高校数学の話題

黒木玄 (Gen Kuroki)

2018-08-15

このノートでは高校の数学の教科書にあるような話題を扱い, その数学的背景について解説する.

タイポや自明な誤りは自分で訂正して読むこと. 本質的な誤りがあれば著者に教えて欲しい.

- Repository: https://github.com/genkuroki/HighSchoolMath (https://github.com/genkuroki/HighSchoolMath)

このファイルは次の場所できれいに閲覧できる:

- 高校数学の話題 HTML版 (http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/HighSchoolMath/blob/master/HighSchoolMath.ipynb)
- 高校数学の話題 PDF版 (https://genkuroki.github.io/documents/HighSchoolMath/HighSchoolMath.pdf)

このノートの想定読者は大学である程度を数学を学んだ学生で高校で習った数学について見直したい人達である.

このファイルはJulia言語 (https://julialang.org/)カーネルの Jupyter notebook (http://jupyter.org/) である. 自分のパソコンにJulia言語 (https://julialang.org/)をインストールしたい場合には

- WindowsへのJulia言語のインストール (http://nbviewer.jupyter.org/gist/genkuroki/81de23edcae631a995e19a2ecf946a4f)

を参照せよ. このファイルは JuliaBox (https://juliabox.com/) でも使用できるかもしれない. このファイル中のJulia言語 (https://julialang.org/)のコードを理解できれば, Julia言語 (https://julialang.org/)からSymPy (https://www.sympy.org)を用いた数式処理や数値計算の結果のプロットの仕方を学ぶことができる.

目次

In [1]:
```
using Plots
pyplot()
#gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
#clibrary(:colorcet)
#clibrary(:misc)

function pngplot(P...; kwargs...)
    sleep(0.1)
    pngfile = tempname() * ".png"
    savefig(plot(P...; kwargs...), pngfile)
    showimg("image/png", pngfile)
end
pngplot(; kwargs...) = pngplot(plot!(; kwargs...))

showimg(mime, fn) = open(fn) do f
    base64 = base64encode(f)
    display("text/html", """<img src="data:$mime;base64,$base64">""")
end

using SymPy
#sympy[:init_printing](order="lex") # default
#sympy[:init_printing](order="rev-lex")

using SpecialFunctions
using QuadGK
using Elliptic.Jacobi: cd, sn
```

1 3次方程式と4次方程式の解法

1.1 ある3次式の因数分解から3次方程式の解法へ

高校で次の因数分解の公式を習う:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

1の原始3乗根を ω と書く: $\omega^2+\omega+1=0$,

$$\omega = e^{\pm 2\pi i/3} = \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}.$$

以下では, $\omega^2+\omega+1=0$ とそれから導かれる $\omega^3=1, \omega\ne 1$ のみを使う.

1の原始3乗根 ω を使うと上の因数分解の公式は

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$$

と書き直される. 最初の因数分解の公式の右辺の $-xy, -xz, -yz$ の係数 -1 は $\omega^2+\omega=-1$ によって再現される.

さらに, $p=yz$, $q=y^3+z^3$ とおくと, 上の因数分解の公式は

$$x^3-3px+q=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$$

と書き直される. この公式を使うと3次方程式の解の公式を作れる.

任意に与えられた p, q に対して, $p=yz$, $q=y^3+z^3$ を満たす y, z は以下のようにして求めることができる. $y^3z^3=p^3$ と $y^3+z^3=q$ より

$$\lambda^2-q\lambda+p^3=(\lambda-y^3)(\lambda-z^3).$$

ゆえに, 必要ならば y, z の立場を交換すれば

$$y^3=\frac{q+\sqrt{q^2-4p^3}}{2}, \quad z^3=\frac{q-\sqrt{q^2-4p^3}}{2}$$

が成立している. 右辺の3乗根を取れば y, z も求まる:

$$y=\sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2-4p^3}}{2}}, \quad z=\sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{q^2-4p^3}}{2}}.$$

上の $x^3-3px+q$ の因数分解の公式より, $x^3-3px+q=0$ の解はこの y, z を使って,

$$x=-y-z, \quad -\omega y-\omega^2 z, \quad -\omega^2 y-\omega z.$$

と表わされる. これは本質的に所謂**Cardanoの公式**(カルダノの公式)である.

問題: 以上の計算を確認し, さらに解の公式を実際に作ってみよ. □

解答略.

In [2]:
```
# 1の原始3乗根

x, y, z = symbols("x y z")
ω = (-1+√Sym(-3))/2
```

Out[2]:

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$$

In [3]:
```
# 因数分解の公式の確認

f3 = simplify((x+y+z)*(x+ω*y+ω^2*z)*(x+ω^2*y+ω*z))
```

Out[3]: $x^3-3xyz+y^3+z^3$

In [4]:
```
p = y*z
q = y^3+z^3
[p, q] |> display
x^3 - 3p*x + q
```

$$\begin{bmatrix} yz \\ y^3 + z^3 \end{bmatrix}$$

Out[4]: $x^3 - 3xyz + y^3 + z^3$

In [5]:
```
m = symbols("m")
(f2 = expand((m-y^3)*(m-z^3))) |> display
(c2 = coeffs(f2, m)) |> display
```

$$m^2 - my^3 - mz^3 + y^3 z^3$$

$$\begin{bmatrix} y^3 z^3 \\ -y^3 - z^3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In [6]:
```
# 2次方程式の解

p, q = symbols("p q")
factor.(solve(m^2-q*m+p^3, m))
```

Out[6]:
$$\begin{bmatrix} \frac{q-\sqrt{-4p^3+q^2}}{2} \\ \frac{q+\sqrt{-4p^3+q^2}}{2} \end{bmatrix}$$

In [7]:
```
# 3次方程式の解

x, p, q = symbols("x p q")
factor.(solve(x^3-3p*x+q, x))
```

Out[7]:
$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt[3]{2}\left(2p+\sqrt[3]{2}\left(q+\sqrt{-4p^3+q^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}{2\sqrt[3]{q+\sqrt{-4p^3+q^2}}} \\ \frac{\sqrt[3]{2}\left(4p-\sqrt[3]{2}\left(q+\sqrt{-4p^3+q^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{2}\sqrt{3}i\left(q+\sqrt{-4p^3+q^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}{2\left(1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{q+\sqrt{-4p^3+q^2}}} \\ -\frac{\sqrt[3]{2}\left(4p-\sqrt[3]{2}\left(q+\sqrt{-4p^3+q^2}\right)^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{2}\sqrt{3}i\left(q+\sqrt{-4p^3+q^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}{2\left(-1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{q+\sqrt{-4p^3+q^2}}} \end{bmatrix}$$

1.2 ある4次式の展開公式から4次方程式の解法へ

f を次のように定める:

$$f = (w+x+y+z)(w+x-y-z)(w-x+y-z)(w-x-y+z).$$

このとき,

$$p = x^2 + y^2 + z^2, \quad q = xyz, \quad r = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \tag{$*$}$$

とおくと,

$$f = w^4 - 2pw^2 + 8qw + p^2 - 4r.$$

ゆえに, もしも与えられた p, q, r に対して, 条件($*$)を満たす x, y, z を求めることができたならば, w に関する4次方程式 $f = 0$ は次のように解ける:

$$w = -x - y - z, \ -x + y + z, \ x - y + z, \ x + y - z.$$

与えられた p, q, r に対して条件 ($*$) を満たす x, y, z を求めるためには, 条件

$$x^2 + y^2 + z^2 = p, \quad x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = r, \quad x^2y^2z^2 = q^2 \tag{$**$}$$

を満たす x^2, y^2, z^2 を求め, それらの平方根を取ればよい. ただし, 平方根の取り方には ± 1 倍の不定性があることに注意せよ. 条件 $xyz = q$ より, x, y, z のうち2つが決まれば残りは一意的に決まる.

条件 ($**$) を満たす x^2, y^2, z^2 は3次方程式の解と係数の関係より, 次の3次方程式の解である:

$$\lambda^3 - p\lambda^2 + r\lambda - q^2 = 0.$$

この3次方程式は $\lambda = \Lambda + p/3$ とおけば次の形になる:

$$\Lambda^3 - P\Lambda + Q = 0, \quad P = \frac{p^2}{3} - r, \quad Q = -\frac{2p^3}{27} + \frac{pr}{3} - q^2.$$

この形の3次方程式は前節の結果を用いれば解ける.

以上の方法は**Eulerの方法**と呼ばれているらしい([https://en.wikipedia.org/wiki/Quartic_function)
(https://en.wikipedia.org/wiki/Quartic_function)](https://en.wikipedia.org/wiki/Quartic_function)).

問題: 以上の計算を確認し, さらに解の公式を実際に作ってみよ. □

解答略.

In [8]:

```
# 展開結果の確認

w, x, y, z = symbols("w x y z")
f4 = expand((w+x+y+z)*(w+x-y-z)*(w-x+y-z)*(w-x-y+z))
```

Out[8]: $w^4 - 2w^2x^2 - 2w^2y^2 - 2w^2z^2 + 8wxyz + x^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + y^4 - 2y^2z^2 + z^4$

In [9]:

```
# 展開結果の 0,1,2,3,4 次の係数の確認.
# 3次の係数は0になっている.

c4 = coeffs(f4, w)
```

Out[9]:

$$\begin{bmatrix} x^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + y^4 - 2y^2z^2 + z^4 \\ 8xyz \\ -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In [10]:
```
p = c4[2+1]/(-2)
```
Out[10]: $x^2 + y^2 + z^2$

In [11]:
```
q = c4[2]/8
```
Out[11]: xyz

In [12]:
```
r = x^2*y^2 + x^2*z^2 + y^2*z^2
simplify(c4[1] - (p^2-4r))
```
Out[12]: 0

In [13]:
```
# p,q,rを使った公式の確認

(ff4 = w^4 - 2p*w^2 + 8q*w + (p^2-4r)) |> display
simplify(f4 - ff4)
```
$$w^4 - w^2 \left(2x^2 + 2y^2 + 2z^2\right) + 8wxyz - 4x^2y^2 - 4x^2z^2 - 4y^2z^2 + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2$$

Out[13]: 0

In [14]:
```
[p, q, r]
```
Out[14]:
$$\begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz \\ x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \end{bmatrix}$$

In [15]:
```
m = symbols("m")
simplify(factor(m^3 - p*m^2 + r*m - q^2))
```
Out[15]: $\left(m - x^2\right)\left(m - y^2\right)\left(m - z^2\right)$

In [16]:

```
# 補助的な3次方程式の形の確認

p, q, r, m, M = symbols("p q r m M")
(f3 = m^3 - p*m^2 + r*m - q^2) |> display
(g3 = simplify(expand(f3(m => M+p/3)))) |> display
(c3 = coeffs(g3, M))
```

$$m^3 - m^2 p + mr - q^2$$

$$M^3 - \frac{Mp^2}{3} + Mr - \frac{2p^3}{27} + \frac{pr}{3} - q^2$$

Out[16]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2p^3}{27} + \frac{pr}{3} - q^2 \\ -\frac{p^2}{3} + r \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In [17]:

```
# w, p, q, r = symbols("w p q r")
# factor.(solve(w^4 - 2p*w^2 + 8q*w + (p^2-4r), w))
```

2 べき乗和とベルヌイ多項式

2.1 Bernoulli多項式

Bernoulli多項式(ベルヌイ多項式) $B_k(x)$ が次のTaylor展開で定義される:

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} z^k.$$

Bernoulli数: Bernoulli多項式の定数項 $B_k = B_k(0)$ は**Bernoulli数**と呼ばれている.

