互いに素な m, n に対する拡大アフィン Weyl 群の直積 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の双有理作用の量子化

黒木玄 (Gen Kuroki)

東北大学数学教室

日本数学会 2013 年 3 月 20 日〜23 日
京都大学
2013/03/22 Version 1.1

2013 年 3 月 22 日

何をやったか

梶原・野海・山田 arXiv:nlin/0106029 で構成された $\mathbb{C}^{mn} = \{x_{ik}\}$ への $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の双有理作用

↓
↓ m, n が互いに素な場合の量子化
↓

適切な非可換性を持つ Ore 整域 $\mathcal{A}_{m,n}$ の分数斜体 $Q(\mathcal{A}_{m,n})$ への $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の作用

(1) 適切な非可換性の発見は難しい問題だった.
(2) $\mathcal{A}_{m,n}$ は量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_m)^{\otimes n}$ を用いて構成される.
(3) $\mathcal{A}_{m,n} \cong \mathcal{A}_{n,m}$ という双対性が成立している.

(量子) q-Painlevé 系との関係

$\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の作用があるとき,
$\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の格子部分 $\mathbb{Z}^n$ の作用を時間発展とみなせ,
$\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1})$ の作用をその時間発展の対称性とみなせる.

これを $\mathbb{C}^{mn}$ への双有理作用の場合に適用すれば,
様々な q 差分版の Painlevé 系とその対称性が得られ,
その量子化は q 差分版の量子 Painlevé 系になる.

$(m, n) = (3, 2) \longrightarrow$ (量子) q-Painlevé IV
$(m, n) = (2g+1, 2) \longrightarrow A^{(1)}_{2g}$ 型 (量子) q-Painlevé 系
互いに素な $(m, n) \longrightarrow$ 上記の大幅な一般化

非可換な代数 $\mathcal{A}_{m,n}$ の定義 (1)

m, n は互いに素であると仮定する.
$0 < \widetilde{m} < n$ は $\bmod n$ での m の逆元であるとし,
$0 < \widetilde{n} < m$ は $\bmod m$ での n の逆元であるとする.
(例えば $(m, n) = (3, 5)$ のとき $\widetilde{m} = \widetilde{n} = 2$.)

$B \subset \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と $p_{\mu,\nu}$, $q_{\mu,\nu}$ の定義：

$$B = \{\, (\mu \bmod m,\ \mu \bmod n) \mid 0 \leqq \mu < \widetilde{m}m \,\}.$$

$$p_{\mu\nu} = \begin{cases} q & \text{if } (\mu \bmod m,\ \nu \bmod n) \in B, \\ 1 & \text{if } (\mu \bmod m,\ \nu \bmod n) \notin B. \end{cases}$$

$$q_{\mu\nu} = (p_{\mu\nu}/p_{\mu-1,\nu})^2 \in \{1, q^{\pm 2}\}.$$

次ページでこの定義を例で説明する.

非可換な代数 $\mathcal{A}_{m,n}$ の定義 (2)

$(m, n) = (3, 5)$ のとき $\widetilde{m} = 2$ であり,

$$[p_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} q & 1 & 1 & q & 1 \\ 1 & q & 1 & 1 & q \\ q & 1 & q & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [q_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & q^{-2} & q^2 & 1 \\ q^{-2} & q^2 & 1 & q^{-2} & q^2 \\ q^2 & q^{-2} & q^2 & 1 & q^{-2} \end{bmatrix}.$$

$(m, n) = (5, 3)$ のとき $\widetilde{m} = 2$ であり,

$$[p_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} q & 1 & q \\ q & q & 1 \\ 1 & q & q \\ q & 1 & q \\ q & q & 1 \end{bmatrix}, \quad [q_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & q^{-2} & q^2 \\ 1 & q^2 & q^{-2} \\ q^{-2} & 1 & q^2 \\ q^2 & q^{-2} & 1 \\ 1 & q^2 & q^{-2} \end{bmatrix}.$$

双対性: $(3, 5)$ と $(5, 3)$ の $[q_{\mu\nu}]$ たちは互いに相手の転置.

