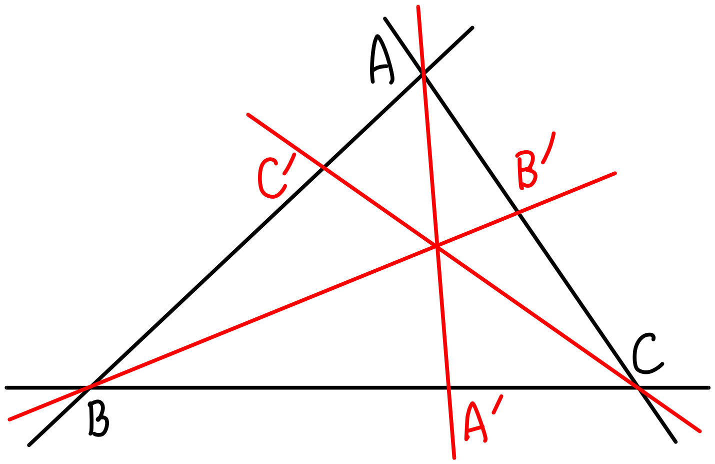
チェバの定理とメネラウスの定理について

黒木玄

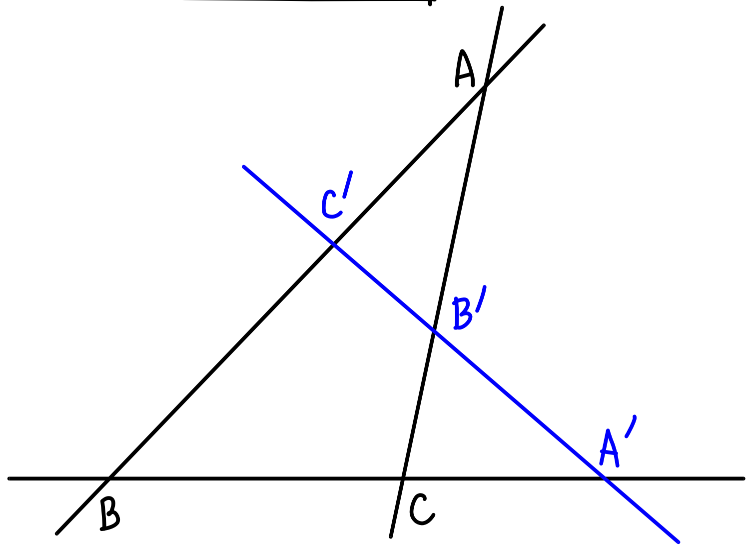
2023-08-27 作製

チェバの定理



$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = 1.$$

メネラウスの定理



$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = -1,$$

符号の意味は
次ページで説明する.

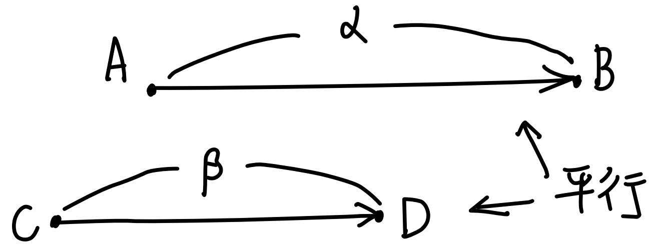
$\boxed{\dfrac{AB}{CD}\text{の定義}}$ $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}\text{と書くべきかもしれない。}\right)$

ベクトル$\overrightarrow{AB}$とベクトル$\overrightarrow{CD}$が平行なとき，$\dfrac{AB}{CD}$を以下のように定める。

ベクトル$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{CD}$の向きが同じ方向ならば$\varepsilon=1$，反対方向ならば$\varepsilon=-1$とおく。

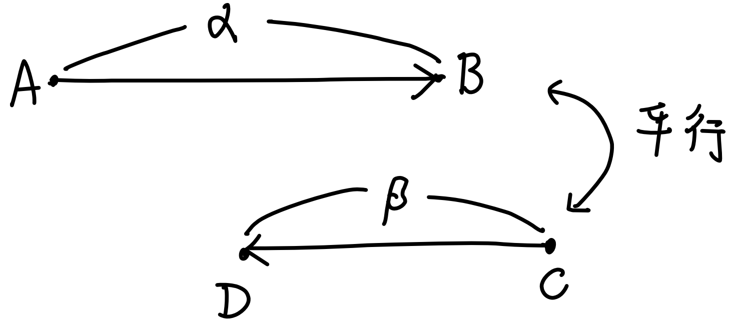
$$\frac{AB}{CD}=\varepsilon\,\frac{\overrightarrow{AB}\text{の長さ}}{\overrightarrow{CD}\text{の長さ}}$$ と定める。

例



$$\frac{AB}{CD}=\frac{\alpha}{\beta}\quad\left(\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}\text{と}\overrightarrow{CD}\text{は}\\ \text{同じ向き}\end{array}\right),$$

例

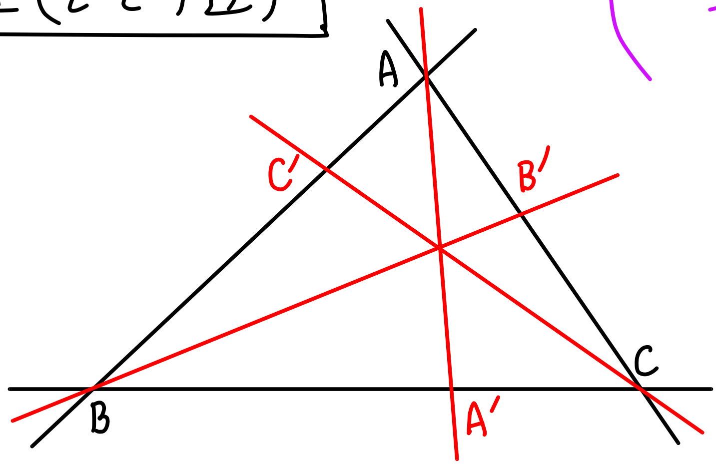


$$\frac{AB}{CD}=-\frac{\alpha}{\beta}\quad\left(\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}\text{と}\overrightarrow{CD}\text{は}\\ \text{反対向き}\end{array}\right).$$

A, B, C は平面上の一般の位置にある3点であるとし，

A′, B′, C′ はそれぞれ直線 BC, CA, AB 上の A, B, C とは異なる点であるとする.

