黒木玄 Gen Kuroki
@genkuroki

ツイッターの方では何度も繰り返し紹介したのですが、極限を求める問題の教育的出し方で非常に感心したのは添付画像の問題。確率論を知っていればどの極限もすぐに求まる。 mathtod.online/media/FO7uaK-gu…

(2) $$\frac{1}{2^n}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\left(\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{\sqrt{n}}\right)^q dx_1dx_2\cdots dx_n$$

(3) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k(1-a)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(4) $$\frac{1}{\Omega_n}\int_{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2=n} f(x_1)d\sigma_n$$

ただし，$d\sigma_n$ は球面 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n$ の面要素，Ω_n は表面積．

(5) $$\frac{1}{n}\log\left\{\sum_{an<k<bn}\binom{n}{k}\right\} \qquad (0 \leqq a < b \leqq 1)$$

(6) $$\iint\cdots\int_{-1<x_1,x_2,\cdots,x_n<1} dx_1dx_2\cdots dx_n$$

2017年04月29日 11:45 · Web · 0 · 3 · Webで開く

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on Apr 29
確率論を知っていたら容易な問題のもとネタ もっと見る

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on Apr 29
(5)だけ、もとネタをばらしてしまいます。$0<a<b<1$ と仮定する。次の量の $n\to\infty$ での極限を求めよ。

$$\frac{1}{n}\log\left(\sum_{a\leqq k/n\leqq b}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\right).$$

解説：これは本質的に「確率の対数」なので相対エントロピー(Kullback-Leibler情報量の-1)です(「場合の数の対数」が「相対」ではないエントロピー)。これがもとネタです。

しかし、そういうことを全然知らなくても、確率に関する健全な直観があれば正しい答えを大学入試レベルの数学で求めることができます。

場合分けが必要になります。

続く。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on Apr 29

$a \leqq 1/2 \leqq b$ の場合には、大数の法則より、極限に寄与するのは $k/n \sim 1/2$ の項だけになり、求めたい極限は

$$\frac{1}{2m}\log\left(\binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}}\right)$$

の $m \to \infty$ での極限に一致します。だからStirlingの公式、Wallisの公式、区分求積法のどれかを使えば計算できます。

続く

mathtod.online powered by Mastodon