非可換な代数 $\mathcal{A}_{m,n}$ の定義 (3)

$q_{\mu\nu}$ たちから $\mathbb{F} = \mathbb{C}(q, r, s)$ 上の代数 $\mathcal{A}_{m,n}$ を定めよう.

$\mathcal{A}_{m,n} :=$ (以下の生成元と関係式で定まる $\mathbb{F}$ 上の代数).

生成元:　x_{ik}　$(i, k \in \mathbb{Z})$

基本関係式：

$$x_{i+m,k} = r x_{ik}, \quad x_{i,k+n} = s x_{ik} \qquad \text{(準周期性)},$$

$$x_{i+\mu,k+\nu} x_{ik} = q_{\mu\nu} x_{ik} x_{i+\mu,k+\nu} \qquad (0 \leqq \mu < m,\ 0 \leqq \nu < n).$$

双対性:　$\mathcal{A}_{m,n} \cong \mathcal{A}_{n,m}$.

A 型の拡大アフィン Weyl 群の定義

$\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) := \langle r_0, r_1, \dots, r_{m-1}, \omega \rangle (\cong S_m \ltimes \mathbb{Z}^m)$,

基本関係式:

$$r_i^2 = 1, \quad r_i r_j = r_j r_i \quad (j \not\equiv i, i+1 \ (\mathrm{mod}\ m)),$$

$$r_i r_{i+1} r_i = r_{i+1} r_i r_{i+1}, \quad \omega r_i \omega^{-1} = r_{i+1} \quad (r_{i+m} = r_i).$$

$\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の生成元を r_i, ω の代わりに s_k, ϖ と書く:

$\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1}) = \langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, \varpi \rangle (\cong S_n \ltimes \mathbb{Z}^n)$,

Ore 整域 $\mathcal{A}_{m,n}$ の分数斜体 $Q(\mathcal{A}_{m,n})$ への
$\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の代数自己同型作用を構成したい.

主定理

主定理: 梶原・野海・山田 arXiv:nlin/0106029 と見掛け上完全に同じ公式で分数斜体 $Q(\mathcal{A}_{m,n})$ への $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の代数自己同型作用を構成できる.

注意: 非自明なのは, そのようにして構成した作用が実際に $Q(\mathcal{A}_{m,n})$ の代数自己同型作用になっていること, すなわち, 作用が $\mathcal{A}_{m,n}$ の基本関係式を保つことである.

作用を定める具体的な公式は次ページ以降で見せる.

r_i, ω の作用の具体形

$\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) = \langle r_0, r_1, \dots, r_{m-1}, \omega \rangle$ の作用の定義は以下の通り:

$$r_i(x_{il}) = x_{il} - s^{-1}\frac{c_{i,l+1} - c_{i+1,l+2}}{P_{i,l+1}} = s P_{il} x_{i+1,l} P_{i,l+1}^{-1},$$

$$r_i(x_{i+1,l}) = x_{i+1,l} + s^{-1}\frac{c_{il} - c_{i+1,l+1}}{P_{il}} = s^{-1} P_{il}^{-1} x_{il} P_{i,l+1},$$

$$r_i(x_{jl}) = x_{jl} \quad (j \not\equiv i, i+1 \ (\mathrm{mod}\ m)), \qquad \omega(x_{jl}) = x_{j+1,l}.$$

ただし c_{ik}, P_{ik} を以下のように定義しておく:

$$c_{ik} = x_{ik} x_{i,k+1} \cdots x_{i,k+n-1},$$

$$P_{ik} = \sum_{l=1}^{n} \overbrace{x_{ik} x_{i,k+1} \cdots x_{i,k+l-2}}^{l-1} \overbrace{x_{i+1,k+l} x_{i+1,k+l+1} \cdots x_{i+1,k+n-1}}^{n-l}.$$

s_k, ϖ の作用の具体形

$\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1}) = \langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, \varpi \rangle$ の作用の定義は以下の通り:

$$s_k(x_{jk}) = x_{jk} - r^{-1}\frac{d_{j+1,k} - d_{j+2,k+1}}{Q_{j+1,k}} = r Q_{j+1,k}^{-1} x_{j,k+1} Q_{jk},$$

$$s_k(x_{j,k+1}) = x_{j,k+1} + r^{-1}\frac{d_{jk} - d_{j+1,k+1}}{Q_{jk}} = r^{-1} Q_{j+1,k} x_{jk} Q_{jk},$$

$$s_k(x_{jl}) = x_{jl} \quad (l \not\equiv k, k+1 \ (\mathrm{mod}\ n)), \qquad \varpi(x_{jl}) = x_{j,l+1},$$

