dy\right)\,dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty e^{-z}x^{p-1}(z-x)^{q-1}\,dz\right)\,dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty 1_{x<z}(x,z)e^{-z}x^{p-1}(z-x)^{q-1}\,dz\right)\,dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty 1_{x<z}(x,z)e^{-z}x^{p-1}(z-x)^{q-1}\,dx\right)\,dz \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^z e^{-z}x^{p-1}(z-x)^{q-1}\,dx\right)\,dz \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-z}(zt)^{p-1}(z-zt)^{q-1}z\,dt\right)\,dz \\
&= \int_0^\infty e^{-z}z^{p+q-1}\,dz\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \Gamma(p+q)B(p,q).
\end{aligned}$$

2つ目の等号で $y = z - x$ と置換積分し, 4つ目の等号で積分の順序を交換し, 6つ目の等号で $x = zt$ と置換積分した.

以上の計算は

- 黒木玄, ガンマ分布の中心極限定理とStirlingの公式 (https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf)

の第7.4節からの引き写しである.

2.4.2 方法2: 極座標変換を使う方法

この方法は2重積分に関する知識が必要になる. 2重積分について知らない人は次の節の別の方法を参照せよ.

$x = X^2, y = Y^2$ と変数変換すると,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(X^2+Y^2)}X^{2p-1}Y^{2q-1}\,dX\,dY.$$

さらに $X = r\cos\theta, Y = r\sin\theta$ と変数変換すると,

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2p-1}(r\sin\theta)^{2q-1} r\,dr \\ &= 4\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1}\,dr = B(p,q)\Gamma(p+q).\end{aligned}$$

最後の等号でベータ函数の三角函数を用いた表示とガンマ函数のGauss積分に似た表示を用いた. □

2.4.3 方法3: y = tx と変数変換する方法

$y = tx$ とおくと, $dy = x\,dt$ より,

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1}\,dy\right) dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(1+t)x} x^{p+q-1} t^{q-1}\,dt\right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(1+t)x} x^{p+q-1}\,dx\right) t^{q-1}\,dt = \int_0^\infty \frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} t^{q-1}\,dt \\ &= \Gamma(p+q)\int_0^\infty \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \Gamma(p+q)B(p,q).\end{aligned}$$

3つ目の等号で積分順序を交換し, 4つ目の等号で $s, c > 0$ についてよく使われる公式($x = y/c$ と置けば得られる公式)

$$\int_0^\infty e^{-cx} x^{s-1}\,dx = \frac{\Gamma(s)}{c^s}$$

を使い, 最後の等号でベータ函数の次の表示の仕方を用いた:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$$

この公式は積分変数を $x = \dfrac{1}{1+t}$ と置換すれば得られる. $x = \dfrac{t}{1+t}$ と置換すれば p, q を交換した公式が得られる.

ベータ函数に関するその公式を知っていれば, ガンマ函数とベータ函数の関係を導くにはこの方法が簡単かもしれない.

$y = tx$ の t は直線の傾きという意味を持っている. xy 平面の第一象限の点を (x, y) で指定していたのを, $(x, y) = (x, tx)$ と直線の傾き t と x で指定するようにしたことが, 上の計算で採用した方法である. この方法はJacobianが出て来る二重積分の積分変数の変換を避けたい場合に便利である.

2.4.4 ベータ函数とガンマ函数の関係の簡単な計算問題への応用

問題: ベータ函数とガンマ函数の関係を用いて $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を証明せよ.

解答例:

$$\Gamma(1/2)^2 = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = B(1/2, 1/2) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2\cdot 1/2-1}(\sin\theta)^{2\cdot 1/2-1}\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi.$$

1つ目の等号で $\Gamma(1) = 1$ を使い, 2つ目の等号でベータ函数とガンマ函数の関係を用い, 3つ目の等号でベータ函数の三角函数を用いた表示を使った. ゆえに $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. □

注意: この問題の解答例はGauss積分の公式の別証明 $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を与える. □

問題: 次の積分を計算せよ:

$$A = \int_0^1 x^5(1-x^2)^{3/2}\,dx.$$

解答例: $x = t^{1/2}$ と置換すると $dx = \dfrac{1}{2}t^{-1/2}\,dt$ なので,

$$A = \int_0^1 t^{5/2}(1-t)^{3/2}\,\frac{1}{2}t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^2(1-t)^{3/2}\,dt = \frac{1}{2}B(3, 5/2) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(5/2)}{2\Gamma(3+5/2)}.$$

3つ目の等号で $2 = 3-1$, $3/2 = 5/2-1$ とみなしてからベータ函数の表示を得ていることに注意せよ. このステップでよく間違う.

一般に非負の整数 n について

$$\Gamma(n+1) = n!, \qquad \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+n)} = \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}$$

なので,

$$\Gamma(3) = 2! = 2, \qquad \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(3+5/2)} = \frac{1}{(5/2)(7/2)(9/2)} = \frac{2^3}{5\cdot 7\cdot 9}.$$

したがって

$$A = \frac{2}{2}\frac{2^3}{5\cdot 7\cdot 9} = \frac{8}{315}. \qquad \square$$

In [14]:
```
x = symbols("x", real=true)
integrate(x^5*(1-x^2)^(Sym(3)/2), (x,0,1))
```

Out[14]: $\frac{8}{315}$

2.4.5 B(s, 1/2)の級数展開

$\binom{-1/2}{n}$ は次を満たしている:

$$\binom{-1/2}{n}(-x)^n = \frac{(1/2)(3/2)\cdots((2n-1)/2)}{n!}x^n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n.$$

ゆえに, $|x| < 1$ のとき,

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n.$$

したがって,

$$B(s,1/2) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{-1/2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\int_0^1 x^{s+n-1}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\frac{1}{s+n}.$$

例えば, $s = 1/2$ のとき, $B(1/2,1/2) = \Gamma(1/2)^2 = \pi$ なので, 両辺を2で割ると,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}B(1/2,1/2) = \frac{\pi}{2}.$$

このような公式はベータ函数について知らないと驚くべき公式に見えてしまうが, ベータ函数について知っていれば単に二項展開をベータ函数の被積分函数に適用しただけの公式に過ぎない.

2.5 ガンマ函数の無限積表示

問題(Gaussの公式): ベータ函数とガンマ函数の関係を用いて, 次の公式を示せ.

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

解答例: 右辺をベータ函数と表示することを考える. 以下では n は正の整数であるとし, $s > 0$ と仮定する. ベータ函数とガンマ函数の函数等式および $\Gamma(n+1) = n!$ より,

$$B(s,n+1) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(n+1)}{\Gamma(s+n+1)} = \frac{n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

ゆえに

$$n^s B(s,n+1) = \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

左辺を $n\to\infty$ での極限を取り易い形に変形しよう. $x = t/n$ と置換することによって, $n\to\infty$ のとき

$$\begin{aligned} n^s B(s,n+1) &= n^s\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^n\,dt \\ &= \int_0^n t^{s-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt \to \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(s). \end{aligned}$$

以上をまとめると示したい結果が得られる. $\square$

問題: 上の解答例中で極限と積分の順序を交換した. その部分の議論を指数函数に関する不等式

$$\left(1+\frac{t}{a}\right)^a \leqq e^t \leqq \left(1-\frac{t}{b}\right)^{-b} \qquad (-a<t<b,\quad a,b>0) \tag{1}$$

と $\left(1+\frac{t}{a}\right)^a$, $\left(1-\frac{t}{a}\right)^{-a}$ がそれぞれ a,b について単調増加, 単調減少することを用いて正当化せよ.

解答例: 問題文の中で与えられた不等式の全体の逆元を取り, $a=m$, $b=n$ とおくと,

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqq e^{-t} \leqq \left(1+\frac{t}{m}\right)^{-m} \qquad (-m<t<n) \tag{2}$$

となり, $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$, $\left(1+\frac{t}{m}\right)^{-m}$ はそれぞれ n,m について単調増加, 単調減少する. ベータ函数の表式

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx$$

において, それぞれ $x=t/n$, $x=t/m$ とおくことによって, $s,n>0$, $m>s$ のとき,

$$n^sB(s,n+1)=\int_0^n t^{s-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt, \qquad m^sB(s,m-s)=\int_0^n t^{s-1}\left(1+\frac{t}{m}\right)^m dt$$

が得られ, それぞれ, n, m について単調増加, 単調減少することがわかる. これらと $\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$ を比較すると,

$$n^sB(s,n+1)\leqq\Gamma(s)\leqq m^sB(s,m-s). \tag{$*$}$$

$n^sB(s,n+1)$, $m^sB(s,m-s)$ はそれぞれ n, m について単調増加, 単調減少するので, どちらも $n,m\to\infty$ で収束する. そして, $m=n+s+1$ とおくと,

$$\frac{m^sB(s,m-s)}{n^sB(s,n+1)}=\frac{(n+s+1)^sB(s,n+1)}{n^sB(s,n+1)}=\left(1+\frac{s+1}{n}\right)^s\to 1 \quad (n\to\infty)$$

なので, $n^sB(s,n+1)$, $m^sB(s,m-s)$ は $n,m\to\infty$ で同じ値に収束する. これと不等式($*$)を合わせると, $n^sB(s,n+1)$, $m^sB(s,m-s)$ は $n,m\to\infty$ で $\Gamma(s)$ に収束することがわかる. □

注意: 不等式(1),(2)と a,b,m,n に関する単調性は極限で指数函数が現われる結果を初等的に正当化するために非常に便利である. □

問題(Weierstrassの公式): 上の問題の結果を用いて, 次の公式を示せ.

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=e^{\gamma s}s\prod_{n=1}^\infty\left[\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}\right]. \tag{$*$}$$

ここで γ はEuler定数である:

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\log n\right)=0.5772\cdots$$

解答例:

$$\begin{aligned}&\frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n^sn!}\\&=s(1+s)\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s\log n}\\&=s(1+s)e^{-s}\left(1+\frac{s}{2}\right)e^{-s/2}\cdots\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}e^{s\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)}\end{aligned}$$

であるから, 公式($*$)を得る. □

注意:

$$\begin{aligned}\log\left[\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}\right]&=\log\left(1+\frac{s}{n}\right)-\frac{s}{n}\\&=\frac{s}{n}-\frac{s^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)-\frac{s}{n}\\&=-\frac{s^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

なので

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}\right]=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

となり, この無限積は任意の複素数 s について収束する. したがって, Weierstrassの公式は $1/\Gamma(s)$ のすべての複素数 s への自然な拡張を与える. □

2.6 sinとガンマ函数の関係

sinの無限積表示と Euler's reflection formulaの証明についてはノート「12 Fourier解析 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb)」のガンマ函数とsinの関係の節も参照せよ. 以下ではsinの奇数倍角の公式を用いた証明を紹介する.

2.6.1 sinの無限積表示

sinの無限積表示

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi}=s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)$$

を導出したい. この公式は正弦函数の奇数倍角の公式の極限としても導出されることを以下で説明しよう. (他にも様々な経路での証明がある.)

非負の整数 n に関する $e^{inx}=(e^{ix})^n$ の右辺に $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を代入して二項定理を適用し, 両辺の虚部を取ると次が得られる:

$$\sin(nx)=\sum_{0\leqq k<n/2}(-1)^k\binom{n}{2k+1}(\cos x)^{n-2k-1}(\sin x)^{2k+1}.$$

$(\cos x)^2=1-(\sin x)^2$ より, n が奇数ならば $\sin(nx)$ は $\sin x$ の n 次多項式で表わされることがわかる.

以下では, m は非負の整数であるとし, $n=2m+1$ とおき, $\sin(nx)=\sin((2m+1)x)$ について考える. $\sin((2m+1)x)$ は $\sin x$ の $2m+1$ 次の多項式で表わされ, 周期 $\frac{2\pi}{2m+1}$ を持ち,

$$x_k=\frac{k\pi}{2m+1},\qquad k=0,\pm1,\dots,\pm m$$

で 0 になり,

$$-\pi/2<x_{-m}<x_{-m+1}<\cdots<x_{m-1}<x_m<\pi/2$$

なので, $\sin x_k$ は互いに異なる. これで $\sin((2m+1)x)$ の互いに異なる $(2m+1)$ 個の零点 $\sin x_k$ が判明したことになる. $\sin((2m+1)x)$ は $\sin x$ の $2m+1$ 次の多項式で表われるので, 0 でないある定数 C が存在して,

$$\sin((2m+1)x)=C\sin x\prod_{k=1}^{m}\left[\left(\sin x-\sin\frac{k\pi}{2m+1}\right)\left(\sin x+\sin\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right].$$

両辺を x で割って, $x\to0$ の極限を取ると,

$$2m+1=C\prod_{k=1}^{m}\left[\left(-\sin\frac{k\pi}{2m+1}\right)\left(\sin\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right].$$

したがって,

$$\frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}=\sin x\prod_{k=1}^{m}\left[\left(1-\frac{\sin x}{\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)\left(1+\frac{\sin x}{\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)\right].$$

これで, sin の奇数倍角の公式の積表示が得られた. これに $x=\frac{\pi s}{2m+1}$ を代入し, 両辺に $\frac{2m+1}{\pi}$ をかけると

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi}=\frac{\sin\frac{\pi s}{2m+1}}{\frac{\pi}{2m+1}}\prod_{k=1}^{m}\left[\left(1-\frac{\sin\frac{\pi s}{2m+1}}{\sin\frac{\pi k}{2m+1}}\right)\left(1+\frac{\sin\frac{\pi s}{2m+1}}{\sin\frac{\pi k}{2m+1}}\right)\right].$$

$m\to\infty$ の極限を取ると正弦函数の無限積表示

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi}=s\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{s}{k}\right)\left(1+\frac{s}{k}\right)\right]=s\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right).$$

が得られる. ここで以下を使った: $t \to 0$ のとき

$$\frac{\sin(at)}{t} \to a, \qquad \frac{\sin(at)}{\sin(bt)} \to \frac{a}{b}.$$

以上のようにsinの無限積表示はsinの奇数倍角の公式の極限として導出される.

2.6.2 Euler's reflection formula

ガンマ函数の無限積表示より

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s n!}{s(1+s)(2+s)\cdots(n+s)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{s\,(1+s)\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{n}\right)},$$
$$\Gamma(1-s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-s} n!}{(1-s)(2-s)\cdots(n+1-s)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-s}}{(1-s)\left(1-\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{s}{n}\right)\left(1+\frac{1-s}{n}\right)},$$

ゆえに, sin の無限積表示も使うと,

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \lim_{n\to\infty} s \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1+\frac{s}{k}\right)\left(1-\frac{s}{k}\right)\right) = s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi}.$$

これで次の公式が得られた:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

これは **Euler's reflection formula** と呼ばれる.

2.7 Wallisの公式

互いに同じ深さにある次の2つの公式の両方を**Wallisの公式**と呼ぶ.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

問題: 前者のWallisの公式から後者のWallisの公式を導け.

解答例: 前者のWallisの公式と

$$1\cdot 3\cdots(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

より,

$$\frac{2}{\pi} \sim \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)\times 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n)\times 2\cdot 4\cdots(2n)} = \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2(2n+1) = \left(\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right)^2(2n+1).$$

ゆえに,

$$\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right)^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

全体の平方根を取れば, 後者のWallisの公式が得られる. □

問題: 後者のWallisの公式から前者のWallisの公式を導け.

解答例: 前者のWallisの公式の無限積の最初の N 個の因子の積は

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2^{2N}(N!)^2}{(1\cdot 3\cdots(2N-1))}\frac{1}{2N+1} = \left(\frac{2^{2N}(N!)^2}{(2N)!}\right)\frac{1}{2N+1}$$

であり, 後者のWallisの公式より, $N \to \infty$ において,

$$\left(\frac{2^{2N}(N!)^2}{(2N)!}\right)\frac{1}{2N+1} \sim \frac{\pi N}{2N+1} \sim \frac{\pi}{2}$$

となる. ゆえに

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}.$$

これで後者のWallisの公式から前者のWallisの公式を導けた. □

問題(Wallisの公式の証明1): sin の無限積表示

$$s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)=\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} \tag{1}$$

を用いて, 次の公式を証明せよ:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

解答例: (1)に $s=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すれば(2)がただちに得られる. □

In [15]:
```
n = symbols("n")
1/factor(1-1/(2n)^2)
```

Out[15]:

$$\frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

問題(Wallisの公式の証明2): 前節のガンマ函数のGaussの公式の問題の解答例の中で次を示した:

$$\lim_{n\to\infty}n^sB(s,n+1)=\Gamma(s) \tag{1}$$

これは n が整数以外の実数を動いても成立している. この公式を用いて次の公式を証明せよ.

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

解答例: ベータ函数とガンマ函数の関係とガンマ函数の特殊値に関する結果より,

$$\begin{aligned}B(1/2,n+1/2)&=\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)}=\pi\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)},\\ B(1/2,n+1)&=\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+1/2)}=2\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{3\cdot5\cdots(2n+1)},\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\frac{B(1/2,n+1)}{B(1/2,n+1/2)}=\frac{2}{\pi}\frac{2\cdot4\cdots(2n)\times2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)\times3\cdot5\cdots(2n+1)}=\frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)}$$

一方,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+a-1)^s}{(n+b-1)^s}=1$$

と公式(1)より,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B(s,n+a)}{B(s,n+b)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+a-1)^sB(s,n+a)}{(n+b-1)^sB(s,n+b)}=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s)}=1$$

この等式の $s=1/2,1/2,b=1$ の場合と上の結果を合わせると, (2)が得られる. □

注意: $B(p,q)=2\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta$ より,

$$B(1/2,n+1/2)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\theta\,d\theta,\qquad B(1/2,n+1)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}\theta\,d\theta$$

であることに注意せよ. 巷でよく見るWallisの公式の証明は右辺のsinのべきの積分を部分積分によって計算することによって行われている. その正体はベータ函数の特殊値であり, 結局のところ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{B(s,n+a+1)}{B(s,n+b+1)}=1$ の特別な場合として, Wallisの公式は得られているのである. □

問題(Wallisの公式からGauss積分の公式を出す方法): 問題(Wallisの公式の証明2)の解答例を続けることによって, Gauss積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ を計算してみよ.

解答例: 上の解答例より,

$$n^{1/2}B(1/2, n+1/2)\cdot n^{1/2}B(1/2, n+1) = \frac{2n\pi}{2n+1}.$$

左辺は $n \to \infty$ で $\Gamma(1/2)^2$ に収束し, 右辺は π に収束する. このことから $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ であることがわかる. □

2.8 Legendre's duplication formula

問題(Legendre's duplication formula): 次を示せ:

$$\Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = 2^{1-2s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2s).$$

解答例1: 次の公式を示そう:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{s-1}\,dx = 2^{2s-1}B(s,s) = B(1/2, s).$$

まず, $(1-x^2)^{s-1} = (1-x)^{s-1}(1+x)^{s-1}$ であることに注意し, $x = 1-2t$ とおくと,

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{s-1}\,dx = 2^{2s-1}\int_0^1 t^{s-1}(1-t)^{s-1}\,dt = 2^{2s-1}B(s,s).$$

以上とは別に, 偶函数の積分であることを使って, $x = \sqrt{t}$ とおくと,

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{s-1}\,dx = 2\int_0^1(1-x^2)^{s-1}\,dx = \int_0^1(1-t)^{s-1}t^{-1/2}\,dt = B(1/2, s).$$

これで上の公式が示された. $B(1/2, s) = 2^{2s-1}B(s,s)$ の両辺をガンマ函数を使って表すと,

$$2^{2s-1}\frac{\Gamma(s)\Gamma(s)}{\Gamma(2s)} = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1/2)}{\Gamma(s+1/2)}$$

ゆえに $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を使うと,

$$\Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = 2^{1-2s}\Gamma(1/2)\Gamma(2s) = 2^{1-2s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2s). \square$$

解答例2: ガンマ函数の函数等式とこのノートの下の方で証明されているStirlingの近似公式を使っても証明できる. 実は Legendre's duplication formula を Gauss's multiplication formula に一般化しても証明の方針は完全に同様であるので, 一般化した場合の証明のみを書いておくことにする. このノートの下の方を見よ. □

ガンマ函数についてはさらに

- 黒木玄, [ガンマ分布の中心極限定理とStirlingの公式 (https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf)](https://genkuroki.github.io/documents/20160501StirlingFormula.pdf)

の第8節を参照せよ.

2.9 Lerchの定理とゼータ正規化積

2.9.1 Lerchの定理 (Hurwitzのゼータ函数とガンマ函数の関係)

Lerchの定理: Hurwitzのゼータ函数 $\zeta(s,x)$ からガンマ函数が

$$\zeta_s(0,x) = \log\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\,\exp(\zeta_s(0,x))$$

によって得られる. ここで $\zeta_s(s,x)$ は $\zeta(s,x)$ の s に関する偏導函数である.

証明: $F(x) = \zeta_s(0,x) - \log\Gamma(x)$ とおく. $F(x) = -\log\sqrt{2\pi}$ であることを示せば十分である.

(1) $(\zeta_s(0,x))'' = (\log\Gamma(x))''$ を示そう. ここで $'$ は x による微分を表わす. まずHurwitzのゼータ函数

$$\zeta(s,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^s}$$

については

$$\zeta_x(s,x)=-s\zeta(s+1,x)$$

が成立しているので,

$$\zeta_{xx}(s,x)=s(s+1)\zeta(s+2,x).$$

これより,

$$(\zeta_s(0,x))''=\zeta_{xxs}(0,x)=\zeta(2,x).$$

一方, ガンマ函数

$$\Gamma(x)=\lim_{\to\infty}\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

については,

$$\begin{aligned}
\log\Gamma(x)&=\lim_{\to\infty}(\log n!+n\log x-\log x-\log(x+1)-\cdots-\log(x+n)),\\
(\log\Gamma(x))'&=\lim_{\to\infty}\left(\log n-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\cdots-\frac{1}{x+n}\right),\\
(\log\Gamma(x))''&=\lim_{\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(x+n)^2}\right)=\zeta(2,x).
\end{aligned}$$

これで $(\zeta_s(0,x))''=(\log\Gamma(x))''$ が示された.

(2) 上の結果より, $F(x)=\zeta_s(0,x)-\log\Gamma(x)$ は x の一次函数である.

(3) $\zeta_s(0,x)$ と $\log\Gamma(x)$ がどちらも同一の函数等式 $f(x+1)=f(x)+\log x$ を満たすことを示そう.

$$\begin{aligned}
&\zeta(s,x+1)=\zeta(s,x)-\frac{1}{x^s},\qquad\therefore\quad\zeta_s(0,x+1)=\zeta_s(0,x)+\log x.\\
&\log\Gamma(x+1)=\log(x\Gamma(x))=\log\Gamma(x)+\log x.
\end{aligned}$$

(4) $F(x)=\zeta_s(0,x)-\log\Gamma(x)$ は x の一次函数だったので, 上の結果より $F(x)$ は定数になる.

(5) $\zeta_s(0,1/2)=-\log\sqrt{2}$ を示そう.

$$\begin{aligned}
\zeta(s)-2^{-s}\zeta(s)&=\left(\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots\right)\\
&=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^s}
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
&\zeta(s,1/2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1/2)^s}=2^s\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^s}=2^s(\zeta(s)-2^{-s}\zeta(s))=(2^s-1)\zeta(s),\\
&\therefore\quad\zeta_s(0,1/2)=\zeta(0)\log 2=-\frac{1}{2}\log 2=-\log\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

(6) $\log\Gamma(1/2)=\log\sqrt{\pi}$ なので, 上の結果より, $F(x)=-\log\sqrt{2\pi}$ であることがわかる. □

2.9.2 ゼータ正規化積

数列 a_n に対して,

$$f(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n^s}$$

とおくとき,

$$f'(0)=-\sum_{n=1}^{N}\log a_n$$

なので,

$$\exp(-f'(0)) = \prod_{n=1}^{N} a_n$$

が成立している. もしも $N = \infty$ のときの $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散していても, $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^s}$ の解析接続によって, 左辺の $\exp(-f'(0))$ は well-definedになる可能性がある. そのとき, $\exp(-f'(0))$ を

$$\exp(-f'(0)) = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

と書き, a_n 達の**ゼータ正規化積**と呼ぶ.

例えば $x, x+1, x+2, x+3, \ldots$ のゼータ正規化積はLerchの定理より, $\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)}$ になる. 特に $x = 1$ のときの $1, 2, 3, 4, \ldots$ のゼータ正規化積は $\sqrt{2\pi}$ になる:

$$"1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots" = \prod_{n=1}^{\infty} n = \exp(-\zeta'(0)) = \sqrt{2\pi}.$$

これは

$$"1 + 2 + 3 + 4 + \cdots" = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

の積バージョンである.

3 Stirlingの公式とLaplaceの方法

一般に数列 a_n, b_n について

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

が成立するとき,

$$a_n \sim b_n$$

と書くことにする.

3.1 Stirlingの公式

Stirlingの(近似)公式: $n \to \infty$ のとき,

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

さらに, 両辺の対数を取ることによって, $n \to \infty$ のとき,

$$\log n! = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + \log \sqrt{2\pi} + o(1).$$

Stirlingの公式の「物理学的」もしくは「情報理論的」な応用については

- 黒木玄, Kullback-Leibler情報量とSanovの定理 (https://genkuroki.github.io/documents/20160616KullbackLeibler.pdf)

の第1節を参照せよ.

Stirlingの公式の証明:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx$$

で $x = n + \sqrt{n}\, y = n(1 + y/\sqrt{n})$ と置換すると,

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\sqrt{n}\, y} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n dy = n^n e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} f_n(y) \, dy.$$

ここで, 被積分函数を $f_n(y)$ と書いた. そのとき $n \to \infty$ で

$$\log f_n(y) = -\sqrt{n}\,y + n\log\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) = -\sqrt{n}\,y + n\left(\frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)$$
$$= -\frac{y^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to -\frac{y^2}{2}.$$

すなわち $f_n(y) \to e^{-y^2/2}$ となる. ゆえに

$$\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} f_n(y)\,dy \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy = 1.$$

最後の等号でGauss積分の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/a}\,dy = \sqrt{a\pi}$ を用いた. □

Stirlingの公式の証明の解説: 上の証明のポイントは $x = n + \sqrt{n}\,y$ という積分変数変換である. この変数変換の「正体」は $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$ の被積分関数 $f(x) = e^{-x}x^n$ のグラフを描いてみれば見当がつく.

$g(x) = \log f(x) = n\log x - x$ の導函数は $g'(x) = n/x - 1$ は x について単調減少であり, $x = n$ で 0 になる. ゆえに $g(x) = \log f(x)$ は $x = n$ で最大になる. そこで $x = n$ における $g(x) = \log f(x)$ のTaylor展開を求めてみよう. $g''(x) = -n/x^2$, $g'''(x) = 2n/x^3$ なので, $g(n) = n\log n - n$, $g'(n) = 0$, $g''(n) = -1/n$, $g'''(n) = 2/n^2$ なので,

$$g(x) = n\log n - n - \frac{(x-n)^2}{2n} + \frac{(x-n)^3}{3\,n^2} + \cdots$$

これの2次の項が $-y^2/2$ になるような変数変換がちょうど $x = n + \sqrt{n}\,y$ になっている. これが上の証明で用いた変数変換の「正体」である. □

In [16]:

```
# y = f(x) = e^{-x} x^n / (n^n * e^{-n}) のグラフは n が大きなとき,
# Gauss近似 y = e^{-(x-n)^2/(2n)} のグラフにほぼ一致する.

f(n,x) = e^(-x + n*log(x) - (n*log(n) - n))
g(n,x) = e^(-(x-n)^2/(2n))
PP = []
for n in [10, 30, 100, 300]
    x = 0:2.5n/400:2.5n
    n ≤ 20 && (x = 0:3n/400:3n)
    P = plot()
    plot!(title="n = $n", titlefontsize=9)
    plot!(x, f.(n,x), label="")
    plot!(x, g.(n,x), label="Gaussian")
    push!(PP, P)
end

plot(PP[1:2]..., size=(700, 200))
```

Out[16]:

In [17]:
```
plot(PP[3:4]..., size=(700, 200))
```

Out[17]:

注意(ガンマ函数のStirlingの近似公式): 上の証明で n が整数であることは使っていない. ゆえに正の実数 s について

$$\Gamma(s+1) \sim s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s} \quad (s \to \infty)$$

が証明されている. これの両辺を s で割ると,

$$\Gamma(s) \sim s^s e^{-s} s^{-1/2}\sqrt{2\pi} \quad (s \to \infty)$$

が得られる. これらをも**Stirlingの近似公式**と呼ぶ. □

Stirlingの公式の重要な応用については

- 黒木玄, [11 Kullback-Leibler情報量 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/11%20Kullback-Leibler%20information.ipynb)](http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/11%20Kullback-Leibler%20information.ipynb)

も参照せよ. 「Stirlingの公式」とその応用としての「KL情報量に関するSanovの定理」についてはできるだけ早く理解しておいた方がよい. □

問題: $n = 1, 2, \dots, 10$ について Stirling の公式の相対誤差

$$\frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} - 1$$

を求めよ.

解答例: 以下のセルを参照せよ. $n = 5$ で相対誤差は2%を切っている. □

In [18]:
```
f(n) = factorial(n)
g(n) = n^n * exp(-n) * √(2π*n)
[(n, f(n), g(n), g(n)/f(n)-1) for n in 1:10]
```

Out[18]:
```
10-element Array{Tuple{Int64,Int64,Float64,Float64},1}:
 (1, 1, 0.922137, -0.077863)
 (2, 2, 1.919, -0.0404978)
 (3, 6, 5.83621, -0.0272984)
 (4, 24, 23.5062, -0.020576)
 (5, 120, 118.019, -0.0165069)
 (6, 720, 710.078, -0.0137803)
 (7, 5040, 4980.4, -0.0118262)
 (8, 40320, 39902.4, -0.0103573)
 (9, 362880, 3.59537e5, -0.00921276)
 (10, 3628800, 3.5987e6, -0.00829596)
```

参考: 上の計算を見れば, $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ は $n!$ よりも微小に小さいことがわかる. その分を補正したより精密な近似式

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

が成立している. (実際には $O(1/n^2)$ の部分についてもっと詳しいことがわかる.)

$1/(12n)$ で補正した近似式の相対誤差は $n = 1$ ですでに0.1%程度と非常に小さくなる. 次のセルを見よ. □

In [19]:
```
f(n) = factorial(n)
g1(n) = n^n * exp(-n) * √(2π*n) * (1+1/(12n))
[(n, f(n), g1(n), g1(n)/f(n)-1) for n in 1:10]
```

Out[19]:
```
10-element Array{Tuple{Int64,Int64,Float64,Float64},1}:
 (1, 1, 0.998982, -0.00101824)
 (2, 2, 1.99896, -0.000518567)
 (3, 6, 5.99833, -0.000278913)
 (4, 24, 23.9959, -0.00017137)
 (5, 120, 119.986, -0.000115383)
 (6, 720, 719.94, -8.28033e-5)
 (7, 5040, 5039.69, -6.22504e-5)
 (8, 40320, 40318.0, -4.84771e-5)
 (9, 362880, 3.62866e5, -3.88063e-5)
 (10, 3628800, 3.62868e6, -3.17601e-5)
```

3.2 Wallisの公式のStirlingの公式を使った証明

問題(Wallisの公式): Stirlingの公式を用いて次を示せ:

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

解答例:

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \qquad \square$$

注意: この形のWallisの公式は1次元の単純ランダムウォークの逆正弦法則に関係している.

- 黒木玄, 単純ランダムウォークの逆正弦法則 (https://genkuroki.github.io/documents/#2016-11-02) (手描きのノートのPDF (https://genkuroki.github.io/documents/20161102ArcSineLawForSimpleRandomWalks.pdf))

を参照せよ. 特に手描きのノートのPDFファイルの12頁以降にまとまった解説がある. 1次元の単純ランダムウォークの場合には高校数学レベルの組み合わせ論的な議論とWallisの公式から逆正弦法則を導くことができる. 1次元の一般ランダムウォークの場合にはTauber型定理を使ってWallisの公式に対応する漸近挙動を証明することになる. □

In [20]:
```
# Wallisの公式より
#
# [ 2^{2n} (n!)^2 / ((2n)! √n) ]^2 ---→ π
#
# 以下はこれの数値的確認
#
# log n! を log lgamma(n+1) で計算している. ここで lgamma(x) = log(Γ(x)).
# lgamma(x) は対数ガンマ函数を巨大な x についても計算してくれる.

f(n) = exp((2n)*log(typeof(n)(2)) + 2lgamma(n+1) - lgamma(2n+1) - log(n)/2)^2
Wallis_pi = f(big"10.0"^40)
Exact__pi = big(π)
@show Wallis_pi
@show Exact__pi
Wallis_pi - Exact__pi
```

```
Wallis_pi = 3.141592653589793238462643383279502801125109350089364824499553486083334032 19364
Exact__pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286198
```

Out[20]:
```
-8.307206004928574099647539110622448237409255782069327815244440488293374992724481e-35
```

3.3 Gauss's multiplication formula

問題(Gauss's multiplication formula): 次を示せ: 正の整数 n に対して,

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(s+\frac{n-1}{n}\right) = n^{1/2-ns}(2\pi)^{(n-1)/2}\Gamma(ns).$$

解答例: 函数 $f(s)$ を次のように定める:

$$f(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(s+\frac{n-1}{n}\right)}{n^{-ns}\Gamma(ns)}$$

$f(s) = n^{1/2}(2\pi)^{(n-1)/2}$ を示せばよい.