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{B_i z^i}{i!} \frac{x^j z^j}{j!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_{k-j} x^j \frac{z^k}{k!}$$

より, Bernoulli多項式はBernoulli数によって次のように表わされることがわかる:

$$B_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_{k-j} x^j.$$

Bernoulli多項式の微分: 両辺を x で偏微分すると

$$\frac{z^2 e^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k'(x)}{k!} z^k$$

であり, 左辺は

$$\frac{z^2 e^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m'(x)}{m!} z^{m+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{k-1}(x)}{(k-1)!} z^k$$

と書けるので, 上と比較して

$$B'_k(x) = kB_{k-1}(x)$$

が得られる. $B_0(x) = 1$ なので $B_k(x)$ は最高次の係数が 1 である k 次の多項式になる.

Bernoulli多項式の積分: 上の結果より,

$$\int_a^b B_k(x)\,dx = \frac{B_{k+1}(b) - B_{k+1}(a)}{k+1}.$$

これの母函数表示は次の通り:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b B_k(x)\,dx\,\frac{z^k}{k!} = \int_a^b \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}\,dx = \left[\frac{e^{zx}}{e^z - 1}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{zb} - e^{za}}{e^z - 1}.$$

特に $a = 0, b = 1$ のとき, 右辺は 1 になるので,

$$\int_0^1 B_k(x)\,dx = \delta_{k0}$$

となることもわかる.

2.2 べき乗和

べき乗和 $S_k(n)$ が次のように定義される:

$$S_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k.$$

べき乗和の母函数は次のように計算される:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(n)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j^k}{k!} z^k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{k!} z^k = \sum_{j=1}^{n} e^{jz} = \frac{e^{(n+1)z} - e^z}{e^z - 1}.$$

Bernoulli多項式の積分に関する結果より,

$$\frac{e^{(n+1)z} - e^z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_1^{n+1} B_k(x)\,dx\,\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1)}{k+1} \frac{z^k}{k!}.$$

したがって,

$$S_k(n) = \int_1^{n+1} B_k(x)\,dx = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1)}{k+1}.$$

特に $S_m(n)$ は n について $k+1$ 次の多項式になり, 最高次の係数は $1/(k+1)$ になることがわかる.

In [18]:

```
# ベルヌイ多項式のリスト k = 0,1,2,⋯,10

B(k,x) = sympy[:bernoulli](k,x)
SS(k,x) = (B(k+1,x+1) - B(k+1,Sym(1)))/(k+1)
x = symbols("x")
[B(k,x) for k = 0:10]
```

Out[18]:

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ x - \frac{1}{2} \\ x^{2} - x + \frac{1}{6} \\ x^{3} - \frac{3x^{2}}{2} + \frac{x}{2} \\ x^{4} - 2x^{3} + x^{2} - \frac{1}{30} \\ x^{5} - \frac{5x^{4}}{2} + \frac{5x^{3}}{3} - \frac{x}{6} \\ x^{6} - 3x^{5} + \frac{5x^{4}}{2} - \frac{x^{2}}{2} + \frac{1}{42} \\ x^{7} - \frac{7x^{6}}{2} + \frac{7x^{5}}{2} - \frac{7x^{3}}{6} + \frac{x}{6} \\ x^{8} - 4x^{7} + \frac{14x^{6}}{3} - \frac{7x^{4}}{3} + \frac{2x^{2}}{3} - \frac{1}{30} \\ x^{9} - \frac{9x^{8}}{2} + 6x^{7} - \frac{21x^{5}}{5} + 2x^{3} - \frac{3x}{10} \\ x^{10} - 5x^{9} + \frac{15x^{8}}{2} - 7x^{6} + 5x^{4} - \frac{3x^{2}}{2} + \frac{5}{66} \end{array}\right]$$

In [19]:

```
# べき乗和の公式のリスト k = 0,1,2,⋯,10

x = symbols("x")
factor.([SS(k,x) for k = 0:10])
```

Out[19]:

$$\left[\begin{array}{c} x \\ \frac{x(x+1)}{2} \\ \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} \\ \frac{x^{2}(x+1)^{2}}{4} \\ \frac{x(x+1)(2x+1)\left(3x^{2}+3x-1\right)}{30} \\ \frac{x^{2}(x+1)^{2}\left(2x^{2}+2x-1\right)}{12} \\ \frac{x(x+1)(2x+1)\left(3x^{4}+6x^{3}-3x+1\right)}{42} \\ \frac{x^{2}(x+1)^{2}\left(3x^{4}+6x^{3}-x^{2}-4x+2\right)}{24} \\ \frac{x(x+1)(2x+1)\left(5x^{6}+15x^{5}+5x^{4}-15x^{3}-x^{2}+9x-3\right)}{90} \\ \frac{x^{2}(x+1)^{2}\left(x^{2}+x-1\right)\left(2x^{4}+4x^{3}-x^{2}-3x+3\right)}{20} \\ \frac{x(x+1)(2x+1)\left(x^{2}+x-1\right)\left(3x^{6}+9x^{5}+2x^{4}-11x^{3}+3x^{2}+10x-5\right)}{66} \end{array}\right]$$

問題: k が3以上の整数のとき $B_k(0) = 0$ となることを示せ.

証明: $B_k(x)$ の母函数で $x = 0$ とおくと,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(0)}{k!} z^k + \frac{z}{2} = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}}.$$

これは z の偶函数なので, 左辺のべき級数の奇数次の係数はすべて消える. ゆえに k が3以上の奇数ならば $B_k(0) = 0$ となる. □

問題: 以下を示せ:

(1) $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$.

(2) k が奇数のとき $B_k(1/2) = 0$.

(3) k が 3 以上の奇数のとき $B_k(1) = B_k(0) = 0$.

(4) $k \geqq 2$ ならば $B_k(0) = B_k(1)$.

証明: (1) $B_k(x)$ の母函数で x に $1-x$ を代入すると,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(1-x)}{k!} z^k = \frac{z e^{z(1-x)}}{e^z - 1} = \frac{z e^{-zx}}{1 - e^{-z}} = \frac{(-z) e^{(-z)x}}{e^{-z} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} (-z)^k.$$

なので両辺を比較すると, $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$ となることがわかる.

(2) $x = 1/2$ のとき $1 - x = x$ であり, k が奇数のとき $B_k(1-x) = -B_k(x)$ なので $B_k(1/2) = 0$ となることがわかる.

(3) 1つ前の問題より, k が3以上の奇数のとき $B_k(0) = 0$ なので $B_k(1) = B_k(1-0) = -B_k(0) = 0$ となる.

(4) $k \geqq 2$ であるとする. k が奇数ならば $B_k(0) = 0 = B_k(1)$ となり, k が偶数ならば $B_k(0) = B_k(1-1) = B_k(1)$ となる. □

問題: 以下を示せ:

(1) $S_k(x)$ は x で割り切れる.

(2) $k \geqq 1$ のとき $S_k(x)$ は $x+1$ で割り切れる.

(3) k が2以上の偶数ならば $S_k(x)$ は $x(x+1)(2x+1)$ で割り切れる.

(4) k が3以上の奇数ならば $S_k(x)$ は $x^2(x+1)^2$ で割り切れる.

証明: (1) $S_k(0) = 0$ を示せばよいが,

$$S_k(0) = \frac{B_{k+1}(1) - B_{k+1}(1)}{k+1} = 0.$$

(2) $k \geqq 1$ のとき, 1つ前の問題の(4)より $B_{k+1}(0) = B_{k+1}(1)$ が成立するので,

$$S_k(-1) = \frac{B_{k+1}(0) - B_{k+1}(1)}{m+1} = 0.$$

ゆえに $S_k(x)$ は $k+1$ で割り切れる.

(3) k が2以上の偶数のとき, 1つ前の問題の(2),(3)より $B_{k+1}(1/2) = 0$, $B_{k+1}(1) = 0$ が成立するので

$$S_k(-1/2) = \frac{B_{k+1}(1/2) - B_{k+1}(1)}{k+1} = 0.$$

ゆえに $S_k(x)$ は $2x+1$ で割り切れる. 上の(1),(2)より, $S_k(x)$ は x と $x+1$ でも割り切れるので, $x(x+1)(2x+1)$ で割り切れることがわかる.

(4) $S_k(x) = \int_1^{x+1} B_k(t)\,dt = \int_0^x B_k(t+1)\,dt$ より,

$$S_k'(x) = B_k(x+1)$$

なので, 1つ前の問題の(3)より, k が3以上の奇数ならば $S_k'(0) = B_k(1) = 0$, $S_k'(-1) = B_k(0) = 0$ となる. ゆえに $S_k'(x)$ は x と $x+1$ で割り切れる. 上の(1),(2)より, $S_k(x)$ は x と $x+1$ で割り切れる. これらより, $S_k(x)$ が $x^2(x+1)^2$ で割り切れることがわかる. □

問題: $S_1(x)$ が $x(x+1)$ で割り切れることを用いて, $S_1(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$ となることを示せ.

証明: $S_1(x)$ は最高次の係数が $1/2$ の2次の多項式になるので, それが $x(x+1)$ で割り切れることを使えば, $S_1(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$ となることがただちに導かれる. □

問題: $S_2(x)$ が $x(x+1)(2x+1)$ で割り切れることを用いて, $S_2(x) = \dfrac{x(x+1)(2x+1)}{6}$ となることを示せ.

証明: $S_2(x)$ は最高次の係数が $1/3$ の3次の多項式になるので, それが $x(x+1)(2x+1)$ で割り切れることを使えば, $S_2(x) = \dfrac{x(x+1)(2x+1)}{6}$ となることがただちに導かれる. □

問題: $S_3(x)$ が $x^2(x+1)^2$ で割り切れることを用いて, $S_3(x) = \dfrac{x^2(x+1)^2}{4}$ となることを示せ.

証明: $S_3(x)$ は最高次の係数が $1/4$ の4次の多項式になるので, それが $x^2(x+1)^2$ で割り切れることを使えば, $S_3(x) = \dfrac{x^2(x+1)^2}{4}$ となることがただちに導かれる. □

問題: $S_4(x)$ が $x(x+1)(2x+1)$ で割り切れることを用いて, $S_4(x)$ を求めよ.