ただし d_{ik}, Q_{ik} を以下のように定義しておく:

$$d_{ik} = x_{i+m-1,k} \cdots x_{i+1,k} x_{ik},$$

$$Q_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \overbrace{x_{i+m-1,k+1} \cdots x_{i+j+1,k+1} x_{i+j,k+1}}^{m-j} \overbrace{x_{i+j-2,k} \cdots x_{i+1,k} x_{ik}}^{j-1}.$$

構成と証明について

(1) $\mathcal{A}_{m,n}$ の基本関係式への q の入れ方はかなり非自明である. その非自明な q の入れ方をどのようにして見付けたのか?

答: $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_m)^{\otimes n}$ の Borel 部分代数から $\mathcal{A}_{m,n}$ を構成した.

(2) どのようにして r_i, s_k の作用が $\mathcal{A}_{m,n}$ の基本関係式を保つことを証明するのか?

答: arXiv:0808.2604, arXiv:1206.3419 と類似の方法を使う. s_k の作用の具体形は r_i のそれと本質的に同じなので r_i の作用が基本関係式を保つことを示せば十分であり, r_i の作用は本質的に "$x \mapsto \varphi_i^{\alpha_i^\vee} x \varphi_i^{-\alpha_i^\vee}$" の形で構成できるので, r_i は基本関係式を保つことがわかる.

$\mathcal{A}_{m,n}$ と量子群の関係 (1) $\mathcal{B}_{m,n}$ の定義

$\mathcal{B}_{m,n}$ は生成元 $a_{ik}^{\pm 1}, b_{ik}^{\pm 1}$ $(i, k \in \mathbb{Z})$ と以下の基本関係式で定義される $\mathbb{F}' = \mathbb{C}(q, r', s')$ 上の代数であるとする:

- $a_{i+m,k} = r' a_{ik}$, $a_{i,k+n} = s' a_{ik}$,
  $b_{i+m,k} = r' b_{ik}$, $b_{i,k+n} = s' b_{ik}$,
- $a_{ik}^{-1} a_{ik} = a_{ik} a_{ik}^{-1} = 1$, $b_{ik}^{-1} b_{ik} = b_{ik} b_{ik}^{-1} = 1$,
- $a_{ik} b_{ik} = q^{-1} b_{ik} a_{ik}$, $a_{ik} b_{i-1,k} = q b_{i-1,k} a_{ik}$,
  $a_{ik} b_{jl} = b_{jl} a_{ik}$
  $(j \not\equiv i, i-1 \ (\mathrm{mod}\ m)$ or $l \not\equiv k \ (\mathrm{mod}\ n))$,
  $a_{ik} a_{jl} = a_{jl} a_{ik}$, $b_{ik} b_{jl} = b_{jl} b_{ik}$.

$\mathcal{B}_{m,n} \fallingdotseq (U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_m)^{\otimes n}$ の Borel 部分代数の像).

$\mathcal{A}_{m,n}$ と量子群の関係 (2) $RLL = LLR$

$$R(z) := \sum_{i=1}^{m}(q - z/q)E_{ii}\otimes E_{ii} + \sum_{i\neq j}(1-z)E_{ii}\otimes E_{jj} + \sum_{i<j}\Big((q-q^{-1})E_{ij}\otimes E_{ji} + (q-q^{-1})zE_{ji}\otimes E_{ij}\Big),$$

$$L_k(z) := \begin{bmatrix} a_{1k} & b_{1k} & & \\ & a_{2k} & \ddots & \\ & & \ddots & b_{m-1,k} \\ b_{mk}z & & & a_{mk} \end{bmatrix}$$