ガンマ函数の函数等式だけを使って, $f(s+1) = f(s)$ を示せる:

$$f(s+1) = f(s)\frac{s\left(s+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(s+\frac{n-1}{n}\right)}{n^{-n}(ns+n-1)\cdots(ns+1)(ns)} = f(s).$$

このノートの下の方で証明されているStirlingの近似公式

$$\Gamma(s) \sim s^s e^{-s} s^{-1/2}\sqrt{2\pi} \quad (s \to \infty)$$

を使って, $s \to \infty$ のときの $f(s)$ の極限を求めよう. $s \to \infty$ のとき, $\left(1+\dfrac{a}{s}\right)^s \to e^a$ なので, $s \to \infty$ において,

$$\begin{aligned}\Gamma(s+a) &\sim (s+a)^{s+a-1/2}e^{-s-a}\sqrt{2\pi}\\ &= s^{s+a-1/2}e^{-s}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{a}{s}\right)^{s+a-1/2}e^{-a}\\ &\sim s^{s+a-1/2}e^{-s}\sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$

となる. ゆえに, $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{2}$ なので, $s \to \infty$ において,

$$\begin{aligned}&\Gamma(s) \sim s^{s-1/2}e^{-s}\sqrt{2\pi},\\ &\Gamma\left(s+\frac{1}{n}\right) \sim s^{s+1/n-1/2}e^{-s}\sqrt{2\pi},\\ &\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\Gamma\left(s+\frac{n-1}{n}\right) \sim s^{s+(n-1)/n-1/2}e^{-s}\sqrt{2\pi}\\ &\therefore\quad \Gamma(s)\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(s+\frac{n-1}{n}\right) \sim s^{ns-1/2}e^{-ns}(2\pi)^{n/2}\\ &n^{-ns}\Gamma(ns) \sim n^{-ns}(ns)^{ns-1/2}e^{-ns}\sqrt{2\pi} = n^{-1/2}s^{ns-1/2}e^{-ns}(2\pi)^{1/2}\end{aligned}$$

となり,

$$f(s) \sim \frac{s^{ns-1/2}e^{-ns}(2\pi)^{n/2}}{n^{-1/2}s^{ns-1/2}e^{-ns}(2\pi)^{1/2}} = n^{1/2}(2\pi)^{(n-1)/2}.$$

ゆえに整数 N について, $f(s+N) = f(s)$ なので, $N \to \infty$ のとき $f(s) = f(s+N) \to n^{1/2}(2\pi)^{(n-1)/2}$ となる. これで $f(s) = 2^{1/2}(2\pi)^{(n-1)/2}$ が示された. □

問題: Gauss's multiplication formula の $n = 2$ の場合である Legendre's duplication formula は定積分の計算だけで証明できるのであった. 上の解答例は本質的にStirlingの近似公式を使っている. Gauss's multiplication formula にも定積分の計算だけで証明する方法がないだろうか. 以下の方針で Gauss's multiplication formula を証明せよ. ただし, (3)の証明には Euler's reflection formula は使ってよいことにする.

$t > 0$ に対する $n-1$ 重積分 $I(t)$ を次のように定める:

$$I(t) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(t^n/(x_2\cdots x_n)+x_2+\cdots+x_n)}x_2^{-(n-1)/n}x_3^{-(n-2)/n}\cdots x_n^{-1/n}\,dx_2\cdots dx_n.$$

以下を示せ:

(1) $I(t) = \Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(\dfrac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\dfrac{n-1}{n}\right)e^{-nt}.$

(2) $\Gamma(s)\Gamma\left(s+\dfrac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(s+\dfrac{n-1}{n}\right) = n^{1-ns}I(0)\Gamma(ns) = n^{1-ns}\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(\dfrac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\Gamma(ns).$

(3) $I(0) = \Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(\dfrac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2}n^{-1/2}.$

注意: (1), (2) の方針の証明は

- Andrews, G.E., Askey,R., and Roy, R. Special functions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 71, Cambridge University Press, 1999, 2000, 681 pages.

のpp.24-25で解説されている. その方法は

- Liouville, J. Sur un théorème relatif à l'intégrale eulérienne de seconde espèce. Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 157-160. PDF (http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA_1855_1_20_A15_0.pdf)

の方法の再構成ということらしい.

解答例: (1) $t=0$ のとき, $I(0)$ の積分は変数分離形になって,

$$I(0)=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

となることがすぐにわかる. $I(t)$ を t で微分して, $x_2=\dfrac{t^n}{x_3\cdots x_n x_1}$ によって積分変数 x_2 を積分変数 x_1 に変換すると,

$$\begin{aligned}
I'(t)&=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-(t^n/(x_2\cdots x_n)+x_2+\cdots+x_n)}\frac{-nt^{n-1}}{x_2\cdots x_n}x_2^{-(n-1)/n}x_3^{-(n-2)/n}\cdots x_n^{-1/n}\,dx_2\cdots dx_n\\
&=-n\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-(t^n/(x_2\cdots x_n)+x_2+\cdots+x_n)}t^{n-1}x_2^{-(n-1)/n-1}x_3^{-(n-2)/n-1}\cdots x_n^{-1/n-1}\,dx_2\cdots dx_n\\
&=-n\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-(x_1+t^n/(x_3\cdots x_n x_1)+x_3+\cdots+x_n)}\\
&\qquad\times t^{n-1}\left(\frac{t^n}{x_3\cdots x_n x_1}\right)^{-(2n-1)/n}x_3^{-(2n-2)/n}\cdots x_n^{-(n+1)/n}\frac{t^n}{x_3\cdots x_n x_1^2}\,dx_3\cdots dx_n\,dx_1\\
&=-n\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-(x_1+t^n/(x_3\cdots x_n x_1)+x_3+\cdots+x_n)}x_3^{-(n-1)/n}\cdots x_n^{-2/n}x_1^{-1/n}\,dx_3\cdots dx_n\,dx_1\\
&=-nI(t)
\end{aligned}$$

ゆえに $I(t)=I(0)e^{-nt}$. これで(1)が示された.

(2) 左辺をLHSと書き, $x_1=\dfrac{t^n}{x_2\cdots x_n}$ とおくと,

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS}&=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-(x_1+\cdots+x_n)}x_1^{s-1}x_2^{s-(n-1)/n}\cdots x_n^{s-1/n}\,dx_1\cdots dx_n\\
&=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-(t^n/(x_2\cdots x_n)+x_2\cdots+x_n)}\left(\frac{t^n}{x_2\cdots x_n}\right)^{s-1}x_2^{s-(n-1)/n}\cdots x_n^{s-1/n}\frac{nt^{n-1}}{x_2\cdots x_n}\,dt\,dx_2\cdots dx_n\\
&=n\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-(t^n/(x_2\cdots x_n)+x_2\cdots+x_n)}x_2^{-(n-1)/n}\cdots x_n^{-1/n}t^{ns-1}\,dx_2\cdots dx_n\,dt\\
&=n\int_0^\infty I(t)t^{ns-1}\,dt=nI(0)\int_0^\infty e^{-nt}t^{ns-1}\,dt=n^{1-ns}I(0)\Gamma(ns).
\end{aligned}$$

これで(2)が示された.

(3) $I(0)=(2\pi)^{(n-1)/2}n^{-1/2}$ を示したい. そのためには $I(0)^2=(2\pi)^{n-1}n^{-1}$ を示せばよい. Euler's reflection formula より, $\Gamma\left(\dfrac{k}{n}\right)\Gamma\left(\dfrac{n-k}{n}\right)=\dfrac{\pi}{\sin(k\pi/n)}$ なので

$$I(0)^2=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\pi}{\sin(k\pi/n)}=\frac{\pi^{n-1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}.$$

そして,

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{e^{\pi ik/n}-e^{-\pi ik/n}}{2i}=\frac{e^{\pi i(1+2+\cdots+(n-1))/n}}{2^{n-1}i^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{-2\pi ik/n})=\frac{1}{2^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{-2\pi ik/n})$$

であり,

$$\frac{x^n-1}{x-1}=\prod_{k=1}^{n-1}(x-e^{-2\pi ik/n})$$

において $x\to 1$ とすると $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{-2\pi ik/n})=n$ が得られる. 以上を合わせると

$$I(0)^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}.$$

両辺の平方根を取れば(3)が得られる. □

3.4 Laplaceの方法

Laplaceの方法: Stirlingの公式の証明の解説のようにして見付かる変数変換はより一般の場合に非常に有用である. 以下では $\int_{-\infty}^{\infty}$ や $\int_0^{\infty}$ を単に $\int$ と書くことにし,

$$Z_n = \int e^{-nf(x)} g(x)\, dx$$

とおく. ただし, $f(x)$ は実数値函数で唯一つの最小値 $f(x_0)$ を持ち, $x = x_0$ において,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{a}{2}(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3), \quad a = f''(x_0) > 0$$

とTaylor展開されていると仮定するし, さらに, 0 以上の値を持つ実数値函数 $g(x)$ は積分 Z_n がうまく定義されるような適当な条件を満たしていると仮定し, x_0 の近傍で $g(x) > 0$ を満たしていると仮定する. (ここで, x_0 の近傍で $g(x) > 0$ が成立しているとは, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - x_0| < \delta$ ならば $g(x) > 0$ となることである.) このとき,

$$Z_n = e^{-nf(x_0)} \int \exp\left(-n\left(\frac{a}{2}(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)\right)\right) g(x)\, dx.$$

$x = x_0 + y/\sqrt{n}$ と変数変換すると

$$Z_n = \frac{e^{-nf(x_0)}}{\sqrt{n}} \int \exp\left(-\frac{a}{2}y^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) g\left(x_0 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) dy.$$

そして, $n \to \infty$ で

$$\int \exp\left(-\frac{a}{2}y^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) g\left(x_0 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) dy \to \int \exp\left(-\frac{a}{2}y^2\right) g(x_0)\, dy = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, g(x_0).$$

$a = f''(x_0)$ とおいたことを思い出しながら, 以上をまとめると, $n \to \infty$ で

$$Z_n \sim \frac{e^{-nf(x_0)}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2\pi}{f''(x_0)}}\, g(x_0).$$

すなわち,

$$-\log Z_n = nf(x_0) + \frac{1}{2}\log n - \log\left(\sqrt{\frac{2\pi}{f''(x_0)}}\, g(x_0)\right) + o(1).$$

Z_n の $n \to \infty$ における漸近挙動を調べるための以上の方法を**Laplaceの方法**(Laplace's method)と呼ぶ. □

問題(Stirlingの公式): $n! = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t} t^n\, dt$ にLapalceの方法を適用して, Stirlingの公式を導出せよ.

解答例: 積分変数を $t = nx$ で置換すると,

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-t + n\log t}\, dt = n^{n+1} \int_0^{\infty} e^{-n(x - \log x)}\, dx.$$

$f(x) = x - \log x$, $g(x) = 1$ とおく. $f'(x) = 1 - 1/x$, $f''(x) = 1/x^2$ なので $f(x)$ は $x_0 = 1$ で最小になり, $f(1) = f''(1) = 1$ となる. ゆえに, それらにLaplaceの方法を適用すると,

$$n! \sim n^{n+1} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sqrt{2\pi} = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}. \qquad \square$$

Laplaceの方法は本質的にGauss積分の応用である.

Gauss積分をガンマ函数に置き換えることによって得られる一般化されたLaplaceの方法の素描については

- 黒木玄, 一般化されたLaplaceの方法 (https://genkuroki.github.io/documents/20161014GeneralizedLaplace.pdf)

を参照せよ. 一般化されたLaplaceの方法は

- 渡辺澄夫, ベイズ統計の理論と方法 (https://www.amazon.co.jp/dp/4339024627), 2012

の第4章の主結果であるベイズ統計における自由エネルギーの

$$F_n = -\log Z_n = nS + \lambda \log n - (m-1)\log\log n + O(1)$$

の形の漸近挙動を導く議論を初等化するために役に立つ. 特異点解消は本質的に不可避だが, この形の漸近挙動だけが欲しいのであればゼータ函数を用いた精密な議論は必要ない.

3.5 Laplaceの方法の弱形

Laplaceの方法の弱形: Laplaceの方法が使える状況では,

$$Z_n = \int e^{-nf(x)} g(x)\,dx$$

について, 特に, $n \to \infty$ のとき,

$$-\frac{1}{n}\log Z_n \to f(x_0) = \min f(x), \quad \text{i.e.} \quad Z_n = \int e^{-nf(x)} g(x)\,dx = \exp(-n\min f(x) + o(n))$$

が成立している. この結論を**Laplaceの方法の弱形**と呼ぶことにする. Laplaceの方法のような精密な形でなくても, こちらの弱形だけで用が足りることは結構多い. □

問題(Laplaceの方法の弱形が明瞭に成立する場合): 閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続函数 $f(x)$ と 0 以上の値を持つ実数値函数 $g(x)$ は, $f(x_0) = \min_{a \leqq x \leqq b} f(x)$ を満たすある $x_0 \in [a,b]$ の近傍で $g(x) > 0$ を満たしていると仮定する. このとき, $n \to \infty$ において,

$$\int_a^b e^{-nf(x)} g(x)\,dx = \exp\left(-n \min_{a \leqq x \leqq b} f(x) + o(n)\right)$$

が成立していることを示せ. すなわち, $n \to \infty$ のとき,

$$-\frac{1}{n}\log \int_a^b e^{-nf(x)} g(x)\,dx \to \min_{a \leqq x \leqq b} f(x)$$

が成立していることを示せ.

解答例: $f_0(x) = f(x) - \min_{a \leqq \xi \leqq b} f(\xi)$ とおくと, $f_0(x)$ の最小値は 0 になり,

$$-\frac{1}{n}\log \int_a^b e^{-nf(x)} g(x)\,dx = \min_{a \leqq x \leqq b} f(x) - \frac{1}{n}\log \int_a^b e^{-nf_0(x)} g(x)\,dx$$

なので, $n \to \infty$ のとき

$$-\frac{1}{n}\log \int_a^b e^{-nf_0(x)} g(x)\,dx \to 0$$

となることを示せばよい.

$\varepsilon > 0$ を任意に取って固定し, $A = \{\, x \in [a,b] \mid f_0(x) \leqq \varepsilon \,\}$ とおき, その $[a,b]$ での補集合を A^c と書き,

$$Z_{0,n} = \int_a^b e^{-nf_0(x)} g(x)\,dx = I_n + J_n, \quad I_n = \int_A e^{-nf_0(x)} g(x)\,dx, \quad J_n = \int_{A^c} e^{-nf_0(x)} g(x)\,dx.$$

とおく. $n \to \infty$ のとき $-\frac{1}{n}\log Z_{0,n} \to 0$ となることを示したい.

$x \in A$ について $\varepsilon \geqq f_0(x) \geqq 0$ なので, $e^{-n\varepsilon} \leqq e^{-nf_0(x)} \leqq 1$ となるので,

$$e^{-n\varepsilon} \int_A g(x)\,dx \leqq I_n = \int_A e^{-nf_0(x)} g(x)\,dx \leqq \int_A g(x)\,dx.$$

$f(x_0) = \min_{a \leqq x \leqq b} f(x)$ を満たすある $x_0 \in [a,b]$ の近傍で $g(x) > 0$ となっていると仮定したことより, $\int_A g(x)\,dx > 0$ となることにも注意せよ.

$x \in A^c$ について $f_0(x) > \varepsilon$ なので, $0 < e^{-nf_0(x)} < e^{-n\varepsilon}$ となるので,

$$0 \leqq J_n = \int_{A^c} e^{-nf_0(x)} g(x)\,dx \leqq e^{-n\varepsilon} \int_{A^c} g(x)\,dx.$$

以上をまとめると,

$$e^{-n\varepsilon}\int_A g(x)\,dx \leqq Z_{0,n} \leqq \int_A g(x)\,dx + e^{-n\varepsilon}\int_{A^c} g(x)\,dx.$$

これの全体の対数を取って $-1/n$ 倍すると,

$$\varepsilon - \frac{1}{n}\log\int_A g(x)\,dx \geqq -\frac{1}{n}\log Z_{0,n} \geqq -\frac{1}{n}\log\left(\int_A g(x)\,dx + e^{-n\varepsilon}\int_{A^c} g(x)\,dx\right).$$

したがって, $n \to 0$ とすると,

$$\varepsilon \geqq \limsup_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log Z_{0,n}\right) \geqq \liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log Z_{0,n}\right) \geqq 0.$$

$\varepsilon > 0$ は幾らでも小さくできるので, 下極限と上極限が等しくなることがわかり,

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log Z_{0,n}\right) = 0$$

が得られる. □

In [ ]:

```
1
```

11 Kullback-Leibler情報量

黒木玄

2018-06-24

- Copyright 2018 Gen Kuroki
- License: MIT https://opensource.org/licenses/MIT (https://opensource.org/licenses/MIT)

- Repository: https://github.com/genkuroki/Calculus (https://github.com/genkuroki/Calculus)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/11%20Kullback-Leibler%20information.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/11%20Kullback-Leibler%20information.ipynb)
- https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/11%20Kullback-Leibler%20information.pdf (https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/11%20Kullback-Leibler%20information.pdf)

このファイルは Julia Box (https://juliabox.com) で利用できる.

自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ.

論理的に完璧な説明をするつもりはない. 細部のいい加減な部分は自分で訂正・修正せよ.

Table of Contents

1 Kullback-Leibler情報量の基本性質
  1.1 KL情報量の定義
  1.2 KL情報量の正値性
  1.3 KL情報量の凸性
  1.4 KL情報量が L^1 ノルムの2乗を上から押さえること
  1.5 KL情報量の使われ方
2 多項分布のSanovの定理
  2.1 Sanovの定理とその証明
  2.2 Sanovの定理の使い方1
  2.3 二項分布の場合
  2.4 Sanovの定理の使い方2
  2.5 連続的な確率分布の場合
  2.6 正規分布による近似
  2.7 多項分布の中心極限定理

In [1]:
```
using Plots
gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn) = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    display("text/html", """<img src="data:$mime; base64,$base64">""")
end

using SymPy
#sympy[:init_printing](order="lex") # default
#sympy[:init_printing](order="rev-lex")

using SpecialFunctions
using QuadGK
```

1 Kullback-Leibler情報量の基本性質

1.1 KL情報量の定義

一般の確率分布についても定義可能だが, このノートでは簡単のため, 有限集合

$$\Omega = \{1, 2, \dots, r\}$$

の上の確率分布のみを扱う. $p = (p_1, \dots, p_r)$ が $\Omega = \{1, 2, \dots, r\}$ 上の**確率分布**であるとは

$$p_i \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r) \qquad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

が成立していることであると定める.

$\Omega = \{1, 2, \dots, r\}$ 上の確率分布 q, p に対して, (q, p) の**Kullback-Leibler情報量** $D(q\|p)$ を

$$D(q\|p) = \sum_{i=1}^{r} q_i \log \frac{q_i}{p_i} = \left(-\sum_{i=1}^{r} q_i \log p_i \right) - \left(-\sum_{i=1}^{r} q_i \log q_i \right)$$

と定める. ただし, $x \log y$ は $x = 0$ のとき 0 になり, $\log 0 = -\infty$ であると約束しておく. Kullback-Leibler情報量の -1 倍を**相対エントロピー**と呼ぶ.

記述の簡単のため以下ではKullback-Leiblerを**KL**と略記することにする. さらに, q, p は $\Omega = \{1, 2, \dots, r\}$ 上の確率分布であると仮定する.

1.2 KL情報量の正値性

KL情報量の正値性: $D(q\|p) \geqq 0$.

証明: $x \geqq 0$ に対して $f(x) = x \log x$ とおく. ただし, $f(0) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$ と約束しておく. $f'(x) = \log x + 1$, $f''(x) = 1/x > 0$ なので $f(x)$ は下に凸な函数である. 期待値汎函数 $g(x) \mapsto E[g(x)]$ を

$$E[g(x)] = \sum_{i=1}^{r} p_i g(q_i/p_i)$$

と定めることができる. ゆえにJensenの不等式より,

$$E[f(x)] \geqq f(E[x]).$$

そして,

$$E[f(x)] = \sum_{i=1}^{r} p_i \frac{q_i}{p_i} \log \frac{q_i}{p_i} = D(q\|p), \quad E[x] = \sum_{i=1}^{r} p_i \frac{q_i}{p_i} = \sum_{i=1}^{r} q_i = 1, \quad f(E[x]) = f(1) = 0$$

なので $D(q\|p) \geqq 0$ を得る. □

1.3 KL情報量の凸性

KL情報量の凸性: $D(q\|p)$ は q の函数として下に凸である.

証明: Ω 上の確率分布 q, q' と $0 < t < 1$ が任意に与えられているとする. $f(x) = x \log x$ とおくと, $f(x)$ は下に凸な函数である. ゆえに

$$\begin{aligned} D((1-t)q + tq'\|p) &= \sum_{i=1}^{r} p_i f\left(\frac{(1-t)q_i + tq'_i}{p_i}\right) \\ &\leqq \sum_{i=1}^{r} p_i \left((1-t) f\left(\frac{q_i}{p_i}\right) + tf\left(\frac{q'_i}{p_i}\right)\right) \\ &= (1-t)D(q\|p) + tD(q'\|p). \qquad \square \end{aligned}$$

注意: $f(x)$ は強い意味で下に凸なので $D(q\|p)$ も q の函数として強い意味で下に凸になる. このことより, q の函数としての $D(q\|p)$ の最小値を与える $q = p$ とは異なる $q \neq p$ において $D(q\|p) > 0$ となることがわかる. より精密な結果については次の節を見よ. □

1.4 KL情報量が L^1 ノルムの2乗を上から押さえること

$q = p$ ならば $q_i \log(q_i/p_i) = 0$ より, $D(q\|p) = 0$ となる.

- 黒木玄, Kullback-Leibler情報量とSanovの定理 (https://genkuroki.github.io/documents/20160616KullbackLeibler.pdf)

の第5.3節で次の不等式が証明されている:

$$D(q\|p) \geqq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{r} |q_i - p_i|\right)^2.$$

これより, $q \neq p$ ならば $D(q\|p) > 0$ となることがわかる. 特に $D(q\|p) = 0$ と $p = q$ が同値であることがわかる.

さらに, 確率分布の列 $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots$ について, $k \to \infty$ で $D(q^{(k)}\|p) \to 0$ ならば $q^{(k)} \to p$ となり, 確率分布の列 $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots$ について, $k \to \infty$ で $D(q\|p^{(k)}) \to 0$ ならば $p^{(k)} \to q$ となることもわかる. □

1.5 KL情報量の使われ方

KL情報量 $D(q\|p)$ は確率分布 q と確率分布 p の違いの大きさを表す指標としてよく使われる. 一般に $D(q\|p) \neq D(p\|q)$ であるが, そうなることには必然性がある. 「KL情報量の意味」は下の方で説明する**Sanovの定理**を見ればわかる. Sanovの定理はStirlingの公式を知っていれば容易に証明可能である. Stirlingの公式を理解しておけば「情報理論」「統計力学」「統計学」などなどで基本的なSanovの定理をすぐに理解できるようになる.

- 階乗に関するStirlingの近似公式 $\longrightarrow$ KL情報量に関するSanovの定理

という経路をできるだけ早く踏破しておいた方が数学の応用について楽に考えることができるようになると思う.

統計学へのSanovの定理の応用については赤池弘次氏による以下の2つの論説を参照せよ:

- 赤池弘次, エントロピーとモデルの尤度(〈講座〉物理学周辺の確率統計) (https://www.jstage.jst.go.jp/article/butsuri1946/35/7/35_7_608/_article/-char/ja/), 日本物理学会誌, 35巻 (1980) 7号, 608-614
- 赤池弘次, 統計的推論のパラダイムの変遷について (https://ismrepo.ism.ac.jp/?action=pages_view_main&active_action=repository_view_main_item_detail&item_id=32568&item_no=1&page_id=13&block_id 統計数理研究所彙報, 27巻, 1号, 5-12, 1980-03

さらに

- 黒木玄, Kullback-Leibler情報量とSanovの定理 (https://genkuroki.github.io/documents/20160616KullbackLeibler.pdf)

も参照して欲しい. 「Kullback-Leibler情報量とSanovの定理 (https://genkuroki.github.io/documents/20160616KullbackLeibler.pdf)」の第10節には平均符号長とKL情報量の関係も解説してある. 「情報量」という呼び方の由来はそちらを見た方が分かり易いかもしれない. □

2 多項分布のSanovの定理

1回の試行で $\Omega = \{1, 2, \dots, r\}$ から i を取り出す確率は p_i であるとし, k_i は非負の整数であり, $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ を満たしているとする. このとき n 回の独立試行で $1, 2, \dots, r$ のそれぞれが $k_1, k_2, \dots, k_r$ 回取り出される確率は

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r} \tag{$*$}$$

になる. この式における階乗の分数の因子はそれぞれ k_i 個の i 達を全部で n 個順番に並べる方法の総数に等しいので, **多項係数**と呼ばれる. $(k_1, \dots, k_r)$ 全体の集合上の確率分布 $(*)$ は**多項分布**と呼ばれる.

2.1 Sanovの定理とその証明

Sanovの定理: $n \to \infty$ で k_i 達が $k_i/n \sim q_i$ $(i = 1, \dots, r)$ のように振る舞うならば, $n \to \infty$ で

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r} = \exp(-nD(q\|p) + o(n)).$$

すなわち

$$-\log\left(\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}\right) = nD(q\|p) + o(n).$$

証明: $k_i/n \sim q_i$ という仮定より, $k_i = nq_i + o(n)$ である. q_i は固定されているので, n が大きくなると k_i も $O(n)$ のオーダーで大きくなる. だから, Stirlingの公式

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}, \quad k_i! \sim k_i^{k_i}e^{-k_i}\sqrt{2\pi k_i}$$

を使用できる. ゆえに, $k_1 + \cdots + k_r = n$ を使うと,

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} \sim \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{k_1^{k_1}e^{-k_1}\sqrt{2\pi k_1}\cdots k_r^{k_r}e^{-k_r}\sqrt{2\pi k_r}} = \left(\prod_{i=1}^r\left(\frac{k_i}{n}\right)^{k_r}\sqrt{(2\pi n)^{r-1}\prod_{i=1}^r\frac{k_i}{n}}\right)^{-1}.$$

したがって,

$$\begin{aligned}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_i} &\sim \left(\prod_{i=1}^r\left(\frac{k_i/n}{p_i}\right)^{k_i}\sqrt{(2\pi n)^{r-1}\prod_{i=1}^r\frac{k_i}{n}}\right)^{-1} \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^r k_i\log\frac{k_i/n}{p_i} - (r-1)\log n - \log\sqrt{(2\pi)^{r-1}\prod_{i=1}^r\frac{k_i}{n}}\right).\end{aligned}$$

これに $k_i/n = q_i + o(1)$, $k_i = nq_i + o(n)$ を代入すれば示したい結果が得られる. $\log n$ や定数の項は n で割って $n \to \infty$ とすると 0 に収束するので, それらは $o(n)$ の項にまとめられることに注意せよ. さらにKL情報量の定義が

$$D(q\|p) = \sum_{i=1}^r q_i\log\frac{q_i}{p_i}$$

であったことも思い出して計算せよ. □

要するに多項分布にStirlingの近似公式と $k_i = nq_i + o(n)$ を単純に代入するだけで, Sanovの定理が得られる.

2.2 Sanovの定理の使い方1

有限集合 $\Omega = \{1, 2, \dots, r\}$ から確率 p_i で i を選ぶ独立試行を n 回行った結果, i が k_i 回取り出されたとき, $\Omega = \{1, 2, \dots, r\}$ 上の確率分布 $(k_1/n, \dots, k_r/n)$ を**経験分布**と呼ぶ. Sanovの定理における $k_i/n \sim q_i$ $(n \to \infty)$ という条件は, n を大きくしたとき**経験分布が確率分布 q に近いこと**を意味している. だから, Sanovの定理は n が大きなとき

- (確率分布 p のもとでの独立試行の経験分布が確率分布 q に近い確率) $\sim \exp(-nD(q\|p) + o(n))$.

が成立することを意味している.

$o(n)$ は n で割ると 0 に収束する量なので, n が十分に大きなとき $-nD(q\|p)$ と比較すると無視できるほど小さな量になる. ゆえに, n を十分に大きくすると, 異なる q ごとの「経験分布が q に近くなる確率」の大小関係をKL情報量 $D(q\|p)$ の大小関係で測って良い状況になる. $D(q\|p)$ が小さな q ほど相対的に経験分布が近くなる確率は高くなる.

経験分布が確率分布 q^* に近くなる確率で経験分布が確率分布 q に近くなる確率を割った結果は

$$\exp\bigl(-n\left(D(q\|p) - D(q^*\|p)\right) + o(n)\bigr)$$

のように振る舞う. $D(q\|p) > D(q^*\|p)$ ならばこの確率の商は $n \to \infty$ で 0 に収束する. そのとき, 経験分布が q に近くなる確率は経験分布が q^* に近くなる確率と比較すると相対的に無視できるくらい小さくなる.

確率分布の集合 A が与えられているとする. ただし, A の内部の閉包が A 閉包に一致するような「良い集合」のみを考える. 例えば $r = 2$ (二項分布のとき)で $0 \leqq a < b \leqq 1$ のとき $A = \{ (q_1, 1 - q_1) \mid a \leqq q_1 \leqq b \}$ はそのような「良い集合」の例になっている. (「内部」「閉包」の意味を知らない人はこの例を思い浮かべておけばよい.)

q が A 上を動くとき, $D(q\|p)$ を最小にする $q \in A$ を q^* と書く.

このとき, 経験分布が A に入るという条件のもとでの条件付き確率分布を考えると, q^* 以外の $q \in A$ に経験分布が近くなる確率は $n \to \infty$ で 0 に近付く. これは、経験分布が A に入るという条件のもとでの条件付き確率分布が $n \to \infty$ で q^* に台を持つデルタ分布に近付くことを意味している.

2.3 二項分布の場合

$r = 2$ の二項分布の場合を考える. このとき, $q_1 = q, q_2 = 1 - q, p_1 = p, p_2 = 1 - p$ と書くと,

$$D(q\|p) = q \log \frac{q}{p} + (1 - q) \log \frac{1 - q}{1 - p}.$$

問題: この函数は $q = p$ で最小値 0 になることを自分で確認してみよ. □

次のセルのプロットを見ればわかるように $D(q\|p)$ は q の函数として $q = p$ で最小になり, 下に凸な函数になる.

In [2]:

```
D(q,p) = q*log(q/p) + (1-q)*log((1-q)/(1-p))
q = 0:0.01:1
PP = []
for p in [0.2, 0.4, 0.6, 0.8]
    P = plot(legend=false)
    plot!(title="y = D(q, $(round(p,3)))", titlefontsize=10)
    plot!(xlabel="q_1", ylabel="y")
    plot!(q, D.(q, p))
    push!(PP, P)
end
plot(PP..., size=(700, 500))
```

Out[2]:

In [3]:
```
D(q,p) = q*log(q/p) + (1-q)*log((1-q)/(1-p))
p = 0:0.01:1
PP = []
for q in [0.2, 0.4, 0.6, 0.8]
    P = plot(legend=false)
    plot!(title="y = D($(round(q,3)), p)", titlefontsize=10)
    plot!(xlabel="p_1", ylabel="y")
    plot!(p, D.(q, p))
    push!(PP, P)
end
plot(PP..., size=(700, 500))
```

Out[3]:

問題(Laplaceの方法の弱形の一種): 実数 $E_1, \ldots, E_N$ について, $n \to \infty$ のとき,

$$-\frac{1}{n}\log\sum_{i=1}^{N} e^{-nE_i} \to \min\{E_1, \cdots, E_N\} \tag{$*$}$$

となることを示せ.