解答例: $S_4(x)$ は最高次の係数が $1/5$ の5次の多項式になり, $x(x+1)(2x+1)$ で割り切れるので,

$$S_4(x) = \frac{1}{10}x(x+1)(2x+1)(x^2+ax+b)$$

と書ける. $S_4(1) = 1$, $S_4(2) = 17$ より,

$$\frac{3}{5}(1+a+b) = 1, \quad 3(4+2a+b) = 17.$$

左の等式の5倍を→の等式から引くと $3(3+a) = 12$ となるので, $a = 1$ が得られ, それを左の等式に代入すると $3(2+b) = 5$ となり, $b = -1/3$ が得られる. したがって,

$$S_4(x) = \frac{1}{10}x(x+1)(2x+1)(x^2+x-1/3) = \frac{1}{30}x(x+1)(2x+1)(3x^2+3x-1)$$

であることがわかる. □

問題: $S_5(x)$ が $x^2(x+1)^2$ で割り切れることを用いて, $S_5(x)$ を求めよ.

解答例: $S_5(x)$ は最高次の係数が $1/6$ の6次多項式になり, $x^2(x+1)^2$ で割り切れるので,

$$S_5(x) = \frac{1}{6}x^2(x+1)^2(x^2+ax+b)$$

と書ける. $S_5(1) = 1$, $S_5(2) = 33$ より,

$$\frac{2}{3}(1+a+b) = 1, \quad 6(4+2a+b) = 33.$$

前者の9倍を後者から引くと $6(3+a) = 24$ となるので, $a = 1$ が得られ, それを前者に代入すると, $2(2+b) = 3$ となるので, $b = -1/2$ が得られる. ゆえに

$$S_5(x) = \frac{1}{6}x^2(x+1)^2(x^2+x-1/2) = \frac{1}{12}x^2(x+1)^2(2x^2+2x-1). \qquad \square$$

3 平面上の点と直線の距離

a, b, c は実数であり, $(a,b) \neq (0,0)$ であると仮定する.

高校の数学の教科書には, xy 平面上の直線 $ax+by+c=0$ と xy 平面上の点 (X,Y) の距離 d が

$$d = \frac{|aX+bY+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

と表わされることが書いてある. これは, そこに登場する様々な量の幾何学的な意味を理解していれば自明な公式に過ぎないことを以下で説明したい.

xyz 空間内の傾いた平面 $z = ax+by+c$ を考えよう. この平面の傾きは (a,b) で決まっている.

定理: xyz 空間内における $z = ax+by+c$ のグラフはベクトル (a,b) の方向が登り方向の傾いた平面になり, その方向の傾きの大きさは $\sqrt{a^2+b^2}$ になる. すなわち, 単位ベクトル $\dfrac{(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ の分だけ (x,y) をずらすと高さが $\sqrt{a^2+b^2}$ だけ増す.

証明: $z = ax+by+c$ は (x,y) を $(\Delta x, \Delta y)$ だけずらすと, $a\Delta x + b\Delta y$ の分だけ変化する. Cauchy-Schwartzの不等式より,

$$-\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \leqq a\Delta x + b\Delta y \leqq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

が成立している. ゆえに $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = 1$ という条件のもとでの $a\Delta x + b\Delta y$ の最大値は $(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ のときの $\sqrt{a^2+b^2}$ である. $\square$

このように $z = ax+by+c$ における (a,b) は平面の傾きの方向と大きさを記述している.

xy 平面上の点 (X,Y) から直線 $ax+by+c=0$ への距離を d と書き, 点 (X,Y) から直線 $ax+by+c=0$ におろした垂線の足を点 (X_0,Y_0) と書くことにする. このとき, 点 (X,Y) は (X_0,Y_0) からベクトル $\pm(a,b)$ と同じ方向に距離 d の位置にある. したがって, $z = ax+by+c$ の点 (X,Y) における値は

$$aX+bY+c = \pm\sqrt{a^2+b^2}\, d$$

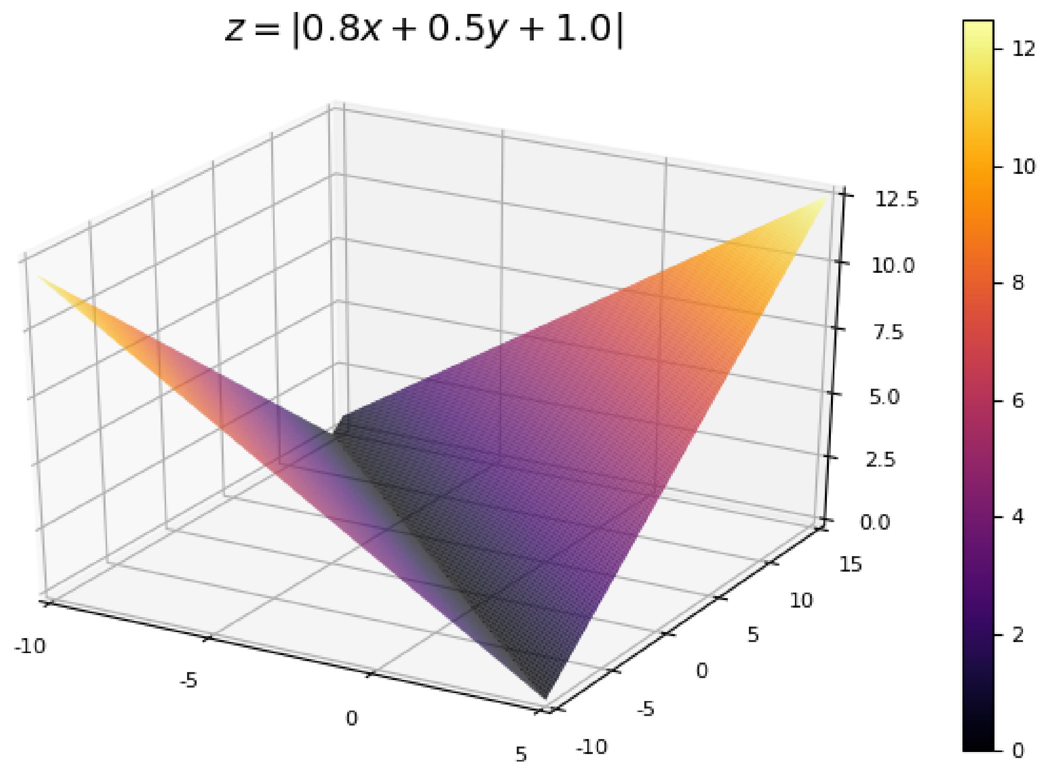
になる. (X,Y) が (X_0,Y_0) から見てベクトル (a,b) と同じ方向にあれば符号は $+$ になり, その反対側にあれば符号は $-$ になる. これより,

$$d = \frac{|aX + bY + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

In [20]:

```
a, b, c = 0.8, 0.5, 1.0
f(x,y) = a*x + b*y + c
x = -10:0.1:5
y = -10:0.1:15
surface(x, y, abs.(f.(x',y)))
plot!(title="\$z = |$a x + $b y + $c|\$", titlesizefont=10)
```

Out[20]:



4 Jensenの不等式と相加相乗平均

4.1 Jensenの不等式

I は実数の区間であるとする. 例えば $I = \mathbb{R}, I = (0, \infty)$ のような場合を考える.

$a_1, \dots, a_n \in I$ であるとし, $p_1, \dots, p_n \geqq 0, p_1 + \cdots + p_n = 1$ と仮定する.

区間 I 上の実数値函数 $f(x)$ に対して, 実数 $E[f(x)]$ を対応させる函数(汎函数) $E[\ ]$ を

$$E[f(x)] = p_1 f(a_1) + \cdots + p_n f(a_n)$$

と定めると, I 上の実数値函数 $f(x), g(x)$ と実数 α, β に対して以下が成立している.

(1) 線形性: $E[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha E[f(x)] + \beta E[g(x)]$.

(2) 単調性: I 全体上で $f(x) \leqq g(x)$ ならば $E[f(x)] \leqq E[g(x)]$.

(3) 規格化条件: I 上の定数値函数 α に対して, $E[\alpha] = \alpha$.

区間 I 上の実数値函数 $f(x)$ が上に凸な函数であるとは,

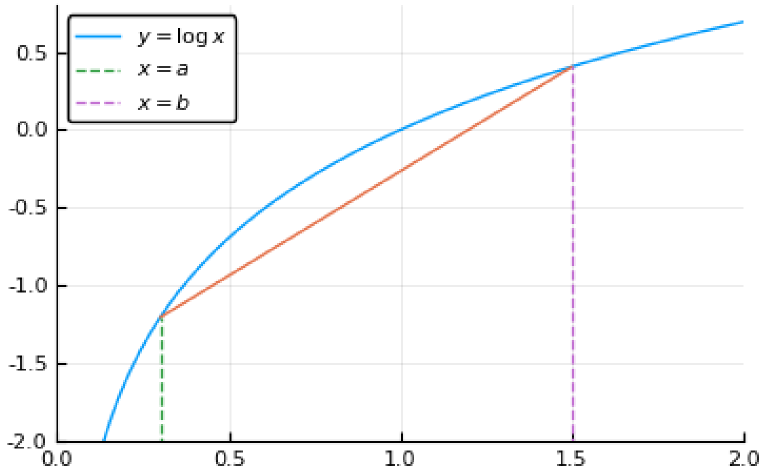
$$a, b \in I,\ 0 < t < 1 \implies (1-t)f(a) + tf(b) \leqq f((1-t)a + tb)$$

が成立することだと定める. 下に凸な函数は不等式の向きを逆転することによって定義される.