とおくと

$$R(z/w)L_k(z)^1 L_k(w)^2 = L_k(w)^2 L_k(z)^1 R(z/w),$$
$$L_k(z)^1 L_l(w)^2 = L_l(w)^2 L_k(z)^1 \quad (k \not\equiv l \pmod{n}).$$

$\mathcal{A}_{m,n}$ と量子群の関係 (3) x_{ik} の実現

$\mathcal{A}_{m,n}$ の生成元 x_{ik} は $\mathcal{B}_{m,n}$ の中で実現される: $\mathcal{A}_{m,n} \subset \mathcal{B}_{m,n}$,

$$x_{ik} = a_{ik}(b_{ik}b_{i+1,k+1}\cdots b_{i+\tilde m m-1,k+\tilde m m-1})^{-1},$$
$$r = r'^{1-\tilde m m}, \quad s = s'^{1-\tilde m m}.$$

$\mathcal{B}_{m,n}$ には次のゲージ変換が代数自己同型として作用する:

$$a_{ik} \mapsto g_{ik}a_{ik}g_{i,k+1}^{-1}, \quad b_{ik} \mapsto g_{ik}b_{ik}g_{i+1,k+1}^{-1}, \quad L_k(z) \mapsto g_k L_k(z) g_{k+1}^{-1}$$

ここで $g_{ik} = g_{i+m,k} = g_{i,k+n} \in \mathbb{F}'^{\times}$, $g_k = \mathrm{diag}(g_{1k}, \dots, g_{mk})$.

$\mathcal{B}_{m,n}$ のゲージ不変部分代数 $\mathcal{B}_{m,n}^{\text{gauge}}$ は
x_{ik} たちと $b_{\text{all}}^{\pm1} = \prod_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{n} b_{ik}^{\pm1}$ で生成される:

$$\mathcal{B}_{m,n}^{\text{gauge}} = \left\langle \{x_{ik}\}_{i,k\in\mathbb{Z}}, \ b_{\text{all}}^{\pm1} \right\rangle_{\text{alg}} = \mathcal{A}_{m,n}[b_{\text{all}}^{\pm1}] \fallingdotseq \mathcal{A}_{m,n}$$

証明法 (1) Chevalley 生成元の余積による像 F_i

$$\mathbb{L}(z) := L_1(r'^{n-1}z)L_2(r'^{n-2}z)\cdots L_{n-1}(r'z)L_n(z).$$

とおくと,

$$\mathbb{L}(z) = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & \ddots & \ddots \\ & A_2 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & B_{m-1} \\ \mathbf{0} & & & A_m \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ B_m & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} + \cdots,$$

$$A_i = a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}, \quad B_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i1}\cdots a_{i,k-1}b_{ik}a_{i+1,k+1}\cdots a_{i+1,n}.$$

このとき, $F_i := A_i^{-1}B_i$ たちは $A_{m-1}^{(1)}$ 型 q-Serre 関係式を満たす.
ゆえに Verma 関係式 $F_i^{\lambda}F_{i+1}^{\lambda+\mu}F_i^{\mu} = F_{i+1}^{\mu}F_i^{\lambda+\mu}F_{i+1}^{\lambda}$ を満たす.

証明法 (2) F_i を補整して得られる φ_i

F_i と x_{jl} の相性は悪いので, φ_i を次のように定める:

$$\varphi_i := v_{i1}F_i, \quad v_{ik} := b_{ik}b_{i+1,k+1}\cdots b_{i+\tilde n n-1,k+\tilde n n-1}.$$

この φ_i と x_{jl} の相性は良い.
中心元 c_{jj} を $c_{jj} = q^{-\varepsilon_j^\vee}$ と書き, $\alpha_i^\vee := \varepsilon_i^\vee - \varepsilon_{i+1}^\vee$ とおく.
$\tilde r_i$ の作用を $\varepsilon_i^\vee \leftrightarrow \varepsilon_{i+1}^\vee$ で定める.