Cevaの定理（とその逆）

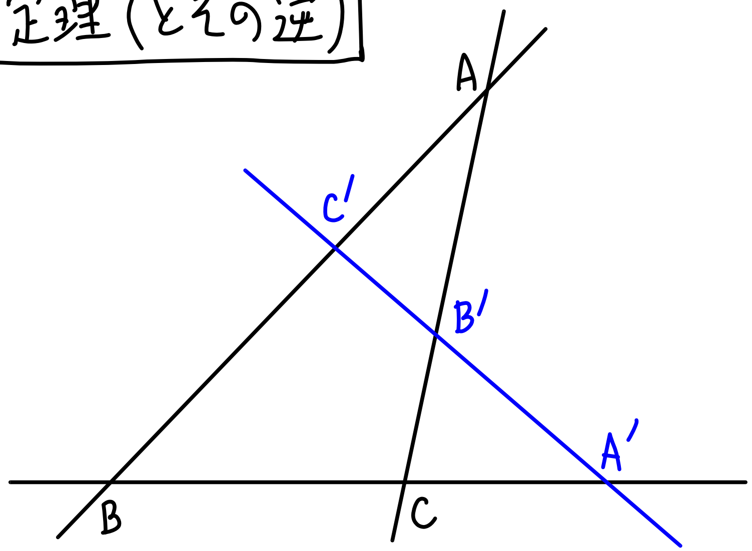


(注) 射影幾何的に
平行な直線達は無限遠で1点で交わると考える

$$\left\{\begin{array}{l}\text{3直線 } AA',\ BB',\ CC' \text{ が1点で交わる}\\ \Longleftrightarrow\ \underbrace{\dfrac{BA'}{A'C}}\ \underbrace{\dfrac{CB'}{B'A}}\ \underbrace{\dfrac{AC'}{C'B}} = 1.\end{array}\right.$$

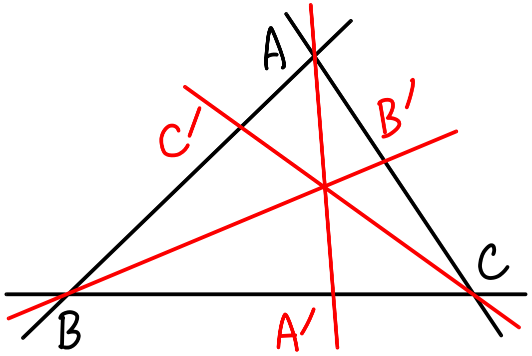
左図の場合にはすべて正

Menelausの定理（とその逆）

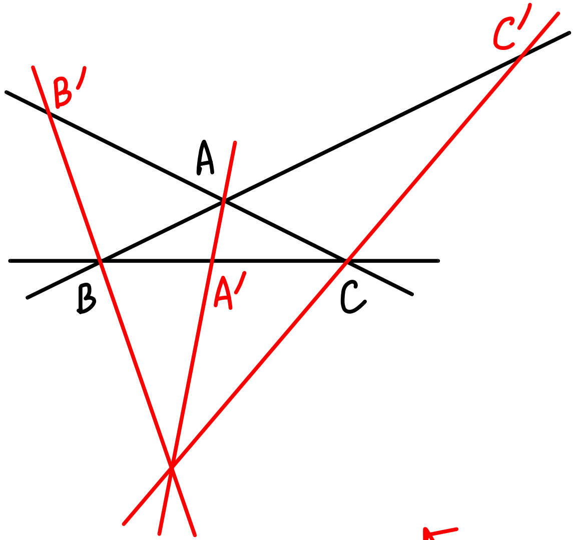


$$\left\{\begin{array}{l}\text{3点 } A',\ B',\ C' \text{ が同一直線上にある}\\ \Longleftrightarrow\ \underbrace{\underbrace{\dfrac{BA'}{A'C}}_{<0}\ \underbrace{\dfrac{CB'}{B'A}}_{>0}\ \underbrace{\dfrac{AC'}{C'B}}_{>0}}_{\text{左図の場合}} = -1.\end{array}\right.$$

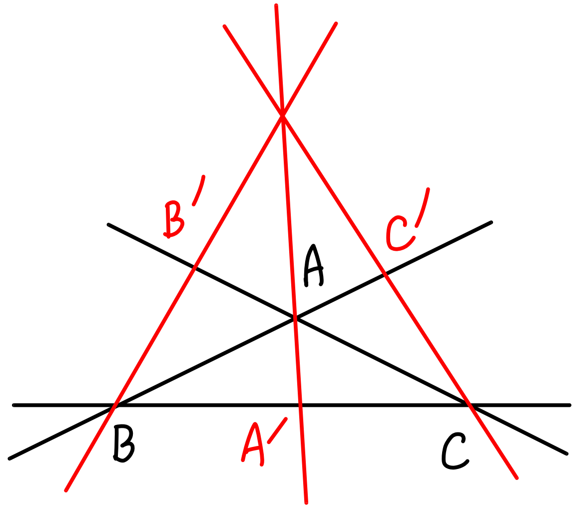
Cevaの定理の3パターン



$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{>0}\underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{>0}\underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{>0} = 1.$$