解答例: $E_1 = \cdots = E_k < E_{k+1} \leqq \cdots \leqq E_N$ と仮定してよい. このとき,

$$-\frac{1}{n}\log\sum_{i=1}^{N} e^{-nE_i} = -\frac{1}{n}\log\left(e^{-nE_1}\left(k + \sum_{i=k+1}^{n} e^{-n(E_i-E_1)}\right)\right) = E_1 - \frac{1}{n}\log\left(k + \sum_{i=k+1}^{n} e^{-n(E_i-E_1)}\right).$$

これより, $(*)$が成立することがわかる. □

注意: 上の問題の結果の max 版

$$\frac{1}{n}\log\sum_{i=1}^{N} e^{nE_i} \to \max\{E_1, \cdots, E_N\}$$

は[トロピカル幾何 (https://www.google.co.jp/search?q=%E3%83%88%E3%83%AD%E3%83%94%E3%82%AB%E3%83%AB%E5%B9%BE%E4%BD%95)](https://www.google.co.jp/search?q=%E3%83%88%E3%83%AD%E3%83%94%E3%82%AB%E3%83%AB%E5%B9%BE%E4%BD%95)における [max-plus 代数 (https://www.google.co.jp/search?q=max-plus%E4%BB%A3%E6%95%B0)](https://www.google.co.jp/search?q=max-plus%E4%BB%A3%E6%95%B0)の max が極限で出て来る仕組みとしても現われる. □

注意: コンピューターによる統計がらみの数値計算では[logsumexp (https://www.google.co.jp/search?q=logsumexp)](https://www.google.co.jp/search?q=logsumexp)という函数を適切に定義して使うことがある. □

確率 p で当たるくじを引く独立試行を n 回繰り返したとき, 当たりが k 回出る確率は

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

になる. $0 \leqq a < b \leqq 1$ であるとする. このとき当たりが出た回数の割合 k/n が a 以上 b 以下になる確率は

$$\sum_{a \leqq k/n \leqq b} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

になる. この確率の対数の $-1/n$ 倍

$$-\frac{1}{n}\log \sum_{a \leqq k \leqq b} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

が $n \to \infty$ でどうなるかについて考えよう.

Sanovの定理より, $k/n \sim q$ のとき,

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \exp(-nD(q|p) + o(n)).$$

したがって, 上の問題の結果の一般化によって, $n \to \infty$ で

$$-\frac{1}{n}\log \sum_{a \leqq k \leqq b} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \to \max_{a \leqq q \leqq b} D(q\|p) = \begin{cases} 0 & (a \leqq p \leqq b) \\ D(b\|p) & (b < p) \\ D(a\|p) & (p < a) \end{cases}$$

となると考えられる. 要するに a 以上 b 以下の k/n で p に最も近いものが生じる確率の寄与だけが, 効いて来るということである. (前節の説明も再読せよ.)

以上の議論は少々厳密さに欠けた荒い議論だが, 結論は正しい. 正確な議論の仕方については

- 黒木玄, Kullback-Leibler情報量とSanovの定理 (https://genkuroki.github.io/documents/20160616KullbackLeibler.pdf)

の第3節を参照せよ.

2.4 Sanovの定理の使い方2

KL情報量 $D(q\|p)$ は, Sanovの定理によって, 確率分布 p の試行を独立に n 回繰り返したとき, 経験分布として q に近い分布が出て来る確率が $\exp(-nD(q\|p) + o(n))$ になるという性質を持っているのであった.

これより, 確率分布 p の独立試行によって確率分布 q をシミュレートしたときの, 予測誤差の大きさが $D(q\|p)$ で測られることを意味していると考えることができる.

$q = p$ と $D(q\|p) = 0$ が同値であることも, この解釈をサポートしている.

さらに, 最も簡単な次の場合について考えてみよう. 確率 q で雨が降るときに確率 1 で雨が降ると予報を出すことを n 回繰り返すときに, 予報の出し方が間違っていたことがばれずに済む確率は $q^n = \exp(-n(-\log q))$ である. そして, この場合のKL情報量は

$$D(q\|1) = 1\log\frac{1}{q} + (1-1)\log\frac{1-1}{1-q} = -\log q$$

となるので(二項分布の場合の記号法をそのまま使った), $q^n = \exp(-nD(q\|1))$ となる. $D(q\|1)$ は予報の出し方が間違っていたことがばれる速さを表していると考えられる. この極端で単純な場合も, KL情報量 $D(q\|p)$ を確率分布 p による確率分布 q のシミュレーションの予測誤差を表しているという解釈をサポートしている.

より一般の場合には, Sanovの定理は

- (確率分布 p の独立試行の経験分布が q に近い確率) $= \exp(-nD(q\|p) + o(n))$

と要約でき, 確率分布 p の独立試行の経験分布が q に近いことは, 確率分布 p の独立試行により確率分布 q の予測が間違っていることがばれずに済んでいることを意味していると解釈できるので, やはり $D(q\|p)$ は予測が間違っていたことがばれるまでの速さになっていると解釈できる.

KL情報量は以上の意味で予測誤差になっていると考えられる:

- $D(q\|p) =$ (確率分布 p の独立試行による確率分布 q のシミュレーションの予測誤差).

2.5 連続的な確率分布の場合

連続的な確率分布の場合であっても, 確率密度函数 $q(x), p(x)$ に対するKL情報量が

$$D(q\|p) = \int q(x) \log \frac{q(x)}{p(x)}\, dx$$

と定義され($\int$ は定積分を意味する), 適当な条件と適切な定式化のもとでSanovの定理が成立していることが知られている:

- $D(q\|p) =$ (確率分布 p の独立試行による確率分布 q のシミュレーションの予測誤差).

正確な内容については「大偏差原理 Sanovの定理 (https://www.google.co.jp/search?q=%E5%A4%A7%E5%81%8F%E5%B7%AE%E5%8E%9F%E7%90%86+Sanov%E3%81%AE%E5%AE%9A%E7%90%86)」について検索して欲しい. (連続的な x 軸を r 個に区切れば, x 軸上の確率分布は有限集合 $\Omega = \{1, \dots, r\}$ 上の確率分布で近似できることに注意せよ.)

確率分布 p による独立試行で確率分布 q をシミュレートする状況を考えよう. $\int_{-\infty}^{\infty}$ を単に $\int$ と書くことにすると, その場合の予測誤差は

$$D(q|p) = \int q(x) \log \frac{q(x)}{p(x)}\, dx = G(q\|p) - S(q).$$

ここで

$$G(q\|p) = -\int q(x) \log p(x)\, dx, \quad S(q) = -\int q(x) \log q(x)\, dx$$

といおいた. $S(q)$ は**Shannon情報量**と呼ばれ, $G(q\|p)$ は**汎化誤差**と呼ばれる.

2.6 正規分布による近似

例として, 正規分布

$$p(x) = p_N(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

による独立試行で確率分布 $q(x)$ をシミュレートする場合について考えよう. 予測誤差を小さくするためには, パラメーター μ, σ を調節して汎化誤差 $G(q\|p)$ を小さくすればよい. p が正規分布の場合には

$$\begin{aligned} G(q\|p) &= \int q(x) \left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\log \sigma^2 + \log \sqrt{2\pi} \right) dx \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int q(x)(x-\mu)^2\, dx + \frac{1}{2}\log \sigma^2 + \log \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

$q(x)$ の平均と分散を

$$\mu_q = \int q(x) x\, dx, \quad \sigma_q^2 = \int q(x)(x-\mu_q)^2\, dx$$

と書くと,

$$\int q(x)(x-\mu)^2\, dx = \int q(x)((x-\mu_q) - (\mu-\mu_q))^2\, dx = \sigma_q^2 + (\mu-\mu_q)^2$$

なので

$$G(q\|p) = \frac{(\mu-\mu_q)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma_q^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\log \sigma^2 + \log \sqrt{2\pi}.$$

これより, $G(q\|p)$ を最小にする μ, σ は $\mu = \mu_q, \sigma = \sigma_q$ となることがわかる.

すなわち, 正規分布による確率分布 $q(x)$ のシミュレーションの予測誤差を最小にするためには, 正規分布の平均と分散を確率分布 $q(x)$ の平均と分散に一致させればよいことがわかった.

この結果は未知の確率分布 $q(x)$ のサンプルに基いてその平均と分散の両方を推定することは, 未知の確率分布 $q(x)$ を最も小さな予測誤差でシミュレートできる正規分布を推定することと同じことであることがわかる.

平均と分散に関する統計学は, KL情報量のSanovの定理の立場から見ると, 本質的に正規分布の統計学であるということがわかった.

以上のように, **KL情報量のSanovの定理は, 「パラメーターの推定」という考え方をより普遍的な「確率分布の推定」という考え方に高めるため役に立つ**.

問題: 上の計算で省略した部分を埋めよ.

解答例: σ を固定したときの $G(q\|p)$ の最小値は $\mu = \mu_q$ で与えられることは明らか.

$$f(s) = \frac{a}{s} + \log s$$

とおくと,

$$f'(s) = -\frac{a}{s^2} + \frac{1}{s} = \frac{s-a}{s^2}$$

なので $f(s)$ は $s = a$ で最小になることがわかる. これより, $G(q\|p)$ は $\mu = \mu_q, \sigma = \sigma_q$ のときに最小になることがわかる. □

問題: 次の確率密度函数で定義される分布をロジスティック分布と呼ぶ:

$$q(x) = \frac{1}{4s}\operatorname{sech}^2\left(\frac{x-\mu}{2s}\right).$$

ここで

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

ロジスティック分布の平均と分散はそれぞれ

$$\mu_q = \mu, \quad \sigma_q^2 = \frac{\pi^2 s^2}{3}.$$

ロジスティック分布を最もよくシミュレートする正規分布の確率密度函数ともとのロジスティック分布の確率密度函数を同時にプロットしてみよ. □

In [4]:

```
pdflogistic(μ,s,x) = 1/(4s)*sech((x-μ)/(2s))^2
pdfnormal(μ,σ,x) = exp(-(x-μ)^2/(2*σ^2))/√(2π*σ^2)

μ = 0.0
s = 1.0
σ = π*s/√3
x = -10:0.02:10

P = plot(legend=:topleft, ylims=(0, 0.26))
plot!(x, pdflogistic.(μ,s,x), label="logistic", lw=2)
plot!(x, pdfnormal.(μ,σ,x),   label="normal",    lw=2, ls=:dash)
```

Out[4]:

ロジスティック分布の正規分布による近似に関しては

- 黒木玄, ロジスティック分布の2通りの正規分布近似の比較 (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/96b0508a5773035e3a5247beff1d4f99)

も参照せよ.

2.7 多項分布の中心極限定理

Sanovの定理の証明によって, $k_i/n \sim q_i$ $(n \to \infty)$ のとき, $n \to \infty$ で,

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r} \sim \left(\prod_{i=1}^r \left(\frac{k_i/n}{p_i}\right)^{k_i}\sqrt{(2\pi n)^{r-1}\prod_{i=1}^r \frac{k_i}{n}}\right)^{-1}.$$

これを

$$\frac{k_i}{n} = p_i + fracx_i\sqrt{n} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

の場合に適用すると,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^r \left(\frac{x_i}{\sqrt{n}} + \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^r \frac{k_i}{n} - \sum_{i=1}^r p_i = 0, \\
&\log\left(\frac{k_i/n}{p_i}\right)^{k_r} = np_i\left(1 + \frac{x_i}{\sqrt{n}\,p_i} + \frac{\varepsilon_i}{p_i}\right)\log\left(1 + \frac{x_i}{\sqrt{n}\,p_i} + \frac{\varepsilon_i}{p_i}\right) = n\left(\frac{x_i}{\sqrt{n}} + \varepsilon_i\right) + \frac{1}{2}\frac{x_i^2}{p_i} + o(1), \\
&\therefore \quad \log\prod_{i=1}^r\left(\frac{k_i/n}{p_i}\right)^{k_i} = \sum_{i=1}^r \log\left(\frac{k_i/n}{p_i}\right)^{k_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^r \frac{x_i^2}{p_i} + o(1), \\
&\prod_{i=1}^r \frac{k_i}{n} = p_1\cdots p_r(1 + o(1))
\end{aligned}$$

なので

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r} \sim \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^r \frac{x_i^2}{p_i}\right)}{\sqrt{(2\pi n)^{r-1}p_1\cdots p_r}}.$$

両辺に $dk_1\cdots k_{r-1} = \sqrt{n}\,dx_1\cdots\sqrt{n}\,dx_{r-1}$ をかけると,

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}\,dk_1\cdots dk_{r-1} \sim \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^r \frac{x_i^2}{p_i}\right)}{\sqrt{(2\pi)^{r-1}p_1\cdots p_r}}\,dx_1\cdots dx_{r-1}.$$

$k_1 + \cdots + k_r = n$ より $x_1 + \cdots + x_r = o(1)$ であることに注意せよ. 右辺は $(x_1, \dots, x_{r-1})$ の多変量正規分布の確率密度函数の形になっている.

以上の結果は多項分布が n が大きなときに多変量正規分布で近似できることを意味している. この結果を**多項分布の中心極限定理**と呼ぶ.

二項分布の中心極限定理: $r = 2$ のとき, $0 \leqq p \leqq 1$, $k/n = p + x/\sqrt{n} + o(1/\sqrt{n})$ のとき,

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\,dk \sim \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{p} + \frac{(-x)^2}{1-p}\right)\right)}{\sqrt{2\pi p(1-p)}}\,dx = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2p(1-p)}\right)}{\sqrt{2\pi p(1-p)}}\,dx.$$

この結果を**二項分布の中心極限定理**と呼ぶ. □

より一般の場合の中心極限定理の証明については

- 黒木玄, 確率論入門 (https://genkuroki.github.io/documents/IntroProbability.pdf)

の第2.4節を参照せよ. 本質的にTaylorの定理のみを使って中心極限定理は証明される. (積率母函数や特性函数の理論(本質的にFourier-Laplace解析の理論)を使わなくても証明できる.)

問題: 二項分布の中心極限定理を実際にグラフをプロットすることによって確認せよ. □

次のセルを見よ.

In [5]:

```
binomcoeff(n,k) = exp(lgamma(n+1)-lgamma(k+1)-lgamma(n-k+1))
pdfbinom(n,p,k) = 0 ≤ k ≤ n ? binomcoeff(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k) : 0.0
pdfnormal(n,p,x) = exp(-x^2/(2p*(1-p)))/√(2π*n*p*(1-p))

PP = []
for (n,p) in [(10,0.4), (25,0.4), (50,0.4), (100,0.4)]
    k = 0:n
    kk = 0:n/400:n
    x = (kk .- n*p)./√n
    P = plot(legend=:topright, xlabel="k")
    plot!(k, pdfbinom.(n,p,k),  label="Bin($n, $p)",  lw=2)
    plot!(kk, pdfnormal.(n,p,x), label="Normal dist", lw=2, ls=:dash)
    push!(PP, P)
end
plot(PP..., size=(800, 600))
#pngplot(PP..., size=(800, 600))
```

Out[5]:

In [ ]:

```
```

12 Fourier解析

黒木玄

2018-06-28

- Copyright 2018 Gen Kuroki
- License: MIT https://opensource.org/licenses/MIT (https://opensource.org/licenses/MIT)

- Repository: https://github.com/genkuroki/Calculus (https://github.com/genkuroki/Calculus)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb)
- https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/12%20Fourier%20analysis.pdf (https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/12%20Fourier%20analysis.pdf)

このファイルは Julia Box (https://juliabox.com) で利用できる.

自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ.

論理的に完璧な説明をするつもりはない. 細部のいい加減な部分は自分で訂正・修正せよ.

Table of Contents

1 Riemann-Lebesgueの定理
  1.1 階段函数
  1.2 Riemann-Lebesgueの定理とその証明
2 Fourier変換の逆変換の収束
  2.1 Fourier変換とFourier逆変換の定義
  2.2 Dirichlet核
  2.3 Dirichlet積分の公式
  2.4 Riemannの局所性定理
  2.5 Fourier変換の逆変換の収束性 (Diniの条件)
3 たたみ込み積と総和核
  3.1 たたみ込み積
  3.2 総和核
  3.3 総和核とFourier展開の関係
  3.4 総和核の例
    3.4.1 Dirichlet核は総和核ではない
    3.4.2 Fejér核
    3.4.3 Poisson核
    3.4.4 Gauss核
4 Fourier級数の収束
  4.1 Fourier級数の定義
  4.2 Fourier級数展開のDirichlet核
  4.3 Fourier級数に関するRiemannの局所性定理
  4.4 Fourier級数の収束 (Diniの条件)
  4.5 Besselの不等式
  4.6 区分的に連続微分可能な連続函数の場合
  4.7 一点でLipschitz条件を満たす函数の場合
  4.8 局所的に一様Lipschitz条件を満たす函数の場合
  4.9 Gibbs現象
5 三角函数へのFourier級数論の応用
  5.1 cosecとcotの部分分数展開
  5.2 sinの無限積表示
  5.3 ガンマ函数とsinの関係
  5.4 Wallisの公式
  5.5 Stirlingの近似公式

5.6 ゼータ函数の正の偶数での特殊値
5.7 Lobachevskyの公式
6 Poissonの和公式
6.1 Poissonの和公式とその証明
6.2 Theta zero value Θ(t) のモジュラー変換性
6.3 Lerchの超越函数へのPoissonの和公式の応用
6.3.1 Lerchの超越函数
6.3.2 Lipschitzの和公式＝Lerchの函数等式
6.3.3 Hurwitzの函数等式
6.3.4 Riemannのゼータ函数の函数等式

In [1]:

```
using Plots
gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn) = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    display("text/html", """<img src="data:$mime; base64,$base64">""")
end

using SymPy
#sympy[:init_printing](order="lex") # default
#sympy[:init_printing](order="rev-lex")

using SpecialFunctions
using QuadGK
```

1 Riemann-Lebesgueの定理

1.1 階段函数

空でない区間 I 上の函数で部分集合 A 上で 1, その外で 0 になる函数を $\chi_A(x)$ と書く:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A). \end{cases}$$

区間 I に含まれる**長さが有限**の区間 $I_1, \dots, I_n$ と数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ によって定まる函数

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_A(x) \quad (x \in I)$$

を区間 I 上の**階段函数**と呼ぶことにする.

f は区間 I 上の函数であるとする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある階段函数 $s(x)$ で

$$\|f - s\|_1 = \int_I |f(x) - s(x)|\, dx < \varepsilon$$

を満たすものが存在するとき, f は**階段函数で L^1 近似可能**であるということにする. ここで $I = [a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$ のとき, $\int_I$ の意味は $\int_I = \int_a^b$ であるとする. $a = -\infty$ であっても $b = \infty$ であっても構わないものとする.

問題: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 上の連続函数 $f(x)$ で $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ を満たすものは階段函数で L^1 近似可能であることを示せ.

解答例: 任意に $\varepsilon > 0$ を取る $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ より, 十分に $R > 0$ を大きくすると,

$$\int_{-\infty}^{-R} |f(x)|\, dx + \int_R^{\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx - \int_{-R}^{R} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$f(x)$ は $[-R,R]$ 上で一様連続なので, 正の整数 N を十分に大きくして, 区間 $[-R,R]$ を N 等分したものを $I_1,\dots,I_N$ として, $x_i \in I_i$ を任意に取ると,

$$|f(x)-f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4R} \quad (x \in I_i,\ i=1,\dots,N).$$

ここで, 例えば $\Delta = 2R/N$, $a_i = R + i\Delta$, $I_1 = [a_0, a_1)$, $\dots$, $I_{N-1} = [a_{N-2}, a_{N-1}])$, $I_N = [a_{N-1}, a_N]$ とおいたと考えてよい. このとき階段函数 $s(x)$ を

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\chi_{I_i}(x)$$

と定めると,

$$|f(x)-f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4R} \quad (-R \leqq x \leqq R).$$

このとき

$$\int_{-R}^{R} |f(x)-s(x)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{4R}2R = \frac{\varepsilon}{2}.$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\|f-s\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-s(x)|\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{-R} |f(x)-s(x)|\,dx + \int_{-R}^{R} |f(x)-s(x)|\,dx + \int_{R}^{\infty} |f(x)-s(x)|\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{-R} |f(x)|\,dx + \int_{-R}^{R} |f(x)-s(x)|\,dx + \int_{R}^{\infty} |f(x)|\,dx \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

これで示すべきことが示された. □

注意: この注意はLebesgue積分論の知識を前提とする. 一般に区間上の可測函数 $f(x)$ で

$$\int_I |f(x)|\,dx < \infty$$

を満たすものを, I 上の L^1 **函数** または**可積分函数**(もしくは**積分可能函数**)と呼ぶ. I 上 L^1 函数は I 上の階段函数で L^1 近似可能であることが知られている. □

補題(階段函数に関するRiemann-Lebesgueの定理): 区間 I 上の階段函数 $s(x)$ について

$$\int_I s(x)e^{ipx}\,dx \to 0 \quad (|p| \to \infty).$$

証明: $-\infty < a_j \leqq b_j < \infty$, $I_j = [a_j, b_j], [a_j, b_j), (a_j, b_j], (a_j, b_j)$ だとすると, $|p| \to \infty$ のとき,

$$\int_I \chi_{I_j}(x)e^{ips}\,dx = \int_{a_j}^{b_j} e^{ipx}\,dx = \left[\frac{e^{ipx}}{ip}\right]_{x=a_j}^{x=b_j} = \frac{e^{ipb_j}-e^{ipa_j}}{ip} \to 0.$$

階段函数は $\chi_{I_j}(x)$ の有限一次結合なので補題の結果が成立することもわかる. □

問題 $p \neq 0$ のとき, $-\infty < a \leqq b < \infty$ を満たす実数 a, b の取り方によらずに不等式

$$\left|\int_a^b e^{ipx}\,dx\right| \leqq \frac{2}{|p|}$$

が成立することを示し, このようなことが起こる理由について考えよ.

解答例:

$$\left|\int_a^b e^{ipx}\,dx\right| = \left|\frac{e^{ipb}-e^{ipa}}{ip}\right| \leqq \frac{|e^{ipb}|+|e^{ipa}|}{|p|} = \frac{2}{|p|}.$$

ただし, $\leqq$ では三角不等式を使った.

e^{ipx} は周期 $2\pi/|p|$ を持つ函数であり, ちょうど周期分だけ積分すると 0 になる性質を持っている:

$$\int_c^{c+2\pi/|p|} e^{ipx}\,dx = 0.$$

ゆえに, 整数 n で $a + 2\pi n/|p| \leqq |b|$ となる最大のものを N と書くと,

$$\int_a^b e^{ipx}\,dx = \int_{a+2\pi N/|p|}^b e^{ipx}\,dx, \quad b - \left(a + \frac{2\pi N}{|p|}\right) < \frac{2\pi}{|p|}.$$

これより,

$$\left|\int_a^b e^{ipx}\,dx\right| = \left|\int_{a+2\pi n/|p|}^b e^{ipx}\,dx\right| \leqq \int_{a+2\pi n/|p|}^b |e^{ipx}|\,dx = \int_{a+2\pi n/|p|}^b dx < \frac{2\pi}{|p|}.$$

これは上の問題の結果よりは荒い結果だが, この方法ではどのような仕組みで積分の絶対値の値が小さくなるかはよくわかる. 振動によってほとんど打ち消しあって消えて, 積分区間の端の部分で打ち消し合いが起こらない分だけ積分の値が生き残る. 打ち消し合いが不完全な積分区間の幅は小さくなり, 打ち消し合わずに生き残った積分の値の絶対値も小さくなる.

$\dfrac{2}{|p|}$ と $\dfrac{2\pi}{|p|}$ の違いは $\left|\displaystyle\int_{a+2\pi n/|p|}^b e^{ipx}\,dx\right|$ の評価を上よりも繊細に行えば解消できる. 次数 α, β に対して, $e^{i\alpha}$ と $e^{i\beta}$ の距離が最大で 2 にしかならないことが, $\dfrac{2}{|p|}$ の分子の 2 が出て来る理由になっている. □

In [2]:

```
# e^{ipx} を sin(px) に置き換えた場合の図

a = 0.0
b = 10.0
f(p,x) = sin(p*x)
maxa(a,b,p) = a + 2π/abs(p)*fld(b-a, 2π/abs(p))
x = a:0.01:b
PP = []
for p in [5, 20]
    xx = maxa(a,b,p):0.001:b
    P = plot(title="p = $p", titlefontsize=10)
    plot!(legend=false, ylims=(-1.05,1.05))
    plot!(x, f.(p,x))
    hline!([0], color=:cyan, ls=:dot)
    plot!(xx, f.(p,xx), color=:red, fill=(0, 0.5, :red))
    push!(PP, P)
end
plot(PP..., size=(700, 250))
```

Out[2]:

問題: $p \geqq 1$ であるとし, f は $\mathbb{R}$ 上の連続函数で $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\,dx < \infty$ を満たすものであるとする. このとき, $\mathbb{R}$ 上の階段函数 s で $\|f - s\|_p = \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - s(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \varepsilon$ を満たすものが存在することを示せ.

解答例: 任意に $\varepsilon > 0$ を取る.

$R > 0$ に対して, $f_R(x)$ を $|x| \leqq R$ のとき $f(x)$ と定め, $|x| > R$ のとき 0 と定める. このとき,

$$(\|f - f_R\|_p)^p = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_R(x)|^p\,dx = \int_{|x|>R} |f(x)|^p\,dx$$

より, $R \to \infty$ で $\|f - f_R\|_p \to 0$ となることがわかる. ゆえに $R > 0$ を十分に大きくすると, $\|f - f_R\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる.

区間 $[R, -R]$ 上の連続函数 $f_R(x)$ は階段函数 s で一様近似される. すなわち, ある階段函数 s が存在して, $\displaystyle\sup_{|x|\leqq R} |f(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2(2R)^{1/p}}$ となる. このとき, s を $\mathbb{R}$ 全体に $[-R, R]$ の外で 0 になるように拡張したものも s と書くと,

$$\|f_R - s\|_p = \left(\int_{-R}^{R} |f(x) - s(x)|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\frac{\varepsilon^p}{2^p(2R)} 2R\right)^{1/p} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Minkowskiの不等式より,

$$\|f - s\|_p \leqq \|f - f_R\|_p + \|f_R - s\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

注意: 上の問題は連続な L^p 函数が階段函数で L^p 近似されるということを意味する. 実際には任意の L^p 函数が階段函数で L^p 近似されることが示される. □

問題: f が L^p 函数であるとき, $y \to 0$ ならば $\|f(\cdot - y) - f\|_p \to 0$ となることを示せ.

略解例: f は階段函数で L^p 近似され, f が階段函数ならばこの問題の結論が成立することは容易に示されることから, f が一般の L^p 函数の場合に関するこの問題の結論が成立することが示される. □

1.2 Riemann-Lebesgueの定理とその証明

Riemann-Lebesgueの定理: f は区間 I 上の階段函数で L^1 近似可能な函数であるとする. (Lebesgue積分論を知っている人は, $f(x)$ は区間 I 上の L^1 函数であると仮定してもよい.) このとき,

$$\int_I f(x)e^{ipx}\,dx \to 0 \quad (|p| \to \infty).$$

証明: 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. $f(x)$ は階段函数で L^1 近似可能なので, ある階段函数 $s(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{I_i}(x)$ で

$$\|f - s\|_1 = \int_I |f(x) - s(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものが存在する. 階段函数に関する前節の補題より, ある $R > 0$ が存在して, $|p| \geqq R$ ならば

$$\left|\int_I s(x)e^{ipx}\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

そのとき,

$$\begin{aligned}
\left|\int_I f(x)e^{ipx}\,dx\right| &= \left|\int_I (f(x) - s(x))e^{ipx}\,dx + \int_I s(x)e^{ipx}\,dx\right| \\
&\leqq \left|\int_I (f(x) - s(x))e^{ipx}\,dx\right| + \left|\int_I s(x)e^{ipx}\,dx\right| \\
&\leqq \int_I |f(x) - s(x)|\,dx + \left|\int_I s(x)e^{ipx}\,dx\right| \\
&= \|f - s\|_1 + \left|\int_I s(x)e^{ipx}\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

これで $|p| \to \infty$ で $\displaystyle\int_I f(x)e^{ipx}\,dx \to 0$ となることがわかった. □

解説: Riemann-Lebesgueの定理(リーマン・ルベーグの定理)は $|p|$ を大きくすると, e^{ipx} が x についてより細かく振動するようになるので, e^{ipx} と積を取ってから積分すると, 実部と虚部それぞれの正の成分と負の成分が互いに打ち消され易くなって, 積分の絶対値の値が小さくなることを意味している. □

2 Fourier変換の逆変換の収束

2.1 Fourier変換とFourier逆変換の定義

$\mathbb{R}$ 上の函数 $f(x)$ の**Fourier変換** $\hat{f}(p)$ を次のように定義する:

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ipx}\,dx.$$

さらに $\mathbb{R}$ 上の函数 $g(p)$ の**Fourier逆変換** $\check{g}(x)$ を次のように定義する:

$$\check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(p)e^{2\pi ipx}\,dp.$$

$f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上の L^1 函数ならば, Lebesgueの収束定理より $\hat{f}(p)$ は p の連続函数になり, Riemann-Lebegueの定理より $|p| \to \infty$ で $\hat{f}(p) \to 0$ となる.

注意: Fourier変換とFourier逆変換を, 上の公式における p を $p/(2\pi)$ で置き換えることによって,

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ipx}\,dx, \quad \check{g}(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(p)e^{ipx}\,dp$$

と定義するスタイルもよく使われている. 他にも

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ipx}\,dx, \quad \check{g}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(p)e^{ipx}\,dp$$

と定義するスタイルも使われることがある. □

以下の節では, L^1 函数 $f(x)$ に対して,

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} \hat{f}(p)e^{ipx}\,dp$$

がいつ成立しているかを調べる.

2.2 Dirichlet核

Dirichlet核 $D_N(x)$ を

$$D_N(x) = \int_{-N}^{N} e^{2\pi ipx}\,dp = \left[\frac{e^{2\pi ipx}}{2\pi ix}\right]_{p=-N}^{p=N} = \frac{e^{e\pi iNx} - e^{-2\pi iNx}}{2\pi ix} = \frac{\sin(2\pi Nx)}{\pi x}$$

と定める. ただし, $D_N(0) = 2N$ と定めておく. $D_N(x)$ は有界な偶函数になる.

このとき

$$\begin{aligned}\int_{-N}^{N} \hat{f}(p)e^{2\pi ipx}\,dp &= \int_{-N}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi ipy}\,dy\right)e^{2\pi ipx}\,dp = \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{-N}^{N} e^{2\pi ip(x-y)}\,dp\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)D_N(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)D_N(y)\,dy.\end{aligned}$$

最後の等号で y を $x+y$ で置き換えて, $D_N(-y) = D_N(y)$ を使った.

問題: Dirichlet核のグラフを描け. □

解説: N が大きくなると, Dirichelt核 $D_N(x)$ のグラフの振動の仕方は細かくなり, $x = 0$ の近くでの値も大きくなる.

以下のセルを見よ. □

In [3]:

```
# ディリクレ核 D_N(x) のグラフ

D(N,x) = iszero(x) ? 2N : sin(2π*N*x)/(π*x)
PP = []
for N in [1,2,3,4,5,6]
    x = -6:0.01:6
    P = plot(x, D.(N,x), title="N=$N", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end
plot(PP[1:3]..., size=(750, 150), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[3]:

In [4]:

```
plot(PP[4:6]..., size=(750, 150), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[4]:

2.3 Dirichlet積分の公式

条件収束する広義積分に関する公式

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

より

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_N(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi Nx)}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi Nx)}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = 1.$$

三番目の等号で $x = t/(2\pi N)$ と置換して計算した. この公式は条件収束する積分の公式であることに注意せよ.

上の公式(**Dirichlet積分の公式**と呼ばれる)については

- 09 積分 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/09%20integration.ipynb)

のDirichlet積分とその一般化 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/09%20integration.ipynb#Dirichlet積分とその一般化)の解説を参照せよ.

