

集中講義

「表現論特選」

「代数解析学特論（修）」

「多様体論特殊講義 D I（博）」

岩木 耕平 講師
(名古屋大学 助教)

* 期間：

6月 6日（火）～ 6月 9日（金）

* 時間：

15：00～18：00

* 講義題目：「完全WKB解析入門」

* 内容： 完全WKB解析による複素領域上で定義された常微分方程式
(Schrödinger 方程式や Painlevé 方程式など) へのアプローチを解説する。また、完全WKB解析とクラスター代数との関係、
Gaiotto-Moore-Neitzke のスペクトルネットワークや
Eynard-Orantin の位相的漸化式との関連などについても（時間が許せば）解説したい。

* 談話会： 6月 5日（月）16：00～

「完全WKB解析とその周辺」

* 場所： 川井ホール

参考文献

河合・竹井 特異振動の代数解析学 1998 岩波

予定

1. WKB 解
2. Borel 総和法と Stokes グラフ
3. Voros 接続公式 (+ モノドロミーの計算例) ← 6/7 (明日)
4. クラスター代数との関係 6/8
5. その他 (位相的漸化式 → Painlevé 方程式) ← 6/9 未定

1. WKB 解

$$(E) \quad \left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x) \right) \psi = 0 \quad \begin{cases} \hbar : \text{小さなパラメータ} \\ Q(x) : \text{有理関数} \end{cases}$$

Riemann 面上の設定まで一般化できるが、簡単のためこの設定でやる。

$$\psi = \exp\left(\int^x P(x', \hbar) dx'\right) \text{ とする,}$$

$$P = P(x, \hbar) \text{ は Riccati 方程式 } \hbar^2 \left(\frac{dP}{dx} + P^2 \right) = Q(x) \text{ を満たす,}$$

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^{n-1} P_n(x) = \frac{1}{\hbar} P_0(x) + P_1(x) + \hbar P_2(x) + \dots \text{ を代入する,}$$

$$\hbar^2 P^2 = P_0^2 + \hbar \cdot 2P_0 P_1 + \hbar^2 (2P_0 P_2 + P_1^2) + \dots$$

$$\hbar^2 \frac{dP}{dx} = \hbar \frac{dP_0}{dx} + \hbar^2 \frac{dP_1}{dx} + \dots$$

これより, 次の漸化式が得られる:

$$P_0^2 = Q(x), \quad \therefore P_0 = P_0^{(\pm)} = \pm \sqrt{Q(x)}$$

$$2P_0 P_1 + \frac{dP_0}{dx} = 0, \quad \therefore P_1^{(\pm)} = -\frac{1}{2P_0^{(\pm)}} \frac{dP_0^{(\pm)}}{dx} = -\frac{1}{4} \frac{Q'(x)}{Q(x)}$$

$$2P_0^{(\pm)} P_{n+1}^{(\pm)} + \sum_{\substack{n_1+n_2=n+1 \\ n_i \geq 1}} P_{n_1}^{(\pm)} P_{n_2}^{(\pm)} + \frac{dP_n^{(\pm)}}{dx} = 0 \quad (n \geq 1)$$

このようにして, Riccati 方程式の2つの解が得られる:

$$P_{\pm}(x, \hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^{n-1} P_n^{(\pm)}(x).$$

(注) $P_{\pm}(x, \hbar)$ の各係数は \swarrow スペクトル曲線 と呼ぶ。

$\sqrt{Q(x)}$ の Riemann 面 $\Sigma = \{(x, y) \mid y^2 = Q(x)\}$ 上の関数とみなされる。

$\int^x P(x', \hbar) dx'$ の積分路は Σ 上の経路にとる必要がある。

以上は \hbar に関する形式 Laurent 級数解。

レポート問題 1

(1-3)

① Airy 方程式 $(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - x) \psi = 0$ ($Q(x) = x$) の場合に

$P_{\pm}(x, \hbar)$ の展開の最初の 5 項を求めよ。

② $P_j^{(\pm)}(x) = a_j^{(\pm)} \cdot x^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}j}$, $a_j^{(\pm)} \in \mathbb{Q}$ と書けることを示し、

さらに、ある定数 $C, r > 0$ が存在して、

$$|a_j^{(\pm)}| \leq C r^j j! \quad \text{が成立することを示せ。}$$

(注) $j!$ が出て来るので通常の意味では収束しない、形式解!