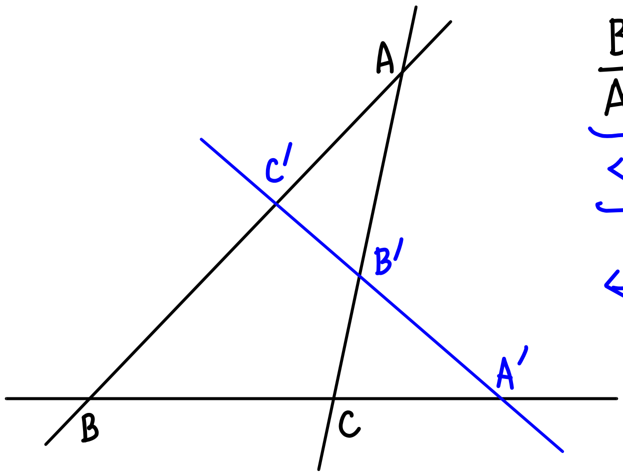


$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{>0}\underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{<0}\underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{<0} = 1.$$



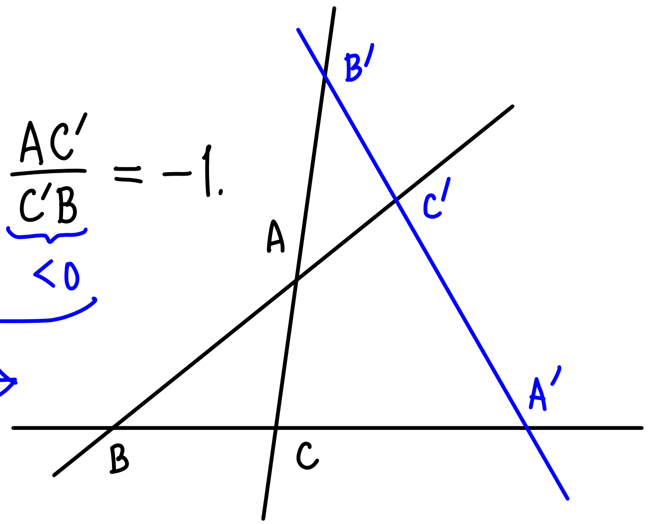
$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{>0}\underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{<0}\underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{<0} = 1.$$

Menelausの定理の2パターン



$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{<0}\underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{>0}\underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{>0} = -1.$$

$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{<0}\underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{<0}\underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{<0} = -1.$$



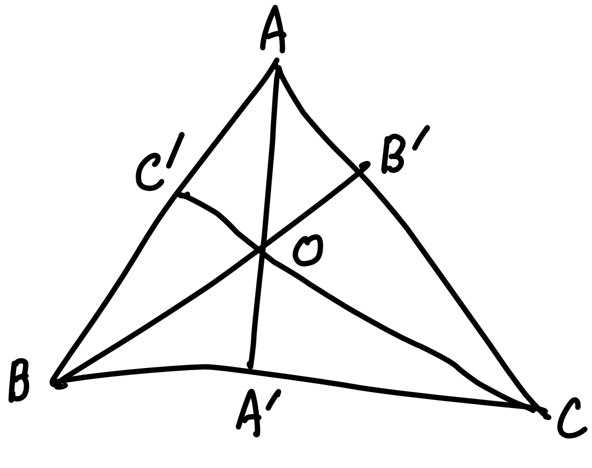
問題　次ページ以降を見る前にCevaの定理とMenelausの定理（前々ページの2つの定理の⇒の向き）を複数通りの方法で証明せよ.

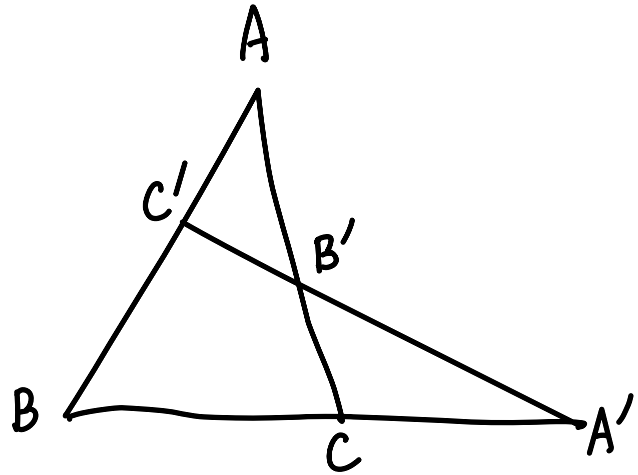
ヒント；・前ページより符号は忘れて長さの比を考えれば十分である.

・補助線を引き相似な三角形達を作る方法だけで複数ある

・三角形の面積比を使う方法もある.

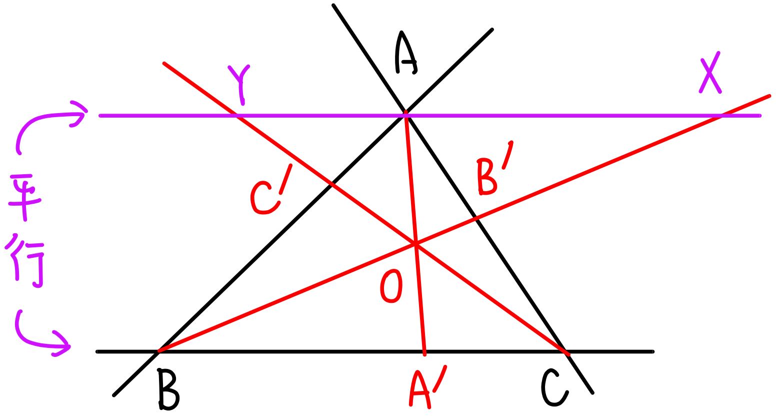
・他にも多数ある.