Dirichlet積分の公式補足: 条件収束する広義積分に関する次の公式が成立している:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{\pi x}\,dx = \operatorname{sign}(a) = \begin{cases} 1 & (a<0) \\ 0 & (a=0) \\ -1 & (a>0). \end{cases}$$

証明: $a = 0$ のとき, 被積分函数が恒等的に 0 になるので, 積分も 0 になる. $a \neq 0$ と仮定する.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{\pi x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\,dx$$

であるから, $x = t/|a|$ と置換すると, $a/|a| = \operatorname{sign}(a)$ なので,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sign}(a)\sin(t)}{t}\,dt = \operatorname{sign}(a)\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sign}(a). \qquad \square$$

2.4 Riemannの局所性定理

Riemannの局所性定理: f は $\mathbb{R}$ 上の L^1 函数であるとし, $\delta > 0$ であるとする. このとき,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{-\delta} f(x+y)D_N(y)\,dy = 0, \qquad \lim_{N\to\infty}\int_{\delta}^{\infty} f(x+y)D_N(y)\,dy = 0$$

となる. これより, $\displaystyle\int_{-N}^{N}\hat{f}(p)e^{2\pi ipx}\,dp = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)D_N(y)\,dy$ が $N\to\infty$ で収束することと, $\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} f(x+y)D_N(y)\,dy$ が $N\to\infty$ で収束することは同値であり, 収束する場合には同じ値に収束することがわかる. 後者が収束するか否かおよび収束するとしたらどこに収束するかは x の近くでの函数 f の様子だけで決まることに注意せよ.

証明:

$$\int_{-\infty}^{-\delta} f(x+y)D_N(y)\,dy = \int_{-\infty}^{-\delta}\frac{f(x+y)}{y}\sin(2\pi Ny)\,dy,$$
$$\int_{\delta}^{\infty} f(x+y)D_N(y)\,dy = \int_{-\infty}^{-\delta}\frac{f(x+y)}{y}\sin(2\pi Ny)\,dy.$$

であり, 区間 $(-\infty,-\delta)$ と (δ,∞) のそれぞれの上で函数 $f(x+y)/y$ は L^1 函数なので, Riemann-Lebesgueの定理より, これらは $N\to\infty$ で 0 に収束する. $\square$

2.5 Fourier変換の逆変換の収束性 (Diniの条件)

補題: $\delta > 0$ のとき,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{-\delta} D_N(y)dy = 0, \qquad \lim_{N\to\infty}\int_{\delta}^{\infty} D_N(y)dy = 0.$$

注意: 条件収束する広義積分の極限に関する結果なのでRiemann-Lebesgueの定理を直接使用できない. $\square$

証明: $D_N(y)$ は偶函数なので後者のみを示せば十分である. Dirichlet積分の公式より $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_0^{2\pi N\delta}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$ なので, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{2\pi N\delta}^{\infty}\frac{\sin t}{\pi t}\,dt = 0$ となることがわかる. ゆえに, $y = t/(2\pi N)$ とおくと,

$$\int_{\delta}^{\infty} D_N(y)dy = \int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin(2\pi Ny)}{\pi y}\,dy = \int_{2\pi N\delta}^{\infty}\frac{\sin t}{\pi t}\,dt \to 0 \quad (N\to\infty). \qquad \square$$

定理(Diniの条件): f は $\mathbb{R}$ 上の L^1 函数であり, $x\in\mathbb{R}$ であるとする.とする. さらに, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$\int_0^\delta \frac{|(f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|}{y}\,dy < \infty \tag{$*$}$$

が成立していると仮定する. この条件($*$)を**Diniの条件**と呼ぶ. このとき,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\hat{f}(p)e^{2\pi ipx}\,dp = \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x+y)D_N(y)\,dy = f(x).$$

証明: $\displaystyle\int_{-N}^{N}\hat{f}(p)e^{2\pi ipx}\,dp - f(x)$ が $N\to\infty$ で 0 に収束することを示せばよい.

$$\begin{aligned}
\int_{-N}^{N}\hat{f}(p)e^{2\pi ipx}\,dp - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x+y)D_N(y)\,dy - f(x)\int_{-\infty}^{\infty} D_N(y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(f(x+y)-f(x))D_N(y)\,dy \\
&= \int_0^{\infty}(f(x+y)-f(x))D_N(y)\,dy + \int_{-\infty}^{0}(f(x+y)-f(x))D_N(y)\,dy \\
&= \int_0^{\infty}(f(x+y)-f(x))D_N(y)\,dy + \int_0^{\infty}(f(x-y)-f(x))D_N(y)\,dy \\
&= \int_0^{\infty}(f(x+y)+f(x-y)-2f(x))D_N(y)\,dy \\
&= \int_0^{\infty}\frac{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)}{y}\frac{\sin(2\pi Ny)}{\pi}\,dy = I_N + J_N.
\end{aligned}$$

ここで, I_N, J_N を次のように定義した:

$$\begin{aligned}
I_N &= \int_0^{\delta}\frac{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)}{y}\frac{\sin(2\pi Ny)}{\pi}\,dy, \\
J_N &= \int_{\delta}^{\infty}\frac{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)}{y}\frac{\sin(2\pi Ny)}{\pi}\,dy.
\end{aligned}$$

$N\to\infty$ のとき, Riemannの局所性定理とすぐ上の補題より $J_N\to 0$ となり, Diniの条件の仮定とRiemann-Lebesgueの定理より $I_N\to 0$ となる. これで示したいことが示せた. □

補足: もしも $f(x)$ とそのFourier変換 $\hat{f}(p)$ が両方可積分でかつ, $f(x)$ が x におけるDiniの条件を満たしているならば,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(p)e^{2\pi ipx}\,dp = f(x)$$

は絶対収束する積分の公式として成立している. □

例: f は $\mathbb{R}$ 上の L^1 函数であるとする. $y\searrow 0$ のとき $f(x+y), f(x-y)$ は収束していると仮定し, それぞれの収束先を $f(x+0), f(x-0)$ と書くことにする. さらに $y\searrow 0$ で $\dfrac{f(x+y)-f(x+0)}{y}$ と $\dfrac{f(x-y)-f(x-0)}{y}$ が収束していると仮定する. 特に f が x で微分可能ならばそれらの条件が成立している.

このとき, 十分小さな $\delta>0$ を取ると, $\dfrac{f(x+y)+f(x-y)-(f(x+0)+f(x-0))}{y}$ は $0<y<\delta$ で有界になり, 特にそこで可積分になる. ゆえに

$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

ならば, Diniの条件が満たされており, 上の定理より,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\hat{f}(p)e^{2\pi ipx}\,dp = \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x+y)D_N(y)\,dy = f(x)$$

となる. さらにもしも $\hat{f}(p)$ が可積分ならば

$$\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(p)e^{2\pi ipx}\,dp = f(x)$$

となる. □

例: $a>0$ であるとし, $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-a < x < a) \\ 1/2 & (a = \pm a) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定める. このとき, Diniの条件が満たされているので,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \hat{f}(p) e^{2\pi i p x}\, dp = f(x) \tag{$*$}$$

が成立している. これを直接の計算で確認してみよう.

$$\hat{f}(p) = \int_{-a}^{a} e^{-2\pi i p x}\, dx = \frac{e^{-2\pi i p a} - e^{2\pi i p a}}{-2\pi i p} = \frac{\sin(2\pi a p)}{\pi p}.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \int_{-N}^{N} \hat{f}(p) e^{2\pi i p x}\, dp &= \int_{-N}^{N} \frac{\sin(2\pi a p)}{\pi p} e^{2\pi i p x}\, dp = \int_{-N}^{N} \frac{\sin(2\pi a p)\cos(2\pi x p)}{\pi p}\, dp \\ &= \frac{1}{2}\int_{-N}^{N} \frac{\sin(2\pi(a+x)p) + \sin(2\pi(a-x)p)}{\pi p}\, dp. \end{aligned}$$

2つ目の等号で $e^{2\pi i p x} = \cos(2\pi x p) + i\sin(2\pi x p)$ と $\dfrac{\sin(2\pi a p)\sin(2\pi x p)}{\pi p}$ が p の奇函数であることを用いた. 3つ目の等号では三角函数の加法公式を使って示される $2\sin\alpha\,\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$ を用いた.

そして, Dirichlet積分の公式より,

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\int_{-N}^{N} \frac{\sin(2\pi(a+x)p)}{\pi p}\, dp &= \begin{cases} 1/2 & (x > -a) \\ 0 & (x = a) \\ -1/2 & (x < -a), \end{cases} \\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\int_{-N}^{N} \frac{\sin(2\pi(a-x)p)}{\pi p}\, dp &= \begin{cases} 1/2 & (x < a) \\ 0 & (x = a) \\ -1/2 & (x > a). \end{cases} \end{aligned}$$

以上を合わせると, 式($*$)が成立していることがわかる. □

3 たたみ込み積と総和核

3.1 たたみ込み積

$\mathbb{R}$ 上の函数 f, g の**たたみ込み積**(convolution) $f * g$ が次のように定義される:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\, dy.$$

たたみ込み積は函数と函数から函数を作る操作であることに注意せよ.

問題: f と g が $\mathbb{R}$ 上の可積分函数ならば $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f * g(x)|\, dx < \infty$ となることを示せ.

解答例:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f * g(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy \right| dx \leqq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\, dy \right) dx \\ &\leqq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dx \right) |g(y)|\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx \right) |g(y)|\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\, dy < \infty. \qquad \square \end{aligned}$$

注意: $\|f * g\|_1 \leqq \|f\|_1 \|g\|_1$ を示せた. □

問題: $p, p', q, q', r \geqq 1$ が

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$$

を満たしているならば,

$$\|f*g\|_r \leqq \|f\|_p\|g\|_q$$

となることを示せ.

解答例: f, g のそれぞれを $\dfrac{f}{\|f\|_p}, \dfrac{g}{\|g\|_q}$ で置き換えることによって, $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ と仮定できるので, そのように仮定する. このとき,

$$\left(1-\frac{p}{r}\right)q' = p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)q' = p\left(1-\frac{1}{q}\right)q' = p,$$
$$\left(1-\frac{q}{r}\right)p' = q\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)p' = q\left(1-\frac{1}{p}\right)p' = q$$

なので, Hölderの不等式と $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ より,

$$\begin{aligned}
|f*g(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy\right| \leqq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\,dy \\
&\leqq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r}\cdot|f(x-y)|^{1-p/r}\cdot|g(y)|^{1-q/r}\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r}\cdot|f(x-y)|^{p/q'}\cdot|g(y)|^{q/p'}\,dy \\
&\leqq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p|g(y)|^q\,dy\right)^{1/r}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p\,dy\right)^{1/q'}\left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|^q\,dy\right)^{1/p'} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p|g(y)|^q\,dy\right)^{1/r}.
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
(\|f*g\|_r)^r &= \int_{\mathbb{R}} |f*g(x)|^r\,dx \leqq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p|g(y)|^q\,dy\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p\,dx\right)|g(y)|^q\,dy = (\|f\|_p)^p(\|g\|_q)^q = 1.
\end{aligned}$$

これで示すべきことがすべて示された. □

問題: たたみ込み積が結合法則を満たしていることを積分の形式的計算で確認せよ.

解答例: $\varphi*\psi(\cdot) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\psi(\cdot-\xi)\,d\xi$ を繰り返し使うと,

$$\begin{aligned}
(f*g)*h(x) &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(z-y)h(x-z)\,dy\right)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(z-y)h(x-z)\,dz\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(z)h(x-y-z)\,dz\right)dy = f*(g*h)(x).
\end{aligned}$$

2つ目の等号で積分順序を交換し, 3つ目の等号で z を $y+z$ で置換した. □

3.2 総和核

$\delta > 0$ に対して, $\displaystyle\int_{|x|>\delta} f(x)\,dx$ を

$$\int_{|x|>\delta} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-\delta} f(x)\,dx + \int_{\delta}^{\infty} f(x)\,dx$$

と定義しておく. この記号法を使うと, 次の定義の記述を少し簡潔にできる.

定義: 以下の条件を満たす満たす $\mathbb{R}$ 乗の可積分函数の族 $\rho_t(x)$, $t > 0$ を**総和核**(summability kernel)と呼ぶ:

(S1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho_t(x)\,dx = 1.$

(S2) ある正の定数 C が存在して, 任意の $t > 0$ に対して $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\rho_t(x)|\,dx \leqq C.$

(S3) 任意の $\delta > 0$ に対して, $t \searrow 0$ のとき $\displaystyle\int_{|x|>\delta} |\rho_t(x)|\,dx \to 0$. □

この定義は, 猪狩惺著『実解析入門』岩波書店(1996年)の§6.5に書いてあるものに等しい.

注意: 大雑把に言えば, 総和核とは**Diracのデルタ函数**に「収束」するような函数族のことである. Diracのデルタ函数 $\delta(x)$ とは $f * \delta = f$ すなわち

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\delta(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\delta(x-y)\,dy = f(x)$$

を満たす「函数」のことである. 実際にはこのような「函数」は通常の函数としては存在しない. 所謂超函数として定義される. しかし, ρ_t を総和核とすれば, $t \searrow 0$ のとき適当な意味で $f * \rho_t \to f$ となることを示せる. より正確な内容については以下を参照せよ. □

例: $\rho(x)$ が $\mathbb{R}$ 上の可積分函数で $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$ を満たしているならば,

$$\rho_t(x) = \frac{1}{t}\rho\left(\frac{x}{t}\right), \qquad t > 0$$

によって総和核 $\rho_t(x)$ を構成できる. (S1)は $x = ty$ と置換すれば得られる:

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_t(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dx}{t} = \int_{\mathbb{R}} \rho(y)\,dy = 1.$$

(S2)は $x = ty$, $C = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\rho(y)|\,dy$ とおくと得られる:

$$\int_{\mathbb{R}} |\rho_t(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\rho\left(\frac{x}{t}\right)\right| \frac{dx}{t} = \int_{\mathbb{R}} |\rho(y)|\,dy = C.$$

(S3)を示そう. この場合も $x = ty$ と変換する. $R \to \infty$ のとき $\displaystyle\int_{-R}^{R} |\rho(y)|\,dy \to C$ なので, $t \searrow 0$ のとき,

$$\int_{|x|>\delta} |\rho_t(x)|\,dx = \int_{|y|>\delta/t} |\rho(y)|\,dy = C - \int_{-\delta/t}^{\delta/t} |\rho(y)|\,dy \to 0.$$

これで $\rho_t(x)$ が総和核であることがわかった. □

問題: $\rho_t(x)$ は総和核であると仮定し, f は $\mathbb{R}$ 上の連続函数であり、$|x| \to \infty$ のとき $f(x) \to 0$ となるものであると仮定する. このとき, $t \searrow 0$ で f と総和核 ρ_t たたみ込み積 $f * \rho_t$ が f に一様収束することを示せ.

解答例: $\varepsilon > 0$ であるとする.

$$|f * \rho_t(x) - f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x))\rho_t(y)\,dy\right| \leqq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)||\rho_t(y)|\,dy = I + J.$$

1つ目の等号で(S1)を使った. 最後の等号では

$$I = \int_{|y|\leqq\delta} |f(x-y) - f(x)||\rho_t(y)|\,dy, \quad J = \int_{|y|>\delta} |f(x-y) - f(x)||\rho_t(y)|\,dy$$

とおいた. f は $\mathbb{R}$ 上の一様連続函数になるので, (S2)を満たす正の定数 C を取ると, ある $\delta > 0$ が存在して, $|y - x| \leqq \delta$ ならば $|f(y) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2C}$ となる. このとき,

$$I \leqq \frac{\varepsilon}{2C}\int_{|y|<\delta} |\rho_t(y)|\,dy \leqq \frac{\varepsilon}{2C}C \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

f は有界な函数になるので, ある正の定数 M で $|f(x)| \leqq M$ $(x \in \mathbb{R})$ を満たすものが存在する. (S3)より, ある $\tau > 0$ が存在して, $0 < t < \tau$ ならば $\displaystyle\int_{|x|>\delta} |\rho_t(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{4M}$ となる. このとき, $|f(x-y) - f(x)| \leqq 2M$ となるので,

$$J \leqq 2M\int_{|y|>\delta} |\rho_t(y)|\,dy < 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

したがって, そのとき,

$$|f * \rho_t(x) - f(x)| = I + J < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで $t \searrow 0$ のとき, $f * \rho_t$ が f に一様収束することがわかった. □

問題: $p \geqq 1$ であるとし, f は L^p 函数であるとする. このとき, $t \searrow 0$ のとき $\|f * \rho_t - f\|_p \to 0$ となることを示せ.

解答例: $t \searrow 0$ で $(\|f * \rho_t - f\|_p)^p \to 0$ となることを示せばよい. p' を $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ という条件で定める. Hölderの不等式より,

$$\begin{aligned}
|f * \rho_t(x) - f(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(y))\rho_t(y)\,dy \right|^p \leqq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(y)||\rho_t(y)|\,dy \right)^p \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(y)||\rho_t(y)|^{1/p} \cdot |\rho_t(y)|^{1/p'}\,dy \right)^p \\
&\leqq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(y)|^p |\rho_t(y)|\,dy \left(\int_{\mathbb{R}} |\rho_t(y)|\,dy \right)^{p/p'} \\
&\leqq C^{p/p'} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(y)|^p |\rho_t(y)|\,dy.
\end{aligned}$$

これを x で積分すると,

$$(\|f * \rho_t - f\|_p)^p \leqq C^{p/p'} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p\,dx \right) |\rho_t(y)|\,dy = I + J.$$

ここで, I, J はそれぞれ $|y| > \delta$ と $|y| \leqq \delta$ における積分である. $y \to 0$ のとき $\|f(\cdot - y) - f\|_p \to 0$ となることより, C を条件(S2)の C であるとすると, ある $\delta > 0$ が存在して, $|y| \leqq \delta$ のとき $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{2C}$ となり,

$$J = \int_{-\delta}^{\delta} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p\,dx \right) |\rho_t(y)|\,dy \leqq \frac{\varepsilon}{2C} C \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$M = \|f\|_p$ とおくと, $\|f(\cdot - y) - f\|_p \leqq 2M$ となる. (S3)より, ある $\tau > 0$ が存在して, $0 < t < \tau$ のとき, $\displaystyle\int_{|y|>\delta} |\rho_t(y)\,dy < \frac{\varepsilon}{2(2M)^p}$ となるので,

$$I = \int_{|y|>\delta} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p\,dx \right) |\rho_t(y)|\,dy \leqq (2M)^p \frac{\varepsilon}{2(2M)^p} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

このとき,

$$(\|f * \rho_t - f\|_p)^p \leqq I + J \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで, $t \searrow 0$ のとき $\|f * \rho_t - f\|_p \to 0$ となることが示された. □

3.3 総和核とFourier展開の関係

仮に総和核 $\rho_t(x)$ が

$$\rho_t(x) = \int_{\mathbb{R}} W_t(p) e^{2\pi i p x}\,dp$$

と重み $W_t(p)$ によって表示されていたとする. このとき, 重み $W_t(p)$ によって制限された函数 $f(x)$ のFourier展開 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} W(p)\hat{f}(p)e^{2\pi i p x}\,dp$ は次のように表わされる:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p) e^{2\pi i p x} W_t(p)\,dp &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i p y}\,dy \right) e^{2\pi i p x} W_t(p)\,dp \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} W_t(p) e^{2\pi i p (x-y)}\,dp \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \rho_t(x+y)\,dy = f * \rho_t(x)
\end{aligned}$$

このように, 「重み $W_t(p)$ によってFourier展開された総和核と函数 f のたたみ込み積」は「重み $W_t(p)$ で制限された函数 f のFourier展開」になっている.

3.4 総和核の例

3.4.1 Dirichlet核は総和核ではない

Dirichlet核 $D_N(x)$ は区間 $[-N, N]$ 上で 1 でそれ以外の場所で 0 になるような重み函数によるFourier展開で定義されていた:

$$D_N(x) = \int_{-N}^{N} e^{2\pi ipx}\,dp = \left[\frac{e^{2\pi ipx}}{2\pi ix}\right]_{p=-N}^{p=N} = \frac{e^{e\pi iNx} - e^{-2\pi iNx}}{2\pi ix} = \frac{\sin(2\pi Nx)}{\pi x}.$$

$N = 1/t$ とおく. Dirichlet核 $D_{1/t}(x) = \dfrac{\sin(2\pi x/t)}{\pi x}$ はDirichlet積分の公式より, 任意の $\delta > 0$ について,

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_{1/t}(x)\,dx = 1, \qquad \int_{\delta}^{\infty} D_{1/t}(x)\,dx \to 0, \qquad \int_{-\infty}^{-\delta} D_{1/t}(x)\,dx \to 0 \quad (t \searrow 0)$$

を満たしているが, これらは条件収束する広義積分であり,

$$\int_{\mathbb{R}} |D_{1/t}(x)|\,dx = \infty$$

となっているので, このノートの意味での総和核ではない. Dirichlet核は足し上げる p の範囲を区間 $[-N, N]$ に単純に制限するという素朴で分かり易い考え方に基いて得られるが, 可積分函数にならない. このことがDirichlet核を用いたFourier解析を難しくしていると考えられる. 足し上げる p の範囲を単純に制限するのではなく, 適当な重みを付けて制限するという一般化を考えると, 様々な総和核が得られる.

3.4.2 Fejér核

重み函数 $\Delta_N(p)$ を

$$\Delta_N(p) = \max\left\{1 - \frac{|p|}{N}, 0\right\}$$

と定め, $N > 0$ に対して, **Fejér核** $F_N(x)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}
F_N(x) &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_N(p) e^{2\pi ipx}\,dp = \int_{-N}^{N} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) e^{2\pi ipx}\,dp \\
&= 2\int_0^N \left(1 - \frac{p}{N}\right)\cos(2\pi px)\,dp = 2N\int_0^1 (1-t)\cos(2\pi Ntx)\,dt \\
&= 2N\left[(1-t)\frac{\sin(2\pi Ntx)}{2\pi Nx}\right]_{t=0}^{t=1} + 2N\int_0^1 \frac{\sin(2\pi Ntx)}{2\pi Nx}\,dt \\
&= 2N\left[-\frac{\cos(2\pi Ntx)}{(2\pi Nx)^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1-\cos(2\pi Nx)}{2N(\pi x)^2} = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\pi Nx)}{\pi x}\right)^2.
\end{aligned}$$

5つ目の等号で部分積分を行い, 最後の等号で倍角の公式 $\cos(2X) = 1 - 2\sin^2 X$ を使った. 特にFejér核は正値函数である. そして, Dirichlet積分の公式より,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx &= \int_0^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x^2}\,dx \\
&= \left[\frac{-1}{2x}(1-\cos 2x)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-1}{2x}(2\sin 2x)\,dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(最後から2番目の等号で $x = t/2$ とおいた)を使えば, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} F_N(x)\,dx = 1$ であることも容易に確認できる.

Fejér核 $F_{1/t}(x)$ は総和核である.

In [5]:
```
# Δ_N(p) のグラフ
#
# N を大きくすると足し上げる p の範囲が拡大する.

Δ(N,p) = max(1-abs(p)/N, zero(p))
PP = []
for N in [1,3,8]
    p = -10:0.01:10
    P = plot(p, Δ.(N,p), title="N=$N", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end
plot(PP[1:3]..., size=(750, 150), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[5]:

(最後から2番目の等号で $x = 2t$ とおいた)を使えば, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} F_N(x)\,dx = 1$ であることも容易に確認できる.

Fejér核 $F_{1/t}(x)$ は総和核である.

In [6]:
```
# Fejér核のグラフ
#
# Dirichlet核よりも x=0 から離れた部分の値が急速に 0 に収束することがわかる.

F(N,x) = iszero(x) ? N : (sin(π*N*x)/(π*x))^2/N
PP = []
for N in [1,2,3,4,5,6]
    x = -6:0.01:6
    P = plot(x, F.(N,x), title="N=$N", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end
plot(PP[1:3]..., size=(750, 150), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[6]:

In [7]:
```
plot(PP[4:6]..., size=(750, 150), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[7]:

3.4.3 Poisson核

$t > 0$ に対して, Poisson核 $P_t(x)$ を次のように定める:

$$P_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2 + x^2} = \frac{1}{\pi t}\frac{1}{1 + (x/t)^2}.$$

これも総和核であり, 次のようにFourier展開される:

$$P_t(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{P}_t(p) e^{2\pi i p x}\,dp, \qquad \hat{P}_t(p) = e^{-2\pi t|p|}.$$

この公式を証明するためには,

$$\int_0^\infty e^{-2\pi t p}\cos(2\pi p x)\,dp = \frac{1}{2\pi}\frac{t}{t^2 + x^2}$$

を示せばよい. この公式は次の結果の実部に等しい:

$$\int_0^\infty e^{-2\pi t p} e^{2\pi i p x}\,dp = \int_0^\infty e^{-2\pi(t - ix)p}\,dp = \left[\frac{e^{-2\pi(t-ix)p}}{-2\pi(t - ix)}\right]_{p=0}^{p=\infty} = \frac{1}{2\pi(t - ix)}.$$

注意: Poisson核はCauchy分布の確率密度函数に等しい. 重み函数 $\hat{P}_t(p)$ はCauchy分布の特性函数とも呼ばれる. 確率論では確率分布の特性函数の形でFourier解析が利用されている. □

In [8]:

```
# Phat_t(p) のグラフ
#
# t > 0 を小さくすると足し上げる p の範囲が拡大する.

Phat(t,p) = exp(-2π*t*abs(p))
PP = []
for t in [0.5, 0.1, 0.05]
    p = -10:0.01:10
    P = plot(p, Phat.(t,p), title="t=$t", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end
plot(PP[1:3]..., size=(750, 150), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[8]:

In [9]:

```
# Poisson核のグラフ
#
# t > 0 を小さくすると x 軸上での広がりの範囲が狭くなる.

Poisson(t,x) = t/(t^2+x^2)/π
PP = []
for t in [0.5, 0.1, 0.05]
    x = -1:0.001:1
    P = plot(x, Poisson.(t,x), title="t=$t", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end
plot(PP[1:3]..., size=(750, 150), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[9]:

3.4.4 Gauss核

Gauss核 $G_t(x)$ を次のように定める:

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}$$

これは総和核であり, 次のようにFourier展開される:

$$G_t(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{G}_t(p)\, e^{2\pi i p x}\, dp, \qquad \hat{G}_t(p) = e^{-t(2\pi p)^2/2} = e^{-2t\pi^2 p^2}$$

注意: Gauss核は期待値0の分散 t の正規分布の確率密度函数に等しい. □

問題: Gauss核 $u = u(t,x) = G_t(x)$ が熱方程式 $u_t = \frac{1}{2} u_{xx}$ の解になっていることを示せ.

解答例: u を x で2回偏微分すると,

$$u_x = -\frac{x}{t}, \qquad u_{xx} = \left(-\frac{1}{t} + \frac{x^2}{t^2}\right) u.$$

$\frac{\partial}{\partial t} t^{-1/2} = -\frac{1}{2t} t^{-1/2}$ などを使うと,

$$u_t = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{2t^2}\right) u.$$

以上を比較すれば $u_t = \frac{1}{2} u_{xx}$ が得られる. □

注意: $t \searrow 0$ のとき $G_t(x) \to \delta(x)$ なので, Gauss核は熱方程式の基本解 (https://www.google.co.jp/search?q=%E7%86%B1%E6%96%B9%E7%A8%8B%E5%BC%8F%E3%81%AE%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E8%A7%A3)になっている. □

In [10]:
```
x = symbols("x", real=true)
p = symbols("p", real=true)
t = symbols("t", positive=true)
W(t,p) = simplify(integrate(exp(-x^2/(2t))*exp(-2*Sym(π)*im*p*x), (x,-oo,oo)))/sqrt(2*Sym(π)*t)
W(t,p)
```

Out[10]: $e^{-2\pi^2 p^2 t}$

In [11]:
```
G(t,x) = simplify(integrate(W(t,p)*exp(2*Sym(π)*im*p*x), (p,-oo,oo)))
G(t,x)
```

Out[11]:
$$\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2t}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}}$$

In [12]:
```
integrate(G(t,x), (x,-oo,oo))
```

Out[12]: 1

In [13]:
```
[
    factor(diff(G(t,x), x, x))/2
    factor(diff(G(t,x), t))
]
```

Out[13]:
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2t}}}{4\sqrt{\pi}t^{\frac{5}{2}}}\left(-t+x^2\right) \\ \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2t}}}{4\sqrt{\pi}t^{\frac{5}{2}}}\left(-t+x^2\right) \end{bmatrix}$$

In [14]:
```
# Ghat_t(p) のグラフ
#
# t > 0 を小さくすると足し上げる p の範囲が拡大する.

