

# Hurwitzのゼータ関数の0以下の整数での特殊値と微係数

黒木玄

2019-04-01

Hurwitzのゼータ関数とは  $\operatorname{Re} s > 1, x \neq 0, -1, -2, \dots$  で定義された

$$\zeta(s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^s} = \frac{1}{x^s} + \frac{1}{(x+1)^s} + \frac{1}{(x+2)^s} + \dots$$

を解析接続して得られる関数のことである。

このノートブックではHurwitzのゼータ関数の  $s = 1 - r$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) における特殊値  $\zeta(1 - r, x)$  と偏微分係数  $\zeta_s(1 - r, x)$  に関するよく知られている結果を数値的に確認する。

ツイッターでの以下のスレッドも参照せよ:

- <https://twitter.com/genkuroki/status/1111938896844095488> (<https://twitter.com/genkuroki/status/1111938896844095488>)

Julia言語環境の整備の仕方については次のリンク先を参照せよ:

- <https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/install.ipynb>  
(<https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/install.ipynb>)

## 目次

- 1 Bernoulli多項式との関係
- 2 対数ガンマ関数との関係
- 3 対数正弦関数との関係
- 4 周期的Bernoulli多項式のFourier展開
- 5 Milnor型対数多重正弦関数のFourier展開
- 6 解説
  - 6.1 簡単な解説
  - 6.2 Milnor型対数多重正弦関数のFourier展開公式の証明

```
In [1]: 1 using Plots
2 gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
3 gr(bglegend=RGBA(1.0, 1.0, 1.0, 0.5))
4 using LaTeXStrings
5 using SpecialFunctions
6 using SymPy: SymPy, sympy, @vars, oo
7 using QuadGK
```

```
In [2]: 1 ?SpecialFunctions.zeta
```

```
Out[2]: zeta(s, z)
```

Generalized zeta function  $\zeta(s, z)$ , defined by the sum  $\sum_{k=0}^{\infty} ((k+z)^2)^{-s/2}$ , where any term with  $k+z=0$  is excluded. For  $\Re z > 0$ , this definition is equivalent to the Hurwitz zeta function  $\sum_{k=0}^{\infty} (k+z)^{-s}$ . For  $z=1$ , it yields the Riemann zeta function  $\zeta(s)$ .

`zeta(s)`

Riemann zeta function  $\zeta(s)$ .

**注意:** Hurwitzのゼータ関数の計算では `SpecialFunctions.zeta(s, z)` を  $\operatorname{Re} z > 0$  の場合にのみ利用すること。

## 1 Bernoulli多項式との関係

Bernoulli多項式を  $B_r(x)$  と書くと,

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{z^k}{k!}, \quad -r\zeta(1-r, x) = B_r(x) \quad (r = 1, 2, \dots).$$

左側の公式を  $B_k(x)$  の定義だと考えてよい.

```
In [3]: 1 B(r, x) = -r*zeta(1-r, x)
2 Bernoulli(r, x) = sympy.bernoulli(r, x)
3 fBernoulli(r, x) = float(Bernoulli(r,x))
4 @vars x
5 [Bernoulli(r, x) for r in 0:4]
```

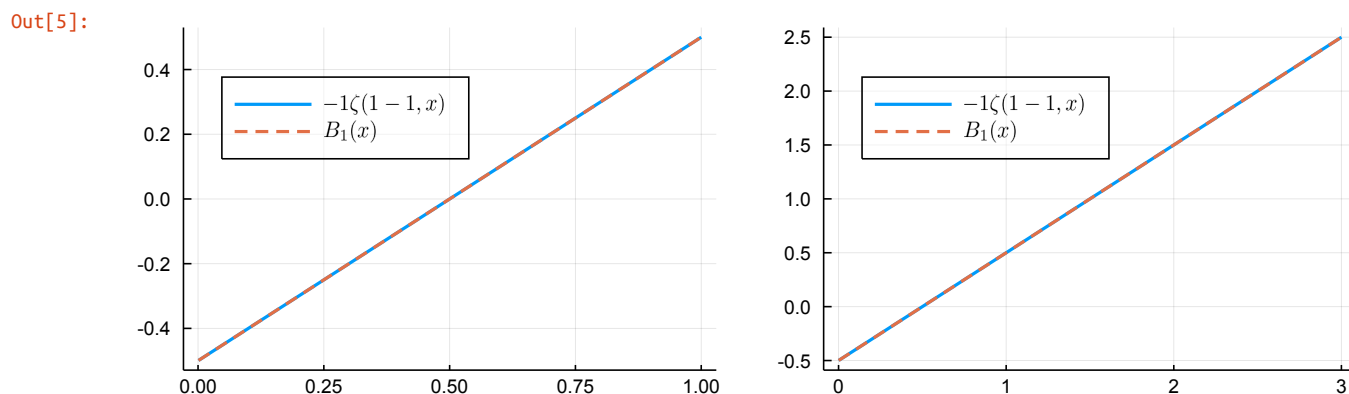
Out[3]:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x - \frac{1}{2} \\ x^2 - x + \frac{1}{6} \\ x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} \\ x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

```
In [4]: 1 function plot_Bernoulli(r ;
2     x1=range(0.001, 1, length=400), l1=:topleft,
3     x2=range(0.001, 3, length=400), l2=:topleft,
4     figsize=(800, 250))
5
6     x = x1
7     P1 = plot(legend=l1, legendfontsize=9)
8     plot!(x, B.(r,x), label="\$-\$r\\zeta(1-\$r,x)\$", lw=2)
9     plot!(x, fBernoulli.(r,x), label="\$B_{\$r}(x)\$", lw=2, ls=:dash)
10
11     x = x2
12     P2 = plot(legend=l2, legendfontsize=9)
13     plot!(x, B.(r,x), label="\$-\$r\\zeta(1-\$r,x)\$", lw=2)
14     plot!(x, fBernoulli.(r,x), label="\$B_{\$r}(x)\$", lw=2, ls=:dash)
15
16     plot(P1, P2; size=figsize)
17 end
```