相似を使う方法 と 面積比を使う方法

Ceva 1



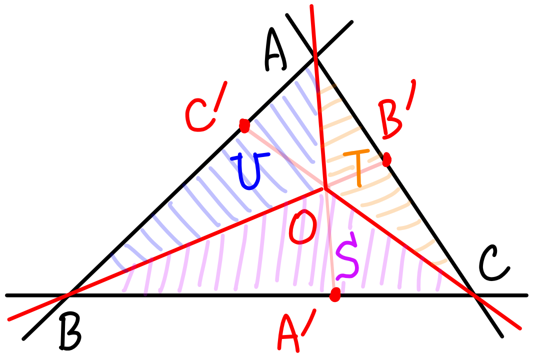
三角形達の相似より,

$BA' : A'C = XA : AY,$

$CB' : B'A = BC : XA,$

$AC' : C'B = AY : BC.$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{XA}{AY}\frac{BC}{XA}\frac{AY}{BC} = 1.$$



$$\begin{cases} \triangle OBC = S \\ \triangle OCA = T \\ \triangle OAB = U \end{cases}$$

底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので

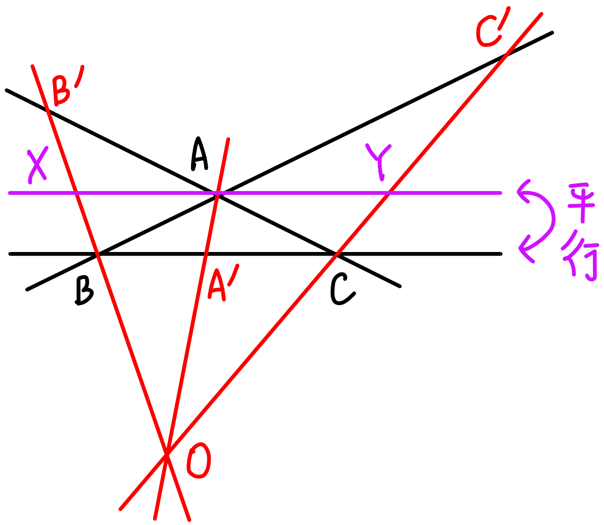
$BA' : A'C = U : T,$

$CB' : B'A = S : U,$

$AC' : C'B = T : S.$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{U}{T}\frac{S}{U}\frac{T}{S} = 1.$$

Ceva 2



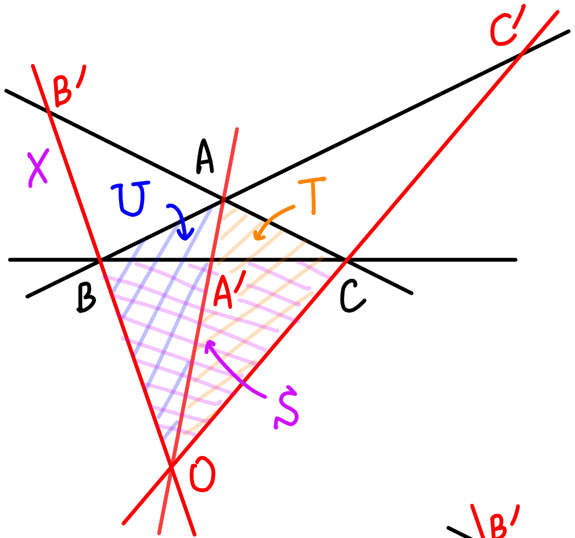
三角形達の相似より,

$BA':A'C = XA:AY,$

$CB':B'A = BC:XA,$

$AC':C'B = AY:BC.$

$$\therefore\ \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{XA}{AY}\frac{BC}{XA}\frac{AY}{BC} = 1.$$



底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので

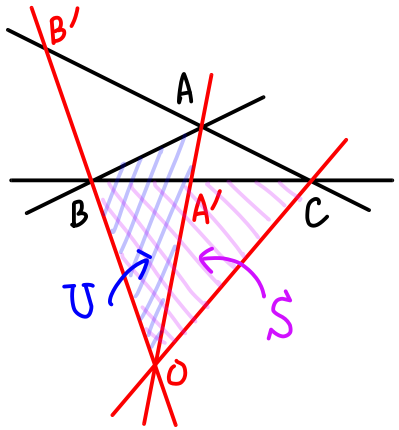
$BA':A'C = U:T,$

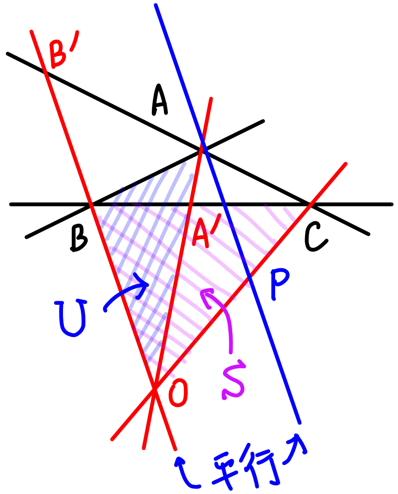
$CB':B'A = S:U,$

$AC':C'B = T:S.$

$$\therefore\ \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{U}{T}\frac{S}{U}\frac{T}{S} = 1.$$

$$\begin{cases} \triangle OBC = S \\ \triangle OCA = T \\ \triangle OAB = U \end{cases}$$