□

質問 $Q(x) = x^2$ のときは?

回答 Hermite-Weber $Q(x) = x^2 - E$ の $E = 0$ の場合なので...

$Q(x) = x^2 - \hbar \frac{1}{4x^2}$ のようなケースで漸化式が与えられるケース...

補題 (1) $P_n^{(\pm)}(x)$ は $Q(x)$ の零点 (変換点) と極を除いて正則になる。
(ただし、2 価になる。 Σ 上 1 価。)

(2) $P_{\text{odd}}(x, \hbar) := \frac{1}{2}(P_+(x, \hbar) - P_-(x, \hbar))$, $P_{\text{even}}(x, \hbar) := \frac{1}{2}(P_+(x, \hbar) + P_-(x, \hbar))$ とおく、

つまり、 $P_{\pm} = P_{\text{even}} \pm P_{\text{odd}}$ 。このとき、

$$P_{\text{even}}(x, \hbar) = -\frac{1}{2} \frac{1}{P_{\text{odd}}(x, \hbar)} \frac{dP_{\text{odd}}(x, \hbar)}{dx}.$$

(\because) $P_{\pm} = \pm P_{\text{odd}} + P_{\text{even}}$ を Riccati 方程式に代入すると、

$$\hbar^2 \left(\pm \frac{dP_{\text{odd}}}{dx} + \frac{dP_{\text{even}}}{dx} + P_{\text{odd}}^2 + P_{\text{even}}^2 \pm 2P_{\text{odd}}P_{\text{even}} \right) = Q(x) \quad \leftarrow \text{この2つの等式の差をとる。}$$

これらの和は 0 になる。

□

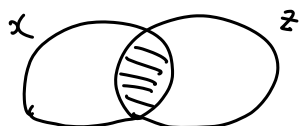
(注) $n: \text{odd} \Rightarrow P_n^{(+)} = P_n^{(-)}$, $n: \text{even} \Rightarrow P_n^{(+)} = -P_n^{(-)}$

したがって, (E) の 2 つの形式解が得られる:

$$\begin{aligned}\Psi_{\pm}(x, \hbar) &= \exp\left(\int^x P_{\pm}(x', \hbar) dx'\right) = \exp\left(\pm \int^x P_{\text{odd}}(x', \hbar) dx' - \frac{1}{2} \log P_{\text{odd}}(x, \hbar)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{P_{\text{odd}}(x, \hbar)}} \exp\left(\pm \int^x P_{\text{odd}}(x', \hbar) dx'\right).\end{aligned}$$

以下, この形の形式解を WKB 解 と呼ぶことにする.

レポート問題 2 (座標変換性)



$x = x(z)$, 正則な座標変換.

① $\tilde{\Psi}(z, \hbar) := \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{2}} \Psi(x(z), \hbar)$ は次の (\tilde{E}) を満たすことを示せ:

$$(\tilde{E}) \quad \left(\hbar^2 \frac{d^2}{dz^2} - \tilde{Q}(z)\right) \tilde{\Psi} = 0.$$

ここで,

$$\tilde{Q}(z) := \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 Q(x(z)) - \frac{\hbar^2}{2} \{x(z); z\},$$

$$\{x(z); z\} = \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2} \left(\frac{x''}{x'}\right)^2, \quad \text{Schwarz 微分} \quad (' = \frac{d}{dz}),$$

② $\tilde{P}_{\pm}(z, \hbar)$ を (\tilde{E}) から定まる Riccati 方程式の形式解とする. このとき, 次を示せ:

$$\tilde{P}_{\pm}(z, \hbar) = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) P_{\pm}(x(z), \hbar) - \frac{1}{2} [x(z); z], \quad [x(z); z] = \frac{x''(z)}{x'(z)},$$

特に $\tilde{P}_{\text{odd}}(z, \hbar) = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) P_{\text{odd}}(x(z), \hbar)$ が成立する. P_{odd} は 1-form の変換性を持つ, \square

言の順番がこうとアレかもしれないが、

(1-5)

WKB 解は次のように書き直せる (形式級数の変形):

$$\psi_{\pm}(x, \hbar) = \exp\left(\pm \frac{1}{\hbar} \int^x \sqrt{Q(x)} dx\right) \times \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^{n+\frac{1}{2}} \psi_n^{(\pm)}(x)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{!} \exp\left(\int^x P_{\text{odd}} dx\right) &= \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int^x P_0 dx + \hbar \int^x P_2 dx + \hbar^3 \int^x P_4 dx + \dots\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int^x P_0 dx\right) \underbrace{\exp\left(\hbar \int^x P_2 dx + \hbar^3 \int^x P_4 dx + \dots\right)}_{\text{ここを } \hbar \text{ について展開する}} \end{aligned}$$