In [21]:

```
# log x は上に凸な函数

x = 0:0.01:2.0
a, b = 0.3, 1.5
f(x) = log(x)
t = 0:0.01:1.0
g(a,b,t) = (1-t)*f(a) + t*f(b)
h(a,b,t) = (1-t)*a + t*b
plot(size=(400,250), legend=:topleft, xlims=(0,2.0), ylims=(-2.0, 0.8))
plot!(x, f.(x), label="\$y = \\log\\,x\$")
plot!(h.(a,b,t), g.(a,b,t), label="")
plot!([a,a], [-10.0, f(a)], label="\$x = a\$", ls=:dash)
plot!([b,b], [-10.0, f(b)], label="\$x = b\$", ls=:dash)
```

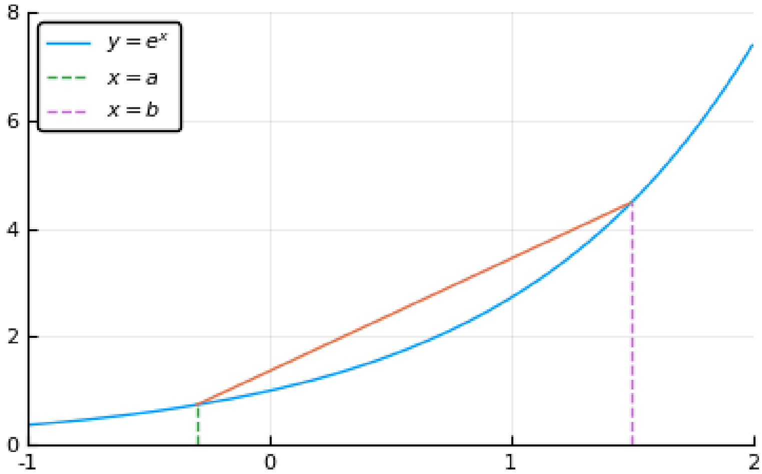
Out[21]:



In [22]:

```
# e^x は下に凸な函数

x = -1:0.01:2
a, b = -0.3, 1.5
f(x) = e^x
t = 0:0.01:1.0
g(a,b,t) = (1-t)*f(a) + t*f(b)
h(a,b,t) = (1-t)*a + t*b
plot(size=(400,250), legend=:topleft, xlims=(-1,2), ylims=(0,8))
plot!(x, f.(x), label="\$y = e^x\$")
plot!(h.(a,b,t), g.(a,b,t), label="")
plot!([a,a], [-0.0, f(a)], label="\$x = a\$", ls=:dash)
plot!([b,b], [-0.0, f(b)], label="\$x = b\$", ls=:dash)
```

Out[22]:



Jensenの不等式: $f(x)$ が区間 I 上の上に凸な函数ならば $E[f(x)] \leqq f(E[x])$. (下に凸ならば不等式の向きが逆になる.)

証明: $f(x)$ が C^1 級の場合に限定して証明する. そのように仮定しない場合には接線の存在を微分に頼らずに直接示す必要が出て来る.

$f(x)$ は上に凸であると仮定し, $\mu = E[x] = p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n$ とおく. $E[f(x)] \leqq f(\mu)$ を示したい. $x = \mu$ における $y = f(x)$ の接線を $y = a(x-\mu) + f(\mu)$ と書く. $f(x)$ が上に凸であることより, I 全体上で

$$f(x) \leqq a(x-\mu) + f(\mu)$$

が成立する. ゆえに $E[\ ]$ の性質より,

$$E[f(x)] \leqq E[a(x-\mu) + f(\mu)] = a(E[x] - \mu) + f(\mu) = f(\mu).$$

最初の等号で $E[\ ]$ の単調性を使い, 2つ目の等号で $E[\ ]$ の線形性と規格化条件を使い, 3つ目の等号で $E[x] = \mu$ を使った. □

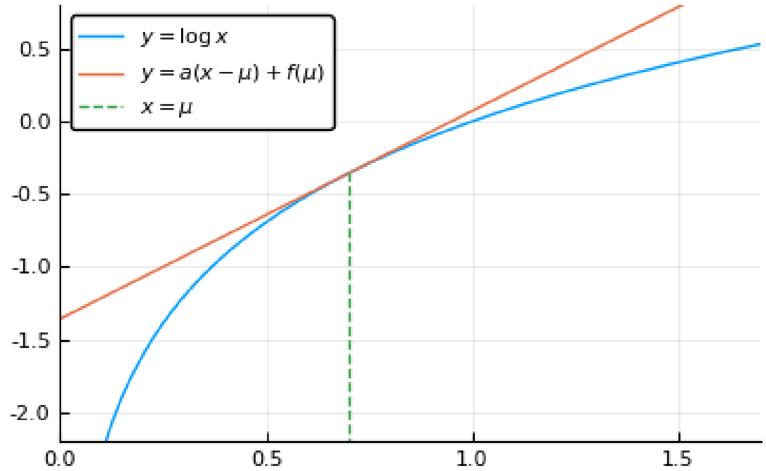
注意: 以上の証明法ならば n に関する数学的帰納法を使わずに, しかも $E[\ ]$ の定義に直接触れずに, その基本性質だけを使って証明をできた. $E[\ ]$ と同じ性質を持つものの例として, 確率密度函数 $p(x)$ に対する

$$E[f(x)] = \int_I f(x) p(x)\, dx$$

がある. これは確率密度函数 $p(x)$ を持つ確率分布における $f(x)$ の期待値である. $E[\ ]$ は**期待値汎函数** (expected value functional)と呼ばれる. □

In [23]:
```
# 上に凸な函数 f(x) = log x の接線

x = 0:0.01:2.0
μ = 0.7
f(x) = log(x)
g(μ,x) = (1/μ)*(x-μ) + f(μ)
plot(size=(500,350), legend=:topleft, xlims=(0,1.7), ylims=(-2.2, 0.8))
plot!(x, f.(x), label="\$y = \\log\\,x\$")
plot!(x, g.(μ,x), label="\$y = a(x-\\mu)+f(\\mu)\$")
plot!([μ, μ], [-3.0, f(μ)], label="\$x=\\mu\$", ls=:dash)
plot!(size=(400,250))
```

Out[23]:



4.2 相加相乗平均の不等式

一般の相加相乗平均の不等式は $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1/n$ と $f(x) = \log x$ の場合にJensenの不等式からただちに得られる. そのとき, $a_1, \ldots, a_n > 0$ に対して,

$$E[\log x] = \frac{\log a_1 + \cdots + \log a_n}{n} = \log(a_1 \cdots a_n)^{1/n}, \quad E[x] = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

なので, Jensenの不等式より,

$$\log(a_1 \cdots a_n)^{1/n} = E[\log x] \leqq \log E[x] = \log \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

なので, $\log x$ が単調増加函数であることより,

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leqq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

4.3 p乗平均

$x_1, \ldots, x_n > 0$ の p 乗平均 $M_p(x_1, \ldots, x_n)$ を $p \neq 0$ に対して,

$$M_p(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}$$

と, $p = 0$ に対して

$$M_0(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)^{1/n}$$

と定める. M_0 は相乗平均である. そして,

$$M_1(x_1,\dots,x_n) = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}, \quad M_{-1}(x_1,\dots,x_n) = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}.$$

なので, M_1 は加法平均で, M_{-1} は調和平均である.

$p \to 0$ における p 乗平均の挙動を調べよう.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{p\log x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (1+p\log x_i + O(p^2)) = 1 + p\log(x_1\cdots x_n)^{1/n} + O(p^2)$$

なので, $\log(1+X) = X + O(X^2)$ を使うと,

$$\begin{aligned}\log M_p(x_1,\dots,x_n) &= \frac{1}{p}\log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p = \frac{1}{p}\log\left(1+p\log(x_1\cdots x_n)^{1/n}+O(p^2)\right)\\ &= \log(x_1\cdots x_n)^{1/n} + O(p) = M_0(x_1,\dots,x_n) + O(p)\end{aligned}$$

これより, $M_p(x_1,\dots,x_n)$ は $p=0$ でも解析的であることがわかる.

以下, $M_p = M_p(x_1,\dots,x_n)$ とおき, M_p の p に関する依存性について調べたい.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp}\log M_p &= \frac{d}{dp}\frac{1}{p}\log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p = -\frac{1}{p^2}\log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p + \frac{1}{p}\frac{(1/n)\sum_{i=1}^n x_i^p\log x_i}{(1/n)\sum_{i=1}^n x_i^p}\\ &= \frac{1}{p^2(1/n)\sum_{i=1}^n x_i^p}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p\log x_i^p - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p\log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p\right).\end{aligned}$$

$f(x) = x\log x$ とおくと, $f'(x) = \log x + 1, f''(x) = 1/x > 0$ なので $f(x)$ は下に凸な函数である. Jensen の不等式を $E[f(x)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i^p)$ と下に凸な函数 $f(x) = x\log x$ に適用すると,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p\log x_i^p = E[x\log x] \geqq E[x]\log E[x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p\log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p.$$

これで $\dfrac{d}{dp}\log M_p \geqq 0$ であることがわかった. M_p は p について単調増加函数になる:

$$p \leqq q \implies M_p(x_1,\dots,x_n) \leqq M_q(x_1,\dots,x_n).$$

この不等式は相加相乗平均の不等式の大幅な一般化になっている. 例えば $M_{-1} \leqq M_0 \leqq M_1$ より相加相乗調和平均の不等式

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}} \leqq (x_1,\dots,x_n)^{1/n} \leqq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

が得られる.

問題: $p \to \infty$ のとき $M_p(x_1,\dots,x_n) \to \max\{x_1,\dots,x_n\}$ となることを示せ.

解答例: $x_1 = \cdots = x_k > x_{k+1} \geqq \cdots \geqq x_n$ と仮定してよい.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = kx_1^p \left(1 + \sum_{i>k} \left(\frac{x_i}{x_1}\right)^p\right)$$

なので,

$$\begin{aligned}\log M_p(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{p}\log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^p \\ &= -\frac{1}{p}\log n + \frac{1}{p}\log k + \log x_i + \frac{1}{p}\log\left(1 + \sum_{i>k} \left(\frac{x_i}{x_1}\right)^p\right).\end{aligned}$$

であり, $i > k$ のとき $0 < x_i/x_1 < 1$ なので, これは $p \to \infty$ のとき $\log x_1$ に収束し, $M_p(x_1, \dots, x_n) \to x_1 = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ となることがわかる. □

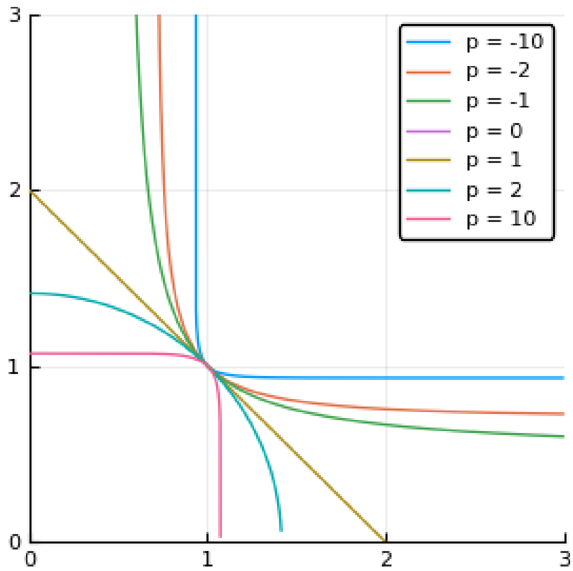
注意: 全く同様にして, $p \to -\infty$ のとき $M_p(x_1, \dots, x_n) \to \min\{x_1, \dots, x_n\}$ となることを示せる. □

プロット: $p \neq 0$ のとき, $M_p(x, y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p}$ なので $M_p(x, y) = 1$ と $y = (2 - x^p)^{1/p}$ と同値であり, $M_0(x, y) = \sqrt{xy}$ なので $M_0(x, y) = 1$ と $y = 1/x$ は同値である. $M_p(x, y) = 1$ のグラフをプロットしよう.