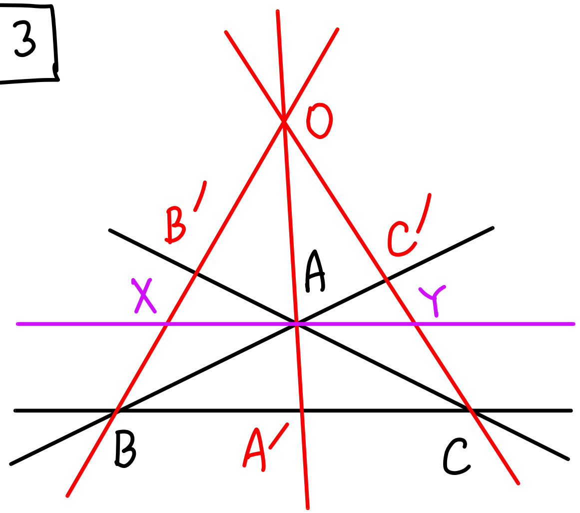
$S:U$

$= \triangle CBO$の高さ$:\triangle ABO$の高さ

$= CO:OP$

$= CB':B'A$

$\boxed{\text{Ceva 3}}$



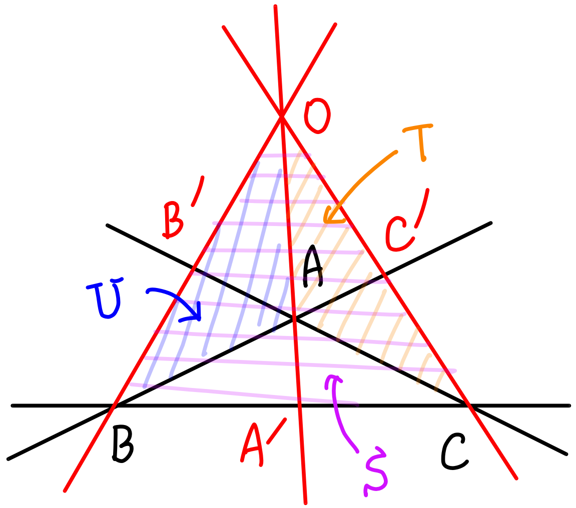
三角形達の相似より,

$BA':A'C = XA:AY,$

$CB':B'A = BC:XA,$

$AC':C'B = AY:BC.$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{XA}{AY}\frac{BC}{XA}\frac{AY}{BC} = 1.$$



底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので

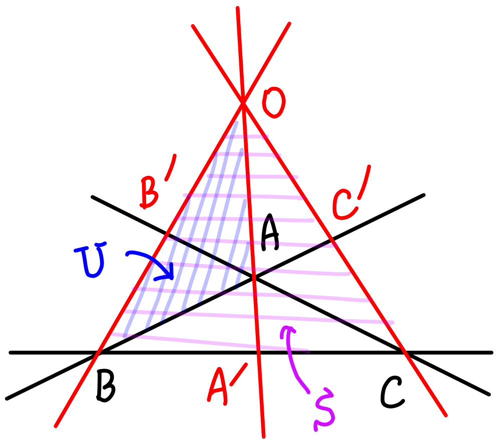
$BA':A'C = U:T,$

$CB':B'A = S:U,$

$AC':C'B = T:S.$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{U}{T}\frac{S}{U}\frac{T}{S} = 1.$$

$$\begin{cases} \triangle OBC = S \\ \triangle OCA = T \\ \triangle OAB = U \end{cases}$$

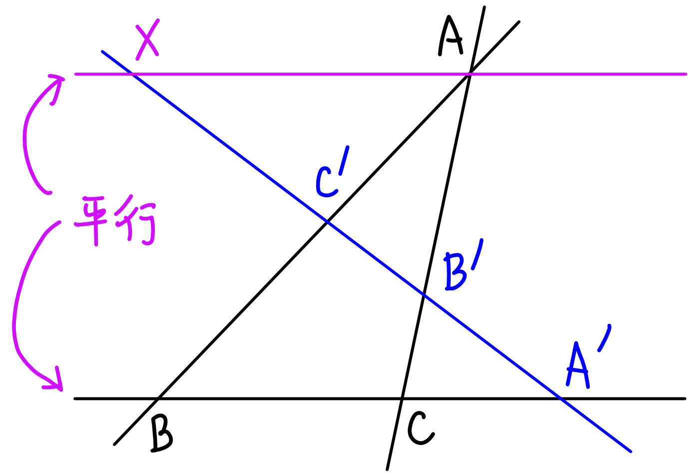


$S:U$

$= \triangle CBO$ の高さ $: \triangle ABO$ の高さ

$= CB':B'A$

Menelaus 1

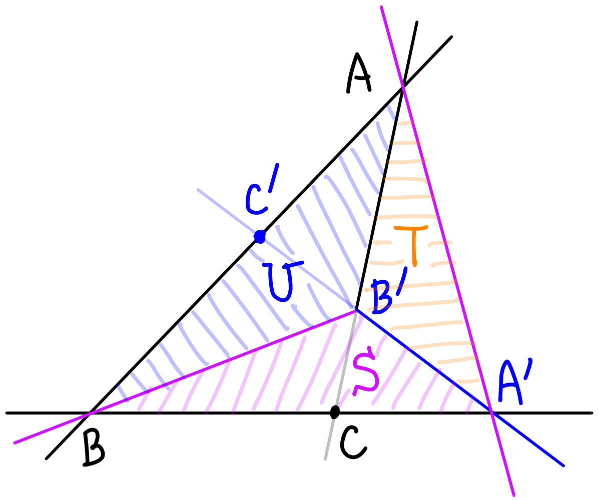


三角形達の相似より,

$$CB' : B'A = A'C : AX,$$

$$AC' : C'B = XA : BA'.$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C}\frac{A'C}{AX}\frac{XA}{BA'} = -1$$



$$\begin{cases} \Delta B'BA' = S \\ \Delta B'A'A = T \\ \Delta B'AB = U \end{cases}$$