$P_0 = \pm \sqrt{Q(x)}$

$$= \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int^x P_0 dx\right) \left(1 + \hbar \int^x P_2 dx + \frac{\hbar^2}{2} \left(\int^x P_2 dx\right)^2 + \dots\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{P_{\text{odd}}}} = \left(\frac{1}{\hbar} P_0 + \hbar P_2 + \hbar^3 P_4 + \dots\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\hbar^{1/2}}{\sqrt{P_0}} \left(1 + \hbar^2 \frac{P_2}{P_0} + \dots\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad \square$$

ただし, WKB は一般に発散する:

$\forall K: \text{compact}, \subset \mathbb{C} \setminus \{Q(x) \text{ の零点と極}\}, \exists C, r > 0 \text{ s.t.}$

Airy の場合が
レポート問題

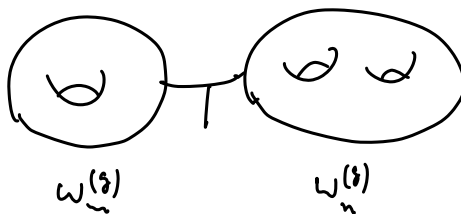
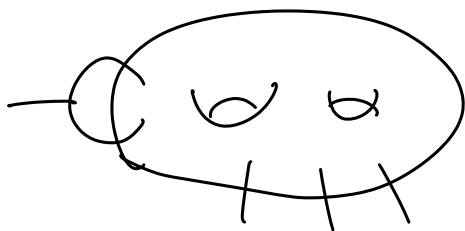
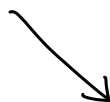
$$\sup_{x \in K} |\psi_n^{(\pm)}(x)| \leq C r^n n! \quad \text{程度の評価しか得られない,}$$

そこで Borel 総和法により, ψ_{\pm} に “解析的実現” を与える

余談

昨日

1-6



2. Borel 総和法 と Stokes グラフ

E. Borel より前から使われていた

(1-7)

(Laplace 変換) \circ (項列の逆 Laplace 変換) = (Borel 総和)

$$f(h) = \exp\left(\frac{\omega}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} f_n h^{n+\alpha} : \text{指数項を持つ形式級数}, \quad \alpha, \omega, f_n \in \mathbb{C}.$$

クラスター代数を扱うときに役に立つように Borel 和を modify する

定義 $\theta \in \mathbb{R}$ ("方向") を固定する

$f(h)$ が θ 方向に Borel 総和可能であるとは以下の条件が成立していることである:

$$(1) \quad f_B(y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Gamma(n+\alpha)} (y+\omega)^{n+\alpha-1}$$

は $y = -\omega$ の近傍で収束している.

f_B は f の Borel 変換 と呼ばれ,

(本質的なのは以下の2つの条件)

Remark ($\operatorname{Re} \alpha > 0$) \leftarrow (δ 函数と等しい $\alpha=0$ のとき)

$$e^{\frac{\omega}{h}} h^{n+\alpha} = \int_{l_\theta} e^{-\frac{y}{h}} \frac{(y+\omega)^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)} dy$$

$$l_\theta = \mathbb{R}_{\geq 0} e^{i\theta} - \omega \quad \begin{array}{c} l_\theta \nearrow \\ \searrow \theta \end{array}$$

(2) $f_B(y)$ が $l_\theta = \{-\omega + re^{i\theta} \mid r \geq 0\}$ を含むある領域 D に解析接続される,

(3) ある $C_1, C_2 > 0$ が存在して, D 上で

$$|f_B(y)| \leq C_1 e^{C_2 |y|}, \quad \leftarrow \text{Laplace 積分が意味を持つ.}$$

□

f が θ 方向に Borel 総和可能であるならば, $\exists \varepsilon > 0$ が存在して,

$$\mathcal{S}_\theta[f] := \int_{l_\theta} e^{-\frac{y}{h}} f_B(y) dy$$

は $\Omega_\theta = \{h \in \mathbb{C}^\times \mid |\arg h - \theta| < \frac{\pi}{2}, |h| < \varepsilon\}$ 上で正則.