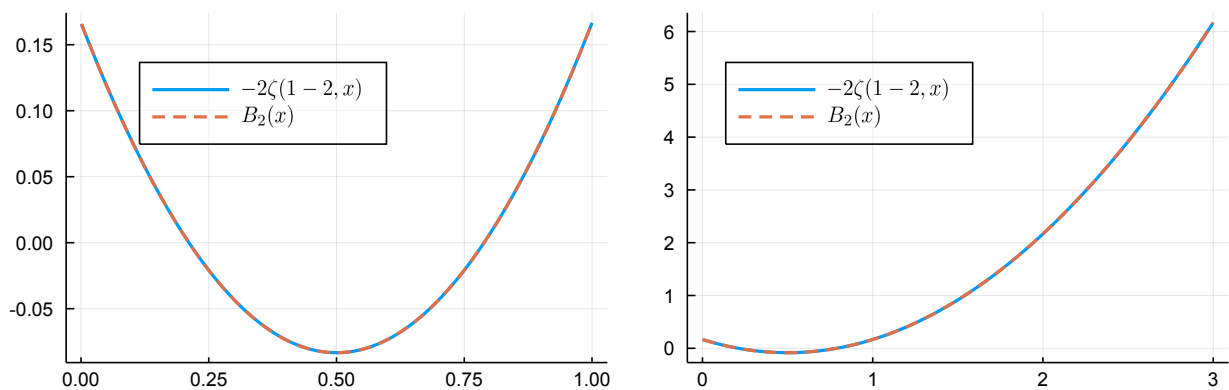
Out[4]: plot\_Bernoulli (generic function with 1 method)

```
In [5]: 1 plot_Bernoulli(1)
```



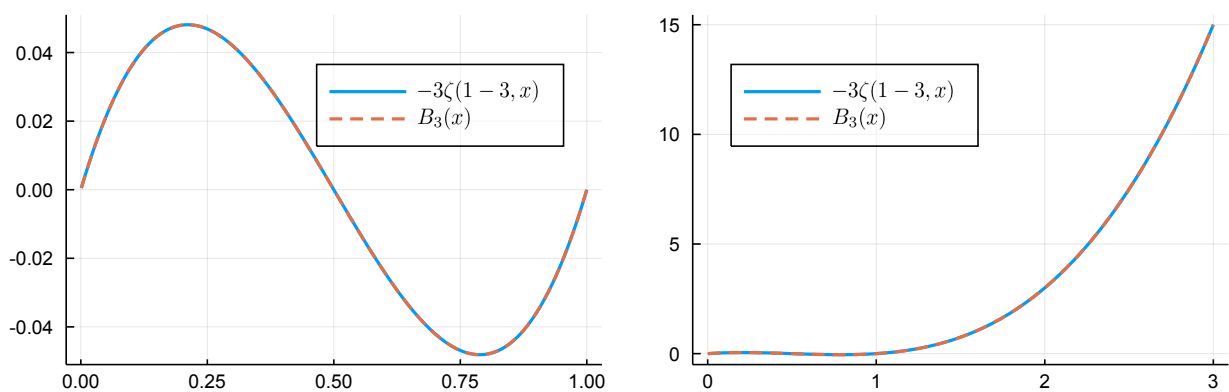
In [6]: 1 `plot_Bernoulli(2; l1=:top)`

Out[6]:



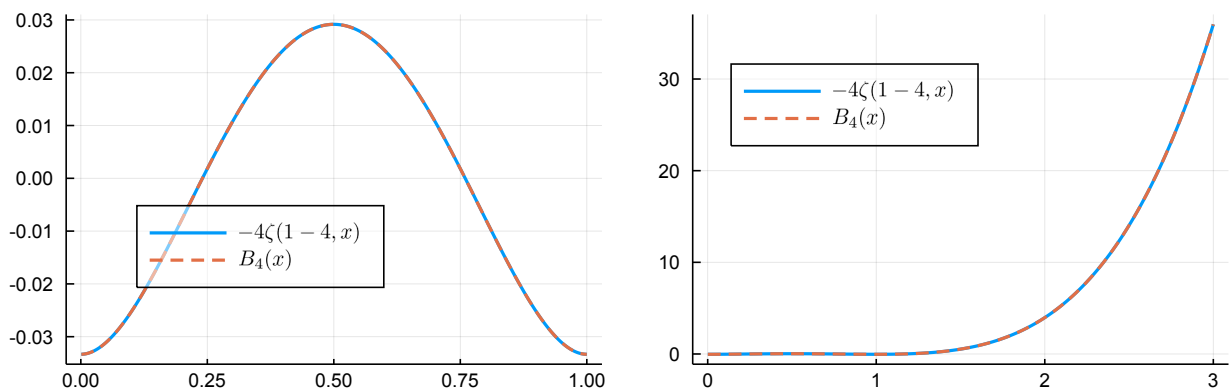
In [7]: 1 `plot_Bernoulli(3; l1=:topright)`

Out[7]:



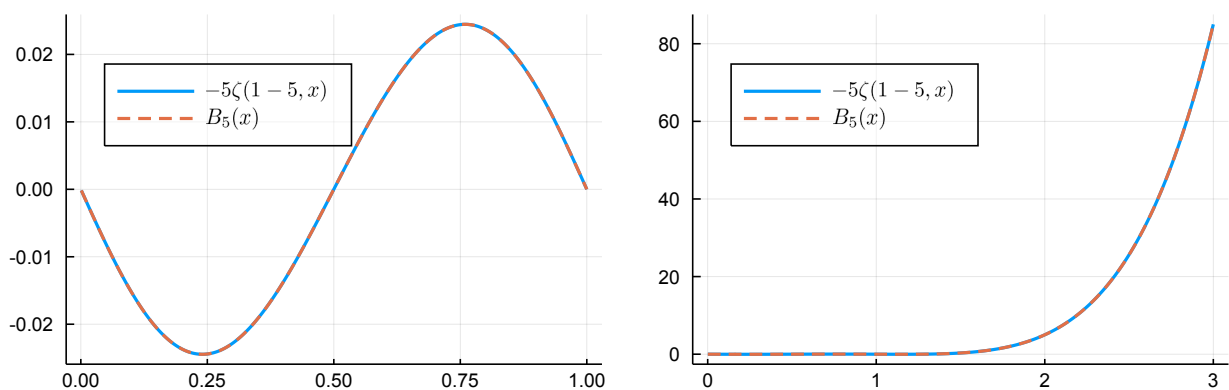
In [8]: 1 `plot_Bernoulli(4; l1=:bottom)`