底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので、長さの比が以下のようになる:

$$BA' : A'C = (U+T) : T,$$

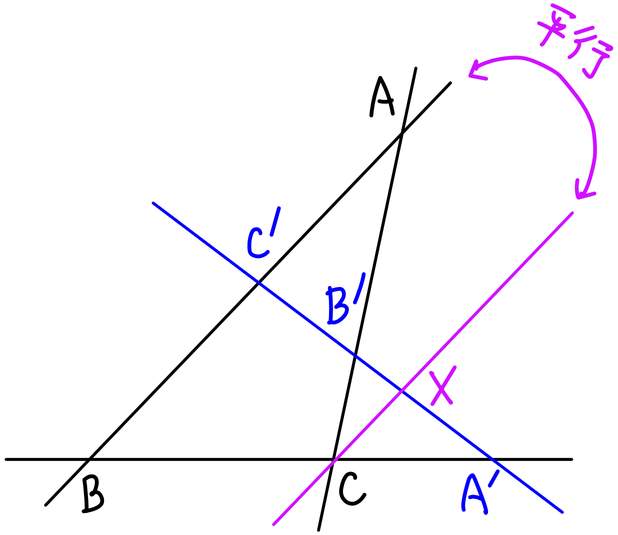
$$CB' : B'A = S : (U+T),$$

$$AC' : C'B = T : S.$$

ゆえに符号も考慮に入れると,

$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = -\frac{U+T}{T}\frac{S}{U+T}\frac{T}{S} = -1.$$

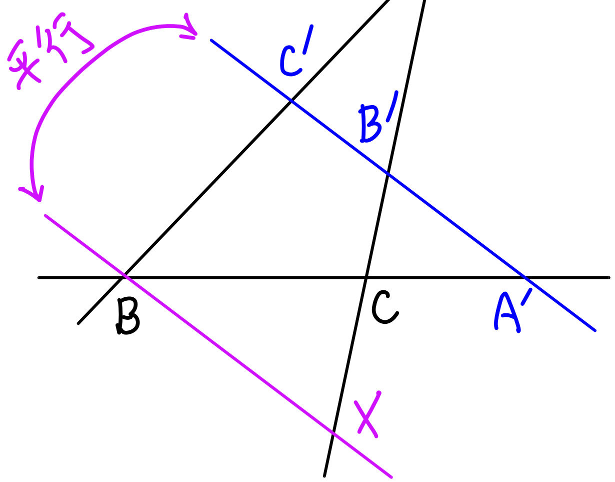
Menelaus 1 別解（三角形の相似を使う別の方法達）



$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{C'B}{CX},$$

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{CX}{C'A}.$$

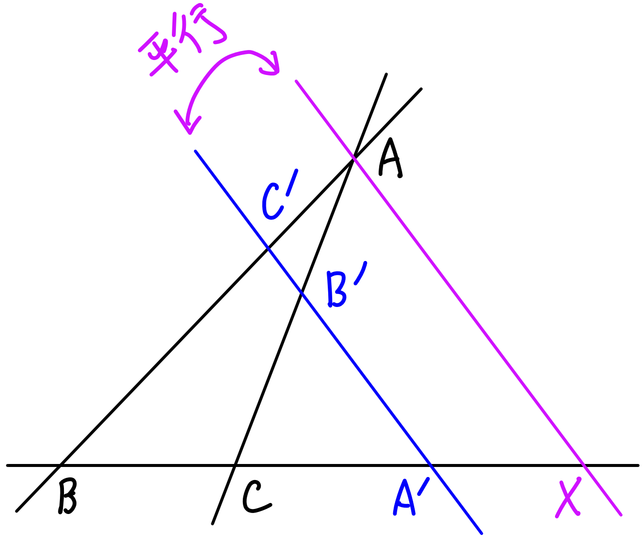
$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{C'B}{CX}\frac{CX}{C'A}\frac{AC'}{C'B} = -1$$



$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{B'X}{CB'},$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'X}.$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{B'X}{CB'}\frac{CB'}{B'A}\frac{AB'}{C'B} = -1.$$

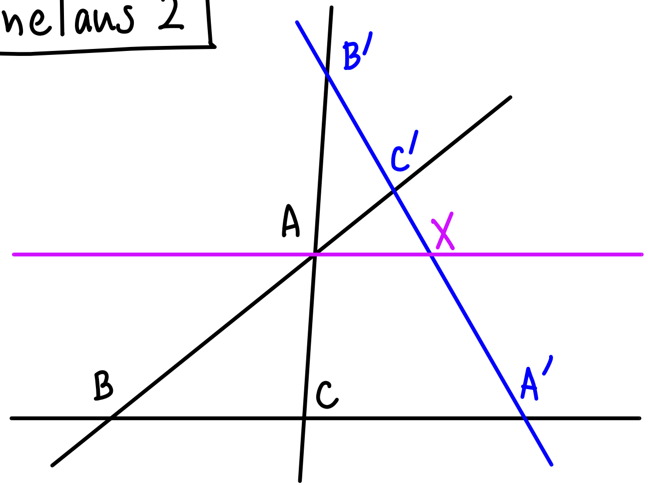


$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{CA'}{A'X},$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{A'X}{BA'}.$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C}\frac{CA'}{A'X}\frac{A'X}{BA'} = -1.$$