この $\mathcal{S}_\theta[f]$ は f の θ 方向の Borel sum と呼ばれ,

$\left\{ \begin{array}{l} \theta \text{ を変えると Borel 和がジャンプすることがある Stokes 現象,} \\ \text{クラスター代数, かいこえ公式, ...} \end{array} \right.$

f が θ 方向に Borel 総和可能 交らば

$$\mathcal{S}_\theta[f](h) \underset[h \rightarrow 0]{h \in \Omega_\theta} \sim f(h) : \text{漸近展開.}$$

すなわち, $\forall N \exists \delta > 0 \exists C > 0$ s.t.

$$\left| \frac{\mathcal{S}_\theta[f](h)}{e^{w/h, h^\alpha}} - \sum_{n=0}^N f_n h^n \right| \leq C |h|^{N+1} \quad (h \in \Omega_\theta, |h| < \delta),$$

(\because) Watson の補題, (c.f. 江沢 漸近解析 に書いている.). □

一般論だけ書いても意味がないので, 昨日も紹介した例を以てすけど,

例 $f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^{-n} h^{n+1} \quad (w=0, \alpha=1). \quad x \in \mathbb{C}^\times \text{ 正固定.}$ このとき,

$$f_B(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^{-n}}{\Gamma(1+n)} y^n = \frac{1}{1-y/x}, \text{ 収束. (条件(1)はOK)}$$

$\arg x = \theta_0$ とおく. $f_B(y)$ は $\theta \neq \theta_0 \pmod{2\pi}$ のとき θ 方向に解析接続できて, $y \rightarrow \infty$ で有界になる. (条件(2), (3)もOK!)

ゆえに, f は θ (≠ θ_0) 方向に Borel 総和可能である.

h 平面

$\Omega_{\theta_0 + \delta}$ において $\mathcal{S}_{\theta_0}[f] \sim f$.

$\Omega_{\theta_0 - \delta}$ において $\mathcal{S}_{\theta_0 - \delta}[f] \sim f$.

$\Omega_{\theta_0 - \delta} \cap \Omega_{\theta_0 + \delta}$ において 指数的に小さい.

$$\mathcal{S}_{\theta_0 - \delta}[f] - \mathcal{S}_{\theta_0 + \delta}[f] = \int_{\frac{x}{x}} e^{-\frac{y}{h}} \frac{1}{1-y/x} dy = -2\pi i x e^{-\frac{x}{h}}.$$

同じ漸近展開を持つが, 解析函数として異なる. その差をも計算できる

これは "Stokes 現象" と呼ばれている

Stokes 現象 \longleftrightarrow Borel 変換が持つ特異性

(上の例では $\frac{1}{1-y/x}$ の $y=x^2$ の特異性)

発散級数だからこそ、その Borel 変換は特異性を持ち、Stokes 現象をひきおこす、
 Borel 変換の特異性に対する解析が帰着していく、
 \leadsto Écalle の resurgence 理論 (Pham et al.) (発散級数だから Borel 変換の収束半径が有限になる)
 超特異解析のからの応用先!!!

Bernoulli 数

レポート問題 3

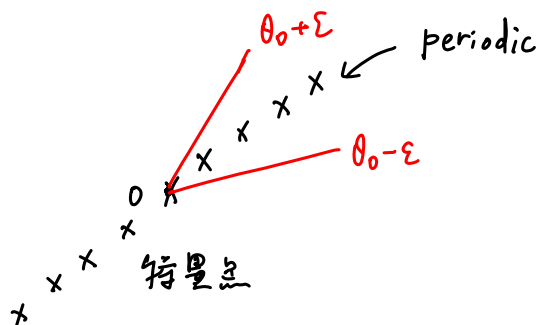
Weber 方程式から現われる

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{2n-1} \quad \left(\alpha \in \mathbb{C}, \frac{t}{e^t-1} = 1 - \frac{1}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} t^{2n}\right) \text{ とおく}$$

① Borel 変換 $f_B(y)$ の特異点をすべて求めよ、(無限個現れる) (periodic に現われる)

② $f_B(y)$ の各特異点 ω に対して、Borel 和のずれ

$$\mathcal{S}_{\theta_0-\varepsilon}[f] - \mathcal{S}_{\theta_0+\varepsilon}[f] \text{ を計算せよ、} (\theta_0 = \arg \omega).$$