Out[8]:



In [9]: 1 `plot_Bernoulli(5)`

Out[9]:



ぴったり一致している。

## 2 対数ガンマ函数との関係

Hurwitzのゼータ函数の  $s$  に関する偏導函数を  $\zeta_s(s, x)$  と書くことにする. このとき

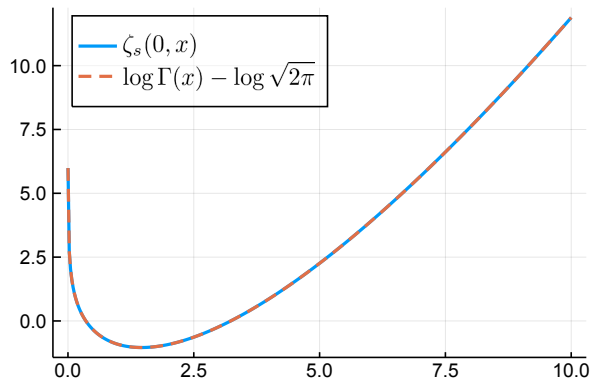
$$\zeta_s(0, x) = \log \Gamma(x) - \log \sqrt{2\pi} \quad (x > 0)$$

```
In [10]: 1 logGamma(r, x; h=√eps()) = (zeta(1-r+h, x) - zeta(1-r-h, x))/(2h)
2 exp(logGamma(1, 10))*√(2π), gamma(10)
```

Out[10]: (362879.9877628901, 362880.0)

```
In [11]: 1 function plot_logGamma1(; x=range(0.001, 10, length=400), l=:topleft, figsize=(400,250))
2     plot(size=figsize)
3     plot!(legend=l, legendfontsize=10)
4     plot!(x, logGamma.(1,x), label=L"\zeta_s(0,x)", lw=2)
5     plot!(x, lgamma.(x) .- log(√(2π)), label=L"\log\Gamma(x) - \log\sqrt{2\pi}", lw=2, ls=:dash)
6 end
7
8 plot_logGamma1()
```

Out[11]:



ぴったり一致している.

## 3 対数正弦函数との関係

Hurwitzのゼータ函数とガンマ函数と  $\sin$  の関係より,

$$\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}} = \exp(\zeta_s(0, x)), \quad 2 \sin(\pi x) = \frac{2\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} \quad (0 < x < 1)$$

前者の公式はLerchの公式と呼ばれ, 後者の公式はガンマ函数の相反公式と呼ばれている. それらの公式の証明については

- <https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/10%20Gauss%2C%20Gamma%2C%20Beta.ipynb>  
(<https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/10%20Gauss%2C%20Gamma%2C%20Beta.ipynb>)
- <https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/10%20Gauss%2C%20Gamma%2C%20Beta.pdf>  
(<https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/10%20Gauss%2C%20Gamma%2C%20Beta.pdf>)

の第2.10.1節, 第2.6.2節を参照せよ.

ゆえに,

$$\log(2 \sin \pi x) = -(\zeta_s(0, x) + \zeta_s(0, 1-x)) \quad (0 < x < 1).$$

この成立を数値計算で確認してみよう.

```
In [12]: 1 logsine(r,x) = -logGamma(r,x) + (-1)^r*logGamma(r,1-x)
2 logsine(1, 0.3), log(2sin(0.3π))
```

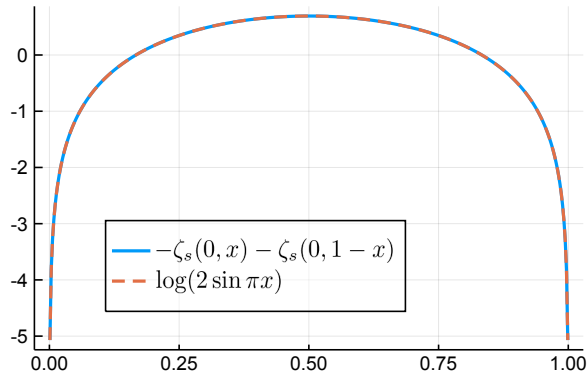
Out[12]: (0.481211774982512, 0.48121182505960347)

```

In [13]: 1 function plot_logsine1(; x=range(0.001, 0.999, length=400), l=:bottom, figsize=(400,250))
2         plot(size=figsize)
3         plot!(legend=l, legendfontsize=10)
4         plot!(x, logsine.(1,x), label=L"\zeta_s(0,x)-\zeta_s(0,1-x)", lw=2)
5         plot!(x, @.(log(2sin(pi*x))), label=L"\log(2\sin\pi x)", lw=2, ls=:dash)
6     end
7
8     plot_logsine1()

```

Out[13]:



ぴったり一致している。

$\log(2 \sin \pi x)$  については次が成立することも知られている:

$$\int_0^1 \log(2 \sin \pi x) dx = 0.$$

この公式は次と同値である:

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

```

In [14]: 1 value, error = quadgk(x -> log(2sin(pi*x)), 0, 1)
2         @show value, error;

```

```
(value, error) = (1.4675760606763788e-15, 1.9614816116706072e-16)
```

数値積分によっても積分の値はほぼ 0 になっている。

## 4 周期的Bernoulli多項式のFourier展開

Bernoulli多項式  $B_r(x)$  の  $0 < x < 1$  における値については以下が知られている。

$r$  が偶数のとき

$$B_r(x) = -(-1)^{r/2} 2r! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

$r$  が奇数のとき

$$B_r(x) = -(-1)^{(r-1)/2} 2r! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