Menelaus 2

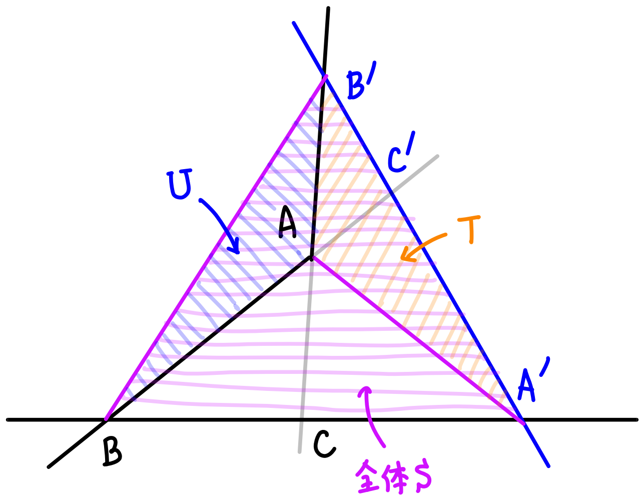


三角形達の相似より,

$$CB' : B'A = A'C : AX,$$

$$AC' : C'B = XA : BA'.$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C}\frac{A'C}{AX}\frac{XA}{BA'} = -1$$



$$\begin{cases} \triangle B'BA' = S \\ \triangle B'A'A = T \\ \triangle B'AB = U \end{cases}$$

底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので,
長さの比が以下のようになる:

$$BA' : A'C = (U+T) : T,$$

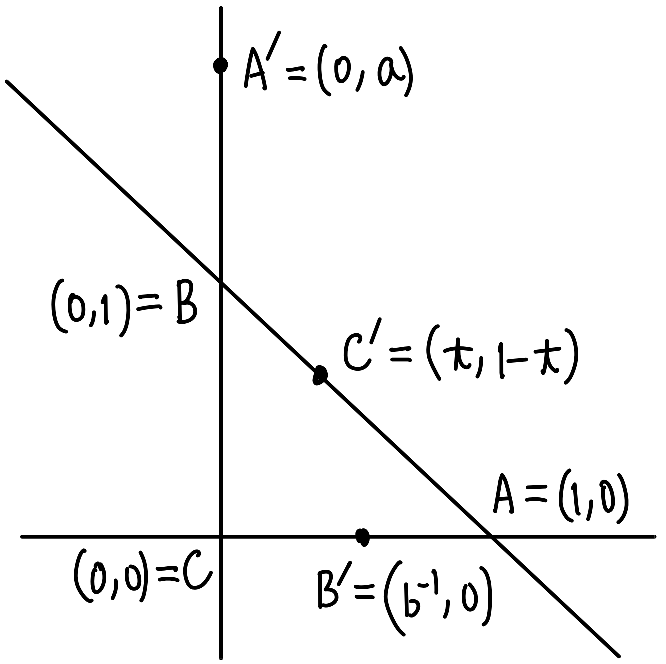
$$CB' : B'A = S : (U+T),$$

$$AC' : C'B = T : S.$$

ゆえに符号も考慮に入れると,

$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = -\frac{U+T}{T}\frac{S}{U+T}\frac{T}{S} = -1.$$

$\boxed{\text{座標を使う方法}}$ 点Cを原点とし, $x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$ で平面上に座標 (x,y) を入れる.



$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{a-1}{-a},\quad \frac{CB'}{B'A}=\frac{b^{-1}}{1-b^{-1}}=\frac{1}{b-1},\quad \frac{AC'}{C'B}=\frac{t-1}{-t}=\frac{1-t}{t}.$$

$\boxed{\text{Ceva}}$ 直線AA′: $y=-a(x-1)$

直線BB′: $y=-bx+1$

直線CC′: $y=\dfrac{1-t}{t}x$

AA′とBB′の交点は $\left(\dfrac{a-1}{a-b},\ -a\dfrac{b-1}{a-b}\right)$ なので,

AA′, BB′, CC′が1点で交わる $\iff -a\dfrac{b-1}{a-b}=\dfrac{1-t}{t}\dfrac{a-1}{a-b}$

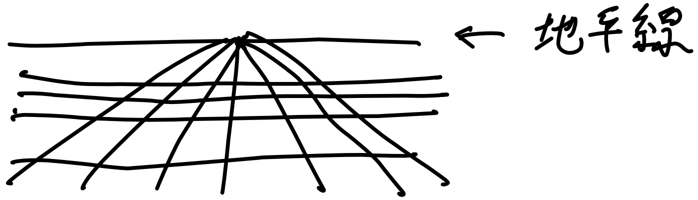
$$\iff \frac{a-1}{-a}\,\frac{1}{b-1}\,\frac{1-t}{t}=1 \iff \frac{BA'}{A'C}\,\frac{CB'}{B'A}\,\frac{AC'}{C'B}=1.$$

$\boxed{\text{Menelaus}}$ 直線A′B′: $y=-abx+a$ と 直線AB: $y=1-x$ の交点は $\left(\dfrac{a-1}{ab-1},\ a\dfrac{b-1}{ab-1}\right)$ なので,

A′, B′, C′が同一直線上にある $\iff a\dfrac{b-1}{ab-1}=\dfrac{1-t}{t}\dfrac{a-1}{ab-1}$

$$\iff \frac{a-1}{-a}\,\frac{1}{b-1}\,\frac{1-t}{t}=-1 \iff \frac{BA'}{A'C}\,\frac{CB'}{B'A}\,\frac{AC'}{C'B}=-1.$$

射影幾何との関係



射影変換たち：

- 直線上の点 x の変換 $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0\right)$.
- 平面上の点 (x,y) の変換 $(x,y) \mapsto \left(\dfrac{ax+a'y+a''}{cx+c'y+c''}, \dfrac{bx+b'y+b''}{cx+c'y+c''}\right)$ $\left(\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0\right)$.