In [24]:

```
# M_p(x,y) = 1 のプロット

f(p,x) = iszero(p) ? 1/x : (2 - x^p)^(1/p)
P = plot(size=(500,500))
for p in [-10, -2, -1, 0, 1, 2, 10]
    a = 2^(1/p)
    if p > 0
        Δx = 2^(1/p)/1000
        x = Δx:Δx:a
    else
        Δx = 3/1000
        x = a+eps():Δx:3
    end
    plot!(x, f.(p,x), label="p = $p")
end
plot(P, xlim=(0,3), ylim=(0,3), size=(300,300))
```

Out[24]:



5 三角函数の微積分

5.1 高校の数学の教科書の方針

高校の数学の教科書では以下のような筋道で $\sin x$ の導函数を求めている.

$0 < x < \pi/2$ のとき, 「面積の大小関係」によって

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$$

が得られ, 全体に 2 をかけて, 逆数を取って, $\sin x$ をかけると,

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

となることから, 挟み撃ちによって

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

を示す. そのとき $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ であることに注意せよ. これより

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x + 1)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} \to \frac{1}{2} \quad (x \to 0)$$

も得られる.

そして, 三角函数の加法公式

$$\cos(x+y) = \cos x \ \cos y - \sin x \ \sin y, \quad \sin(x+y) = \cos x \ \sin y + \sin x \ \cos y.$$

を使って, $h \to 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \frac{\cos x \ \cos h - \sin x \ \sin h - \cos x}{h} \\
&= h\frac{\cos x\,(\cos h - 1)}{h^2} - \frac{\sin x \ \sin h}{h} \to -\sin x, \\
\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\cos x \ \sin h + \sin x \ \cos h - \sin x}{h} \\
&= h\frac{\sin x\,(\cos h - 1)}{h^2} + \frac{\cos x \ \sin h}{h} \to \cos x
\end{aligned}$$

となることを示す. これで

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x$$

であることが示された.

しかし, 以上の方針は次の節の方針と比較すると, 非常に遠回りになっており, 弧度法の意味での角度の定義(単位円弧の長さで角度を定義すること)が不明瞭になっているという問題がある.

5.2 曲線の長さが速さの積分になることの応用

高校数学IIIの教科書には $(x(t), y(t))$, $a \leqq t \leqq b$ の軌跡の長さ(曲線の長さ) L が

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

と表せることが説明されている. t を時間変数とみなすとき, 点 $(x(t), y(t))$ の運動の時刻 t における速度ベクトルは $(x'(t), y'(t))$ になり, 速さは $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ と書ける. 上の公式は曲線の長さを速さの積分で表せることを意味している.

これを使えば(曲線の長さを上の公式で定義すれば), 三角函数の微分の導出を非常に簡潔な議論で行うことができる. そのことを以下で説明しよう.

$(x(t), y(t)) = (\sqrt{1-t^2}, t)$, $-1 < t < 1$ は単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の右半分の上を動き, t は単位円上の点の y 座標になる. このとき,

$$x'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad y'(t) = 1, \quad x'(t)^2 + y'(t)^2 = \frac{1}{1-t^2}$$

なので, 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の右半分上の点 (x, y) に対応する弧度法の意味での角度(単位円弧の長さで定義された角度, 左回りに正, 右回りに負とみなす) $\theta = F(y)$ は

$$\theta = F(y) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

と表わされる. この公式を使えば, 高校の数学の教科書の範囲内では不明瞭だった弧度法の意味での角度が積分論を使って明瞭に定義される.

一般に $\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_0^y f(t)\,dt = f(y)$ が成立するので,

$$\frac{d\theta}{dy} = F'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

$\theta = F(y)$ は単位円上の点の y 座標に弧度法の意味での角度を対応させる函数であり, $y = \sin\theta$ の定義は弧度法の意味ので角度 θ に単位円上の点の y 座標を対応させる函数だったので, $y = \sin\theta$ の定義は $\theta = F(y)$ の逆函数である.

ゆえに, 逆函数の微分によって,

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \frac{dy}{d\theta} = \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$$

が得られる.

要するに, 弧度法の意味での角度を単位円上の点の y 座標を用いた積分で表わせば, 単に逆函数の微分としてて $\sin\theta$ の導函数が $\cos\theta$ になることがわかる. この議論は非常にシンプルである.

単位円の右側に制限した議論を単位円全体に拡張する作業は読者にまかせる. 現代数学的には円を多様体とみなして議論するのがよい. 三角函数論を完璧に理解するためには「円を多様体とみなす」というような数学的教養が必要になる.

In [25]:
```
t = symbols("t")
x = √(1-t^2)
y = t
simplify(diff(x, t)^2 + diff(y, t)^2) |> display
```

$$-\frac{1}{t^2-1}$$

問題: 直線 $y = tx$ と単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の右半分の交点は

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right).$$

原点を通る直線の傾き a をそれに対応する弧度法の意味での角度 θ に対応させる函数 $\theta = G(a)$ が

$$\theta = G(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t^2}$$

と書けることを確認せよ. これと逆に角度 θ を直線の傾き a に対応させる函数が tan の定義なので, $a = \tan\theta$ の定義は $\theta = G(a)$ の逆函数である. □

解答略.

In [26]:
```
t, x, y = symbols("t x y")
s = solve([y-t*x, x^2+y^2-1], [x,y])
display(s)
s[2]
```

```
2-element Array{Dict{SymPy.Sym,SymPy.Sym},1}:
 Dict(y=>-t*sqrt(1/(t^2 + 1)),x=>-sqrt(1/(t^2 + 1)))
 Dict(y=>t*sqrt(1/(t^2 + 1)),x=>sqrt(1/(t^2 + 1)))
```

Out[26]:

$$\begin{cases} y & => & t\sqrt{\frac{1}{t^2+1}} \\ x & => & \sqrt{\frac{1}{t^2+1}} \end{cases}$$

In [27]:
```
X, Y= s[2][x], s[2][y]
[X, Y] |> display
simplify(diff(X,t)^2 + diff(Y,t)^2)
```

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{t^2+1}} \\ t\sqrt{\frac{1}{t^2+1}} \end{bmatrix}$$

Out[27]:

$$\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}$$

問題: 次のセルの画像を解読して, 双曲線函数の微積分について理解せよ. □

解答略.

In [28]:
```
showimg("image/jpeg", "sin-sinh.jpg")
```

三角函数（円函数）

Euclid 平面幾何

座標 (x, y)

$(\text{原点からの距離})^2 = x^2+y^2$

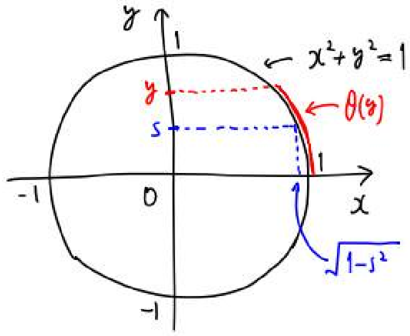
単位円 $x^2+y^2=1$

単位円上の弧の長さ

$$\int_a^b \sqrt{x'(s)^2+y'(s)^2}\,ds.$$

ここで $x(s)^2+y(s)^2=1$.

$x(s)=\sqrt{1-s^2}$, $y(s)=s$ とする.



$$x'(s)^2+y'(s)^2 = \frac{s^2}{1-s^2}+1 = \frac{1}{1-s^2} \text{ より}$$

$$\theta(y) = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$$ ← ラジアンの意味での角度

$\theta=\theta(y)$ の逆函数は $y=\sin\theta$ と書かれる.

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \text{ より, } \frac{dy}{d\theta} = \sqrt{1-y^2}.$$

すなわち, $(\sin\theta)' = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$,

右と同様に計算して,

$$y = \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

双曲線函数

Minkowski 平面幾何（特殊相対性理論）

座標 (t, x)　以下 "$c=1$"

$(\text{原点からの固有時間})^2 = t^2-x^2$

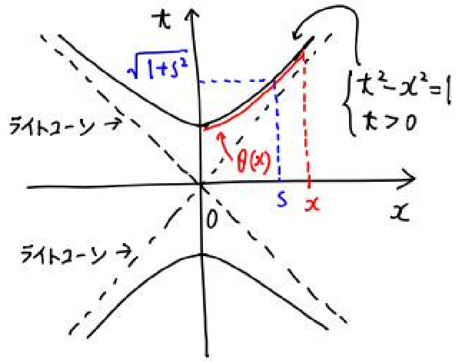
単位双曲線 $t^2-x^2=1$

単位双曲線上の弧の長さ（の定義）

$$\int_a^b \sqrt{x'(s)^2-t'(s)^2}\,ds.$$

ここで $t(s)^2-x(s)^2=1$.

$t(s)=\sqrt{1+s^2}$, $x(s)=s$ とする.



$$x'(s)^2-t'(s)^2 = 1-\frac{s^2}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2} \text{ より}$$

$$\theta(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}}$$ ← 双曲的な弧の長さ

$\theta=\theta(x)$ の逆函数は $x=\sinh\theta$ と書かれる.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ より, } x' = \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{1+x^2},$$

$$x'' = \frac{x x'}{\sqrt{1+x^2}} = x. \quad \theta(0)=0,\ \theta'(0)=1 \text{ より}$$

$x(0)=0$, $x'(0)=1$. これらより

$$x = \sinh\theta = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}.$$

5.3 楕円積分, 楕円函数, 楕円曲線暗号

$y=\sin\theta$ の逆函数 $\theta=F(y)$ は

$$\theta = F(y) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

と書けるのであった. これの次の拡張は非常に有名である:

$$u = F(y,k) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

これは**第一種楕円積分**と呼ばれており, その逆函数は $y = \operatorname{sn}(u,k)$ と書かれ, **JacobiのSn函数**と呼ばれる**楕円函数**の有名な例になっている. $\sin\theta = \operatorname{sn}(\theta, 0)$ なので, sn函数はsinの一般化になっている.