これらの公式の証明については

- <https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb>  
(<https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb>)
- <https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/12%20Fourier%20analysis.pdf>  
(<https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/12%20Fourier%20analysis.pdf>)

の第6.3.3節または

- <http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/13%20Euler-Maclaurin%20summation%20formula.ipynb> (<http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/13%20Euler-Maclaurin%20summation%20formula.ipynb>)
- <https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/13%20Euler-Maclaurin%20summation%20formula.pdf> (<https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/13%20Euler-Maclaurin%20summation%20formula.pdf>)

の第1.5節を参照せよ。

```
In [15]: 1 function FourierB(r, x; N=50)
2         if iseven(r)
3             -(-1)^(r÷2) * 2*gamma(r+1)*sum(cos(2π*n*x)/(2π*n)^r for n in 1:N)
4         else
5             -(-1)^((r-1)÷2)*2*gamma(r+1)*sum(sin(2π*n*x)/(2π*n)^r for n in 1:N)
6         end
7     end
```

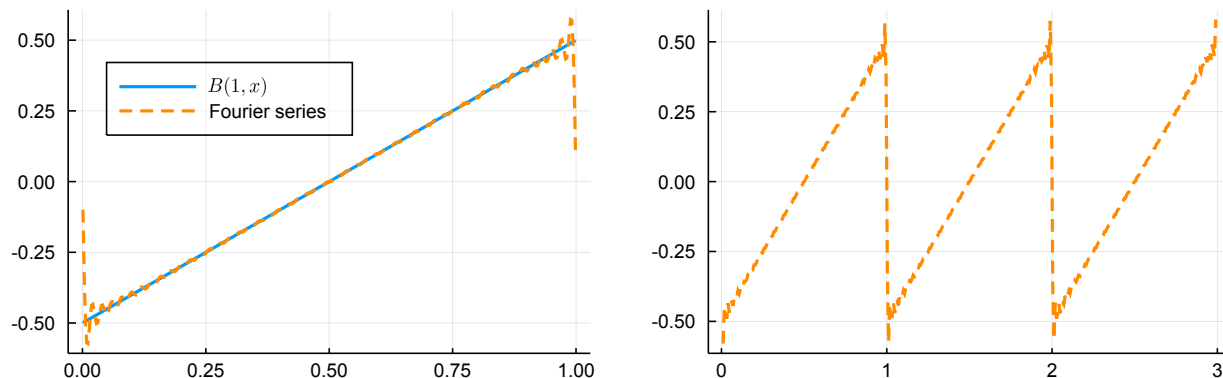
Out[15]: FourierB (generic function with 1 method)

```
In [16]: 1 function plot_FourierBernoulli(r;
2         N = 50,
3         x1 = range(0.001, 0.999, length=400), l1 = :topleft,
4         x2 = range(0.01, 2.99, length=400), l2 = :topleft,
5         figsize = (800, 250))
6
7     x = x1
8     P1 = plot(legend=l1, legendfontsize=8)
9     plot!(x, fBernoulli.(r,x), label="\$B(\$r,x)\$", lw=2)
10    plot!(x, FourierB.(r,x; N=N), label="Fourier series", lw=2, ls=:dash, lc=:darkorange)
11
12    x = x2
13    P2 = plot(legend=l2, legendfontsize=8)
14    plot!(x, FourierB.(r,x; N=N), label="", lw=2, ls=:dash, lc=:darkorange)
15
16    plot(P1, P2, size=figsize)
17 end
```

Out[16]: plot\_FourierBernoulli (generic function with 1 method)

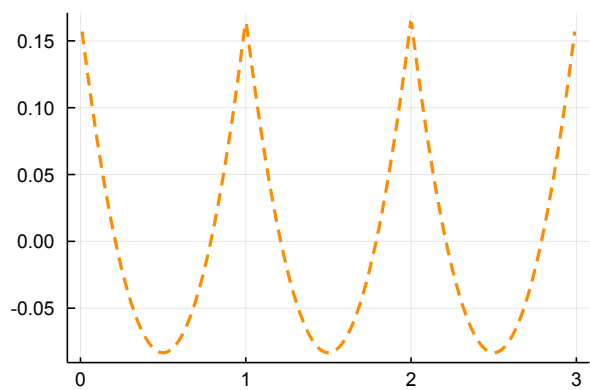
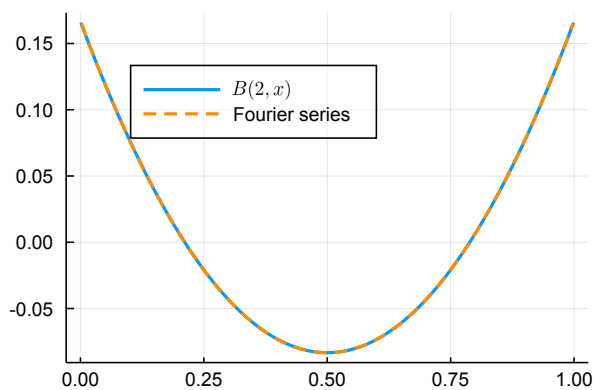
```
In [17]: 1 plot_FourierBernoulli(1)
```

Out[17]:



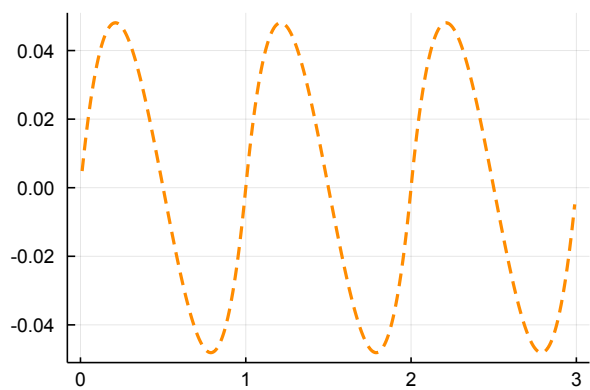
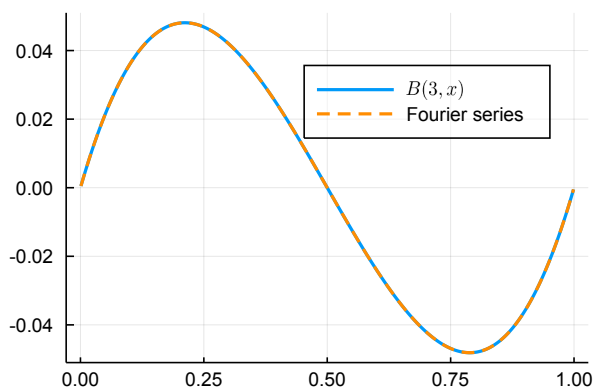
```
In [18]: 1 plot_FourierBernoulli(2; l1=:top)
```

Out[18]:



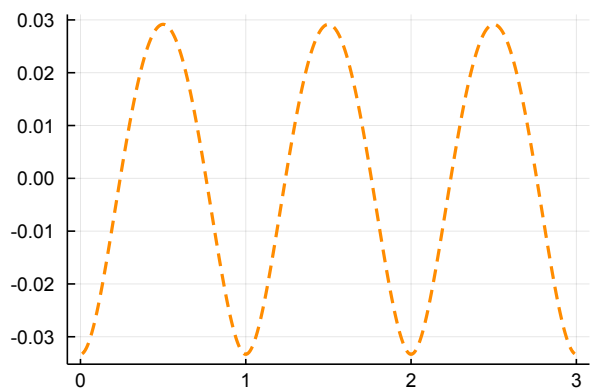
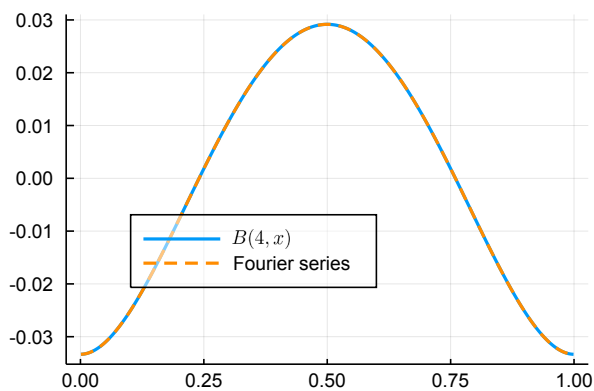
```
In [19]: 1 plot_FourierBernoulli(3; l1=:topright)
```

Out[19]:



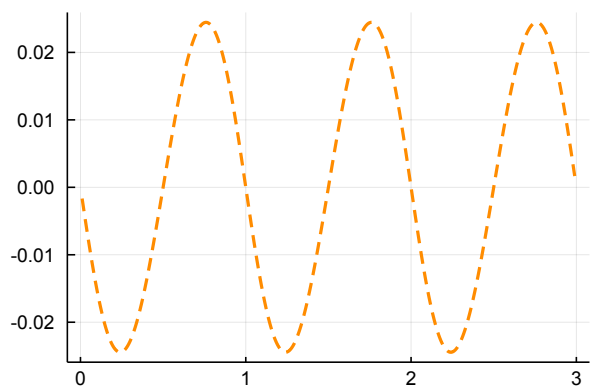
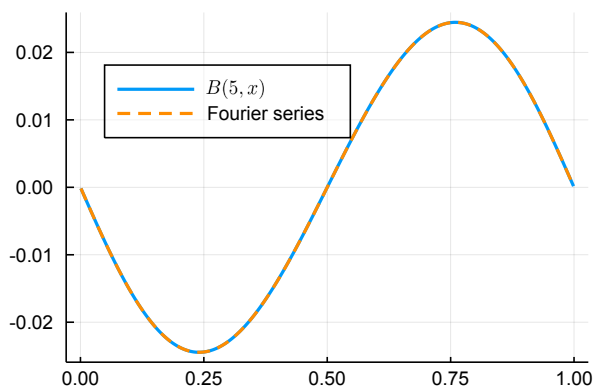
```
In [20]: 1 plot_FourierBernoulli(4; l1=:bottom)
```

Out[20]:



```
In [21]: 1 plot_FourierBernoulli(5)
```

Out[21]:



## 5 Milnor型対数多重正弦函数のFourier展開

Milnor型の対数多重正弦函数  $\log S_r^M(x)$  を

$$\log S_r^M(x) = -\zeta_s(1-r, x) + (-1)^r \zeta_s(1-r, 1-x)$$

と定義する. ここで  $\zeta_s(s, x)$  はHurwitzのゼータ函数の  $s$  に関する偏導函数を表す.

$\log S_r^M(x)$  の  $0 < x < 1$  における値については以下が知られている.

$r$  が偶数のとき

$$\log S_r^M(x) = (-1)^{r/2} 2\pi(r-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

$r$  が奇数のとき

$$\log S_r^M(x) = -(-1)^{(r-1)/2} 2\pi(r-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

以上の公式を数値的に確認しよう.

```
In [22]: 1 function Fourierlogsine(r, x; N=50)
2         if iseven(r)
3             (-1)^(r÷2) * 2π*gamma(r)*sum(sin(2π*n*x)/(2π*n)^r for n in 1:N)
4         else
5             -(-1)^((r-1)÷2)*2π*gamma(r)*sum(cos(2π*n*x)/(2π*n)^r for n in 1:N)
6         end
7     end
```