□

Stokes グラフ

(E) $\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x)\right) \psi = 0$, (WKB 解) $\psi_{\text{WKB}} = \frac{1}{\sqrt{P_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int^x P_{\text{odd}} dx\right)$

方向 $\theta \in \mathbb{R}$ を固定しておく,

定義 • $Q(x)$ の零点 または 単極極 を (E) の ^{turning point} 変わり点 という,

ただし, $z = \frac{1}{x}$ と座標変換したとき,

ポテンシャル関数 $\tilde{Q}(z, \hbar)$ の主要項 $\tilde{Q}_0(z) = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 Q(x(z))$ が

$z=0$ に零点 または 単極極 を持つならば $x=\infty$ も (E) の変わり点と呼ぶことにする.

(一般の座標変換では Schwarz 微分に \hbar^2 がついてるのこの主要項だけを見て)
(定義すればいい,

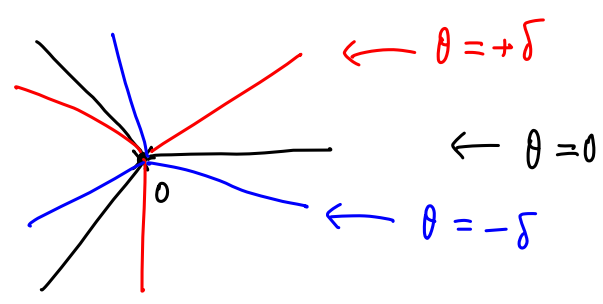
• v を変わり点とするとき,

$$\text{Im} \left(e^{-i\theta} \int_v^x \sqrt{Q(x')} dx' \right) = 0$$

で定まる実 1 次元の曲線を θ 方向の Stokes 曲線 という, □

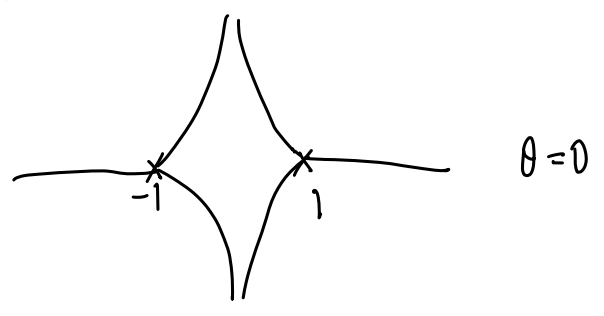
例 $Q(x) = x$ (A7ry) $\int_0^x \sqrt{x'} dx' = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$

x 平面



θ を変えると
Stokes グラフは回転する. □

例 $Q(x) = x^2 - 1$



□

例 $Q(x) = \frac{1}{x}$, $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2x^{\frac{1}{2}}$

(1-11)

x ————— $\theta = 0$
0

□

θ 方向の Stokes グラフとは

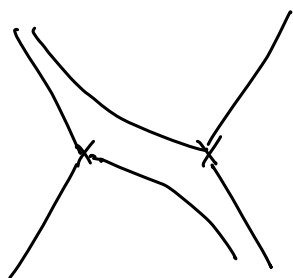
変わり点と θ 方向の Stokes 曲線がなすグラフ、

注 Stokes グラフは x 平面上で定義されている、

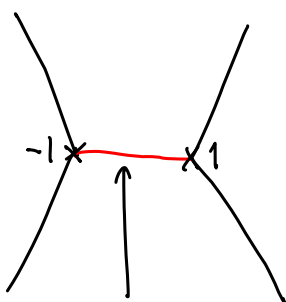
$\pm \sqrt{Q(x)}$ の符号は虚部が 0 という条件に関係しない、

例 $Q(x) = 1 - x^2$

$\theta = -\delta < 0$

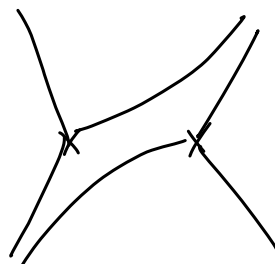


$\theta = 0$



Stokes segment の例

$\theta = +\delta > 0$

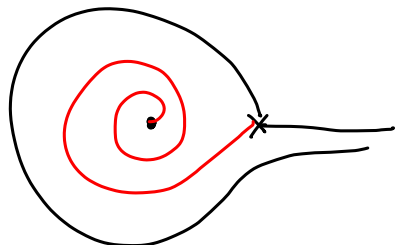


□

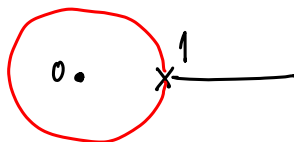
定義 変わり点というしを結ぶ Stokes 曲線のことを Stokes segment と呼ぶ。 □