Ghat(t,p) = exp(-2t*π^2*p^2)
PP = []
for t in [0.1, 0.01, 0.004]
    p = -10:0.01:10
    P = plot(p, Ghat.(t,p), title="t=$t", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end
plot(PP[1:3]..., size=(750, 150), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[14]:

In [15]:
```
# Gauss核のグラフ
#
# t > 0 を小さくすると x 軸上での広がりの範囲が狭くなる.

G(t,x) = exp(-x^2/(2t))/√(2π*t)
PP = []
for t in [0.1, 0.01, 0.004]
    x = -1:0.001:1
    P = plot(x, G.(t,x), title="t=$t", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end
plot(PP[1:3]..., size=(750, 150), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[15]:

4 Fourier級数の収束

Fourier変換の逆変換の収束の議論とほぼ同じ議論を以下では行う.

以下の内容を超えるFourier級数論については, 猪狩惺著『実解析入門』岩波書店(1996)の第8.5節以降などを参照せよ.

4.1 Fourier級数の定義

$f(x)$ は周期 1 を持つ $\mathbb{R}$ 上の函数であり$(f(x+1)=f(x))$, $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx < \infty$ を満たしていると仮定する. このとき, 整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $f(x)$ の**Fourier係数** $a_k(f)$ を

$$a_k(f) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}\,dx$$

と定める. そして,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(f)e^{2\pi ikx}$$

を $f(x)$ の**Fourier級数展開**と呼ぶ.

4.2 Fourier級数展開のDirichlet核

Dirichlet核 $D_N(x)$ を

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ikx} = e^{-2\pi iNx}\frac{e^{2\pi i(2N+1)x}-1}{e^{2\pi ix}-1} = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$$

と定める. ただし, $x \in \mathbb{Z}$ のときには $D_N(x) = 2N+1$ と定めておく. $D_N(x)$ は有界な偶函数で周期 1 を持つ.

このとき,

$$\begin{aligned}\sum_{k=-N}^{N} a_k(f)e^{2\pi ikx} &= \sum_{k=-N}^{N}\left(\int_0^1 f(y)e^{2\pi iky}\,dy\right)e^{2\pi ikx} = \int_0^1 f(y)\left(\sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ik(x-y)}\,dx\right)dy \\ &= \int_0^1 f(y)D_N(x-y)\,dy = \int_{-1/2}^{1/2} f(x+y)D_N(y)\,dy.\end{aligned}$$

最後の等号で y を $x+y$ で置換し, $D_N(-y) = D_N(y)$ と $f(x+y)D_N(y)$ が y について周期 1 を持つ函数になることを用いた.

$$\int_0^1 D_N(y)\,dy = \sum_{k=-N}^{N}\int_0^1 e^{2\pi iky}\,dy = \int_0^1 1\,dy = 1.$$

問題: Fourier級数のDirichlet核のグラフを描け. □

解説: 上の $D_N(x)$ は $D_N(x+1) = D_N(x)$ を満たしているので, $-1/2 \leqq x \leqq 1/2$ でグラフを描けば十分である. $D_N(x)$ のグラフは N 個の山を持ち, 振動が細かくなり, N が大きくなると, $x=0$ の近くでは(より正確には整数の近くの x においては) $D_N(x)$ の値が大きくなり, 他での値は小さくなる.

次のセルを見よ. □

In [16]:

```
# フーリエ級数のディリクレ核 D_N(x) のグラフ

D(N,x) = iszero(x) ? 2N+1 : sin(π*(2N+1)*x)/(sin(π*x))
PP = []
for N in [1:6; 10; 20; 30]
    x = -0.5:0.001:0.5
    P = plot(x, D.(N,x), title="N=$N", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end
plot(PP[1:3]..., size=(750, 150), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[16]:

In [17]:

```
plot(PP[4:6]..., size=(750, 150), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[17]:

In [18]:

```
plot(PP[7:9]..., size=(750, 150), legend=false, layout=@layout([a b c]))
```

Out[18]:

問題: Fourier級数のDirichlet核 $D_N(x) = \dfrac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$ は上の方で示したように, $\int_0^1 D_N(x)\,dx = 1$ を満たしている. しかし, その絶対値 $|D_N(x)|$ の積分については,

$$\int_0^1 |D_N(x)|\,dx \to \infty \quad (N \to \infty)$$

が成立していることを示せ.

解答例: $|\sin(\pi x)| \leqq \pi|x|$ なので,

$$\int_0^1 |D_N(x)|\,dx = 2\int_0^{1/2} |D_N(x)|\,dx \geqq 2\int_0^{1/2} \frac{|\sin(\pi(2N+1)x)|}{\pi x}\,dx.$$

$x = t/(\pi(2N+1))$ と置換すると,

$$\begin{aligned} 2\int_0^{1/2} \frac{|\sin(\pi(2N+1)x)|}{\pi x}\,dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi(2N+1)/2} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2N+1}\int_{(k-1)\pi/2}^{k\pi/2} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \\ &\geqq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2N+1}\int_{(k-1)\pi/2}^{k\pi/2} \frac{|\sin t|}{k\pi/2}\,dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\int_0^{\pi/2}\sin t\,dt\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{1}{k} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

そして, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{1}{k} \sim \log(2N+1)$. 以上をまとめると,

$$\int_0^1 |D_N(x)|\,dx \geqq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{1}{k} \sim \log(2N+1).$$

これより, 左辺は $N \to \infty$ のとき $\log N$ 以上のオーダーで無限大に発散することがわかる. □

解説: $N \to \infty$ のとき, $\displaystyle\int_0^1 D_N(x)\,dx = 1$ の左辺の積分はそれぞれ $\infty, -\infty$ に発散する正と負の成分が互いにキャンセルすることによって有限の値が残るという計算になる. これが, Fourier級数の収束の理論がややこしくなる理由の1つであると考えられる. □

In [19]:

```
# ¦sin πx¦ ≤ π¦x¦ の確認

f(x) = abs(sin(π*x))
g(x) = π*abs(x)
x = -1/2:0.002:1/2
plot(size=(400, 250), legend=:top)
plot!(x, f.(x), label="¦sin(pi x)¦")
plot!(x, g.(x), label="pi ¦x¦")
```

Out[19]:

In [20]:

```
# ¦D_N(x)¦ の積分の漸近挙動の確認

D(N,x) = iszero(x) ? π*(2N+1) : sin(π*(2N+1)*x)/sin(π*x)
F(N) = quadgk(x-> abs(D(N,x)), 0, 1)[1]
G(N) = (2/π)^2*log(2N+1)+1
n = [1,2,3,6,10,20,30,60,100,200,300,600]
plot(size=(400,250), legend=:topleft, xlabel="N", xscale=:log)
plot!(n, F.(n), label="integal of ¦D_N(x)¦ from x=0 to 1", lw=2)
plot!(n, G.(n), label="(2/pi)^2*log(2N+1)+1", lw=2, ls=:dash)
```

Out[20]:

4.3 Fourier級数に関するRiemannの局所性定理

Riemannの局所性定理: f は $\mathbb{R}$ 上の周期 1 を持つ函数であり, $[0,1)$ 上で可積分であると仮定し, $0 < \delta < 1/2$ であるとする. このとき,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-1/2}^{-\delta} f(x+y)D_N(y)\,dy = 0, \quad \lim_{N\to\infty}\int_{\delta}^{1/2} f(x+y)D_N(y)\,dy = 0.$$

これより, $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} a_n(f)e^{2\pi ikx} = \int_{-1/2}^{1/2} f(x+y)D_N(y)\,dy$ が $N \to \infty$ で収束することと, $\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} f(x+y)D_N(y)\,dy$ が $N \to \infty$ で収束することは同値であり, 収束する場合には同じ値に収束することがわかる. 後者が収束するか否かは x の近くでの函数 f の様子だけで決まることに注意せよ.

証明:

$$\int_{-1/2}^{-\delta} f(x+y)D_N(y)\,dy = \int_{-1/2}^{-\delta} \frac{f(x+y)}{\sin(\pi y)}\sin(\pi(2N+1)y\,dy,$$
$$\int_{\delta}^{1/2} f(x+y)D_N(y)\,dy = \int_{\delta}^{1/2} \frac{f(x+y)}{\sin(\pi y)}\sin(\pi(2N+1)y\,dy.$$

であり, 区間 $(-1/2, -\delta)$, $(\delta, 1/2)$ で $\dfrac{f(x+y)}{\sin(\pi y)}$ は可積分なので, Riemann-Lebesgueの定理より, これらは $N \to \infty$ で 0 に収束する. □

4.4 Fourier級数の収束 (Diniの条件)

定理(Diniの条件): f は $\mathbb{R}$ 上の周期 1 を持つ函数であり, 区間 $[0, 1)$ 上で可積分であると仮定し, $x \in \mathbb{R}$ であるとする. さらに, $0 < \delta < 1/2$ を満たすある実数 δ が存在して,

$$\int_0^{\delta} \frac{|(f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|}{y}\,dy < \infty \tag{$*$}$$

が成立していると仮定する. この条件($*$)を**Diniの条件**と呼ぶ. このとき,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N} a_n(f)e^{2\pi ikx} = \lim_{N\to\infty}\int_{-1/2}^{1/2} f(x+y)D_N(y)\,dy = f(x).$$

証明: Fourier変換の場合と同様に計算すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^{N} a_n(f)e^{2\pi inx} - f(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x+y)D_N(y)\,dy - f(x)\int_{-1/2}^{1/2} D_N(y)\,dy \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} (f(x+y)-f(x))D_N(y)\,dy \\
&= \int_{0}^{1/2} (f(x+y)-f(x))D_N(y)\,dy + \int_{-1/2}^{0} (f(x+y)-f(x))D_N(y)\,dy \\
&= \int_{0}^{1/2} (f(x+y)-f(x))D_N(y)\,dy + \int_{0}^{1/2} (f(x-y)-f(x))D_N(y)\,dy \\
&= \int_{0}^{1/2} \frac{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)}{y}\frac{y}{\sin(\pi y)}\sin(\pi(2N+1)y)\,dy.
\end{aligned}$$

Diniの条件より, Riemann-Lebesgueの定理を使用できるので, これは $N \to \infty$ で 0 に収束することがわかる. □

例: $f(x)$ は周期 1 を持つ $\mathbb{R}$ 上の函数であり, $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx < \infty$ を満たしていると仮定し, 実数 x を任意に取る. $y \searrow 0$ のとき $f(x+y), f(x-y)$ は収束していると仮定し, それぞれの収束先を $f(x+0), f(x-0)$ と書くことにする. さらに $y \searrow 0$ で $\dfrac{f(x+y)-f(x+0)}{y}$ と $\dfrac{f(x-y)-f(x-0)}{y}$ が収束していると仮定する. 特に f が x で微分可能ならばそれらの条件が成立している.

このとき, 十分小さな $\delta > 0$ を取ると, $\dfrac{f(x+y)+f(x-y)-(f(x+0)+f(x-0))}{y}$ は $0 < y < \delta$ で有界になり, 特にそこで可積分になる. ゆえに

$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

ならば, Diniの条件が満たされており, 上の定理より,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N} a_n(f)e^{2\pi ikx} = \lim_{N\to\infty}\int_{-1/2}^{1/2} f(x+y)D_N(y)\,dy = f(x).$$

となる. □

4.5 Besselの不等式

定理: $a_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\,dx$ とおくとき, 整数 $a < b$ に対して,

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,dx \geqq \sum_{n=a}^{b} |a_n|^2.$$

証明: 複素数値函数の内積 (f,g) を $(f,g) = \displaystyle\int_0^1 \overline{f(x)}g(x)\,dx$ と定め, $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ とおくと, 整数 m,n に対して,

$$(e^{2\pi imx}, e^{2\pi inx}) = \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)x}\,dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

なので, $s(x) = \displaystyle\sum_{n=a}^{b} a_n e^{2\pi inx}$ とおくと,

$$(f,f) = \int_0^1 |f(x)|^2\,dx$$

$$(s,f) = \sum_{n=a}^{b} \overline{a_n} \int_0^1 e^{-2\pi inx} f(x)\,dx = \sum_{n=a}^{b} \overline{a_n} a_n = \sum_{n=a}^{b} |a_n|^2,$$

$$(s,s) = \sum_{m,n=a}^{b} \overline{a_m} a_n (e^{2\pi imx}, e^{2\pi inx}) = \sum_{m,n=a}^{b} \overline{a_m} a_n \delta_{m,n} = \sum_{n=a}^{b} |a_n|^2,$$

$$0 \leqq \|f-s\|^2 = \|f\|^2 - (s,f) - \overline{(f,s)} + \|s\|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2\,dx - \sum_{n=a}^{b} |a_n|^2.$$

これより, 示したい不等式が得られる. □

注意: Besselの不等式は内積に関する平易な線形代数に過ぎない. □

4.6 区分的に連続微分可能な連続函数の場合

$f(x)$ は周期1を持つ $\mathbb{R}$ 上の連続函数であり, $0 \leqq x_1 < x_1 < \cdots < x_r < 1, x_0 = x_r - 1$ でかつ x_j と整数の和になっていない x で f は C^1 級(すなわち微分可能で導函数が連続)になっていると仮定する. さらに, $h \searrow 0$ のとき,

$$\frac{f(x_j+h)-f(x_j)}{h} \to f'(x_j+0) \leftarrow f'(x_j+h), \qquad \frac{f(x_j-h)-f(x_j)}{-h} \to f'(x_j-0) \leftarrow f'(x_j-h).$$

と収束していると仮定する. この仮定は f の導函数の開区間 (x_{j-1}, x_j) への制限が自然に閉区間 $[x_{j-1}, x_j]$ 上に連続に拡張されることを意味している. このとき, $f(x)$ は**区分的に連続微分可能**もしくは区分的に C^1 級であるということにする.

$a_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\,dx$ とおく.

このとき, $f(x)$ はすべての実数 x についてDiniの条件を満たしているので,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2\pi inx} = f(x)$$

となる. そして, この場合にはより強く次が成立している.

定理: $f(x)$ が上の条件を満たしているとき, Fourier級数 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx}$ は f に一様絶対収束している.

証明: $b_n = \displaystyle\int_0^1 f'(x)e^{-2\pi inx}\,dx$ とおく. ここで, x が x_j と整数の和のとき $f'(x)$ の値は定義されていないが, 区間に分けて積分することによって b_n がwell-definedであることに注意せよ. このとき, 次のように部分積分を実行できることがわかる: $n \neq 0$ のとき,

$$a_n = \left[f(x)\frac{e^{-2\pi inx}}{-2\pi in}\right]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\frac{e^{-2\pi inx}}{-2\pi in}\,dx = \frac{b_n}{2\pi in}, \qquad |a_n| = \frac{|b_n|}{2\pi|n|}$$

Besselの不等式より,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 \leqq \int_0^1 |f'(x)|^2\,dx < \infty.$$

一般に非負の実数 α, β について $\alpha\beta \leqq \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$ なので, $n \neq 0$ のとき,

$$|a_n| = |n||a_n| \cdot \frac{1}{|n|} \leqq \frac{1}{2}\left(|n|^2|a_n|^2 + \frac{1}{|n|^2}\right).$$

したがって,

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| = |a_0| + \sum_{n\neq 0}^{\infty} |a_n| &\leqq |a_0| + \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}^{\infty}\left(|n|^2|a_n|^2 + \frac{1}{|n|^2}\right)\\ &\leqq |a_0| + \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{|b_n|^2}{(2\pi)^2} + \frac{1}{|n|^2}\right) < \infty.\end{aligned}$$

これで, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}$ が一様絶対収束していることがわかった. この級数は f に各点収束しているので, f に一様絶対収束していることが示されたことになる. □

4.7 一点でLipschitz条件を満たす函数の場合

定義: 函数 $f(x)$ が $x = x_0$ で指数 $\alpha > 0$ の**Lipschitz条件を満たす**とは, ある $C >$ と $\delta > 0$ が存在して, $|x - x_0| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x_0)| \leqq C|x - x_0|^\alpha$ が成立することであると定める. □

$f(x)$ が $x = x_0$ でLipschitz条件を満たしているならば, $f(x)$ は $x = x_0$ で連続になる.

函数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続でかつ $h \searrow 0$ における極限達

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \to f'(x_0+0), \qquad \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h} \to f'(x_0-0)$$

を持つならば, $x = x_0$ において指数 $\alpha = 1$ のLipschitz条件を満たす. 特に, $f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能ならば指数 $\alpha = 1$ のLipschitz条件を満たす.

$f(x)$ は周期1を持つ $\mathbb{R}$ 上の函数で $\int_0^1 |f(x)|\,dx < \infty$ を満たしており, $x = x_0$ で指数 $\alpha > 0$ のLipschitz条件を満たしていると仮定し, $a_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,e^{-2\pi i n x}\,dx$ とおく.

このとき, ある $C > 0$ と $\delta > 0$ が存在して, $|x - x_0| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x_0)| \leqq C|x - x_0|^\alpha$ となるので, $0 < y < \delta$ ならば

$$\frac{|f(x_0+y) + f(x_0-y) - 2f(x_0)|}{y} \leqq 2Cy^{\alpha-1}$$

となる. ゆえに

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0+y) + f(x_0-y) - 2f(x_0)|}{y}\,dy \leqq 2C\int_0^\delta y^{\alpha-1}\,dy = \frac{2C\delta^\alpha}{\alpha} < \infty$$

となって, $x = x_0$ におけるDiniの条件を満たしている. ゆえに

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2\pi i n x_0} = f(x_0)$$

が成立する.

4.8 局所的に一様Lipschitz条件を満たす函数の場合

補題: f は $\mathbb{R}$ 上の周期 1 を持つ函数で $\int_0^1 |f(x)|\,dx < \infty$ を満たすものであり, g は区間 $[a, b]$ 上の C^1 級函数であるとする. このとき, $|p| \to \infty$ のとき, 次の積分 J は x について一様に 0 に収束する:

$$J = \int_a^b f(x+y)g(y)e^{ipy}\,dy.$$

証明: 任意に $\varepsilon > 0$ を取る.

$M = \sup_{a \leqq y \leqq b} |g(y)|$ とおく. $f(x)$ を周期 1 を持つ C^1 級函数 $\tilde{f}$ で近似することによって, $\int_0^1 |f(x) - \tilde{f}(x)|\,dx < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ となるようにできる. このとき,

$$\left|\int_a^b (f(x+y) - \tilde{f}(x+y))g(y)e^{ipx}\right| \leqq M \int_0^1 |f(t) - \tilde{f}(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\tilde{f}(x)$ は C^1 級の周期函数なので有界函数になる. $K = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{f}(x)|$ とおく. $\dfrac{\partial}{\partial y}(\tilde{f}(x+y)g(y))$ は連続函数でかつ x について周期的なので $(x, y) \in \mathbb{R} \times [a, b]$ において, その絶対値は最大値 L を持つ.

$\tilde{f}(x+y)g(y)$ は y に関して C^1 級なので, 部分積分を行うと,

$$\int_a^b \tilde{f}(x+y)g(y)e^{ipx}\,dx = \left[\tilde{f}(x+y)g(y)\frac{e^{ipx}}{ip}\right]_{y=a}^{y=b} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{f}(x+y)g(y))\frac{e^{ipx}}{ip}\,dx$$

なので, $|p| > \dfrac{\varepsilon/2}{2KM + L(b-a)}$ とすると,

$$\left|\int_a^b \tilde{f}(x+y)g(y)e^{ipx}\,dx\right| \leqq \frac{2KM}{p} + \frac{L(b-a)}{p} = \frac{2KM + L(b-a)}{|p|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

そのとき,

$$|J| \leqq \left|\int_a^b (f(x+y) - \tilde{f}(x+y))g(y)e^{ipx}\right| + \left|\int_a^b \tilde{f}(x+y)g(y)e^{ipx}\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで J が $|p| \to 0$ で$(x\ )\,0$ に一様収束することがわかった.

定義: 函数 $f(x)$ が区間 I において指数 $\alpha > 0$ の**一様Lipschitz条件を満たす**とは, ある $C >$ と $\delta > 0$ が存在して, $x, x' \in I$ かつ $|x - x'| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| \leqq C|x - x'|^\alpha$ が成立することであると定める. □

C^1 函数は閉区間上で指数 $\alpha = 1$ の一様Lipschitz条件を満たす.

函数 $f(x)$ が区間 (a, x_0) と (x_0, b) 上で C^1 級でかつ $x = x_0$ で連続であり, $h \searrow 0$ における極限達

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \to f'(x_0+0) \leftarrow f'(x_0+h),$$
$$\frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h} \to f'(x_0-0) \leftarrow f'(x_0-h)$$

が存在するならば, $f(x)$ は区間 (a, b) に含まれる任意の閉区間上で一様Lipschitz条件を満たす.

定理: $f(x)$ は周期1を持つ $\mathbb{R}$ 上の函数で $\int_0^1 |f(x)|\,dx < \infty$ を満たしてるとし, $a_n = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\,dx$ とおく. さらに $f(x)$ は開区間 I 上で一様Liptschitz条件を満たしていると仮定する. このとき, $N \to \infty$ とすると $\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2\pi inx}$ は開区間 I 上で $f(x)$ に一様収束する.

証明: f の I 上における一様Lipschitz性より, ある $\alpha > 0$ と $C > 0$ と $\eta > 0$ が存在して, $x, x' \in I$ かつ $|x - x'| < \eta$ ならば $|f(x) - f(x')| \leqq C|x - x'|^\alpha$ となる.

一般に $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ のとき,

$$\sum_{k=-N}^{N} a_n(f)e^{2\pi inx} - f(x) = I + J,$$
$$I = \int_0^\delta \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)}{y}\frac{y}{\sin(\pi y)}\sin(\pi(2N+1)y)\,dy,$$
$$J = \int_\delta^{1/2} (f(x+y) + f(x-y) - 2f(x))\frac{1}{\sin(\pi y)}\sin(\pi(2N+1)y)\,dy.$$

が成立しているのであった.

$0 < y < \dfrac{1}{2}$ のとき, N によらずに

$$\frac{1}{\pi} < \frac{y}{\sin(\pi y)} < \frac{1}{2}, \qquad |\sin(\pi(2N+1)y)| \leqq 1$$

が成立しているので, $x \in I$ のとき, x から I の両端までの距離の小さい方を d とし, $0 < \delta < \min\left\{\frac{1}{2}, d, \eta\right\}$ とすると, f の I 上における一様Lipschitz性より,

$$\frac{|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|}{y} \leqq 2Cy^{\alpha-1} \quad (0 < y < \delta)$$

となるので,

$$|I| \leqq C\int_0^\delta y^{\alpha-1}\,dy = \frac{C\delta^\alpha}{\alpha}.$$

ゆえに, 必要なら $\delta > 0$ をさらに小さくすることによって, $|I| < \frac{\varepsilon}{2}$ となるようにできる. 上の補題によって, J は $N \to \infty$ で 0 に一様収束することがわかる. ゆえに(x と無関係の)ある N_0 が存在して $N \geqq N_0$ ならば $|J| < \frac{\varepsilon}{2}$ となるようにできる. そのとき,

$$\left|\sum_{k=-N}^{N} a_n(f)e^{2\pi inx} - f(x)\right| = |I| + |J| < \varepsilon.$$

これで $\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2\pi inx}$ は開区間 I 上で $f(x)$ に一様収束することを示せた. □

4.9 Gibbs現象

周期 1 を持つ函数 $b(x)$ を次のように定める:

$$b(x) = \frac{1}{2} - (x - \lfloor x \rfloor).$$

ここで $\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表わす. $b(x)$ のグラフの形は**のこぎり波**(sawtooth wave)と呼ばれることがある.

注意: Bernoulli多項式 $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ を用いると, $b(x) = -B_1(x - \lfloor x \rfloor)$ と書ける. $B_1(x - \lfloor x \rfloor)$ はEulerMaclaurinの和公式の $n = 1$ の場合に出て来る. この意味でのこぎり波はEuler-Maclaurinの和公式とも関係がある. □

$a_n = \int_0^1 b(x)e^{-2\pi inx}\,dx$ とおくと, $a_0 = 0$ であり, $n \neq 0$ のとき, 部分積分によって,

$$a_n = -\int_0^1 xe^{-2\pi inx}\,dx = -\left[x\frac{e^{-2\pi inx}}{-2\pi in}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-2\pi inx}}{-2\pi in}\,dx = \frac{1}{2\pi in}.$$

部分積分後の積分項は $n \neq 0$ なので消える. $b(x)$ のFourier級数の部分和は

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2\pi inx} = \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{2\pi inx}}{2\pi in} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n} = 2x\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sinc}(2\pi nx)$$

と書ける. ここで $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$ という記号法を用いた.

x が $b(x)$ の不連続点である整数に近いところのどこかで $b(x)$ の値との違いがある値以上になってしまう(overshootしてしまう)という現象を**Gibbs現象**と呼ぶ.

実際, $S_N(x)$ の $x = \frac{1}{2N}$ における値は $N \to \infty$ のとき $b(x+0) = \frac{1}{2}$ の $1.178979744\cdots$ 倍に収束する. (同様に $S_N(x)$ の $x = \frac{1}{2N}$ における値は $N \to \infty$ のとき $b(x-0) = -\frac{1}{2}$ の $1.178979744\cdots$ 倍に収束する.) このことは以下のようにして示される. $N \to \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} S_N\left(\frac{1}{2N}\right) &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n}{N}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n}{N}\right)\frac{\pi}{N} \\ &\to \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sinc}(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx \\ &= 0.5894898722\cdots = 1.178979744\cdots \times \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

注意: 0 に近い正の実数として $x = \dfrac{1}{2N}$ を選んだのは以下のような理由からである. 上と同様にして, 任意の $a > 0$ に対して $x = \dfrac{a}{2\pi N}$ とおいた場合を考えると, $N \to \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} S_N\left(\frac{a}{2N}\right) &= \frac{a}{N}\sum_{n=1}^{N}\operatorname{sinc}\left(\frac{a\pi n}{N}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\operatorname{sinc}\left(\frac{a\pi n}{N}\right)\frac{a\pi}{N} \\ &\to \frac{1}{\pi}\int_0^{a\pi}\operatorname{sinc}(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{a\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx \end{aligned}$$

となる. この積分は $a = 1$ のときに最大になる. □

注意(一般の場合): f は $\mathbb{R}$ 上の周期1を持つ函数で $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx < \infty$ を満たすものであるとする. 区間 $[a, x_0)$ と $(x_0, b]$ 上で f は C^1 級であり, $h \searrow 0$ における極限達

$$\begin{aligned} &f(x_0+h) \to f(x_0+0), \qquad f(x_0-h) \to f(x_0-0), \\ &\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h} \to f'(x_0+0) \leftarrow f'(x_0+h) \\ &\frac{f(x_0-h)-f(x_0-0)}{-h} \to f'(x_0-0) \leftarrow f'(x_0-h) \end{aligned}$$

が存在すると仮定する. さらに $f(x_0+0) > f(x_0-0)$ であり, $f(x_0) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ であると仮定する.

このとき, f のFourier級数の部分和も $x = x_0$ の近くでGibbs現象を引き起こす.

なぜならば, 函数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x) - (f(x_0+0) - f(x_0-0))s(x-x_0)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} g(x_0+0) &= f(x_0+0) - \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2} = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = f(x_0), \\ g(x_0-0) &= f(x_0-0) + \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2} = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = f(x_0) \end{aligned}$$

となり, g は x_0 を含むある開区間 I で指数 1 の一様Lipschitz条件を満たすことがわかる. ゆえに, g のFourier級数の部分和は I 上で g に一様収束する. そして,

$$f(x) = (f(x_0+0) - f(x_0-0))s(x-x_0) + g(x)$$

であり, $(f(x_0+0) - f(x_0-0))s(x-x_0)$ のFourier級数の部分和が $x = x_0$ の近くでGibbs現象を引き起こすことが上の方の具体的な計算でわかっているので, $f(x)$ の Fourier級数の部分和も $x = x_0$ の近くでGibbs現象を引き起こすことがわかる. □

In [21]:

```
# (1/π)∫_0^{aπ} sinc(x) dx のグラフ

f(a) = quadgk(x->sin(x)/x, eps(), a*π)[1]/π
a = 0.2:0.01:6
plot(size=(400,250), legend=false, xlims=(0,maximum(a)))
plot!(title="(1/pi) int_0^{a pi} sin(x)/x dx", titlefontsize=11)
plot!(xlabel="a")
plot!(a, f.(a))
```

Out[21]:

In [22]:

```
# のこぎり波のグラフ

sawtooth(x) = 1/2 - (x - floor(x))
x = -2:0.01:1.99
plot(x, sawtooth.(x), legend=false, size=(400, 150))
hline!([0], ls=:dot, color=:black)
```

Out[22]:

In [23]:

```
# のこぎり波のGibbs現象
#
# Fourier級数の部分和が不連続点で上下にオーバーシュートしている.

sawtooth(x) = 1/2 - (x - floor(x))
S(N,x) = sum(n->sin(2π*n*x)/(π*n), 1:N)
PP = []
for N in [10, 20, 50, 100]
    x = -1:0.0005:0.99
    P = plot(legend=false, ylims=(-0.61, 0.61))
    plot!(x, sawtooth.(x))
    plot!(x, S.(N, x))
    plot!(title="N=$N", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)

    x = -0.01:0.0005:0.2
    P = plot(legend=false, ylims=(0.28, 0.61))
    plot!(x, sawtooth.(x))
    plot!(x, S.(N, x))
    plot!(title="N=$N", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end

plot(PP[1:2]..., size=(500, 200), layout=@layout([a b{0.3w}]))
```

Out[23]:

In [24]:

```
plot(PP[3:4]..., size=(500, 200), layout=@layout([a b{0.3w}]))
```

Out[24]:

In [25]:

```
plot(PP[5:6]..., size=(500, 200), layout=@layout([a b{0.3w}]))
```

Out[25]:

In [26]:

```
plot(PP[7:8]..., size=(500, 200), layout=@layout([a b{0.3w}]))
```

Out[26]:

例(矩形波): 矩形波 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x - \lfloor x \rfloor = 0) \\ 1 & (0 < x - \lfloor x \rfloor < 1/2) \\ 0 & (x - \lfloor x \rfloor = 1/2) \\ -1 & (1/2 < x - \lfloor x \rfloor < 1) \end{cases}$$

と定めると,

$$4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2k-1)x)}{\pi(2k-1)} = f(x).$$

以下のセルにおけるプロットを見よ. □

In [27]:

```
# 矩形波のGibbs現象
#
# Fourier級数の部分和が不連続点で上下にオーバーシュートしている.

squarewave(x) = (x - floor(x) ≤ 1/2) ? one(x) : -one(x)
S(K,x) = 4*sum(k->sin(2π*(2k-1)*x)/(π*(2k-1)), 1:K)
PP = []
for K in [5, 10, 25, 50]
    x = -1:0.0005:0.99
    P = plot(legend=false, ylims=(-1.22, 1.22))
    plot!(x, squarewave.(x))
    plot!(x, S.(K, x))
    plot!(title="K=$K", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)

    x = -0.01:0.0005:0.2
    P = plot(legend=false, ylims=(0.7, 1.22))
    plot!(x, squarewave.(x))
    plot!(x, S.(K, x))
    plot!(title="K=$K", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end

plot(PP[1:2]..., size=(500, 200), layout=@layout([a b{0.3w}]))
```

Out[27]:

In [28]:

```
plot(PP[3:4]..., size=(500, 200), layout=@layout([a b{0.3w}]))
```

Out[28]:

In [29]:

```
plot(PP[5:6]..., size=(500, 200), layout=@layout([a b{0.3w}]))
```

Out[29]:

In [30]:

```
plot(PP[7:8]..., size=(500, 200), layout=@layout([a b{0.3w}]))
```

Out[30]:

例: 周期1を持つ函数 $f(x)$ を次のように定める:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & (x - \lfloor x \rfloor = 0) \\ 1/2 & (0 < x - \lfloor x \rfloor < 1/4) \\ 0 & (x - \lfloor x \rfloor = 1/4) \\ -1/2 & (1/4 < x - \lfloor x \rfloor < 1/2) \\ -1/4 & (x - \lfloor x \rfloor = 1/2) \\ 0 & (1/2 < x - \lfloor x \rfloor < 1). \end{cases}$$

このとき,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(2\pi(2k-1)x)}{\pi(2k-1)} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(4l-2)x)}{\pi(2l-1)} = f(x).$$

部分和 $S_{M,N}(x)$ を

$$S_{M,N}(x) = \sum_{k=1}^{M} (-1)^{k-1} \frac{\cos(2\pi(2k-1)x)}{\pi(2k-1)} + \sum_{l=1}^{N} \frac{\sin(2\pi(4l-2)x)}{\pi(2l-1)}$$

と定める. このとき, $S_{N,N}(x)$ として, cos と sin の和の個数を同じにすると, $x - \lfloor x \rfloor = 3/4$ にノイズが出てしまう. 正しい部分和は $S_{2N,N}(x)$ の方である. 以下のセルのプロットを見よ. □

In [31]:

```
function f(x)
    xx = x - floor(x)
    xx == 0 && return 1/4
    0 < xx < 1/4 && return 1/2
    xx == 1/2 && return 0.0
    1/4 < xx < 1/2 && return -1/2
    xx == 1/2 && return -1/4
    1/2 < xx && return 0.0
end
S(M,N,x) = sum(m->(-1)^(m-1)*cos(2π*(2m-1)x)/(π*(2m-1)), 1:M) + sum(n->sin(2π*(4n-2)*x)/(π*(2n-1)), 1:N)

PP = []
for N in [15, 45]
    M = N
    x = -1.0:0.0005:0.9995
    P = plot(legend=false)#, ylims=(-0.61, 0.61))
    plot!(x, f.(x))
    plot!(x, S.(M, N, x))
    plot!(title="(M,N)=($M,$N)", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)

    x = 0.6:0.0005:0.9
    P = plot(legend=false, ylims=(-0.2, 0.2))
    plot!(x, f.(x))
    plot!(x, S.(M, N, x))
    plot!(title="(M,N)=($M,$N)", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)

    x = -0.01:0.0005:0.26
    P = plot(legend=false, ylims=(0.35, 0.61))
    plot!(x, f.(x))
    plot!(x, S.(M, N, x))
    plot!(title="(M,N)=($M,$N)", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end

plot(PP[1:3]..., size=(640, 200), layout=@layout([a b{0.2w} c{0.3w}]))
```

Out[31]:

In [32]:

```
plot(PP[4:6]..., size=(640, 200), layout=@layout([a b{0.2w} c{0.3w}]))
```

Out[32]:

In [33]:

```
PP = []
for N in [10, 30]
    M = 2N
    x = -1.0:0.0005:0.9995
    P = plot(legend=false)#, ylims=(-0.61, 0.61))
    plot!(x, f.(x))
    plot!(x, S.(M, N, x))
    plot!(title="(M,N)=($M,$N)", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)

    x = 0.6:0.0005:0.9
    P = plot(legend=false, ylims=(-0.2, 0.2))
    plot!(x, f.(x))
    plot!(x, S.(M, N, x))
    plot!(title="(M,N)=($M,$N)", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)

    x = -0.01:0.0005:0.26
    P = plot(legend=false, ylims=(0.35, 0.61))
    plot!(x, f.(x))
    plot!(x, S.(M, N, x))
    plot!(title="(M,N)=($M,$N)", titlefontsize=10)
    push!(PP, P)
end

plot(PP[1:3]..., size=(640, 200), layout=@layout([a b{0.2w} c{0.3w}]))
```

Out[33]:

In [34]:
```
plot(PP[4:6]..., size=(640, 200), layout=@layout([a b{0.2w} c{0.3w}]))
```

Out[34]:

5 三角函数へのFourier級数論の応用

5.1 cosecとcotの部分分数展開

整数ではない実数 t に対して, $-1/2 \leqq x < 1/2$ 上の函数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{2\pi i t x} \qquad (-1/2 \leqq x < 1/2)$$

と定め, 周期 1 で $\mathbb{R}$ 上の函数に拡張したものを $f(x)$ と書くことにする.

このとき, $f(x)$ のFourier係数は次のように計算される:

$$a_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i t x} e^{-2\pi n x}\, dx = \left[\frac{e^{2\pi i (t-n)x}}{2\pi i (t-n)}\right]_{x=-1/2}^{x=1/2} = \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)} = (-1)^n \frac{\sin(\pi t)}{\pi(t-n)}.$$

したがって, $-1/2 < x < 1/2$ のとき, 次の等式が成立している:

$$\begin{aligned} e^{2\pi i t x} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n(f) e^{2\pi i n x} = \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n e^{2\pi i n x}}{t-n} \\ &= \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\left[\frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e^{2\pi i n x}}{t-n} + \frac{e^{-2\pi i n x}}{t+n}\right)\right]. \end{aligned}$$

この等式の両辺の実部と虚部を比較することによって, $-1/2 < x < 1/2$ のとき,

$$\begin{aligned} \cos(2\pi t x) &= \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\left[\frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\cos(2\pi n x)}{t-n} + \frac{\cos(2\pi n x)}{t+n}\right)\right], \\ \sin(2\pi t x) &= \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sin(2\pi n x)}{t-n} - \frac{\sin(2\pi n x)}{t+n}\right). \end{aligned}$$

前者で $x = 0$, $x \to 1/2$ とすると, 以下の結果が得られる:

$$\begin{aligned} \pi \operatorname{cosec}(\pi t) &= \frac{\pi}{\sin(\pi t)} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{t-n} + \frac{1}{t+n}\right), \\ \pi \cot(\pi t) &= \frac{\pi \cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{t-n} + \frac{1}{t+n}\right). \end{aligned}$$

5.2 sinの無限積表示

$\dfrac{d}{dt}\log\sin(\pi t) = \pi\cot(\pi t)$ と $\dfrac{d}{dt}\log(\pi t) = \dfrac{1}{t}$ と $\pi\cot(\pi t)$ の部分分数展開の公式より,

$$\frac{d}{dt}\log\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{t-n} + \frac{1}{t+n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1/n}{1-t/n} + \frac{1/n}{1+t/n}\right).$$

両辺を $t = 0$ から $t = s$ まで積分すると, $t \searrow 0$ で $\log\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} \to \log 1 = 0$ となることより,

$$\log\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(1 - \frac{s}{n}\right) + \log\left(1 + \frac{s}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right).$$

すなわち,

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right).$$

この公式を**sinの無限積表示**, **sinの無限乗積展開**などと呼ぶことにする.

5.3 ガンマ函数とsinの関係

ガンマ函数は次の表示を持つのであった:

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s n!}{s(1+s)(2+s)\cdots(n+s)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{s\,(1+s)\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{n}\right)},$$
$$\Gamma(1-s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-s} n!}{(1-s)(2-s)\cdots(n+1-s)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-s}}{(1-s)\left(1-\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{s}{n}\right)\left(1+\frac{1-s}{n}\right)},$$

ゆえに, sin の無限積表示も使うと,

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \lim_{n\to\infty} s\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{s}{k}\right)\left(1-\frac{s}{k}\right)\right) = s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi}.$$

さらに $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = B(s,1-s) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{1+t} = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}}$ なので以下の総まとめ的な公式が得られる:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = B(s,1-s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{1+t} = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad (0<s<1).$$

$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$ は **Euler's reflection formula** と呼ばれる. これより, 例えば,

$$\Gamma(1/2)^2 = B(1/2,1/2) = 2\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \pi,$$
$$\Gamma(1/3)\Gamma(2/3) = B(1/3,2/3) = 3\int_0^\infty \frac{du}{1+u^3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$
$$\Gamma(1/4)\Gamma(3/4) = B(1/4,3/4) = 4\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4} = \sqrt{2}\,\pi,$$
$$\Gamma(1/6)\Gamma(5/6) = B(1/6,5/6) = 6\int_0^\infty \frac{du}{1+u^6} = 2\pi.$$

5.4 Wallisの公式

sin の無限乗積展開

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right).$$

で $s = 1/2$ とおくと,

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)(2n)}.$$

すなわち,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2n)(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

これを**Wallisの公式**と呼ばれる. さらに, これ

$$2\cdot 4\cdots(2n) = 2^n n!, \quad 1\cdot 3\cdots(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad 3\cdot 5\cdots(2n+1) = (2n+1)\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

より

$$\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2n)(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)$$

これが $\dfrac{\pi}{2}$ に収束することとWallisの公式は同値である. そして, これは

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

と同値であることもわかる. これもWallisの公式と呼ばれる.

5.5 Stirlingの近似公式

$\log n! = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n$ の $\log x$ の積分による近似を精密に実行すればStirlingの公式

$$\log n! = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \log\sqrt{2\pi} + o(1) \tag{$*$}$$

が得られることを説明しよう. $\log\sqrt{2\pi}$ の定数項を得るためにWallisの公式を使うことになる.

正の整数 k に対して,

$$a_{2k-1} = \frac{1}{2}\log k - \int_{k-1/2}^{k} \log x\,dx, \quad a_{2k} = \int_{k}^{k+1/2} \log x\,dx - \frac{1}{2}\log k$$

とおく. $\log x$ が単調増加函数であることより, $a_n > 0$ となり, さらに $\log x$ が上に凸な函数であることより, a_n が単調減少することがわかる. $\log x$ の導函数 $1/x$ は $x \to \infty$ で 0 に収束することから $a_n \to 0$ となることもわかる. ゆえに a_n 達から作られる交代級数は収束する. そして, そのとき,

$$\log k = \int_{k-1/2}^{k+1/2} \log x\,dx + a_{2k-1} - a_{2k}$$

なので

$$\begin{aligned}\log n! = \sum_{k=1}^{n} \log k &= \frac{1}{2}\log 1 + \int_{1}^{n} \log x\,dx + \frac{1}{2}\log n + \sum_{j=2}^{2n-1}(-1)^{j-1}a_j \\ &= n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\log n + \sum_{j=2}^{2n-1}(-1)^{j-1}a_j.\end{aligned}$$

ゆえに $c_n = 1 + \sum_{j=2}^{2n-1}(-1)^{j-1}a_j$ とおくと,

$$\log n! = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + c_n.$$

c_n は上で述べたことより, 収束する交代級数として, $n \to \infty$ で収束する. その収束先 c を求めよう. Wallisの公式

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

に $(2n)! = (2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}\,e^{c_{2n}}$, $n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}\,e^{c_n}$ を代入すると

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sim \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}\,e^{c_{2n}}}{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}n\,e^{2c_n}} = \sqrt{\frac{2}{n}}\,e^{c_{2n}-2c_n}$$

なので, 両辺を $\sqrt{\frac{2}{n}}$ で割って, $n \to \infty$ とすると,

$$e^{-c} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

すなわち, $c = \log\sqrt{2\pi}$ であることがわかった. これで, Stirlingの公式$(*)$が証明された.

In [35]:
```
n = big"1000000"
Float64(factorial(n)/(n^n*e^(-n)*√n)), √(2π)
```

Out[35]:
```
(2.5066284835166988, 2.5066282746310002)
```

In [36]:
```
u = symbols("u", positive=true)
[integrate(k/(1+u^k), (u, 0, oo)) for k in 2:6]
```

Out[36]:

$$\left[\begin{array}{c}\pi\\ \frac{2\pi}{3}\sqrt{3}\\ \sqrt{2}\pi\\ \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{-\sqrt{5}+5}}\\ 2\pi\end{array}\right]$$

5.6 ゼータ函数の正の偶数での特殊値

問題: sin の無限乗積展開を用いて, $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ を求めよ.

解答例: sin のMaclaurin展開を使うと,

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2}{6}x^2 + O(x^4).$$

sin の無限乗積展開を使うと,

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)x^2 + O(x^4).$$

これらを比較すると,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad \square$$

問題: sin の無限乗積展開を用いて, $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ を求めよ.

解答例: sin のMaclaurin展開を使うと,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\frac{\sin(\pi i x)}{\pi(ix)} &= \left(1 - \frac{\pi^2}{6}x^2 + \frac{\pi^4}{120}x^4 + O(x^6)\right)\left(1 + \frac{\pi^2}{6}x^2 + \frac{\pi^4}{120}x^4 + O(x^6)\right)\\ &= 1 - \frac{\pi^4}{90}x^4 + O(x^6).\end{aligned}$$

sin の無限乗積展開を使うと,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\frac{\sin(\pi i x)}{\pi(ix)} &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^4}{n^4}\right)\\ &= 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right)x^4 + O(x^8).\end{aligned}$$

これらを比較すると,

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \qquad \square$$

In [37]:
```
x = symbols("x")
f(x) = sin(π*x)/(π*x)
series(f(x), x, n=10)
```

Out[37]:

$$1 - \frac{\pi^2x^2}{6} + \frac{\pi^4x^4}{120} - \frac{\pi^6x^6}{5040} + \frac{\pi^8x^8}{362880} + \mathcal{O}\left(x^{10}\right)$$

In [38]:
```
x = symbols("x")
f(x) = sin(π*x)/(π*x)
series(f(x)*f(im*x), x, n=12)
```

Out[38]:
$$1 - \frac{\pi^4 x^4}{90} + \frac{\pi^8 x^8}{113400} + \mathcal{O}\left(x^{12}\right)$$

In [39]:
```
x = symbols("x")
f(x) = sin(π*x)/(π*x)
ω = exp(im*Sym(π)/4)
series(f(x)*f(ω*x)*f(ω^2*x)*f(ω^3*x), x, n=24)
```

Out[39]:
$$1 - \frac{\pi^8 x^8}{9450} + \frac{59\pi^{16}}{1302566265000} x^{16} + \mathcal{O}\left(x^{24}\right)$$

注意: 上のセルの計算結果を使うと, $\zeta(8) = \dfrac{\pi^8}{9450}$ を示せる. □

In [40]:
```
x = symbols("x")
f(x) = sin(π*x)/(π*x)
ω = exp(im*Sym(π)/8)
@time series(prod(f(ω^k*x) for k in 0:7), x, n=48)
```

```
12.394499 seconds (22.61 k allocations: 1.139 MiB)
```

Out[40]:
$$1 - \frac{3617\pi^{16}}{325641566250} x^{16} + \frac{67323341\pi^{32}}{357086974691556235470093750 00} x^{32} + \mathcal{O}\left(x^{48}\right)$$

注意: 上のセルの計算結果を使うと, $\zeta(16) = \dfrac{3617\pi^{16}}{325641566250}$ を示せる. □

注意: より一般に

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1}(-1)^{k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}$$

を示せる. 実は sin の無限乗積展開を用いるよりも, cot の部分分数展開を用いた方がこの公式を得ることは易しい(少し下の方にある問題の解答例を見よ). ここで, B_n は次のように定義されるBernoulli数である:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

n が 3 以上の奇数ならば $B_n = 0$ となり, 例えば,

$$\begin{aligned}
&B_0 = 1,\ B_1 = -1/2, \\
&B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30}, \\
&B_{10} = \frac{5}{66},\ B_{12} = -\frac{691}{2730},\ B_{14} = \frac{7}{6},\ B_{16} = -\frac{3617}{510},\ \ldots
\end{aligned}$$

これより,

$$\zeta(2) = \frac{2(1/6)}{2!}\pi^2 = \frac{\pi^2}{6},$$
$$\zeta(4) = \frac{2^2(1/30)}{4!}\pi^4 = \frac{\pi^4}{90},$$
$$\zeta(6) = \frac{2^3(1/42)}{6!}\pi^6 = \frac{\pi^6}{945},$$
$$\zeta(8) = \frac{2^4(1/30)}{8!}\pi^8 = \frac{\pi^8}{9450},$$
$$\zeta(10) = \frac{2^5(5/66)}{10!}\pi^8 = \frac{\pi^{10}}{93555},$$
$$\zeta(12) = \frac{2^6(691/2730)}{12!}\pi^8 = \frac{691\pi^{12}}{638512875},$$
$$\zeta(14) = \frac{2^7(7/6)}{14!}\pi^8 = \frac{2\pi^{14}}{18243225},$$
$$\zeta(16) = \frac{2^8(3617/510)}{16!}\pi^{16} = \frac{3617\pi^{16}}{325641566250}, \quad \ldots$$

In [41]:
```
BernoulliNumber(n) = sympy[:bernoulli](n)
[BernoulliNumber(n) for n in 0:8]
```

Out[41]:
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{30} \\ 0 \\ \frac{1}{42} \\ 0 \\ -\frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

In [42]:
```
BernoulliNumber(n) = sympy[:bernoulli](n)
B = [BernoulliNumber(2k) for k in 1:8]
```

Out[42]:
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{42} \\ -\frac{1}{30} \\ \frac{5}{66} \\ -\frac{691}{2730} \\ \frac{7}{6} \\ -\frac{3617}{510} \end{bmatrix}$$

In [43]:
```
BernoulliNumber(n) = sympy[:bernoulli](n)
Z = [2^(2k-1)*(-1)^(k-1)*BernoulliNumber(2k)*PI^(2k)/factorial(2k) for k in 1:8]
```

Out[43]:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\pi^2}{6} \\ \frac{\pi^4}{90} \\ \frac{\pi^6}{945} \\ \frac{\pi^8}{9450} \\ \frac{\pi^{10}}{93555} \\ \frac{691\pi^{12}}{638512875} \\ \frac{2\pi^{14}}{18243225} \\ \frac{3617\pi^{16}}{325641566250} \end{array}\right]$$

In [44]:
```
[zeta(Sym(2k)) for k in 1:8]
```

Out[44]:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\pi^2}{6} \\ \frac{\pi^4}{90} \\ \frac{\pi^6}{945} \\ \frac{\pi^8}{9450} \\ \frac{\pi^{10}}{93555} \\ \frac{691\pi^{12}}{638512875} \\ \frac{2\pi^{14}}{18243225} \\ \frac{3617\pi^{16}}{325641566250} \end{array}\right]$$

問題: $\pi z\cot(\pi z)$ の部分分数展開と $\pi z\cot(\pi z)$ のMaclaurine展開を比較して, $k=1,2,\ldots$ に対する $\zeta(2k)$ の値をBernoulli数で表す公式を得よ.

解答例: $\pi\cot(\pi t)$ の部分分数展開の公式より,

$$\pi z\cot(\pi z) = 1 + z\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{z-n}+\frac{z}{z+n}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{z^2-n^2}.$$

そして,

$$\frac{z^2}{z^2-n^2} = -\frac{z^2/n^2}{1-z^2/n^2} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2k}}$$

なので,

$$\pi z\cot(\pi z) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\right)z^{2k} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)z^{2k}.$$

一方, $x\cot x$ のMaclaurin展開が

$$x\cot x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k} = 1 - 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k-1}(-1)^{k-1}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}$$

であることより(これを B_{2k} の定義だと思ってもよい), $x=\pi z$ を代入すると,

$$\pi z\cot(\pi z) = 1 - 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k-1}(-1)^{k-1}B_{2k}}{(2k)!}\pi^{2k}z^{2k}.$$

以上を比較すると,

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}(-1)^{k-1}B_{2k}}{(2k)!}\pi^{2k} \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

が得られる. □

5.7 Lobachevskyの公式

この節の内容は

- Hassan Jolany, An extension of Lobachevsky formula (https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01539895v3), 2017 (arXiv版 (https://arxiv.org/abs/1004.2653))

の第2節の引き写しである.

$\pi \operatorname{cosec}(\pi t) = \pi/\sin(\pi t)$ の部分分数展開の公式に $t = x/\pi$ を代入すると,

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{x-k\pi} + \frac{1}{x+k\pi}\right).$$

$\pi\cot(\pi t)$ の部分分数展開の公式に $t = x/\pi$ を代入すると,

$$\cot(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-k\pi} + \frac{1}{x+k\pi}\right).$$

これの両辺に $-d/dx$ を作用させると,

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+k\pi)^2}\right).$$

Lobachevskyの公式: f は

$$f(x+\pi) = f(x) \quad f(\pi - x) = f(x)$$

を満たす $\mathbb{R}$ 上の連続函数であると仮定する. このとき,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}f(x)\,dx = \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2}f(x)\,dx.$$

注意: 特に $f(x) = 1$ のとき,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

なので, Lobachevskyの公式はDirichlet積分の公式の一般化になっている.

証明: 0 から ∞ のあいだを長さ $\pi/2$ の区間で区切って整理し直して, $1/\sin x$ と $1/\sin^2 x$ の部分分数展開を使えばこの公式が得られる. 詳しい計算の手順は以下の通り.

整数 k に対して, $f(x+\pi) = f(x), f(\pi - x) = f(x)$ という仮定より,

$$\begin{aligned}
&\int_{(2k-1)\pi/2}^{2k\pi/2}\frac{\sin x}{x}f(x)\,dx = (-1)^k\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(-x)}{-x+k\pi}f(x)\,dx = (-1)^k\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x-k\pi}f(x)\,dx,\\
&\int_{2k\pi/2}^{(2k+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}f(x)\,dx = (-1)^k\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x+k\pi}f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}f(x)\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi/2}(n+1)\pi/2\frac{\sin x}{x}f(x)\,dx\\
&= \int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin x}{x-k\pi} + \frac{\sin x}{x+k\pi}\right)f(x)\,dx\\
&= \int_0^{\pi/2}\sin x\left[\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{x-k\pi} + \frac{1}{x+k\pi}\right)\right]f(x)\,dx\\
&= \int_0^{\pi/2}\sin x\frac{1}{\sin x}f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2}f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

終わりから2番目の等号で $1/\sin x$ の部分分数展開を使った.

整数 k に対して, $f(x+\pi)=f(x), f(\pi-x)=f(x)$ という仮定より,

$$\int_{(2k-1)\pi/2}^{2k\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x^2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(-x)}{(-x+k\pi)^2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{(x-k\pi)^2} f(x)\,dx,$$
$$\int_{2k\pi/2}^{(2k+1)\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x^2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{(x+k\pi)^2} f(x)\,dx.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} f(x)\,dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi/2}^{(n+1)\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x^2} f(x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x^2}{x^2} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^\infty \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin^2 x}{(x-k\pi)^2} + \frac{\sin^2 x}{(x+k\pi)^2} \right) f(x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \left[\frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+k\pi)^2} \right) \right] f(x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \frac{1}{\sin^2 x} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

終わりから2番目の等号で $1/\sin^2 x$ の部分分数展開を使った. □

6 Poissonの和公式

6.1 Poissonの和公式とその証明

Fourier級数の収束とFourier変換の定義から, **Poissonの和公式**が得られることを説明しよう.

定義(急減少函数): $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 函数 f で, 任意の非負の整数 m, n に対して, $|x| \to \infty$ のとき $f^{(m)}(x)x^n \to 0$ となるものを**急減少函数**と呼ぶ. □

定理(Poissonの和公式) f は $\mathbb{R}$ 上の急減少函数であると仮定する. このとき, 次の公式が成立している:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

略証: $g(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m)$ とおくと, $g(x)$ は周期 1 を持つ C^∞ 函数になる. ゆえに,

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(g) e^{2\pi i n x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

そして,

$$\begin{aligned}
a_n(g) &= \int_0^1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m) e^{-2\pi i n x}\,dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m) e^{-2\pi i n x}\,dx \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(x) e^{-2\pi i n x}\,dx = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-2\pi i n x}\,dx = \hat{f}(n).
\end{aligned}$$

以上をまとめると,

$$g(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

この等式で $x=0$ をおけば欲しい公式が得られる. □

6.2 Theta zero value Θ(t) のモジュラー変換性

問題: $t>0$ に対して, 次の公式を示せ:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-\pi(x-m)^2/t}}{\sqrt{t}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t + 2\pi i n x}.$$

注意: この問題の左辺と右辺は楕円テータ函数と呼ばれる特殊函数の特別な場合になっている. 左辺は熱方程式の基本解を周期函数になるように足し上げたものになっている. そのことから, この公式の両辺は周期境界条件のもとでの熱方程式の基本解になっていることがわかる. 楕円テータ函数については

- David Mumford, Tata Lectures on Theta I (http://www.dam.brown.edu/people/mumford/alg_geom/papers/Tata1.pdf), Reprint of the 1983 Edition

が非常に面白くてかつ読み易い教科書であり, 論文などでもよく引用されている. □

解答例: $f(x) = \dfrac{e^{-\pi x^2/t}}{\sqrt{t}}$ とおくと, $f(x)$ が偶函数であることと, Poissonの和公式の証明より,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-\pi(x-m)^2/t}}{\sqrt{t}} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x-m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

そして, 公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/a} e^{-ipy}\, dy = \sqrt{\pi a} e^{-ap^2/4}$$

より, $x = y/(2\pi)$ とおくと,

$$\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi x^2/t}}{\sqrt{t}} e^{-2\pi i n x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2/(4\pi t)}}{\sqrt{t}} e^{-iny} \frac{dy}{2\pi} = \frac{\sqrt{4\pi t\,\pi}}{2\pi\sqrt{t}} e^{-4\pi t n^2/4} = e^{-\pi n^2 t}.$$

以上をまとめると示したい公式が得られる. □

問題(Theta zero value のモジュラー変換性): $t > 0$ に対して, $\Theta(t) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$ とおくと,

$$\Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\Theta\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{すなわち} \quad \Theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\,\Theta(t)$$

が成立することを示せ. この結果を $\Theta(t)$ の**モジュラー変換性**と呼ぶ.

注意: $\Theta(t)$ の定義式を見ると, $t > 0$ が大きなときに $\Theta(t)$ がほぼ 1 になることはすぐに確認できるが, $t > 0$ が小さいときにはどのような様子になっているかはよくわからない. しかし, モジュラー変換性を使うと, $\Theta(t)$ は, $t > 0$ が小さいときにはほぼ $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ に等しいことがわかる. このようにモジュラー変換性は「よくわからない量」を「よくわかる量」に関係付ける公式である. □

注意: 超弦理論や共形場理論 (https://www.google.co.jp/search?q=%E5%85%B1%E5%BD%A2%E5%A0%B4%E7%90%86%E8%AB%96+%E3%83%A2%E3%82%B8%E3%83%A5%E3%83%A9 ではモジュラー変換性が重要な意味を持つ. □

注意: 上の問題の公式はRiemannのゼータ函数の函数等式を証明するときに使われる. 上の問題の結果は楕円テータ函数のモジュラー変換性の特別な場合になっている. モジュラー変換性を持つ函数は数論的にも極めて重要な数学的対象である. □

解答例1: $f(x) = \dfrac{e^{-\pi x^2/t}}{\sqrt{t}}$ にPoissonの和公式を適用すればこの公式が得られる. すなわち, 上の問題の結果で $x = 0$ とおけば示したい公式が得られる. □

解答例2: $f(x) = e^{-\pi t x^2}$ について $\hat{f}(p) = \dfrac{e^{-\pi p^2/t}}{\sqrt{t}}$ なので, Poissonの和公式より, 示したい公式が得られる. □

問題: 上の問題の結論を $\Theta(t)$ と $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Theta\left(\dfrac{1}{t}\right)$ のグラフを重ねてプロットすることによって確認せよ. 2つのグラフはぴったり重なるはずである. □

次のセルを見よ.

In [45]:
```
Theta(t; N=20) = iszero(N) ? one(t) : 1 + 2*sum(n->e^(-π*n^2*t), 1:N)
t = 0.2:0.05:2.0
A = Theta.(t)
B = 1./sqrt.(t).*Theta.(1./t)
plot(size=(500, 350))
plot!(t, B, label="Theta(t)",                lw=2)
plot!(t, A, label="(1/sqrt(t)) Theta(1/t)", lw=2, ls=:dash)
```

Out[45]:

問題: $t = 0.1$ のとき, まず $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Theta\left(\dfrac{1}{t}\right)$ の近似値を

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2/t}\right)$$

の $N = 1$ の場合を用いて計算せよ. そして, $\Theta(t)$ を

$$1 + 2\sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 t}$$

で近似するとき, $N \geqq 10$ としなければ, 上と同じ精度が得られないことを確認せよ. $t > 0$ が小さいときには $\Theta(t)$ の定義に基いて直接的に数値計算するより, モジュラー変換を経由して数値計算した方が効率的である. □

次のセルを見よ.

In [46]:
```
Theta(t; N=20) = iszero(N) ? one(t) : 1 + 2*sum(n->e^(-π*n^2*t), 1:N)
t = 0.1
@show 1/√t*Theta(1/t; N=0)
@show 1/√t*Theta(1/t; N=1)
@show 1/√t*Theta(1/t; N=2)
@show Theta(t; N=9);
@show Theta(t; N=10);
@show Theta(t; N=11);
```

```
(1 / √t) * Theta(1 / t; N=0) = 3.162277660168379
(1 / √t) * Theta(1 / t; N=1) = 3.162277660168523
(1 / √t) * Theta(1 / t; N=2) = 3.162277660168523
Theta(t; N=9) = 3.1622776601684772
Theta(t; N=10) = 3.1622776601685225
Theta(t; N=11) = 3.1622776601685225
```

6.3 Lerchの超越函数へのPoissonの和公式の応用

6.3.1 Lerchの超越函数

以下では $a \neq 0, -1, -2, \ldots$ であると仮定する.

定義: Lerchの超越函数 $\Phi(z, s, a)$ を

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(a+k)^s}.$$

と定義する. 次の記号法も使われる:

$$L(\tau, a, s) = \Phi(e^{2\pi i\tau}, s, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k\tau}}{(a+k)^s}, \qquad z = e^{2\pi i\tau}.$$

これは**Lerchのゼータ函数**(レルヒのゼータ函数)と呼ばれる. **引数の順序が変わっていることに注意せよ.** $|z| < 1$ ならば右辺の級数は絶対収束し, $|z| = 1$ であっても右辺の級数は $\mathrm{Re}\, s > 1$ ならば絶対収束する. さらに,

$$\Phi(z, s, a) = \left(z\frac{\partial}{\partial z} + a\right)^m \Phi(z, s+m, a)$$

を使って, $|z| = 1$ であっても, $\mathrm{Re}\, s > 1 - m$ まで $\Phi(z, s, a)$ を解析接続できる.

Lerchのゼータ函数は, $\tau = 0$ $(z = 1)$ とするとHurwitzのゼータ函数になり, $a = 1$ としてから z 倍すると(s が正の整数の場合には)polylogarithmになり, $\tau = 0$ $(z = 1)$, $a = 1$ とするとRiemannのゼータ函数になる. $z = e^{2\pi i\tau}$ のとき,

$$L(0, a, s) = \Phi(1, s, a) = \zeta(s, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^s},$$
$$e^{2\pi i\tau} L(\tau, 1, s) = z\Phi(z, s, 1) = \mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s},$$
$$L(0, 1, s) = \Phi(1, s, 1) = \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Lerchの超越函数の基本性質については

- Jesus Guillera and Jonathan Sondow. Double integrals and infinite products for some classical constants via analytic continuations of Lerch's transcendent. arXiv:math/0506319 (https://arxiv.org/abs/math/0506319)
- Jeffrey C. Lagarias and Wen-Ching Winnie Li. Mathematics > Number Theory The Lerch Zeta Function I, II, III, IV. arXiv:1005.4712 (https://arxiv.org/abs/1005.4712), arXiv:1005.4967 (https://arxiv.org/abs/1005.4967), arXiv:1506.06161 (https://arxiv.org/abs/1506.06161), arXiv:1511.08116 (https://arxiv.org/abs/1511.08116)

を参照せよ.

6.3.2 Lipschitzの和公式＝Lerchの函数等式

Lipschitzの和公式: $\mathrm{Re}\, s > 1$, $\mathrm{Im}\, \tau > 0$, $0 < a < 1$ のとき,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\tau(k+a)}}{(k+a)^{1-s}} = \frac{\Gamma(s)}{(-2\pi i)^s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-2\pi i n a}}{(n+\tau)^s}.$$

すなわち

$$e^{2\pi i\tau a} L(\tau, a, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(e^{-\pi i s/2} e^{2\pi i a} L(a, 1-\tau, s) + e^{\pi i s/2} \Phi(-a, s, \tau) \right),$$
$$e^{2\pi i\tau a} \Phi(e^{2\pi i\tau}, 1-s, a) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(e^{-\pi i s/2} e^{2\pi i a} \Phi(e^{2\pi i a}, s, 1-\tau) + e^{\pi i s/2} \Phi(e^{-2\pi i a}, s, \tau) \right).$$

注意: この結果は**Lerchの函数等式**とも呼ばれる.

証明: 函数 $f(x)$ を次のように定める:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2\pi i\tau(x+a)} (x+a)^{s-1} & (x > -a) \\ 0 & (x < -a). \end{cases}$$

このとき,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\tau(k+a)}}{(k+a)^{1-s}} = e^{2\pi i\tau a} \Phi(e^{2\pi i\tau}, 1-s, a).$$

一方, $p \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\hat{f}(p) = \int_{-a}^{\infty} e^{2\pi i\tau(x+a)} (x+a)^{s-1} e^{-2\pi i p x}\, dx = \int_0^{\infty} e^{2\pi i\tau x} x^{s-1} e^{-2\pi i p(x-a)}\, dx$$
$$= e^{2\pi i p a} \int_0^{\infty} e^{2\pi i(\tau-p)x} x^{s-1}\, dx = e^{2\pi i p a} \frac{\Gamma(s)}{(-2\pi i(\tau-p))^s} = \frac{\Gamma(s)}{(-2\pi i)^s} \frac{e^{2\pi i p a}}{(\tau-p)^s}.$$

4番目の等号で, Cauchyの積分定理より, $y = -2\pi i(\tau - p)x$ とおいて y に関する積分に書き換えた後に, 積分経路を $(0, \infty)$ に置き換えても値が変わらないことを用いた.

したがって, Poissonの和公式 $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(-n)$ より, 示したい前者の公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\tau(k+a)}}{(k+a)^{1-s}} = \frac{\Gamma(s)}{(-2\pi i)^s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-2\pi i n a}}{(n+\tau)^s}$$

が得られる. 後者の公式は以下のように右辺の和を $n < 0$ $(n = -(k+1), k = 0, 1, 2, \ldots)$ と $n \geqq 0$ に分けることによって得られる.

$$
\begin{aligned}
e^{2\pi i\tau a}L(\tau,a,1-s) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\tau(k+a)}}{(k+a)^{1-s}} = \frac{\Gamma(s)}{(-2\pi i)^s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{e^{-2\pi i n a}}{(n+\tau)^s} \\
&= \frac{\Gamma(s)}{(-2\pi)^s}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(k+1)a}}{(-(k+1-\tau))^s} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i n a}}{(n+\tau)^s}\right) \\
&= \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}e^{-\pi i s/2}\left(e^{\pi i s}e^{2\pi i a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i k a}}{(k+1-\tau)^s} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i n a}}{(n+\tau)^s}\right) \\
&= \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\left(e^{-\pi i s/2}e^{2\pi i a}L(a,1-\tau,s) + e^{\pi i s/2}L(-a,\tau,s)\right). \qquad \square
\end{aligned}
$$

注意: 上のPoissonの和公式を使う証明の方針は

- Knopp, Marvin and Robins, Sinai. Easy proofs of Riemann's functional equation for $\zeta(s)$ and Lipschitz summation. Proc. Amer. Math. Soc., Vol.129 (2001), No.7, 1915-1922 (https://www.ams.org/journals/proc/2001-129-07/S0002-9939-01-06033-6/S0002-9939-01-06033-6.pdf)

による. この論文の説明の方が以下の説明より詳しい. Lerchの函数等式の別証明については

- Berndt, Bruce C. Two new proofs of Lerch's functional equation. Proc. Amer. Math. Soc., Vol.32 (1972), No.2, 403-408 (https://www.ams.org/journals/proc/1972-032-02/S0002-9939-1972-0297721-3/)

を参照せよ. $\square$

6.3.3 Hurwitzの函数等式

$z = e^{2\pi i\tau}$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
L(\tau,a,s) = \Phi(z,s,a) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+a)^s} = \frac{1}{a^s} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{m+1}}{(m+1+a)^s} \\
&= \frac{1}{a^s} + z\,\Phi(z,s,1+a) = \frac{1}{a^s} + e^{2\pi i\tau}L(\tau,1+a,s).
\end{aligned}
$$

なので, Lipschitzの和公式=Lerchの函数等式は次のように書き直される:

$$
e^{2\pi i\tau a}L(\tau,a,1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\left(e^{-\pi i s/2}e^{2\pi i a}L(a,1-\tau,s) + e^{\pi i s/2}e^{-2\pi i a}L(a,1+\tau,s) + \frac{e^{\pi i s/2}}{\tau^s}\right).
$$

したがって, $\operatorname{Re} s < 0$ として $\tau \to 0$ とすると $1/\tau^s \to 0$ となり, 一般に $L(0,a,s) = \zeta(s,a)$, $e^{2\pi i\tau}L(\tau,1,s) = \operatorname{Li}_s(e^{2\pi i\tau})$ が成立しているので,

$$
\zeta(1-s,a) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\left(e^{-\pi i s/2}\operatorname{Li}_s(e^{2\pi i a}) + e^{\pi i s/2}\operatorname{Li}_s(e^{-2\pi i a})\right) \qquad (0<a<1).
$$

これを**Hurwitzの函数等式**と呼ぶ. この公式は解析接続によって $\operatorname{Re} s < 0$ でなくても成立している.

Hurwitzの函数等式で, $s = m+1$, $m \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ とおくと,

$$
\zeta(-m,a) = m!\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}\frac{e^{2\pi i n a}}{(2\pi i n)^{m+1}} \qquad (0<a<1).
$$

Hurwitzのゼータ函数 $\zeta(s,a)$ とBernoulli多項式 $B_k(x)$ については

$$
\zeta(-m,a) = -\frac{B_{m+1}(a)}{m+1}
$$

という公式がよく知られている(ノート「10 Gauss積分, ガンマ函数, ベータ函数」で示した). 以上を比較すると,

$$
B_{m+1}(a) = -(m+1)!\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}\frac{e^{2\pi i n a}}{(2\pi i n)^{m+1}} \qquad (0<a<1).
$$

この結果はノート「13 Euler-Maclaurinの和公式」で示すことになる周期的Bernoulli多項式のFourier級数展開の結果と一致している. $\square$

6.3.4 Riemannのゼータ函数の函数等式

Hurwitzの函数等式でさらに $a \to 1$ とすると, $\zeta(s,1) = \zeta(s)$ と $\operatorname{Li}_s(1) = \zeta(s)$ より,

$$
\zeta(1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}2\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s).
$$

さらに s を $1-s$ で置き換えると,

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} 2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s).$$

Riemannのゼータ函数の有名な函数等式が得られた. □

In [ ]:

```
1
```

13 Euler-Maclaurinの和公式

黒木玄

2018-07-04

- Copyright 2018 Gen Kuroki
- License: MIT https://opensource.org/licenses/MIT (https://opensource.org/licenses/MIT)

- Repository: https://github.com/genkuroki/Calculus (https://github.com/genkuroki/Calculus)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/13%20Euler-Maclaurin%20summation%20formula.ipynb (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/13%20Euler-Maclaurin%20summation%20formula.ipynb)
- https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/13%20Euler-Maclaurin%20summation%20formula.pdf (https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/13%20Euler-Maclaurin%20summation%20formula.pdf)

このファイルは Julia Box (https://juliabox.com) で利用できる.

自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ.

論理的に完璧な説明をするつもりはない. 細部のいい加減な部分は自分で訂正・修正せよ.

Table of Contents

1 Bernoulli多項式
  1.1 Bernoulli多項式の定義
  1.2 Bernoulli多項式の基本性質
  1.3 べき乗和
  1.4 Bernoulli数の計算法
  1.5 周期的Bernoulli多項式のFourier級数展開
2 Euler-Maclaurinの和公式
  2.1 Euler-Maclaurinの和公式の導出
  2.2 Euler-Maclaurinの和公式の2つの解釈
  2.3 Euler-Maclaurinの和公式の形式的導出
  2.4 べき乗和(再)
  2.5 Stirlingの近似公式
  2.6 Poissonの和公式とEuler-Maclaurinの和公式の関係
3 ゼータ函数への応用
  3.1 解析接続
  3.2 ζ(2)の近似計算
  3.3 s = 1でのζ(s)の定数項がEuler定数になること
  3.4 負の整数におけるゼータ函数の特殊値の計算
  3.5 発散級数の有限部分と ζ(-r) の関係

In [1]:

```
using Plots
gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn) = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    display("text/html", """<img src="data:$mime; base64,$base64">""")
end

using SymPy
#sympy[:init_printing](order="lex") # default
#sympy[:init_printing](order="rev-lex")

using SpecialFunctions
using QuadGK
```

1 Bernoulli多項式

1.1 Bernoulli多項式の定義

定義(Bernoulli多項式): Bernoulli多項式** $B_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$を

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

によって定義する. □

1.2 Bernoulli多項式の基本性質

一般化Bernoulli多項式の基本性質: Bernoulli多項式 $B_n(x)$ は以下の性質を満たしている:

(1) $B_0(x) = 1$.

(2) $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\,dx = \delta_{n,0}$.

(3) $\displaystyle B_n(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(x) h^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) h^{n-k}$.

(4) $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$.

(5) $B_n(x+1) = B_n(x) + nx^{n-1}$.

(6) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

(7) $B_n(1) = B_n(0) + \delta_{n,1}$ となる.

(8) $B_n(0) = 1$, $B_n(0) = -\dfrac{1}{2}$ とな, n が3以上の奇数ならば $B_n(0) = 0$ となる.

証明: (1) $e^{zx} = 1 + O(z)$, $\dfrac{e^z - 1}{z} = 1 + O(z)$ より, $\dfrac{ze^{zx}}{e^z - 1} = 1 + O(z)$ なので $B_0(x) = 1$.

(2)を示そう.

$$\int_0^1 \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}\,dx = \frac{z}{e^z - 1}\int_0^1 e^{zx}\,dx = \frac{z}{e^z - 1}\frac{e^z - 1}{z} = 1,$$
$$\int_0^1 \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\int_0^1 B_n(x)\,dx$$

なので, これらを比較して $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\,dx = \delta_{n,0}$.

(3) 二項定理より,

$$\int_0^1 (x+y)^n\,dy = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \int_0^1 y^k\,dy.$$

ゆえに, x の函数を x の函数に移す線形写像(前方移動平均)

$$f(x) \mapsto \int_0^1 f(x+y)\,dy$$

は多項式を多項式に移し, 最高次の係数が1の多項式を最高次の係数が1の同次の多項式に移す. これより, 線形写像 $f(x) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x+y)\,dy$ は多項式どうしの一対一対応を与える線形写像になっていることがわかる. そして,

$$\int_0^1 \frac{ze^{z(x+y)}}{e^z-1}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{\int_0^1 B_n(x+y)\,dy}{n!} z^n,$$
$$\int_0^1 \frac{ze^{z(x+y)}}{e^z-1}\,dx = \frac{ze^{zx}}{e^z-1}\int_0^1 e^{zy}\,dy = \frac{ze^{zx}}{e^z-1}\,\frac{e^z-1}{z} = e^{zx} = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} z^n$$

なので, これらを比較して,

$$\int_0^1 B_n(x+y)\,dy = x^n$$

が成立することがわかる. ゆえに,

$$\int_0^1 B_n(x+h+y)\,dy = (x+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(x+y) h^k\,dy$$

より

$$B_n(x+h) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(x) h^k.$$

(4) すぐ上の等式の右辺の h の係数を見ることによって,

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x).$$

(5) Bernoulli多項式の母函数の x に $x+1$ を代入すると,

$$\frac{ze^{z(x+1)}}{e^z-1} = \frac{ze^z e^{zx}}{e^z-1} = \frac{z(1+(e^z-1))e^{zx}}{e^z-1} = \frac{ze^{zx}}{e^z-1} + zezx$$

なので両辺を z について展開して比較すれば(5)が得られる.

(6) Bernoulli多項式の母函数の x に $1-x$ を代入すると,

$$\frac{ze^{z(1-x)}}{e^z-1} = \frac{ze^z e^{-zx}}{e^z-1} = \frac{ze^{-zx}}{1-e^{-z}} = \frac{-ze^{-zx}}{e^{-z}-1}$$

とBernoulli多項式の母函数の z に $-z$ を代入したものになるので, 両辺を z について展開して比較すれば(5)が得られる.

(7) 上の(2)と(4)より, n が2以上のとき,

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(x)\,dx = n\int_0^1 B_{n-1}(x)\,dx = n\delta_{n-1,0} = \delta_{n,1}$$

ゆえに n が2以上のとき $B_n(1) = B_n(0) + \delta_{n,1}$.

(8) 次の函数が z の偶函数で $z \to 0$ で 1 になることから, (6)が得られる:

$$\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\,\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}. \qquad \square$$

注意: $B_n = B_n(0)$ は**Bernoulli数**と呼ばれている. (3)で (x,h) を $(0,x)$ で置き換えると, Bernoulli多項式がBernoulli数で表わされることがわかる:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

上の定理の条件(1),(2),(4)によってBernoulli多項式 $B_n(x)$ が n について帰納的に一意的に決まる. □

例:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}$$

なので

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}. \qquad \square$$

In [2]:
```
BernoulliPolynomial(n,x) = sympy[:bernoulli](n,x)
x = symbols("x", real=true)
[BernoulliPolynomial(n,x) for n in 0:10]
```

Out[2]:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x - \frac{1}{2} \\ x^2 - x + \frac{1}{6} \\ x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} \\ x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\ x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6} \\ x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42} \\ x^7 - \frac{7x^6}{2} + \frac{7x^5}{2} - \frac{7x^3}{6} + \frac{x}{6} \\ x^8 - 4x^7 + \frac{14x^6}{3} - \frac{7x^4}{3} + \frac{2x^2}{3} - \frac{1}{30} \\ x^9 - \frac{9x^8}{2} + 6x^7 - \frac{21x^5}{5} + 2x^3 - \frac{3x}{10} \\ x^{10} - 5x^9 + \frac{15x^8}{2} - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3x^2}{2} + \frac{5}{66} \end{bmatrix}$$

In [3]:
```
# (2)

BernoulliPolynomial(n,x) = sympy[:bernoulli](n,x)
x = symbols("x", real=true)
[integrate(BernoulliPolynomial(n,x), (x,0,1)) for n = 0:10]'
```

Out[3]:
```
1×11 RowVector{Any,ConjArray{Any,1,Array{SymPy.Sym,1}}}:
 1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
```

In [4]:
```
# (3)

BernoulliNumber(n) = sympy[:bernoulli](n)
BernoulliPolynomial(n,x) = sympy[:bernoulli](n,x)
BinomCoeff(n,k) = sympy[:binomial_coefficients_list](n)[k+1]
x, h = symbols("x h", real=true)
[BernoulliPolynomial(n,x) == sum(k->BinomCoeff(n,k)*BernoulliNumber(k)*x^(n-k), 0:n) for n in 0:10]'
```

Out[4]:
```
1×11 RowVector{Bool,Array{Bool,1}}:
 true  true  true  true  true  true  true  true  true  true  true
```

In [5]:
```
# (4)

BernoulliPolynomial(n,x) = sympy[:bernoulli](n,x)
x = symbols("x", real=true)
[diff(BernoulliPolynomial(n,x), x) == n*BernoulliPolynomial(n-1,x) for n = 1:10]'
```

Out[5]:
```
1×10 RowVector{Bool,Array{Bool,1}}:
 true  true  true  true  true  true  true  true  true  true
```

In [6]:
```
# (5)

BernoulliPolynomial(n,x) = sympy[:bernoulli](n,x)
x = symbols("x", real=true)
[simplify(BernoulliPolynomial(n,x+1) - BernoulliPolynomial(n,x)) for n in 0:10]
```

Out[6]:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \\ 4x^3 \\ 5x^4 \\ 6x^5 \\ 7x^6 \\ 8x^7 \\ 9x^8 \\ 10x^9 \end{bmatrix}$$

In [7]:
```
# (6)

BernoulliPolynomial(n,x) = sympy[:bernoulli](n,x)
x = symbols("x", real=true)
[expand(BernoulliPolynomial(n,1-x)) == (-1)^n*BernoulliPolynomial(n,x) for n in 0:10]'
```

Out[7]:
```
1×11 RowVector{Bool,Array{Bool,1}}:
 true  true  true  true  true  true  true  true  true  true  true
```

In [8]:
```
# (7)

BernoulliPolynomial(n,x) = sympy[:bernoulli](n,x)
x = symbols("x", real=true)
[expand(BernoulliPolynomial(n,1)) - BernoulliPolynomial(n,0) for n in 0:10]'
```

Out[8]:
```
1×11 RowVector{Any,ConjArray{Any,1,Array{SymPy.Sym,1}}}:
 0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0
```

In [9]:
```
# (8)

BernoulliNumber(n) = sympy[:bernoulli](n)
[(n, BernoulliNumber(n)) for n in 0:10]
```

Out[9]:
```
11-element Array{Tuple{Int64,SymPy.Sym},1}:
 (0, 1)
 (1, -1/2)
 (2, 1/6)
 (3, 0)
 (4, -1/30)
 (5, 0)
 (6, 1/42)
 (7, 0)
 (8, -1/30)
 (9, 0)
 (10, 5/66)
```

1.3 べき乗和

m は正の整数であるする. Bernoulli多項式について,

$$B_{m+1}(x+1) - B_{m+1}(x) = (m+1)x^m, \quad \text{i.e.} \quad x^m = \frac{B_{m+1}(x+1) - B_{m+1}(x)}{m+1}$$

が成立しているので, これを $x = 0, 1, \ldots, n$ について足し上げると,

$$\sum_{j=1}^{n} j^m = \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}}{m+1}. \qquad \square$$

In [10]:
```
PowerSum(m, n) = sum(j->j^m, 1:n)
BernoulliNumber(n) = sympy[:bernoulli](n)
BernoulliPolynomial(n,x) = sympy[:bernoulli](n,x)
PowerSumFormula(m, n) = (BernoulliPolynomial(m+1,n+1)-BernoulliNumber(m+1))/(m+1)
[(m, PowerSum(m,10), PowerSumFormula(m, 10)) for m in 1:10]
```

Out[10]:
```
10-element Array{Tuple{Int64,Int64,SymPy.Sym},1}:
 (1, 55, 55)
 (2, 385, 385)
 (3, 3025, 3025)
 (4, 25333, 25333)
 (5, 220825, 220825)
 (6, 1978405, 1978405)
 (7, 18080425, 18080425)
 (8, 167731333, 167731333)
 (9, 1574304985, 1574304985)
 (10, 14914341925, 14914341925)
```

1.4 Bernoulli数の計算法

Bernoulli数 B_n は

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{z^n}{n!}$$

で定義される. しかし, この展開を直接計算することによって Bernoulli 数を求めるのは効率が悪い.

まず, 左辺の $z\to 0$ の極限を取ることによって $B_0=1$ であることはすぐにわかる.

次に, n が 3 以上の奇数のとき $B_n=0$ となることを(再び)示そう.

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=\frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1}=\frac{z}{2}\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}$$

より, 左辺は偶函数になるので, その展開の奇数次の項は消える. このことから, $B_1=-1/2$ でかつ, $0=B_3=B_5=B_7=\cdots$ であることもわかる.

$$\frac{ze^z}{e^z-1}=\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}\frac{B_kz^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\right)\frac{z^n}{n!}$$

でかつ

$$\frac{ze^z}{e^z-1}=\frac{z}{e^z-1}+z=\sum_{n=0}^{\infty}(B_n+\delta_{n1})\frac{z^n}{n!}$$

なので, これらを比較すると

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=\delta_{n1}.$$

ゆえに, n を $n+1$ で置き換え, $n\geqq 1$ とし, B_n を他で表わす式に書き直すと

$$B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k\qquad(n\geqq 1).$$

これを使えば帰納的に B_n を求めることができる. $B_0=1, B_1=-1/2, 0=B_3=B_5=B_7=\cdots$ であることを使うと,

$$B_{2m}=-\frac{1}{2m+1}\left(1-\frac{2m+1}{2}+\sum_{k=1}^{m-1}\binom{2m+1}{2k}B_{2k}\right).$$

問題: 上の方ではSymPyにおけるBernoulli数の函数を利用した. Bernoulli数を計算するためのプログラムを自分で書け. □

解答例: 次のセルの通り. □

In [11]:

```julia
# binomial coefficient: binom(n,k) = n(n-1)⋯(n-k+1)/k!
#
mydiv(a, b) = a / b
mydiv(a::Integer, b::Integer) = a ÷ b
function binom(n, k)
    k < 0 && return zero(n)
    k == 0 && return one(n)
    b = one(n)
    for j in 1:k
        b = mydiv(b*(n-k+j), j)
    end
    b
end

@show binom(Rational(big"100")/3, 30)

# Bernoulli numbers: B(n) = Bernoulli[n+1] = B_n
#
struct Bernoulli{T}
    B::Array{T,1}
end
function Bernoulli(; maxn=200)
    B = zeros(Rational{BigInt},maxn+1)
    B[1] = 1      # B_0
    B[2] = -1//2  # B_1
    for n in big"2":2:maxn+1
        B[n+1] = -(1//(n+1))*sum(j->binom(n+1,j)*B[j+1], 0:n-1)
        # B_n = -(1/(n+1)) Σ_{j=0}^{n-1} binom(n+1,j)*B_j
    end
    Bernoulli(B)
end
(B::Bernoulli)(n) = B.B[n+1]

maxn = 200
@time B = Bernoulli(maxn=maxn) # B_n を B_{maxn} まで計算
BB(n) = float(B(n)) # B(n) = B_n である． BB(n)はその浮動小数点版

# SymPyのBernoulli数と比較して正しく計算できているかどうかを確認
#
BernoulliNumber(n) = sympy[:bernoulli](n)
@show B_eq_B = [B(n) == BernoulliNumber(n) for n in 0:maxn]
println()
@show all(B_eq_B)

maxnprint = 30
println()
for n in [0; 1; 2:2:maxnprint]
    println("B($n) = ", B(n))
end
println()
for n in [0; 1; 2:2:maxnprint]
    println("BB($n) = ", BB(n))
end
```

```
binom(Rational(@big_str("100")) / 3, 30) = 1124078118881780807272528 0//98477090218361123288 1
  1.215169 seconds (16.07 M allocations: 363.244 MiB, 19.05% gc time)
B_eq_B = [B(n) == BernoulliNumber(n) for n = 0:maxn] = Bool[true, true, true, true, true, true, true, true, true,
true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true,
true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true,
true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true,
true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true,
true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true,
true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true,
true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true,
true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true,
true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true,
true, true]

all(B_eq_B) = true

B(0) = 1//1
B(1) = -1//2
B(2) = 1//6
B(4) = -1//30
B(6) = 1//42
```

```
B(8) = -1//30
B(10) = 5//66
B(12) = -691//2730
B(14) = 7//6
B(16) = -3617//510
B(18) = 43867//798
B(20) = -174611//330
B(22) = 854513//138
B(24) = -236364091//2730
B(26) = 8553103//6
B(28) = -23749461029//870
B(30) = 8615841276005//14322

BB(0) = 1.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
BB(1) = -5.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000e-01
BB(2) = 1.6666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666674e-01
BB(4) = -3.3333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333359e-02
BB(6) = 2.3809523809523809523809523809523809523809523809523809523809523809523809523809523809947e-02
BB(8) = -3.3333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333359e-02
BB(10) = 7.5757575757575757575757575757575757575757575757575757575757575757575757578e-02
BB(12) = -2.5311355311355311355311355311355311355311355311355311355311355311355311131e-01
BB(14) = 1.1666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666661
BB(16) = -7.0921568627450980392156862745098039215686274509803921568627451309803921568627451 3
BB(18) = 5.4971177944862155388471177944862155388471177944862155388471177944862155388471111e+01
BB(20) = -5.2912424242424242424242424242424242424242424242424242424242424242424242424247e+02
BB(22) = 6.1921231884057971014492753623188405797101449275362318840579710144927536231883 88e+03
BB(24) = -8.6580253113553113553113553
```

In [12]:

```
BBB = Bernoulli(Float64.(B.B)) # Float64 Bernoulli numbers
BP(k,x) = sum(j->binom(k,j)*BBB(k-j)*x^j, 0:k) # Float64 Bernoulli polynomial
PBP(k,x) = BP(k, x - floor(x)) # periodic Bernoulli polynomial

# partial sum of Fourier series of periodic Bernoulli polynomial
function PSFS(k, N, x)
    k == 0 && return zero(x)
    if isodd(k)
        return (-1)^((k+1)÷2)*2*factorial(k)*sum(n->sin(2π*n*x)/(2π*n)^k, 1:N)
    else
        return (-1)^(k÷2-1)*2*factorial(k)*sum(n->cos(2π*n*x)/(2π*n)^k, 1:N)
    end
end

PP = []
x = -1.0:0.001:0.999
for (k,N) in [(1,20), (2,10), (3,3), (4,2), (5,1), (6,1)]
    y = PBP.(k,x)
    z = PSFS.(k, N, x)
    ymin = 1.2*minimum(y)
    ymax = 2.7*maximum(y)
    P = plot(legend=:topleft, size=(400, 250), ylim=(ymin, ymax))
    plot!(x, y, label="B_$k(x-[x])")
    plot!(x, z, label="partial sum of Fourier series (N=$N)")
    push!(PP, P)
end

plot(PP[1:2]..., size=(750, 280))
```

Out[12]:

In [13]:

```
plot(PP[3:4]..., size=(750, 280))
```

Out[13]:

In [14]:
```
plot(PP[5:6]..., size=(750, 280))
```

Out[14]:

2 Euler-Maclaurinの和公式

2.1 Euler-Maclaurinの和公式の導出

Bernoulli多項式 $B_n(x)$ とBernoulli数 B_n について

$$
\begin{aligned}
&B_0(x) = 1, \quad \frac{d}{dx}\frac{B_n(x)}{n!} = \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!}, \\
&B_1(0) = -\frac{1}{2}, \quad B_1(1) = \frac{1}{2}, \\
&B_n(1) = B_n(0) = B_n \quad (n = 0, 2, 3, 4, 5, \ldots) \\
&B_{2j+1} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots)
\end{aligned}
$$

が成立している. 以下ではしばらくのあいだこれらの条件しか使わない.

部分積分を繰り返すことによって,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 B_0(x)f(x)\,dx \\
&= [B_1(x)f(x)]_0^1 - \int_0^1 B_1(x)f'(x)\,dx \\
&= [B_1(x)f(x)]_0^1 - \frac{1}{2}[B_2(x)f'(x)]_0^1 + \int_0^1 \frac{B_2(x)}{2}f''(x)\,dx \\
&= [B_1(x)f(x)]_0^1 - \frac{1}{2}[B_2(x)f'(x)]_0^1 + \frac{1}{3!}[B_3(x)f''(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_3(x)}{3!}f'''(x)\,dx \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\left[B_k(x)f^{(k-1)}(x)\right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!}f^{(n)}(x)\,dx \\
&= \frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{k!}(f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)) + (-1)^n \int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!}f^{(n)}(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

実数 x に対して, x 以下の最大の整数を $\lfloor x \rfloor$ と書く. このとき, $x - \lfloor x \rfloor$ は x の「小数部分」になる. このように記号を準備しておくと, 整数 j に対して,

$$
\begin{aligned}
\int_j^{j+1} f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x+j)\,dx \\
&= \frac{f(j)+f(j+1)}{2} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{k!}(f^{(k-1)}(j+1) - f^{(k-1)}(j)) + (-1)^n \int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!}f^{(n)}(x+j)\,dx \\
&= \frac{f(j)+f(j+1)}{2} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{k!}(f^{(k-1)}(j+1) - f^{(k-1)}(j)) + (-1)^n \int_j^{j+1} \frac{B_n(x-\lfloor x \rfloor)}{n!}f^{(n)}(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

$a < b$ を満たす整数 a, b に対して, 上の式を $j = a$ から $j = b-1$ まで足し上げると,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{j=a}^{b-1}\frac{f(j)+f(j+1)}{2} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{k!}(f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)) + (-1)^n\int_a^b \frac{B_n(x-\lfloor x\rfloor)}{n!}f^{(n)}(x)\,dx \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=a+1}^{b-1} f(j) + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{k!}(f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)) - R_n.\end{aligned}$$

ここで

$$R_n = (-1)^{n-1}\int_a^b \frac{B_n(x-\lfloor x\rfloor)}{n!}f^{(n)}(x)\,dx$$

とおいた. さらい, n が3以上の奇数のとき $B_n = 0$ となることを使うと,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=a+1}^{b-1} f(j) - \sum_{1\leqq i\leqq n/2}\frac{B_{2i}}{(2i)!}(f^{(2i-1)}(b)-f^{(2i-1)}(a)) - R_n.$$

この公式を**Euler-Maclaurinの和公式**と呼ぶ. これは n が3以上の奇数のとき $B_n = 0$ となることを使うと次のように書き直される:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=a+1}^{b-1} f(j) - \sum_{k=2}^{n}\frac{B_k}{k!}(f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)) - R_n.$$

注意: 上の公式は n が2以上の整数の場合の結果である. $n = 1$ の場合の結果は次のようにして得られる.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x'f(x)\,dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 xf'(x)\,dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x)\,dx$$

より, $a < b$ を満たす整数 a, b に対して,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{j=a}^{b-1} f(j+1) - \sum_{j=a}^{b-1}\int_0^1 xf'(x+j)\,dx \\ &= \sum_{j=a}^{b} f(j) - f(a) - \int_a^b (x-\lfloor x\rfloor)f'(x)\,dx\end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned}\sum_{j=a}^{b} f(j) &= \int_a^b f(x)\,dx + f(a) + \int_a^b (x-\lfloor x\rfloor)f'(x)\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + f(a) + \sum_{j=a}^{b-1}\int_0^1 xf'(x+j)\,dx\end{aligned}$$

これらのシンプルな公式も結構よく使われる. □

注意: Euler-Maclaurinの和公式の証明は部分積分の繰り返しであった. それはTaylorの定理の証明とほぼ同じような議論である. Taylorの定理も以下のような部分積分の繰り返しで証明される:

$$p_n(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$$

とおくと, $p_0(t) = 1$, $-p_n'(t) = p_{n-1}(t)$, $[g(t)(-p_n(t))]_a^x = g(a)\dfrac{(x-a)^n}{n!}$ なので

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x f(t)\,dt = f(a) + \int_a^x f(t)p_0(t)\,dt \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f'(t)p_1(t)\,dt \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x f''(t)p_2(t)\,dt \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \int_a^x f'''(t)p_3(t)\,dt \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + R_n.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
R_n = \int_a^x f^{(n)} p_n(t)\,dt = \int_a^x f^{(n)}\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt
$$

とおいた. この意味でEuler-Maclaurinの和公式はTaylorの公式の「仲間」だと言える. □

2.2 Euler-Maclaurinの和公式の2つの解釈

Euler-Maclaurinの和公式の解釈1:

$$
\sum_{j=a}^{b-1}\frac{f(j)+f(j+1)}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=a+1}^{b-1} f(j)
$$

は積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ の近似計算に使われる台形公式である. ゆえに, Euler-Maclaurinの和公式

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=a+1}^{b-1} f(j) - \sum_{1\leqq i\leqq n/2}\frac{B_{2i}}{(2i)!}(f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)) - R_n, \\
&R_n = (-1)^{n-1}\int_a^b \frac{B_n(x-\lfloor x\rfloor)}{n!} f^{(n)}(x)\,dx
\end{aligned}
$$

は台形公式による積分の近似の誤差が,

$$
-\sum_{1\leqq i\leqq n/2}\frac{B_{2i}}{(2i)!}(f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)) - R_n
$$

になっていることを意味している. 例えば, $n=1$ の場合には, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ なので,

$$
\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=a+1}^{b-1} f(j) - \int_a^b \left(x - \lfloor x\rfloor - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx.
$$

$n=2$ の場合には $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{6}$ であり,

$$
\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=a+1}^{b-1} f(j) - \frac{f'(b)-f'(a)}{12} + \int_a^b \frac{B_2(x-\lfloor x\rfloor)}{2} f''(x)\,dx.
$$

となる. □

In [15]:

```
# すぐ上の公式の検証

BernoulliNumber(n) = sympy[:bernoulli](n)
BernoulliPolynomial(n,x) = sympy[:bernoulli](n,x)

function EulerMaclaurinIntegral(f, a, b, n)
    x = symbols("x", real=true)
    (
        (f(a)+f(b))/Sym(2)
        + sum(j->f(j), a+1:b-1)
        - sum(k -> (
                BernoulliNumber(k)/factorial(Sym(k))
                * (diff(f(x), x, k-1)(x=>b) - diff(f(x), x, k-1)(x=>a))
            ), 2:n)
    )
end

function EulerMaclaurinRemainder(f, a, b, n)
    x = symbols("x", real=true)
    g = diff(f(x), x, n)
    (-1)^(n-1) * sum(k -> (
            integrate(BernoulliPolynomial(n,x)*g(x=>x+k), (x,0,1))
        ), a:b-1)/factorial(Sym(n))
end

x = symbols("x", real=true)

[integrate(x^m, (x, 0, 10)) for m in 7:15] |> display

[
    EulerMaclaurinIntegral(x->x^m, 0, 10, 5) - EulerMaclaurinRemainder(x->x^m, 0, 10, 5)
    for m in 7:15
] |> display
```

$$\begin{bmatrix} 12500000 \\ \frac{1000000000}{9} \\ 1000000000 \\ \frac{100000000000}{11} \\ \frac{250000000000}{3} \\ \frac{10000000000000}{13} \\ \frac{50000000000000}{7} \\ \frac{200000000000000}{3} \\ 625000000000000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12500000 \\ \frac{1000000000}{9} \\ 1000000000 \\ \frac{100000000000}{11} \\ \frac{250000000000}{3} \\ \frac{10000000000000}{13} \\ \frac{50000000000000}{7} \\ \frac{200000000000000}{3} \\ 625000000000000 \end{bmatrix}$$

Euler-Maclaurinの和公式の解釈2: Euler-Maclaurinの和公式は次のように書き直される:

$$\sum_{j=a}^{b} f(j) = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{1\leqq i\leqq n/2} \frac{B_{2i}}{(2i)!}(f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)) + R_n,$$

$$R_n = (-1)^{n-1} \int_a^b \frac{B_n(x-\lfloor x \rfloor)}{n!} f^{(n)}(x)\,dx$$

これは n が3以上の奇数のとき $B_n = 0$ となることを使うと次のように書き直される:

$$\sum_{j=a}^{b} f(j) = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{B_k}{k!}(f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)) + R_n,$$

$$R_n = (-1)^{n-1} \int_a^b \frac{B_n(x - \lfloor x \rfloor)}{n!} f^{(n)}(x)\,dx$$

この等式は函数 f の整数における値の和 $\displaystyle\sum_{j=a}^{b} f(j)$ を積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で近似したときの誤差が

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{1 \leqq i \leqq n/2} \frac{B_{2i}}{(2i)!}(f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)) + R_n$$

になっていることを意味している. 例えば, $n = 1$ の場合には, $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ なので,

$$\sum_{j=a}^{b} f(j) = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx.$$

$n = 2$ の場合には $B_2(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{6}$, $B_2 = \dfrac{1}{6}$ であり,

$$\sum_{j=a}^{b} f(j) = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{f'(b)-f'(a)}{12} - \int_a^b \frac{B_2(x - \lfloor x \rfloor)}{2} f''(x)\,dx.$$

となる. □

In [16]:

```
# すぐ上の公式を検証

PowerSum(m, n) = sum(j->j^m, 1:n)
BernoulliNumber(n) = sympy[:bernoulli](n)
BernoulliPolynomial(n,x) = sympy[:bernoulli](n,x)

function EulerMaclaurinSum(f, a, b, n)
    x = symbols("x", real=true)
    (
        integrate(f(x), (x, a, b))
        + (f(a)+f(b))/Sym(2)
        + sum(k -> (
                BernoulliNumber(k)/factorial(Sym(k))
                * (diff(f(x), x, k-1)(x=>b) - diff(f(x), x, k-1)(x=>a))
            ), 2:n)
    )
end

function EulerMaclaurinRemainder(f, a, b, n)
    x = symbols("x", real=true)
    g = diff(f(x), x, n)
    (-1)^(n-1) * sum(k -> (
            integrate(BernoulliPolynomial(n,x)*g(x=>x+k), (x,0,1))
        ), a:b-1)/factorial(Sym(n))
end

[PowerSum(m, 10) for m in 1:10] ¦> display

[EulerMaclaurinSum(x->x^m, 1, 10, m+1) for m in 1:10] ¦> display

[
    EulerMaclaurinSum(x->x^m, 1, 10, m-1) + EulerMaclaurinRemainder(x->x^m, 1, 10, m-1)
    for m in 3:10
] ¦> display

[
    EulerMaclaurinSum(x->x^m, 1, 10, m-2) + EulerMaclaurinRemainder(x->x^m, 1, 10, m-2)
    for m in 4:10
] ¦> display

[
    EulerMaclaurinSum(x->x^m, 1, 10, m-3) + EulerMaclaurinRemainder(x->x^m, 1, 10, m-3)
    for m in 5:10
] ¦> display
```