竹内端三著『楕圓函数論』は著作権が切れており, 現在では無料で入手可能である:

- [原著の画像ファイル (http://kenboushoten.web.fc2.com/)](http://kenboushoten.web.fc2.com/)
- [LaTeX化 (http://yx4.life.coocan.jp/books/oldbooks.html)](http://yx4.life.coocan.jp/books/oldbooks.html) ([PDF (http://yx4.life.coocan.jp/books/takenouchi_daen20080317.pdf)](http://yx4.life.coocan.jp/books/takenouchi_daen20080317.pdf))
- [現代語訳 (https://linesegment.web.fc2.com/books/mathematics/daenkansuron/)](https://linesegment.web.fc2.com/books/mathematics/daenkansuron/)

以下, k を略して, $\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u,k)$ と書く. cn, dn, cd 函数を

$$y = \operatorname{sn} u, \quad (\operatorname{cn} u)^2 = 1 - y^2, \quad (\operatorname{dn} u)^2 = 1 - k^2 y^2, \quad \operatorname{cd} u = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$$

を満たすように定義すれば, $(x,y) = (\operatorname{cd} u, \operatorname{sn} u)$ は

$$x^2 + y^2 = 1 + k^2 x^2 y2$$

を満たしている. この等式は**楕円曲線のEdwards形式**と呼ばれており, この方程式で定義される平面曲線は**Edwards曲線**と呼ばれている. Edwards曲線は $k=0$ の場合に単位円になるので, Edwards形式のもとで楕円曲線は単位円の一般化になっていることがわかる.

$(x,y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $(X,Y) = (\cos\beta, \sin\beta)$ のとき, 三角函数の加法公式より,

$$(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta)) = (xX - yY, xY + yX).$$

この公式は次のように拡張される: $(x,y) = (\operatorname{cd} u, \operatorname{sn} u)$, $(X,Y) = (\operatorname{cd} v, \operatorname{sn} v)$ のとき,

$$(\operatorname{cd}(u+v), \operatorname{sn}(u+v)) = \left(\frac{xX - yY}{1 - k^2 xXyY}, \frac{xY + yX}{1 + k^2 xXyY}\right)$$

を満たしている. これは $k=0$ の場合の三角函数の加法公式の拡張になっている. この公式は本質的にJacobiの楕円函数の加法公式である. この公式の代数幾何的な証明については次の論文を見よ:

- Thomas Hales, The Group Law for Edwards Curves, [arXiv:1610.05278 (https://arxiv.org/abs/1610.05278)](https://arxiv.org/abs/1610.05278)

楕円曲線のEdwards形式の理論は単位円と三角函数の理論の楕円曲線と楕円函数の理論への拡張になっている.

楕円曲線のEdwards形式における加法公式は楕円曲線暗号に応用されることによって我々の社会の中で役に立っている. 楕円曲線暗号の規格 [Ed25519 (https://www.google.co.jp/search?q=Ed25519+Edwards)](https://www.google.co.jp/search?q=Ed25519+Edwards) について検索してみよ. このように, 高校のときに習う三角函数論は楕円函数論に自然に拡張されており, 三角函数の加法公式の楕円函数の加法公式への拡張は楕円曲線暗号の形で我々の社会の中で役に立っている.

19世紀のJacobiによる楕円函数に関する研究が約200年後のコンピューター社会でプライバシーを守るための暗号技術に使われることをJacobiは予想できていなかったはずである.

In [29]:

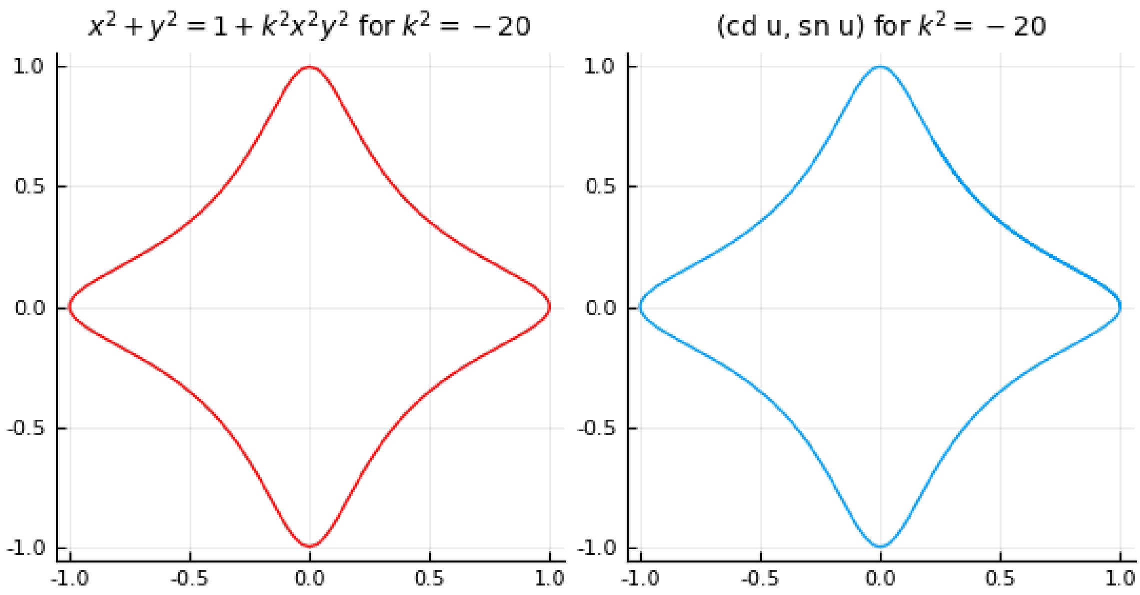
```julia
# Edwards曲線の公式の確認

k, y = symbols("k y")
x² = (1-y^2)/(1-k^2*y^2)
y² = y^2
simplify(x² + y² - 1 - k^2*x²*y²)
```

Out[29]: 0

In [30]:

```julia
# Edwards曲線の二通りのプロット

k² = -20

y = -1:0.01:1
x = @. √((1-y^2)/(1-k²*y^2))
P1 = plot(title="\$x^2+y^2=1+k^2x^2y^2\$ for \$k^2=$k²\$", titlefontsize=10)
plot!(aspectratio=1, legend=false)
plot!(x, y, color=:red)
plot!(-x, y, color=:red)

u = 0:0.01:3
P2 = plot(title="(cd u, sn u) for \$k^2=$k²\$", titlefontsize=10)
plot!(aspectratio=1, legend=false)
plot!(cd.(u,k²), sn.(u,k²))

plot(P1, P2, size=(600, 310))
```

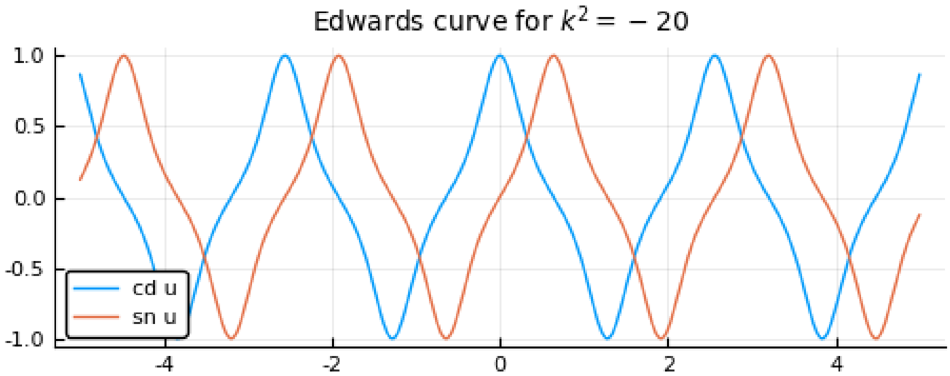
Out[30]:



In [31]:

```
# (cn u, sn u)のプロット

k² = -20
u = -5:0.01:5
plot(title="Edwards curve for \$k^2=$k²\$", titlefontsize=10)
plot!(u, cd.(u,k²), label="cd u")
plot!(u, sn.(u,k²), label="sn u")
plot!(size=(500, 200), legend=:bottomleft)
```

Out[31]:



6 Gauss積分の大学入試問題

[2015年の東京工業大学前期日程の入試問題 (https://www.google.co.jp/search?q=%E6%9D%B1%E5%B7%A5%E5%A4%A7+2015+%E6%95%B0%E5%AD%A6)](https://www.google.co.jp/search?q=%E6%9D%B1%E5%B7%A5%E5%A4%A7+2015+%E6%95%B0%E5%AD%A6)として次の問題が出題された.

> [3] $a > 0$ とする. 曲線 $y = e^{-y^2}$ と x 軸, y 軸, および直線 $x = a$ で囲まれた図形を, y 軸のまわりに1回転してできる回転体を A とする.
>
> (1) A の体積 V を求めよ.
>
> (2) 点 $(t, 0)$ $(-a \leqq t \leqq a)$ を通り, x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき, 不等式 $S(t) \leqq \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ.
>
> (3) 不等式 $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$ を示せ.

この問題の内容は, 本質的に**Gauss積分の公式**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

の高校数学の範囲内での証明である.

問題文では曲線 $y = e^{-x^2}$ を y 軸のまわりに回転しているが, 以下では xyz 空間内の xz 平面上の曲線 $z = e^{-x^2}$ を z 軸のまわりに回転して得られる曲面を扱う. さらに a の代わりに r と書く.

xyz 空間内の xz 平面 $y = 0$ 上の曲線 $z = e^{-x^2}$ を z 軸のまわりに回転して得られる曲面と高さ $0 < t \leqq 1$ の平面 $z = t$ の交わりは, 平面 $z = t$ 内の半径の2乗が $-\log t$ の円になり, その曲面は

$$z = e^{-(x^2+y^2)}$$

と表わされることがわかる.

以下 $r > 0$ であるとする.

平面 $y = 0$ 上の曲線 $z = e^{-x^2}$ と x 軸と直線 $x = r$ で囲まれた領域を z 軸のまわりに1回転してできる回転体を $A(r)$ と書く. 上で述べたことより, $A(r)$ の体積 $V(r)$ は次のように計算される:

$$
\begin{aligned}
V(r) &= \pi r^2 e^{-r^2} + \int_{e^{-r^2}}^{1} \pi(-\log t)\,dt = \pi r^2 e^{-r^2} - \pi[t\log t - t]_{e^{-r^2}}^{1} \\
&= \pi r^2 e^{-r^2} - \pi(-1 + r^2 e^{-r^2} + e^{-r^2}) = \pi(1 - e^{-r^2})
\end{aligned}
$$

曲面 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ と xy 平面 $z = 0$ と4つの平面 $x = \pm r$, $y = \pm r$ で囲まれた領域を $B(r)$ と書く. そして, $-r \leqq t \leqq r$ のとき, $A(r)$ の平面 $y = t$ による断面の面積は

$$
\int_{-r}^{r} e^{-(x^2+t^2)}\,dx
$$

になるので, これを $-r \leqq t \leqq r$ で積分すれば $B(r)$ の体積 $W(r)$ が求まる. t を y と書くと,

$$
W(r) = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-r}^{r} e^{-(x^2+y^2)}\,dx \right) dy = \int_{-r}^{r} e^{-x^2}\,dx \int_{-r}^{r} e^{-y^2}\,dy = \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2}\,dx \right)^2.
$$

$B(r)$ は $A(r)$ を含み, $A(\sqrt{2}\,r)$ に含まれる. それらは次の包含関係から導かれる:

$$
\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq r^2\} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|, |y| \leqq r\} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 2r^2\}.
$$

ゆえに, $V(r) \leqq W(r) \leqq V(\sqrt{2}\,r)$ となる. すなわち,

$$
\sqrt{\pi(1 - e^{-r^2})} \leqq \int_{-r}^{r} e^{-x^2}\,dx \leqq \sqrt{\pi(1 - e^{-2r^2})}.
$$

これより,

$$
\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}
$$

となることがわかる.