例 $Q(x) = \frac{x-1}{x^2}$ ($x=0$ は確定特異点)

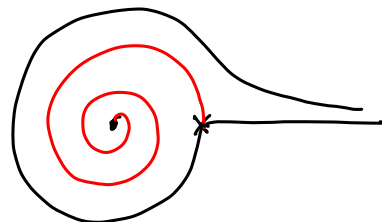
$\theta = -\delta < 0$



$\theta = 0$



$\theta = +\delta > 0$



定理 (Koike-Schäferke)

1-12

$$\text{WKB 解 } \psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{P_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_{x_0}^x P_{\text{odd}}(x'/h) dx'\right) \text{ は}$$

次の2条件がともに満たされると、

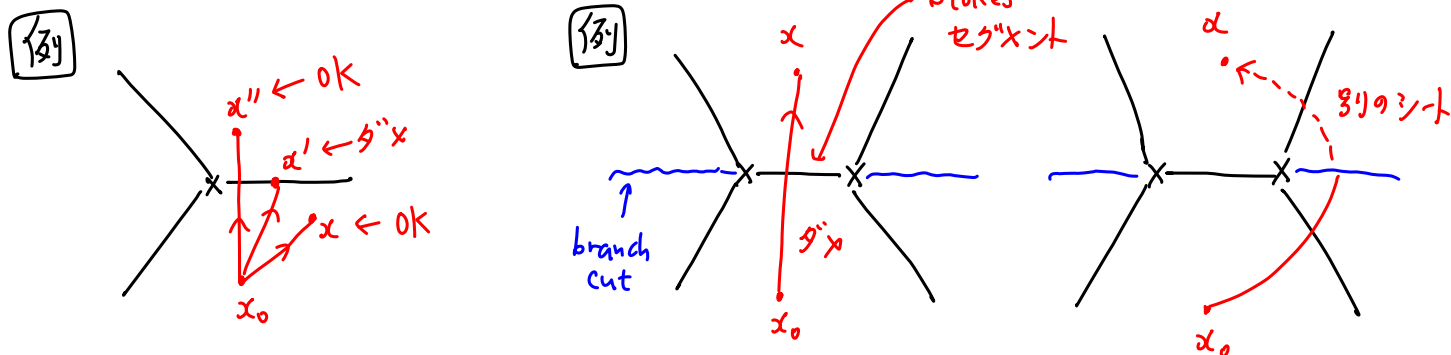
θ 方向に (右の形式組数として) Borel 総和可能、

$\pi: \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$, projection とすると、

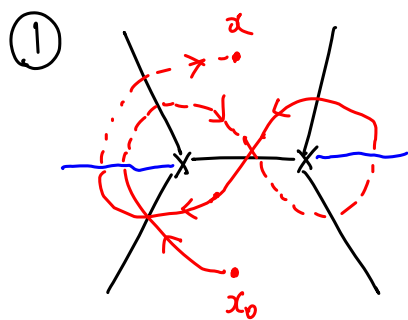
① $\pi(x_0)$, $\pi(x)$ は θ 方向の Stokes グラフ上にない、

② x_0 から x までの積分路を連続変形して、

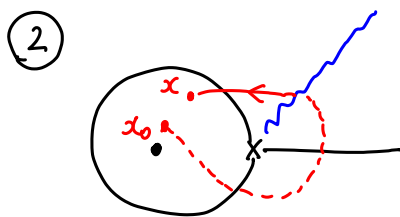
その π による像が θ 方向の Stokes グラフの Stokes セグメントと交わらないようにできる \square



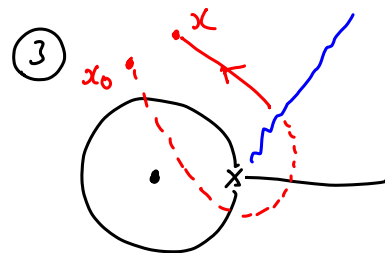
宿題 次の path での積分で定義された WKB 解は Borel 総和可能か？



(答 OK)



(答 X)



(答 OK)

2d-4d 壁越え現象

\square

明日は接続公式についてやる、