```
10-element Array{Int64,1}:
          55
         385
        3025
       25333
      220825
     1978405
    18080425
   167731333
  1574304985
 14914341925
```

$$\begin{bmatrix} 55 \\ 385 \\ 3025 \\ 25333 \\ 220825 \\ 1978405 \\ 18080425 \\ 167731333 \\ 1574304985 \\ 14914341925 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3025 \\ 25333 \\ 220825 \\ 1978405 \\ 18080425 \\ 167731333 \\ 1574304985 \\ 14914341925 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 25333 \\ 220825 \\ 1978405 \\ 18080425 \\ 167731333 \\ 1574304985 \\ 14914341925 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 220825 \\ 1978405 \\ 18080425 \\ 167731333 \\ 1574304985 \\ 14914341925 \end{bmatrix}$$

2.3 Euler-Maclaurinの和公式の形式的導出

函数 $f(x)$ に対して, ある函数 $F(x)$ で

$$F(x+1) - F(x) = f(x+h)$$

という条件を満たすものを求める問題を考える. そのとき, $D = \dfrac{\partial}{\partial x}$ とおくと, 形式的にその条件は

$$(e^D - 1)F(x) = e^{hD} f(x) = De^{hD} \int f(x)\,dx$$

と書き直される. これより, 形式的には

$$F(x) = \frac{De^{hD}}{e^D - 1} \int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(h)}{k!} D^k \int f(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k(h)}{k!} f^{(k-1)}(x).$$

これより, 整数 $a < b$ について, 形式的には

$$\sum_{j=a}^{b-1} f(j+h) = F(b) - F(b) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k(h)}{k!} (f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)).$$

これは $h = 0$ とおけば形式的にEuler-Maclaurinの和公式

$$\sum_{j=a}^{b-1} f(j) = F(b) - F(b) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)).$$

に一致する.

2.4 べき乗和(再)

$f^{(m+1)}(x) = 0$ ならばEuler-Maclaurinの和公式における R_m が消えて, $f^{(m)}(x)$ が定数函数になるので,

$$\sum_{j=a}^{b} f(j) = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=2}^{m+1} \frac{B_k}{k!} (f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a))$$

となる. m を正の整数であるとし, $f(x) = x^m$, $a = 0$, $b = n$ とすると,

$$(x^m)^{(k-1)} = m(m-1)\cdots(m-k+2)x^{m-k+1} = \frac{k!}{m+1}\binom{m+1}{k}x^{m+1-k}$$

なので, $B_0(1) = B_0 = 1$, $B_1(1) = B_1 + 1 = \frac{1}{2}$, $B_n(1) = B_n + \delta_{n,1}$ も使うと,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} j^m &= \int_0^n x^m\,dx + \frac{n^m}{2} + \sum_{k=2}^{m}\frac{B_k}{k!}\frac{k!}{m+1}\binom{m+1}{k}x^{m+1-k} \\
&= \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \frac{1}{m+1}\sum_{k=2}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k} \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k(1)n^{m+1-k} \\
&= \frac{B_{m+1}(x) - B_{m+1}}{m+1}.
\end{aligned}$$

最後の等号で

$$B_{m+1}(x+h) = \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}B_k(h)x^{m+1-k}$$

を使った. 以上の結果は前節で得た結果と一致する. □

2.5 Stirlingの近似公式

$\log n! = \log 1 + \log 2 + \cdots \log n$ の $\log x$ の積分による近似をEuler-Maclaurinの和公式を使って精密化すると, Stirlingの近似公式

$$\log n! = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \log\sqrt{2\pi} + o(1)$$

の精密化が得られることを説明しよう.

$f(x) = \log x$ にStirlingの和公式を適用すると, $k = 1, 2, 3, \ldots$ に対して,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}.$$

K は3以上の奇数とする. 3以上の奇数 k について $B_k = 0$ なので, $N > n$ のとき,

$$\begin{aligned}
\log n! &= \log N! + \log n - \sum_{j=n}^{N}\log j \\
&= \log N! + \log n - \left(\int_n^N \log x\,dx + \frac{\log n + \log N}{2} + \sum_{k=2}^{K-1}\frac{B_k}{k(k-1)}\left(\frac{1}{N^{k-1}} - \frac{1}{n^{k-1}}\right) + R_{K,N}\right) \\
&= \log N! - \left(N\log N - N + \frac{1}{2}\log N\right) - \sum_{k=2}^{K-1}\frac{B_k}{k(k-1)}\frac{1}{N^{k-1}} \\
&\quad + n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \sum_{k=2}^{K-1}\frac{B_k}{k(k-1)}\frac{1}{n^{k-1}} + R_{K,N}, \\
R_{K,N} &= (-1)^{K-1}\int_n^N \frac{\tilde{B}_K(x)}{K}\frac{(-1)^{K-1}}{x^K}\,dx
\end{aligned}$$

ただし, $\tilde{B}_n(x) = B_n(\lfloor x \rfloor)$ とおいた.

ここでは, $N \to \infty$ のとき

$$\log N! - \left(N\log N - N + \frac{1}{2}\log N\right) = \sqrt{2\pi}$$

となることは既知であるものとする. 例えば, ノート「10 Gauss積分, ガンマ函数, ベータ函数 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/10%20Gauss%2C%20Gamma%2C%20Beta.ipynb)」「12 Fourier解析 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb)」のStirlingの近似公式の節を参照せいて欲しい. 以下ではそれらのノートよりも精密な結果を得る.

このとき, 上の結果で $N \to \infty$ とすると,

$$\log n! = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \log\sqrt{2\pi} + \sum_{k=2}^{K-1}\frac{B_k}{k(k-1)}\frac{1}{n^{k-1}} + R_K,$$
$$R_K = (-1)^{K-1}\int_n^\infty \frac{\tilde{B}_K(x)}{K}\frac{(-1)^{K-1}}{x^K}\,dx = O\left(\frac{1}{n^{K-1}}\right).$$

$K = 2L+1$ とおくことによって次が得られる: 正の整数 L に対して,

$$\log n! = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \log\sqrt{2\pi} + \sum_{l=1}^{L}\frac{B_{2l}}{(2l)(2l-1)}\frac{1}{n^{2l-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2L}}\right).$$

これが求めていた結果である.

例えば, $L=2$ のとき, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$ なので,

$$\log n! = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

これより,

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right).$$

In [17]:
```
x = symbols("x")
series(exp(x/12-x^3/360), x, n=4)
```

Out[17]:
$$1 + \frac{x}{12} + \frac{x^2}{288} - \frac{139x^3}{51840} + \mathcal{O}\left(x^4\right)$$

2.6 Poissonの和公式とEuler-Maclaurinの和公式の関係

Poissonの和公式とは, 急減少函数 $f(x)$ に対して,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n), \qquad \hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi ipx}\,dx$$

が成立するという結果であった. これの右辺は以下のように変形できる:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi inx}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(2\pi nx)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx - \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} f'(x)\frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}\right)f'(x)\,dx\end{aligned}$$

2つ目の等号では $e^{2\pi inx} + e^{-2\pi inx} = 2\cos(2\pi nx)$ を用い, 3つ目の等号では部分積分を実行し, 4つ目の等号では無限和と積分の順序を交換した. それらの操作は $f(x)$ が急減少函数であれば容易に正当化される.

一方, Euler-Maclaurinの和公式の

$$B_1(x - \lfloor x\rfloor) = x - \lfloor x\rfloor - \frac{1}{2}$$

を使う場合から,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}}\left(x - \lfloor x\rfloor - \frac{1}{2}\right)f'(x)\,dx$$

が導かれる. これは部分積分によって得られる次の公式からただちに導かれる易しい公式であることにも注意せよ:

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1}\left(x - n - \frac{1}{2}\right)f'(x)\,dx &= \left[\left(x - n - \frac{1}{2}\right)f(x)\right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f(x)\,dx - n \\ &= \frac{f(n+1) - f(n)}{2} - \int_n^{n+1} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

以上の2つの結果を比較すると, Poissonの和公式とEuler-Maclaurinの和公式の $B_1(x-\lfloor x\rfloor)$ を使った場合は,

$$x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n} \tag{$*$}$$

という公式で結び付いていることがわかる. この公式を認めれば, Euler-Maclaurinの和公式の $B_1(x-\lfloor x\rfloor)$ を使った場合からPoissonの和公式が導かれる.

公式($*$)の左辺はいわゆる**のこぎり波**であり, 右辺はそのFourier級数である. 公式($*$)はFourier級数論における非常に有名な公式であり, 本質的にそれと同じ公式はFourier級数論について書かれた文献には例として必ず載っていると言ってよいくらいである. (Fourier級数論より, 公式($*$)は x が整数でないときには実際に成立していることがわかる.)

このように, のこぎり波のFourier級数展開という非常に特殊な公式はPoissonの和公式という一般的な公式を導くだけの力を持っているのである.

まとめ: のこぎり波のFourier級数展開は部分積分を通してPoissonの和公式と本質的に同値である! □

この節で解説したことは次の文献で指摘されている:

- Tim Jameson, [An elementary derivation of the Poisson summation formula (http://www.maths.lancs.ac.uk/jameson/poisson.pdf)](http://www.maths.lancs.ac.uk/jameson/poisson.pdf)

In [18]:

```
B_1(x) = x - 1/2
b(x) = B_1(x - floor(x))
S(N,x) = -sum(n->sin(2π*n*x)/(π*n), 1:N)
x = -2:0.001:1.999
N = 10
plot(size=(400,200), ylim=(-0.6,1.2), legend=:top)
plot!(x, b.(x), label="B_1(x-[x]) = x - [x] -1/2")
plot!(x, S.(N,x), label="partial sum of Fourier series (N=$N)")
```

Out[18]:

補足: このノートの上の方の周期的Bernoulli多項式 $B_k(x-\lfloor x\rfloor)$ のFourier級数展開の節を見ればわかるように,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi nx)}{n^k},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{n^k}$$

の型のFourier級数の収束先は平行移動と定数倍の違いを除いて周期的Bernoulli多項式になる. □

3 ゼータ函数への応用

$s>1$ のとき(より一般には $\operatorname{Re}s>1$ のとき),

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

は絶対収束しているのであった. これにEuler-Maclaurinの和公式

$$\sum_{j=a}^{b}f(j)=\int_a^b f(x)\,dx+\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{B_k}{k!}(f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a))+R_n,$$

$$R_n=(-1)^{n-1}\int_a^b\frac{B_n(x-\lfloor x\rfloor)}{n!}f^{(n)}(x)\,dx$$

を適用してみよう.

3.1 解析接続

$\mathrm{Re}\, s > 1$ であるとし, $f(x) = x^{-s}$ とおく. このとき,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty x^{-s}\,dx = \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^\infty = \frac{a^{-(s-1)}}{s-1}, \qquad f(b) = b^{-s} \to 0 \quad (b \to \infty).$$

$$\frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) = \frac{B_k}{k}\binom{-s}{k-1} x^{-s-k+1}, \qquad \frac{B_n(x - \lfloor x \rfloor)}{n!} f^{(n)}(x) = \binom{-s}{n} B_n(x - \lfloor x \rfloor) x^{-s-n}$$

なので, 2以上の整数 n について,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{B_k}{k}\binom{-s}{k-1} + R_n,$$

$$R_n = (-1)^{n-1}\binom{-s}{n}\int_1^\infty B_n(x - \lfloor x \rfloor) x^{-s-n}\,dx.$$

積分 R_n は $\mathrm{Re}\, s + n > 1$ ならば絶対収束している. ゆえに, 複素平面全体に $\zeta(s)$ を自然に拡張する方法(解析接続する方法)が得られた.

$\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ そのものではなく, $n = a$ から始まる無限和 $\displaystyle\sum_{k=a}^\infty \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \sum_{n=1}^{a-1} \frac{1}{n^s}$ にEuler-Maclaurinの和公式を適用すると,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{a-1} \frac{1}{n^s} - \frac{a^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{2a^s} - \sum_{k=2}^{n} \frac{B_k}{ka^{s+k-1}}\binom{-s}{k-1} + R_{n,a},$$

$$R_{n,a} = (-1)^{n-1}\binom{-s}{n}\int_a^\infty B_n(x - \lfloor x \rfloor) x^{-s-n}\,dx.$$

In [19]:

```
# 上の公式における ζ(s) - R_{n,a} の函数化

# ζ(s) - R_{n,a} = Σ_{m=1}^{a-1} m^{-s} - a^{1-s}/(1-s) + 1/(2a^s)
#                - Σ_{k=2}^n B_k/(k a^{s+k-1}) binom(-s,k-1)    (k is even)
#
function ApproxZeta(a, n, s)
    ss = float(big(s))
    z = zero(ss)
    z += (a ≤ 1 ? zero(ss) : sum(m->m^(-ss), 1:a-1)) # Σ_{m=1}^{a-1} m^{-s}
    z += -a^(1-ss)/(1-ss)                            # -a^{1-s}/(1-s)
    n == 0 && return z
    z += 1/(2*a^ss)                                  # 1/(2a^s)
    n == 1 && return z
    z -= sum(k -> BB(k)/(k*a^(ss+k-1))*binom(-ss,k-1), 2:2:n)
            #   -Σ_{k=2}^n B_k/(k a^{s+k-1}) binom(-s,k-1)    (k is even)
end

A = ApproxZeta(40, 80, big"0.5")
Z = zeta(big"0.5")
@show A
@show Z;
```

```
A = -1.46035450880958681288949915251529801246722933101258149054288608782553052947 4572
Z = -1.46035450880958681288949915251529801246722933101258149054288608782553052947 4503
```

$\mathrm{Re}\, s > 0$ のとき,

$$\frac{1}{2a^s} - \sum_{k=2}^{n} \frac{B_k}{ka^{s+k-1}}\binom{-s}{k-1} + R_{n,a}$$

は $a \to \infty$ で 0 に収束するので,

$$\zeta(s) = \lim_{a\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{a-1} \frac{1}{n^s} - \frac{a^{1-s}}{1-s}\right) \qquad (\mathrm{Re}\, s > 0)$$

が成立することがわかる. これは, Dirichlet級数の部分和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{a-1} \frac{1}{n^s}$ から補正項

$$\frac{a^{1-s}}{1-s}$$

を引き去ってから, Dirichlet級数の総和を取れば, $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$ でも収束して, $\zeta(s)$ の正確な値が得られることを意味している.

In [20]:

```
# 上の結果のプロット

ApproxZeta0(a, s) = sum(n->n^(-s), 1:a-1) - a^(1-s)/(1-s)
a = 100
s = 0.05:0.01:0.95
@time z = zeta.(s)
@time w = ApproxZeta0.(a, s)
plot(size=(400, 250), legend=:bottomleft, xlabel="s")
plot!(s, z, label="zeta(s)", lw=2)
plot!(s, w, label="Euler-Maclaurin sum for n=0, a=$a", lw=2, ls=:dash)
```

```
0.057854 seconds (29.42 k allocations: 1.510 MiB)
0.049310 seconds (19.07 k allocations: 1007.852 KiB)
```

Out[20]:

In [21]:

```
# さらに項の数を1つ増やした場合のプロット

# ζ(s) - R_{1,a} = Σ_{n=1}^{a-1} n^{-s}  - a^{1-s}/(1-s) + 1/(2a^s)
#
ApproxZeta1(a, s) = sum(n->n^(-s), 1:a-1) - a^(1-s)/(1-s) + 1/(2*a^s)

s = -0.95:0.01:0.5
a = 10^3
@time z = zeta.(s)
@time w = ApproxZeta1.(a,s)
plot(size=(400, 250), legend=:bottomleft, xlabel="s")
plot!(s, z, label="zeta(s)", lw=2)
plot!(s, w, label="Euler-Maclaurin sum for n=1, a=$a", lw=2, ls=:dash)
```

```
0.000181 seconds (29 allocations: 2.406 KiB)
0.058011 seconds (19.04 k allocations: 1005.415 KiB)
```

Out[21]:

In [22]:

```
# さらに一般の場合のプロット
#
# Euler-Maclaurinの和公式で ζ(s) の負の s での値をぴったり近似できていることがわかる.

[(-m, zeta(-m), Float64(ApproxZeta(2, 17, -m))) for m = 0:12] |> display

n = 10
s = -1.5:0.05:0.5
a = 10
@time z = zeta.(s)
@time w = ApproxZeta.(a, n, s)
P1 = plot(size=(400, 250), legend=:bottomleft, xlabel="s")
plot!(s, z, label="zeta(s)", lw=2)
plot!(s, w, label="Euler-Maclaurin sum for a=$a, n=$n", lw=2, ls=:dash)

n = 17
s = -16:0.05:-2.0
a = 2
@time z = zeta.(s)
@time w = ApproxZeta.(a, n, s)
P2 = plot(size=(400, 250), legend=:topright, xlabel="s")
plot!(s, z, label="zeta(s)", lw=2)
plot!(s, w, label="Euler-Maclaurin sum for a=$a, n=$n", lw=2, ls=:dash)
```

```
13-element Array{Tuple{Int64,Float64,Float64},1}:
 (0, -0.5, -0.5)
 (-1, -0.0833333, -0.0833333)
 (-2, -0.0, -1.29543e-77)
 (-3, 0.00833333, 0.00833333)
 (-4, -0.0, -3.45447e-77)
 (-5, -0.00396825, -0.00396825)
 (-6, -0.0, 0.0)
 (-7, 0.00416667, 0.00416667)
 (-8, -0.0, 0.0)
 (-9, -0.00757576, -0.00757576)
 (-10, -0.0, -4.42172e-75)
 (-11, 0.0210928, 0.0210928)
 (-12, -0.0, 0.0)

  0.000099 seconds (29 allocations: 1.625 KiB)
  0.181011 seconds (122.74 k allocations: 5.447 MiB)
  0.000319 seconds (29 allocations: 3.563 KiB)
  0.071032 seconds (565.80 k allocations: 20.997 MiB, 18.17% gc time)
```

Out[22]:

In [23]:
```
display(P1)
```

上と下のグラフを見ればわかるように, Euler-Maclaurinの和公式によって負の実数での ζ 函数の値を非常によく近似できている. 実は $\zeta(s)$ を実部が負の複素数まで拡張してもこの近似はうまく行っている.

In [24]:
```
display(P2)
```

3.2 ζ(2)の近似計算

$\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ を計算せよという問題は**Basel問題**と呼ばれているらしい. Basel問題はEulerによって1743年ころに解かれたらしい. Eulerがどのように考えたかについては次の文献を参照せよ.

- 杉本敏夫, バーゼル問題とオイラー (http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1583-12.pdf), 2007年8月23日, 数理解析研究所講究録, 第1583巻, 2008年, pp.159-167

Eulerは $\zeta(2)$ の近似値を自ら開発したEuler-Maclaurinの和公式を使って精密に計算したらしい.

近似式

$$\zeta(s) \approx \sum_{n=1}^{a-1} \frac{1}{n^s} - \frac{a^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{2a^s} - \sum_{k=2}^{n} \frac{B_k}{ka^{s+k-1}} \binom{-s}{k-1}$$

を用いて, $\zeta(2)$ を計算してみよう. 3以上の奇数 n について $B_n = 0$ となるので, $n = 2m$ のとき, 右辺の項数は $a + m + 1$ になる.

例えば, $a = 10$, $m = 9$ とし, 20項の和を取ると,

$$\zeta(2) \approx 1.64493\ 40668\ 4749 \cdots$$

となり, 正確な値 $\dfrac{\pi^2}{6} = 1.64493\ 40668\ 4822 \cdots$ と小数点以下第11桁まで一致している.

Eulerは後に $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ を得る. Eulerは競争相手に議論に厳密性に欠けるとして様々な批判を受けたのだが, 以上のような数値計算の結果を知っていたので, 正解を得たという確信は微塵も揺らがなかっただろうと思われる.

注意: 論理的に厳密な証明の方法が発達した現代においても, 人間は常に証明を間違う可能性がある. 人間が行った証明は絶対的

には信用できない. だから, たとえ証明が完成したと思っていたとしても, 可能ならば数値計算によって論理的に厳密な証明以外の証拠を作っていた方が安全だと思われる. □

注意: 数学のノートを作りながら, 気軽に数値的証拠も同時に得るための道具として, 筆者がこのノート作成のために用いている Julia言語 (https://julialang.org/)とJupyter (http://jupyter.org/)とNbextensions (https://github.com/ipython-contrib/jupyter_contrib_nbextensions)のLive Markdown Previewはこれを書いている時点で相当に優秀な道具であるように思われる. □

In [25]:

```
# 20項の和

N = 20
[(m, N-m-1, 2m, ApproxZeta(N-m-1, 2m, 2) - big(π)^2/6) for m in 2:N÷2-1] ¦> display

m = 9
a = N-m-1
Z = big(π)^2/6
A = ApproxZeta(a, m, 2)
@show a,m
@show Z
@show A;
```

```
8-element Array{Tuple{Int64,Int64,Int64,BigFloat},1}:
 (2, 17, 4, -5.774517938634748337977889404783585036995854075783993576810016193236641452617 58e-11)
 (3, 16, 6, 4.808127352395625095013460112150325878389866054958153137408430487774776509324829e-13)
 (4, 15, 8, -8.630887513943044224615236465465206970650911046136527708026292186723865816966492e-15)
 (5, 14, 10, 3.116217978527385328054235573023871173466586797186396436897662720414552852297451e-16)
 (6, 13, 12, -2.200847274100542514575619216657515798396053843860275532661691594239630209744406e-17)
 (7, 12, 14, 3.035248943857815147777677383711316694019656935103319432181355248871820406062584e-18)
 (8, 11, 16, -8.335321043122531064769674746337938450627967961329547742403411230422546148897753e-19)
 (9, 10, 18, 4.746601814392005312714027578027970306539540935051342164737224161514796063021067e-19)

(a, m) = (10, 9)
Z = 1.644934066848226436472415166646025189218949901206798437735558229370007470403185
A = 1.644934066847493071302595112118921642731166540690350214159737969261778785588307
```

3.3 s = 1でのζ(s)の定数項がEuler定数になること

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ にEuler-Maclaurinの和公式を使って, 2以上の n について次の公式が得られるのであった:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{B_k}{k} \binom{-s}{k-1} + R_n,$$
$$R_n = (-1)^{n-1} \binom{-s}{n} \int_1^{\infty} B_n(x - \lfloor x \rfloor) x^{-s-n}\, dx.$$

$n = 1$ の場合には

$$\sum_{j=a}^{b} f(j) = \int_a^b f(x)\, dx + f(a) + \int_a^b (x - \lfloor x \rfloor) f'(x)\, dx$$
$$= \int_a^b f(x)\, dx + f(a) + \sum_{j=a}^{b-1} \int_0^1 x f'(x+j)\, dx$$

を $f(x) = x^{-s}, f'(x) = -sx^{-s-1}, a = 1, b = \infty$ の場合に適用して,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x}{(x+j)^{s+1}}\, dx$$

を得る. したがって,

$$\lim_{s \to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x}{(x+j)^2}\, dx.$$

そして, $x = t - j$ と置換すると,

$$-\int_0^1 \frac{x}{(x+j)^2}\,dx = -\int_j^{j+1} \frac{-(t-j)}{t^2}\,dt = -\left[\log t + \frac{j}{t}\right]_j^{j+1}$$
$$= -\log(j+1) + \log j - \frac{j}{j+1} + 1 = \frac{1}{j+1} + \log j - \log(j+1)$$

なので, これを $j=1$ から $j=N-1$ まで足し上げることによって,

$$1 - \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{x}{(x+j)^2}\,dx = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} - \log N.$$

これの $N \to \infty$ での極限はEuler定数 $\gamma = 0.5772\cdots$ の定義であった. 以上によって次が示された:

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma = 0.5772\cdots.$$

3.4 負の整数におけるゼータ函数の特殊値の計算

Euler-Maclaurinの和公式: 3 以上の整数 k について $B_k = 0$ なので, 以下の公式で k は偶数のみを動くとしてよい:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{B_k}{k!}(f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)) + R_m,$$
$$R_n = (-1)^{m-1} \int_a^b \frac{\tilde{B}_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)\,dx.$$

ここで $\tilde{B}_m(x) = B_m(x - \lfloor x \rfloor)$ とおいた.

Euler-Maclaurinの和公式を $f(x) = n^{-s}$, $a=1$, $b=\infty$ の場合に適用することによって $\zeta(s)$ は次の形で $\Re s > 1-m$ まで自然に延長(解析接続)されるのであった:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1-s}\sum_{k=2}^{m}\binom{1-s}{k}B_k + (-1)^{m-1}\int_a^b \binom{-s}{m}\tilde{B}_m(x)x^{-s-m}\,dx.$$

この公式と $k \geqq 2$ のとき $\binom{1}{k} = 0$ となることより,

$$\zeta(0) = \frac{1}{0-1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

r は正の整数であるとする. このとき, $m > r$ とすると $\binom{r}{m} = 0$ となるので, $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$ なので,

$$\zeta(-r) = -\frac{1}{r+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{r+1}\sum_{k=2}^{r+1}\binom{m+1}{k}B_k$$
$$= -\frac{1}{r+1}\sum_{k=0}^{r+1}\binom{m+1}{k}B_k = -\frac{B_{r+1}}{r+1}.$$

最後の等号で, Bernoulli数を帰納的に計算するために使える公式 $\sum_{k=0}^{r}\binom{r+1}{k}B_k = 0$ を用いた. 例えば, $r=1$ のとき $B_0 + 2B_1 = 1 + 2(-1/2) = 0$ となり, $r=2$ のとき, $B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 1 + 3(-1/2) + 3(1/6) = 0$ となる.

以上によって次が証明された:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-r) = -\frac{B_{r+1}}{r+1} \quad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

これらの公式は $B_n(1) = B_n + \delta_{n,1}$, $B_1 = -1/2$ を使うと,

$$\zeta(-r) = -\frac{B_{r+1}(1)}{r+1} \quad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

の形にまとめられる.

3.5 発散級数の有限部分と ζ(-r) の関係

前節の結果 $\zeta(-r) = -\dfrac{B_{r+1}(1)}{r+1}$ $(r = 0, 1, 2, \dots)$ は

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = -\frac{1}{2},$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

のような印象的な形式で書かれることもある. ただし, その場合には左辺が通常の無限和ではなく, ゼータ函数 $\zeta(s)$ の解析接続の意味であることを了解しておかなければいけない.

実はさらに解析接続として理解するだけではなく, 「左辺の発散する無限和から適切に無限大を引き去れば右辺に等しくなる」というようなタイプの命題をうまく作ることもできる. 以下ではそのことを解説しよう.

以下, η は非負の実数に値を持つ $\mathbb{R}$ 上の**急減少函数**であると仮定する. ($\mathbb{R}$ 上の急減少函数とは $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 函数でそれ自身およびそのすべての階数の導函数に任意の多項式函数をかけたものが $|x| \to \infty$ で 0 に収束するもののことである.) さらに,

$$\eta(0) = 1, \quad \eta'(0) = 0$$

と仮定する. 例えば $\eta(x) = e^{-x^2}$ はそのような函数の例になっている.

このとき, $\eta(x)$ が急減少函数であることより, $N > 0$ のとき, 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r \eta(n/N) = 1^r \eta(1/N) + 2^r \eta(2/N) + 3^r \eta(3/N) + \cdots$$

は常に絶対収束する. r が非負の整数のとき, $N \to \infty$ とすると, この級数は発散級数 $1^r + 2^r + 3^r + \cdots$ になってしまう. 以下の目標は, Euler-Maclaurinの和公式を使うと, その $N \to \infty$ での発散部分が CN^{r+1} (C は η と r で具体的に決まる定数) の形にまとまることを示すことである. そして, 残った有限部分は**常に** $\zeta(-r)$ に収束することも示される.

$\tilde{B}_n(x) = B_n(x - \lfloor x \rfloor)$ と書くことにする.

このとき, $f(x) = \eta(x/N)$ にEuler-Maclaurinの和公式を適用すると, $f(0) = 1, f'(0) = f(\infty) = f'(\infty) = 0$ より,

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{n=1}^{\infty} \eta(x/N) &= \sum_{n=0}^{\infty} \eta(x/N) \\
&= \int_0^\infty \eta(x/N)\,dx + \frac{1}{2} + B_2(f'(\infty) - f'(0)) - \int_0^\infty \frac{\tilde{B}_2(x)}{2!} \frac{1}{N^2} \eta''(x/N)\,dx \\
&= N \int_0^\infty \eta(y)\,dy + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \int_0^\infty \frac{\tilde{B}_2(Ny)}{2!} \eta''(y)\,dy.
\end{aligned}$$

ゆえに, $\zeta(0) = -1/2$ を使うと,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta(x/N) - N \int_0^\infty \eta(y)\,dy = \zeta(0) + O(1/N).$$

これは $N \to \infty$ で発散級数 $1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ になる無限和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \eta(x/N)$ から, その発散部分 $\displaystyle N \int_0^\infty \eta(y)\,dy$ を引き去って, $N \to \infty$ の極限を取ると, $\zeta(0)$ に収束することを意味している. これが欲しい結果の1つ目である.

r は正の整数であるとし, $f(x) = x^r \eta(x/N)$ とおく. そのとき, Leibnitz則

$$(\varphi(x)\psi(x))^{(m)} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i} \varphi^{(i)}(x) \psi^{(m-i)}(x)$$

を使うと,

$$f^{(r+2)}(x) = \frac{1}{N^2} F(x/N), \quad F(y) = \binom{r+2}{0} y^r \eta^{(r+2)}(y) + \cdots + \binom{r+2}{r} r! \eta(y)$$

その $f(x)$ にEuler-Maclaurinの和公式を適用すると, $f^{(k)}(\infty) = f^{(k)}(\infty) = 0$ および,

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(r-1)}(0) = f^{(r+1)}(0) = 0, \quad f^{(r)}(0) = r!$$

より,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^r \eta(n/N) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) &= \int_0^{\infty} f(x)\,dx - \frac{B_{r+1}}{(r+1)!} r! - \frac{B_{r+2}}{(r+2)!} 0 + (-1)^{r+1} \int_a^b \frac{\tilde{B}_{r+2}(x)}{(r+2)!} f^{(r+2)}(x)\,dx \\ &= N^{r+1} \int_0^{\infty} y^r \eta(y)\,dy - \frac{B_{r+1}}{r+1} + (-1)^{r+1} \frac{1}{N} \int_a^b \frac{\tilde{B}_{r+2}(Ny)}{(r+2)!} F(y)\,dy \\ &= N^{r+1} \int_0^{\infty} y^r \eta(y)\,dy - \frac{B_{r+1}}{r+1} + O(1/N).\end{aligned}$$

ゆえに, $\zeta(-r) = -\dfrac{B_{r+1}}{r+1}$ を使うと,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r \eta(n/N) - N^{r+1} \int_0^{\infty} y^r \eta(y)\,dy = \zeta(-r) + O(1/N).$$

これは $N \to \infty$ で発散級数 $1^r + 2^r + 3^r + 4^r + \cdots$ になる無限和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^r \eta(x/N)$ から, その発散部分 $N^{r+1} \displaystyle\int_0^{\infty} y^r \eta(y)\,dy$ を引き去って, $N \to \infty$ の極限を取ると, $\zeta(-r)$ に収束することを意味している. これが欲しい結果である.

注意: 以上の計算のポイントは, 非負の急減少函数 $\eta(x)$ で $\eta(0) = 1$, $\eta'(0) = 0$ を満たすもので発散級数を正則化して得られる級数の場合には, Euler-Maclaurinの和公式の「途中の項」がほとんど消えてしまうことである. CN^{r+1} 型の発散項と定数項と $O(1/N)$ の部分の3つの項しか生き残らない. □

注意: 以上の結果に関するより進んだ解説については次のリンク先を参照せよ:

- Terence Tao, [The Euler-Maclaurin formula, Bernoulli numbers, the zeta function, and real-variable analytic continuation (https://terrytao.wordpress.com/2010/04/10/the-euler-maclaurin-formula-bernoulli-numbers-the-zeta-function-and-real-variable-analytic-continuation/)](https://terrytao.wordpress.com/2010/04/10/the-euler-maclaurin-formula-bernoulli-numbers-the-zeta-function-and-real-variable-analytic-continuation/), Blog: What's new, 10 April, 2010.

このブログ記事はかなり読み易い. □

問題: 以上の結果を数値計算でも確認してみよ. □

ヒント: $\eta(x) = e^{-x^2}$ の場合を試してみよ. そのとき,

$$\int_0^{\infty} y^r \eta(y)\,dy = \int_0^{\infty} y^r e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)$$

となっている. □

解答例: 次のリンク先のノートを見よ.

- 黒木玄, [ζ(s) の Re s < 1 での様子 (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/8b13fc9c05bfd669c345b940066b896b)](http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/8b13fc9c05bfd669c345b940066b896b) □

In [26]:
```
y = symbols("y", real=true)
r = symbols("r", positive=true)
integrate(y^r*exp(-y^2), (y, 0, oo))
```

Out[26]:

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

In [ ]:
```

```