射影変換で不変な性質を調べる幾何を射影幾何と呼ぶ。

より正確には射影直線と射影平面を定義した方がよいが略す。

直線の射影変換の全体は $x \mapsto x+\beta$ $x \mapsto \alpha x$ $(\alpha \neq 0)$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ で生成される。 ←(*)

直線上の点 a, b, c, d に対する $cr(a,b;c,d) = \dfrac{c-a}{b-c}\dfrac{d-b}{a-d}$ を cross ratio (複比) と呼ぶ。

cross ratio は射影変換で不変である。 ← (*)から容易に出る。

平面上の同一直線上の点 A, B, C, D に対しても cross ratio が

$$cr(A,B;C,D) = \frac{AC}{CB}\frac{BD}{DA}$$

と定義され、平面の射影変換で不変である。

Cevaの定理(とその逆)の射影幾何版

平面上の直線 l_1, l_2, l_3, m は対ごとに平行でなく，そのうちのどの3つも1点で交わらないと仮定する．$A = l_2 \cap l_3$，$B = l_3 \cap l_1$，$C = l_1 \cap l_2$，$P = l_1 \cap m$，$Q = l_2 \cap m$，$R = l_3 \cap m$ とおく．

A', B', C' はそれぞれ l_1, l_2, l_3 上の A, B, C とは異なる点であるとする．このとき，

直線 AA', BB', CC' は1点で交わる ← mによらない条件，射影変換で不変の条件

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{cr}(B, C; A', P)\, \mathrm{cr}(C, A; B', Q)\, \mathrm{cr}(A, B; C', R) = -1$$

← 左辺は射影変換で不変

$$\Leftrightarrow \quad \frac{BA'}{A'C}\frac{CP}{PB} \times \frac{CB'}{B'A}\frac{AQ}{QC} \times \frac{AC'}{C'B}\frac{BR}{RA} = -1.$$

点 P, Q, R が乗っている直線 m を無限遠に移動すると，$\frac{CP}{PB}, \frac{AQ}{QC}, \frac{BR}{RA}$ はどれも -1 に収束するので

$$\Leftrightarrow \quad \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = 1.$$

射影変換によって易しい場合に変換して証明できる．

Cevaの場合の双対(点と直線の立場の交換)として以下が得られる。

$\boxed{\text{Menelausの定理(とその逆)の射影幾何版}}$

平面上の点 A, B, C, M は互いに異なるとし、そのうちのどの3つも同一直線上にないと仮定する。

$l_1 = (\text{直線}BC)$, $l_2 = (\text{直線}CA)$, $l_3 = (\text{直線}AB)$, $m_1 = (\text{直線}AM)$, $m_2 = (\text{直線}BM)$, $m_3 = (\text{直線}CM)$,

$P = l_1 \cap m_1$, $Q = l_2 \cap m_2$, $R = l_3 \cap m_3$ とおく。

A', B', C' はそれぞれ直線 l_1, l_2, l_3 上の A, B, C とは異なる点であると仮定する。このとき、

A', B', C'が同一直線上にある ← Mによらない条件, 射影変換で不変の条件

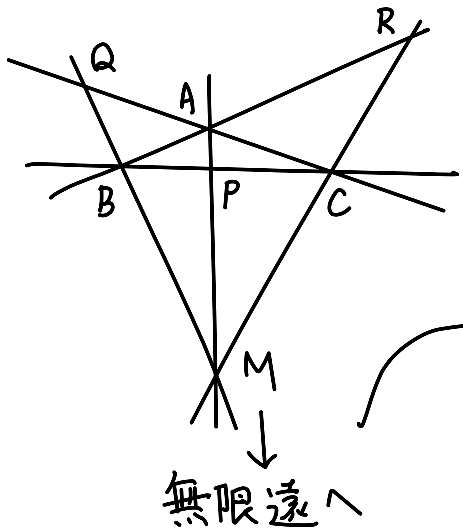
$\iff \mathrm{cr}(B,C;A',P)\,\mathrm{cr}(C,A;B',Q)\,\mathrm{cr}(A,B;C',R) = -1$ ← 左辺は射影変換で不変

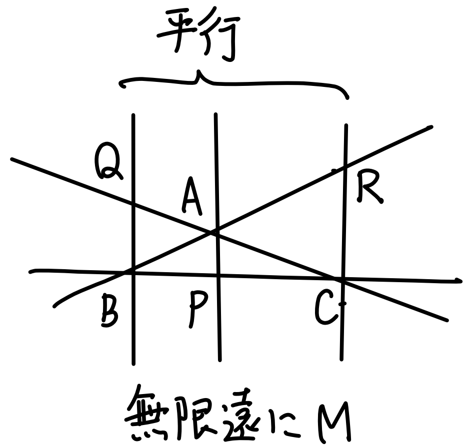
$$\iff \frac{BA'}{A'C}\frac{CP}{PB} \times \frac{CB'}{B'A}\frac{AQ}{QC} \times \frac{AC'}{C'B}\frac{BR}{RA} = -1$$

Mを無限遠に移動すると、

$\dfrac{CP}{PB}\dfrac{AQ}{QC}\dfrac{BR}{RA} \to 1$ となるので

$$\iff \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = -1.$$





$$\frac{CP}{PB}\frac{AQ}{QC}\frac{BR}{RA} = \frac{CP}{PB}\frac{PB}{BC}\frac{BC}{CP} = 1$$

文献

・西山享、『射影幾何学の考え方』、数学のかんどころ19、共立出版2013

・Julio Benitez, A Unified Proof of Ceva and Menelaus’ Theorems Using Projective Geometry, Journal for Geometry and Graphics Volume 11 (2007), No. 1, 39–44.
https://scholar.google.co.jp/scholar?cluster=2104876940749426999