以上の計算は次の一行にまとめられる:

$$
\left(\int_{-\infty}^{r} e^{-x^2}\,dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^1 \pi(-\log z)\,dz = \pi[z\log z - z]_0^1 = \pi.
$$

Gauss積分は正規分布の確率密度函数の理解に必須であり, その他にも多くの場面に現われ, 非常に重要な定積分である.

In [32]:

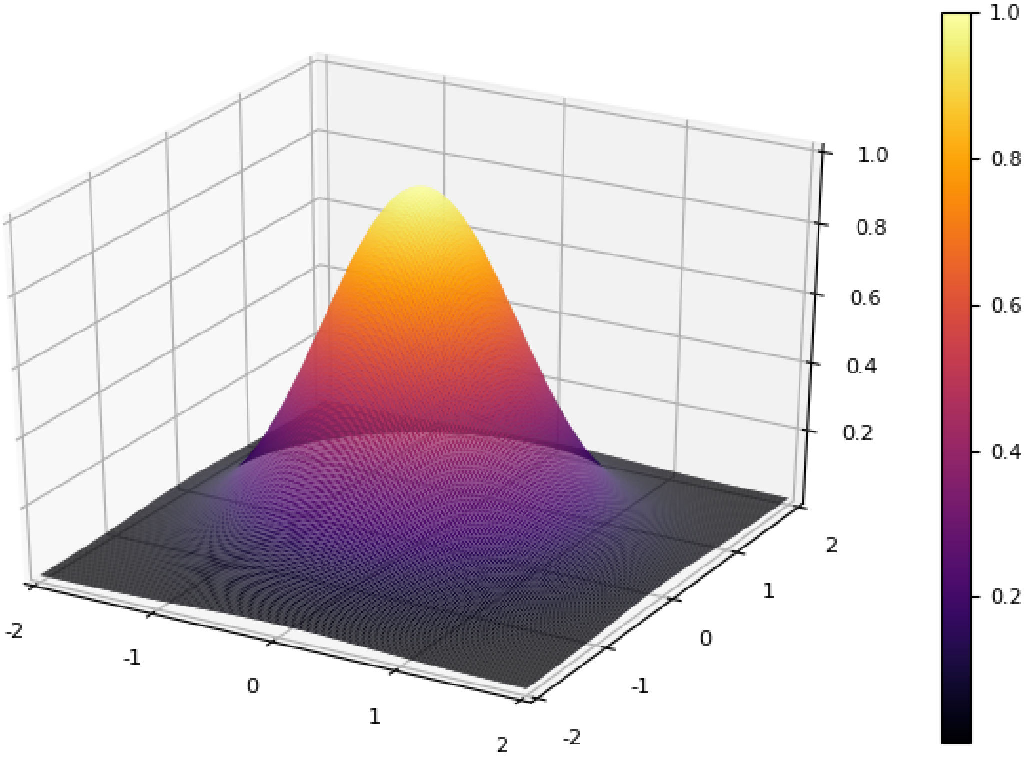
```
f(x,y) = e^(-(x^2+y^2))
g(x,y,r) = x^2+y^2 ≤ r^2 ? e^(-(x^2+y^2)) : zero(x)
h(x,y,r) = (abs(x) ≤ r && abs(y) ≤ r) ? e^(-(x^2+y^2)) : zero(x)

x = linspace(-2, 2, 201)
y = linspace(-2, 2, 201)
r = 1/√2
```

Out[32]:

```
0.7071067811865475
```

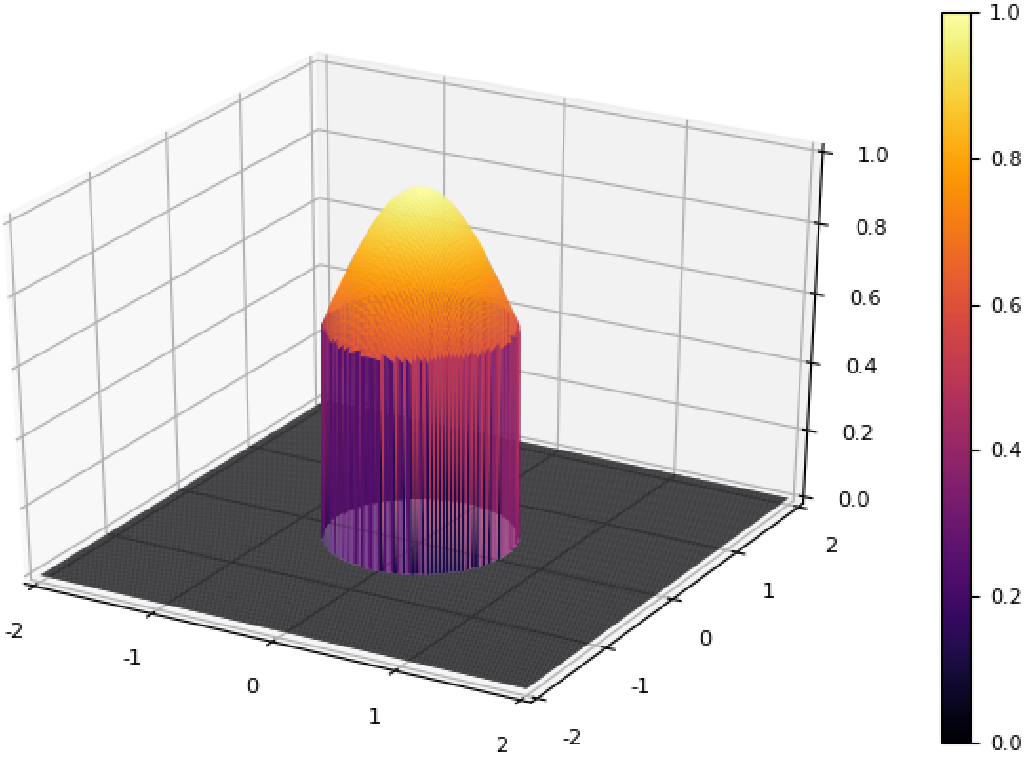
In [33]:
```
# z = e^{-(x^2+y2)} のグラフ

surface(x, y, f.(x', y))
```

Out[33]:



In [34]:
```
# A(r) のグラフ (r=1/√2)

surface(x, y, g.(x', y, r))
```

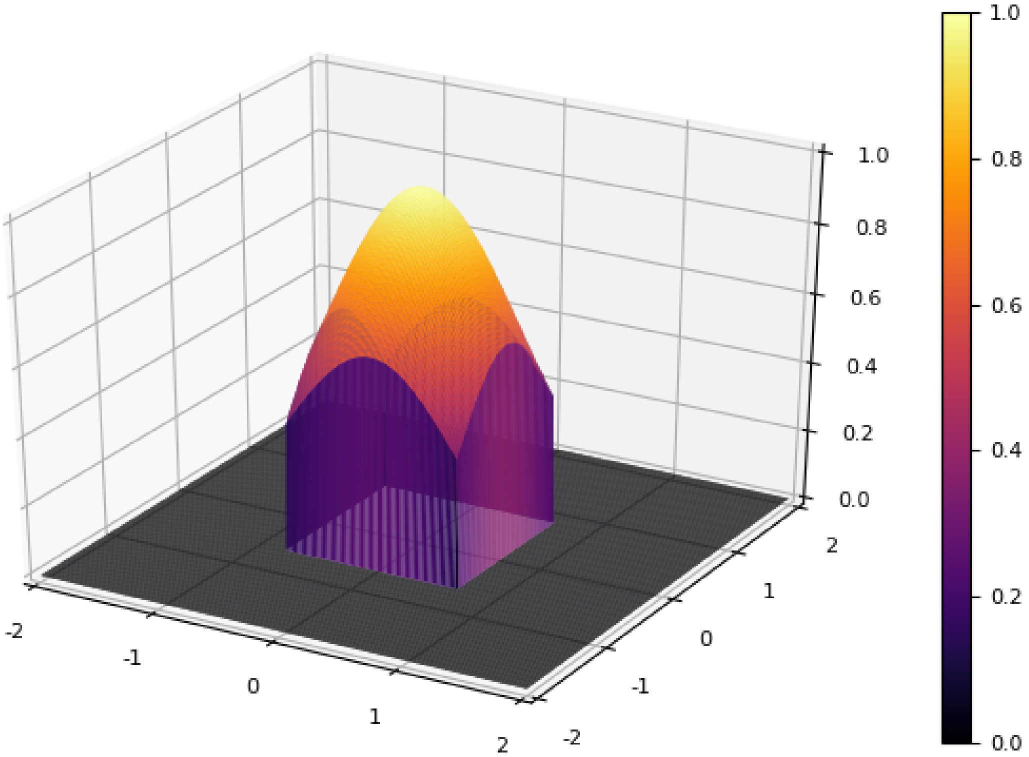
Out[34]:



In [35]:

```
# B(r) のグラフ (r=1/√2)

surface(x, y, h.(x', y, r))
```

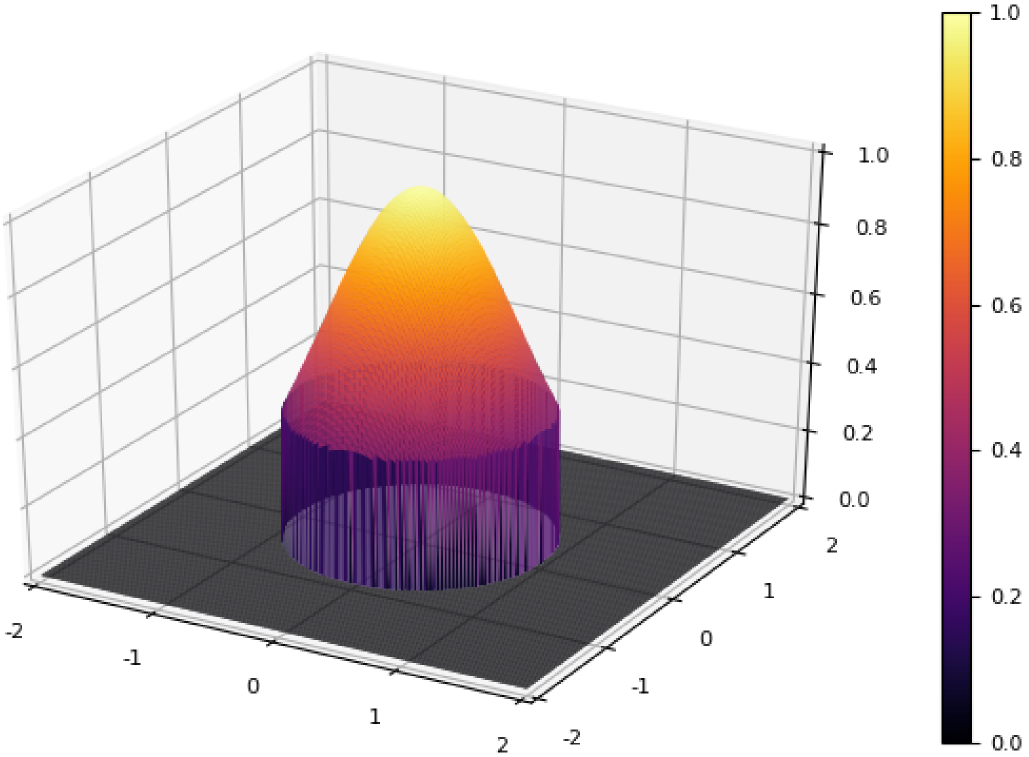
Out[35]:



In [36]:

```
# A(√2 r) のグラフ (r=1/√2)

surface(x, y, g.(x', y, √2*r))
```

Out[36]:



7 ガンマ函数の応用

7.1 多項式×指数函数の積分

n は0以上の整数であるとする. 高校数学IIIの教科書にはよく次の形の不定積分を求める問題が書いてある:

$$\int x^n e^x \, dx.$$

以下ではこれと本質的に同じ(x を $-x$ で置き換えて得られる)

$$\int x^n e^{-x} \, dx$$

を扱う. 部分積分を次々に使うと,

$$\begin{aligned}
\int x^n e^{-x} \, dx &= -x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} \, dx \\
&= -x^n e^{-x} - nx^{n-1} e^{-x} + n(n-1) \int x^{n-2} e^{-x} \, dx \\
&= -x^n e^{-x} - nx^{n-1} e^{-x} - n(n-1)x^{n-2} e^{-x} + n(n-1)(n-2) \int x^{n-3} e^{-x} \, dx \\
&= \cdots \cdots \cdots \cdots \\
&= -x^n e^{-x} - nx^{n-1} e^{-x} - n(n-1)x^{n-2} e^{-x} - \cdots + n(n-1) \cdots 2xe^{-x} - n!e^{-x} \\
&= -(x^n + nx^{n-1} e^{-x} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + n(n-1) \cdots 2x + n!)e^{-x}.
\end{aligned}$$

積分定数は省略した. これは $x \to \infty$ で 0 に収束し, $x = 0$ のとき $-n!$ になる. ゆえに

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a x^n e^{-n} \, dx = 0 - (-n!) = n!.$$

大学1年のときの解析学の授業でガンマ函数

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \, dx \quad (s > 0)$$

について習う. 上の高校数学の範囲内の結果は $\Gamma(n+1) = n!$ が成立することを意味している.

以上のように高校数学IIIの教科書にある $\int x^n e^x \, dx$ 型の不定積分を求める問題は本質的にガンマ函数に関する問題だとみなされる.

7.2 Stirlingの公式

準備: $n \to \infty$ のとき, Taylor展開 $\log(1+X) = X - X^2/2 + O(X^3)$ を使うと,

$$\begin{aligned}
\log\left(e^{-\sqrt{n}\,y} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n\right) &= -\sqrt{n}\,y + n \log\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) = -\sqrt{n}\,y + n\left(\frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right) \\
&= -\frac{y^2}{2} + O(n^{-1/2}) \to -\frac{y^2}{2}.
\end{aligned}$$

なので, $n \to \infty$ で

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\sqrt{n}\,y}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n dy \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \sqrt{2\pi}.$$

最後の等号で $a > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/a}\,dy = \sqrt{a\pi}$$

を使った. この公式はGauss積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

で $x = y/\sqrt{a}$ とおけば得られる. □

正の整数 n の階乗 $n!$ をガンマ函数で表すと,

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n\,dx$$

なので, $x = n + \sqrt{n}\,y = n(1 + y/\sqrt{n})$ と積分変数を変換すると,

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\sqrt{n}\,y}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n dy.$$

したがって, 上で準備した結果を使うと, $n \to \infty$ のとき

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}\sqrt{2\pi}.$$

これを**Stirlingの公式**(スターリングの公式)と呼ぶ. ここで $a_n \sim b_n$ は $a_n/b_n \to 1$ となることを意味する.

7.3 Stirlingの公式を使うと簡単に解ける大学入試問題

1988年の東京工業大学の入試問題 (https://www.google.co.jp/search?q=%E6%9D%B1%E5%B7%A5%E5%A4%A7%E5%85%A5%E8%A9%A6%E5%95%8F%E9%A1%8C+1988 に次の問題があった.

> [5] $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}\right)^{1/n}$ を求めよ.

その他にも1968年の東京工業大学の入試問題 (https://www.google.co.jp/search?q=%E6%9D%B1%E5%B7%A5%E5%A4%A7%E5%85%A5%E8%A9%A6%E5%95%8F%E9%A1%8C+1968 に次の問題があった.

> [5] 次の極限値を求めよ.
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}P_n}$$

これらの問題はStirlingの公式を使うとほぼただちに答えを得ることができる.

前者の問題の解答例: Stirlingの公式を使うと, $n \to \infty$ のとき

$$\left(\frac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}\right)^{1/n} = \left(\frac{(3n)!/(2n)!}{(2n)!/n!}\right)^{1/n} = \left(\frac{(3n)!n!}{((2n)!)^2}\right)^{1/n}$$
$$\sim \left(\frac{(3n)^{3n}e^{-3n}\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{(2n)^{4n}e^{-4n}2\pi n}\right)^{1/n} = \frac{3^3}{2^4}.$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}\right)^{1/n} = \frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16}$.

後者の問題の解答例: Stirlingの公式を使うと, $n \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}P_n} = \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n} \sim \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi n}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}\right)^{1/n} = 2^2 e^{-1}.$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}P_n} = 2^2 e^{-1} = \frac{4}{e}$.

In [37]:

```
# 前者の問題の SymPy による解

n = symbols("n", positive=true)
binom(n,k) = gamma(n+1)/(gamma(k+1)*gamma(n-k+1))
limit((binom(3n,n)/binom(2n,n))^(1/n), n=>oo)
```

Out[37]: $\frac{27}{16}$

In [38]:

```
# 後者の問題の SymPy による解

n = symbols("n", positive=true)
limit((1/n)*(gamma(2n+1)/gamma(n+1))^(1/n), n=>oo)
```

Out[38]: $\frac{4}{e}$

8 ベータ函数の応用

8.1 1/6公式

大学受験のために次の公式を「1/6公式」などと呼んで「暗記せよ」と教えている場合もあるようだ:

$$\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

もちろんそのような数学の教え方はよくない. 実はこの公式は大学1年のときに習うベータ函数に関する公式の特殊な場合だとみなされる. ベータ函数は

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p,q>0)$$

と定義される. これはガンマ函数によって次のように表わされるのであった:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

例えば $B(2,2) = \Gamma(2)^2/\Gamma(4) = (1!)^2/3! = 1/6$ となることがわかる. 以下が成立している: $x = y + a$, $y = (b-a)z$ とおくと,

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}\,dx &= \int_0^{b-a} y^{p-1}(b-a-y)^{q-1}\,dy \\ &= \int_0^1 (b-a)^{p-1}z^{p-1}(b-a)^{q-1}(1-z)^{q-1}(b-a)\,dz \\ &= (b-a)^{p+q-1}B(p,q).\end{aligned}$$

これは「1/6公式」の大幅な一般化になっている.

8.2 sinのべきの定積分

n は0以上の整数であるとする. 高校数学では

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\,d\theta$$

の形の定積分を扱うことがある. これは本質的にベータ函数の特別な場合 $B(1/2,q)$ に一致する. 実際, $x = \cos^2\theta$ とおくと,

$$\begin{aligned}B(1/2,q) &= \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{q-1}\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{-1}\ (\sin\theta)^{2q-2}\ 2\cos\theta\ \sin\theta\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta.\end{aligned}$$

特に

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\,d\theta.$$

より一般に

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \cos^m\theta\ \sin^n\theta\,d\theta.$$

ベータ函数の応用範囲は結構広い.

8.3 ガンマ函数とベータ函数の関係とその応用

$p,q > 0$ であると仮定する.

ベータ函数は $x = 1/(1+t)$, $dx = -dt/(1+t)^2$ という積分変数の変換によって

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^{p-1}}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{q-1}}\frac{dt}{(1+t)^2} = \int_0^\infty \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt.$$

ベータ函数のこの表示は統計学における第2種ベータ分布で使用され, $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ という表示は第1種ベータ分布で使用される. どちらの表示も重要である.

$a, b > 0$ のとき, 積分変数の変換 $x = y/a$ によって,

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{b-1}\,dx = \int_0^\infty e^{-y}\frac{x^{b-1}}{a^{b-1}}\frac{dy}{a} = \frac{1}{a^b}\int_0^\infty e^{-y}x^{b-1}\,dy = \frac{\Gamma(b)}{a^b}.$$

ガンマ函数はこの形式で自然に現われることが非常に多い.

以上の準備のもとで,

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx, \quad \Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-y}y^{p-1}\,dy$$

の積は以下のように計算される. $y = tx$ という積分変数の変換(これは平面上の (x, y) を傾き t の原点を通る直線と x の値で表示する変数変換であり, それなりの自然さを持っている)と積分順序の交換によって,

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}\,dy\right)dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x-y}x^{p-1}(tx)^{q-1}x\,dt\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x-tx}x^{p-1}(tx)^{q-1}x\,dt\right)dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty t^{q-1}e^{-(1+t)x}x^{p+q-1}\,dt\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty t^{q-1}e^{-(1+t)x}x^{p+q-1}\,dx\right)dt = \int_0^\infty t^{q-1}\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}\,dt \\
&= \Gamma(p+q)\int_0^\infty \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \Gamma(p+q)B(p,q).
\end{aligned}$$

これで

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

が示された. これと $x = \cos^2\theta$ とおくことによって得られる

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = 2\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta$$

より, $p, q = 1/2$ のとき $B(1/2, 1/2) = \pi$ であるから, $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$ を使うと,

$$\Gamma(1/2)^2 = \Gamma(1)B(1/2,1/2) = \pi, \qquad \therefore \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

さらに, $x = \sqrt{y}$ とおくと,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-y}y^{-1/2}\,dx = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

積分 $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$ は**Gauss積分**と呼ばれている. 正規分布の確率密度函数を理解するためには, Gauss積分に関するこの公式を理解しておかないといけない.

In [ ]:

```

```