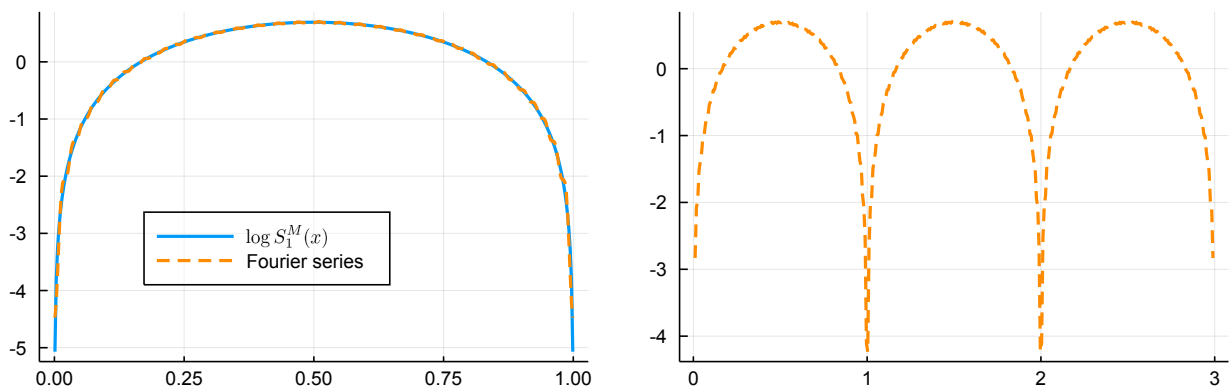
Out[22]: Fourierlogsine (generic function with 1 method)

```
In [23]: 1 function plot_Fourierlogsine(r;
2         N = 50,
3         x1 = range(0.001, 0.999, length=400), l1 = :topleft,
4         x2 = range(0.01, 2.99, length=400), l2 = :topleft,
5         figsize = (800, 250))
6
7     x = x1
8     P1 = plot(legend=l1, legendfontsize=8)
9     plot!(x, logsine.(r,x), label="\$\\log S^M_{\$r}(x)\$", lw=2)
10    plot!(x, Fourierlogsine.(r,x; N=N), label="Fourier series", lw=2, ls=:dash, lc=:darkorange)
11
12    x = x2
13    P2 = plot(legend=l2, legendfontsize=8)
14    plot!(x, Fourierlogsine.(r,x; N=N), label="", lw=2, ls=:dash, lc=:darkorange)
15
16    plot(P1, P2, size=figsize)
17 end
```

Out[23]: plot\_Fourierlogsine (generic function with 1 method)

```
In [24]: 1 plot_Fourierlogsine(1; l1=:bottom)
```

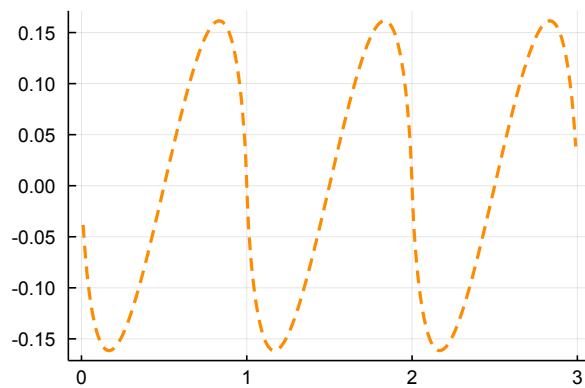
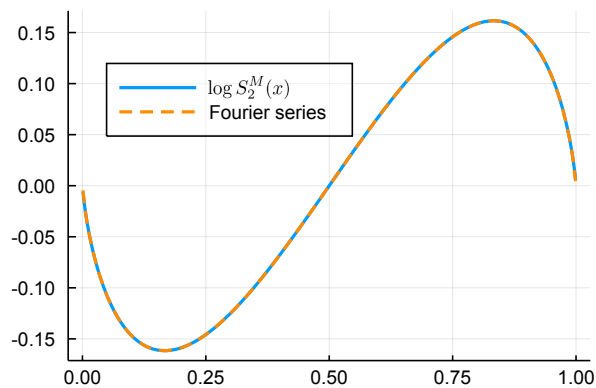
Out[24]:





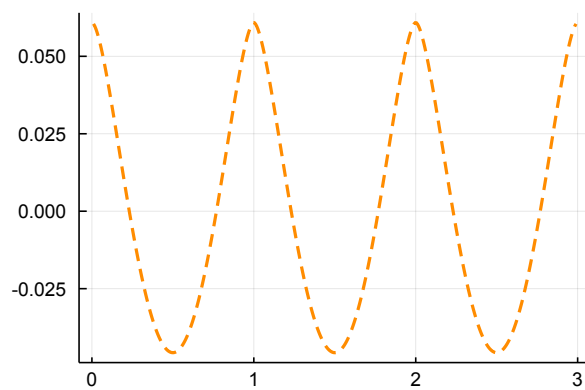
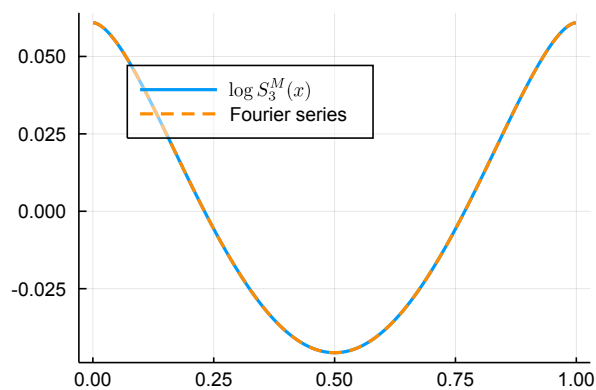
In [25]: 1 `plot_Fourierlogsine(2)`

Out[25]:



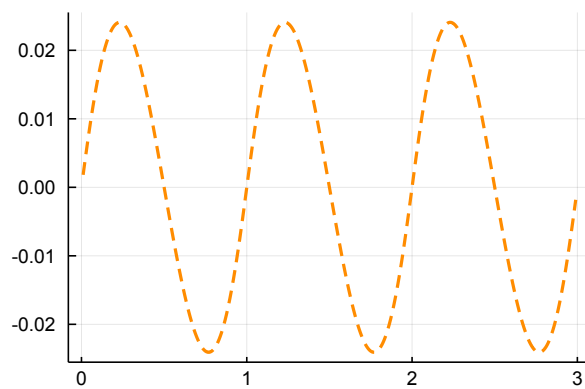
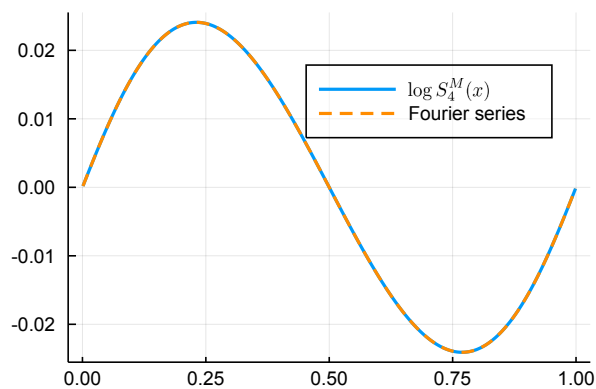
In [26]: 1 `plot_Fourierlogsine(3; l1=:top)`

Out[26]:



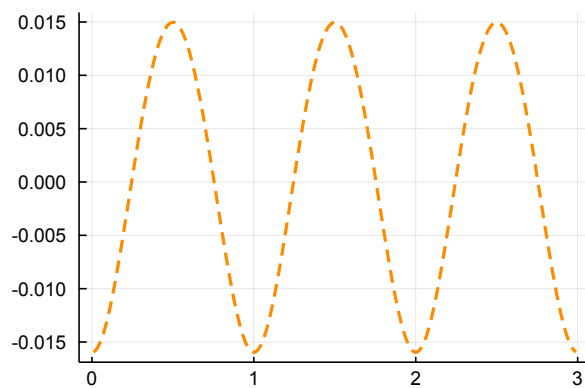
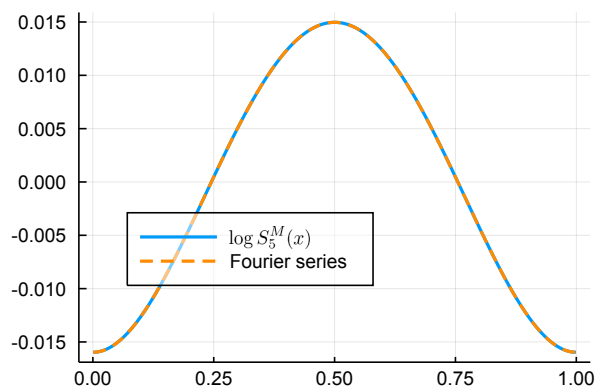
In [27]: 1 `plot_Fourierlogsine(4; l1=:topright)`

Out[27]:



In [28]: 1 `plot_Fourierlogsine(5; l1=:bottom)`

Out[28]:



## 6 解説

### 6.1 簡単な解説

以上で使ったFourier級数展開の公式は次のHurwitzの函数等式を用いて筆者自身が導出した公式である(widely known):

$$\zeta(1-s, x) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left( e^{-\pi i s/2} \operatorname{Li}_s(e^{2\pi i x}) + e^{\pi i s/2} \operatorname{Li}_s(e^{-2\pi i x}) \right) \quad (\operatorname{Re} s > 0, 0 < x < 1).$$

ここで  $\operatorname{Li}_s(z)$  は多重対数函数(polylogarithm)である:

$$\operatorname{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}.$$

上のような公式の導出では符号や係数の細かい部分をよく間違ふ。しかし、以下のように実際に数値計算してみても一致していることを確認できれば、自分で導出した公式の正しさに自信を持てるようになる。人間は証明をよく間違えるので、可能ならば、単に証明によって正しさを確認するだけではなく、数値計算によってもその「正しさ」を確認しておくべきだと思う。数値計算やその結果のプロットによって理解が深まることが多い。

Milnor型の多重対数正弦函数に関する公式を得るためには、Hurwitzの函数等式の両辺を  $s$  で偏微分して、 $s$  に 0 以下の整数  $1-r$  を代入する必要がある。Milnor型の多重対数正弦函数に関する公式を得るために  $-\zeta(1-r, x)$  と  $(-1)^r \zeta(1-r, 1-x)$  の和を計算すると、符号  $(-1)^r$  をうまく働いて複雑な項がすべてキャンセルして消えて、上で言及したシンプルな公式が得られるという仕組みになっている。

上のHurwitzの函数等式の導出のラフな解説が

- <https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb>  
(<https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb>)
- <https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/12%20Fourier%20analysis.pdf>  
(<https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/12%20Fourier%20analysis.pdf>)

の第6.3節にある。そこでは、Hurwitzのゼータ函数と多重対数函数の両方の一般化になっているLerchの超越函数(レルヒの超越函数)

$$L(\tau, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{(x+k)^s}$$

を扱っている。Hurwitzの函数等式ではHurwitzのゼータ函数以外に多重対数函数も必要になるが、Lerchの超越函数であればその範囲内で  $s \leftrightarrow 1-s$  に関する函数等式を閉じた形で書ける。

### 6.2 Milnor型対数多重正弦函数のFourier展開公式の証明

Milnor型の対数多重正弦函数  $\log S_r^M(x)$  は

$$\log S_r^M(x) = -\zeta_s(1-r, x) + (-1)^r \zeta_s(1-r, 1-x)$$

と定義されたのであった。

**定理:**  $0 < x < 1, r = 1, 2, 3, \dots$  のとき,

$$\log S_r^M(x) = -\pi i \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} \left( \operatorname{Li}_r(e^{2\pi i x}) - (-1)^r \operatorname{Li}_r(e^{-2\pi i x}) \right).$$

**注意:** 次の結果と比較せよ:  $0 < x < 1, r = 1, 2, 3, \dots$  のとき,

$$\zeta(1-r, x) = \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} \left( \operatorname{Li}_r(e^{2\pi i x}) + (-1)^r \operatorname{Li}_r(e^{-2\pi i x}) \right) = (r-1)! \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i n x}}{(2\pi i)^r}.$$

真ん中の符号の違いに注目せよ。

**上の定理の証明:** このノートではHurwitzのゼータ函数の函数等式

$$\zeta(1-s, x) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left( e^{-\pi i s/2} \operatorname{Li}_s(e^{2\pi i x}) + e^{\pi i s/2} \operatorname{Li}_s(e^{-2\pi i x}) \right) \quad (s > 0, 0 < x < 1).$$

を認めて使うことにする。この公式の両辺を  $s$  で偏微分すると、 $\Gamma'(s) = \Gamma(s)\psi(s)$  (digamma函数  $\psi(s)$  の定義)と  $d(2\pi)^{-s}/ds = (2\pi)^{-s}(-\log(2\pi))$  より、 $f(s, z) = \partial \operatorname{Li}_s(z)/\partial s$  とおくと、 $0 < x < 1$  のとき,

$$\begin{aligned}
-\zeta_s(1-s, x) &= \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} (\psi(s) - \log(2\pi)) (e^{-\pi i s/2} \operatorname{Li}_s(e^{2\pi i x}) + e^{\pi i s/2} \operatorname{Li}_s(e^{-2\pi i x})) \\
&+ \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} (e^{-\pi i s/2} f(s, e^{2\pi i x}) + e^{\pi i s/2} f(s, e^{-2\pi i x})) \\
&+ \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left( -\frac{\pi i}{2} e^{-\pi i s/2} \operatorname{Li}_s(e^{2\pi i x}) + \frac{\pi i}{2} e^{\pi i s/2} \operatorname{Li}_s(e^{-2\pi i x}) \right).
\end{aligned}$$

ゆえに,  $0 < x < 1$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$  について,

$$\begin{aligned}
-\zeta_s(1-r, x) &= \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (\psi(r) - \log(2\pi)) (\operatorname{Li}_r(e^{2\pi i x}) + (-1)^r \operatorname{Li}_r(e^{-2\pi i x})) \\
&+ \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (f(r, e^{2\pi i x}) + (-1)^r f(r, e^{-2\pi i x})) \\
&- \frac{\pi i}{2} \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (\operatorname{Li}_s(e^{2\pi i x}) - (-1)^r \operatorname{Li}_s(e^{-2\pi i x})).
\end{aligned}$$

さらに,  $0 < x < 1$  のとき,  $0 < 1-x < 1$  でもあるので,

$$\begin{aligned}
-\zeta_s(1-r, x) &= \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (\psi(r) - \log(2\pi)) (\operatorname{Li}_r(e^{-2\pi i x}) + (-1)^r \operatorname{Li}_r(e^{2\pi i x})) \\
&+ \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (f(r, e^{-2\pi i x}) + (-1)^r f(r, e^{2\pi i x})) \\
&- \frac{\pi i}{2} \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (\operatorname{Li}_s(e^{-2\pi i x}) - (-1)^r \operatorname{Li}_s(e^{2\pi i x})).
\end{aligned}$$

後者に  $(-1)^r$  をかけて前者から引くと, それぞれの1段目と2段目の項はキャンセルして消え, 前者の3段目の項の2倍が残る:

$$-\zeta(1-r, x) + (-1)^r \zeta(1-r, 1-x) = -\pi i \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (\operatorname{Li}_s(e^{-2\pi i x}) - (-1)^r \operatorname{Li}_s(e^{2\pi i x})).$$

これの左辺は  $\log S_r^N(x)$  の定義式なので示すべきことが示された. q.e.d.

系:  $r$  が正の偶数のとき

$$\log S_r^M(x) = (-1)^{r/2} 2\pi(r-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

$r$  が正の奇数のとき

$$\log S_r^M(x) = -(-1)^{(r-1)/2} 2\pi(r-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

注意: 上の結果を以下の結果と比較せよ:  $r$  が正の偶数のとき

$$B_r(x) = -(-1)^{r/2} 2r! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

$r$  が正の奇数のとき

$$B_r(x) = -(-1)^{(r-1)/2} 2r! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

$r$  が偶数のとき, 上では  $\sin$  だったが, こちらでは  $\cos$  になっており,  $r$  が奇数のとき, 上では  $\cos$  だったが, こちらでは  $\sin$  になっている。したがって, Bernoulli多項式の  $0 < x < 1$  での値とMilnor型対数多重正弦函数の  $0 < x < 1$  での値を合わせると,  $r = 1, 2, 3, \dots$  に対する

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^r}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n^r}$$

の形のFourier級数のすべてが出て来ることがわかる。要するにHurwitzのゼータ函数は  $s$  を0以下の整数の場合の値と偏微分係数の形でこれらのFourier級数をすべて含んでいるとみなされる。これらのFourier級数はFourier級数の例として基本的である。この意味でFourier級数論という観点から見ても, Hurwitzのゼータ函数は教育的な例になっていると考えられる。

上の系の証明:  $0 < x < 1$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$  と仮定する。上の定理で

$$\log S_r^M(x) = -\pi i \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (\text{Li}_r(e^{2\pi i x}) - (-1)^r \text{Li}_r(e^{-2\pi i x}))$$

を示した. 多重対数函数は  $\text{Li}_r(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^r}$  と定義されたのであった.

$r$  が偶数のとき,

$$\begin{aligned} \log S_r^M(x) &= -\pi i \frac{(r-1)!}{(2\pi)^r (-1)^{r/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i x} - e^{-2\pi i x}}{n^r} \\ &= -\pi i \frac{(r-1)!}{(2\pi)^r (-1)^{r/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i \sin(2\pi n x)}{n^r} \\ &= (-1)^{r/2} 2\pi (r-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{(2\pi n)^r}. \end{aligned}$$

$r$  が奇数のとき,

$$\begin{aligned} \log S_r^M(x) &= -\pi \frac{(r-1)!}{(2\pi)^r (-1)^{(r-1)/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i x} + e^{-2\pi i x}}{n^r} \\ &= -\pi \frac{(r-1)!}{(2\pi)^r (-1)^{(r-1)/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos(2\pi n x)}{n^r} \\ &= -(-1)^{(r-1)/2} 2\pi (r-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{(2\pi n)^r}. \end{aligned}$$

これで示すべきことが示された. q.e.d.