代数自己同型であることが明らかな r_i の作用の構成:

$$r_i(x) = \varphi_i^{\alpha_i^\vee}\tilde r_i(x)\varphi_i^{-\alpha_i^\vee}.$$

証明 (3) 補足

以上の説明は数学的に厳密ではない. 厳密な説明は

http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20100630_WxW.pdf

にある. $\varphi_i^{\alpha_i^\vee}$ のような非整数べきの正当化については

arXiv:0808.2604,　arXiv:1206.3419

を見よ. このスライド原稿も次で公開してある:

http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20130322WxW.pdf

「拡大アフィン Weyl 群の直積 双有理作用の 量子化」
をググれば見付かるはず.

Lax 表示 (1) L 作用素

$\widetilde W(A_{m-1}^{(1)}) \times \widetilde W(A_{n-1}^{(1)})$ の x_{ik} たちへの作用は
梶原・野海・山田 arXiv:nlin/0106029 と
全く同様の Lax 表示を持つ.

非可換な場合であっても可換の場合と同様にして,
Lax 表示から r_i, ω, s_k, ϖ の作用が拡大アフィン Weyl
群の直積の基本関係式を満たすことが導かれる.

$$L \text{ 作用素:} \quad X_{ik} = X_{ik}(z) := \begin{bmatrix} x_{ik} & 1 & & \\ & x_{i+1,k} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ r^{-k}z & & & x_{i+m-1,k} \end{bmatrix}.$$

Lax 表示 (2) r_i の作用

r_i の作用の Lax 表示:

$$r_i(X_{1k}) = G_k^{(i)} X_{1k} (G_{k+1}^{(i)})^{-1}.$$

ここで

$$G_k^{(i)} = 1 + s^{-1}\frac{c_{ik} - c_{i+1,k+1}}{P_{ik}} E_{i+1,i} \quad (i = 1, \dots, m-1),$$

$$G_k^{(0)} = 1 + r^{k-1} z^{-1} s^{-1}\frac{c_{mk} - c_{m+1,k+1}}{P_{mk}} E_{1m}.$$

E_{ij} は $m \times m$ の行列単位を表わす.

Lax 表示 (3) s_k の作用

s_k の作用は次の条件で一意に特徴付けられる:

$$s_k(X_{ik} X_{i,k+1}) = X_{ik} X_{i,k+1},$$

$$s_k(X_{il}) = X_{il} \quad (l \not\equiv k, k+1 \pmod n),$$

$$s_k : d_{ik} \leftrightarrow d_{i+1,k+1}.$$

ここで $d_{ik} = x_{i+m-1,k} \cdots x_{i+1,k} x_{ik}$ すなわち d_{ik} は X_{ik} の対角成分の (右から左への) 積であった. s_k の作用は d_{ik} と $d_{i+1,k+1}$ を交換するだけで, 積 $X_{ik} X_{i,k+1}$ とそれら以外の X_{il} たちを保つという条件で特徴付けられる.

できていることのまとめ

- 互いに素な m, n に対する梶原・野海・山田 arXiv:nlin/0106029 が構成した $\mathbb{C}^{mn}$ への $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の双有理作用を量子化. その作用の Lax 表示も量子化できている.
- 基礎になる非可換代数 $\mathcal{A}_{m,n}$ は量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_m)^{\otimes n}$ の Borel 部分代数のある像のゲージ不変部分代数として構成できる.
- m と n の交換に関する双対性が存在する.
- $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の $Q(\mathcal{A}_{m,n})$ への作用が代数自己同型作用になっていることを示すことは非自明. 非整数べき “$x \mapsto \varphi_i^{\alpha_i^\vee} x \varphi_i^{-\alpha_i^\vee}$” の方法を使う.

できていないこと

- $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の双有理作用の量子化の量子 τ 函数の構成.

  arXiv:1206.3419 で扱っているケース (任意の量子展開環に対応する場合) には量子 τ 函数が構成されており, その正則性 (多項式性) が証明されている! 量子 τ 函数の正則性の証明には表現論における translation functor の理論を使う!

  しかし, $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の双有理作用の量子化の場合には正しい量子 τ 函数の定義が何であるかさえ何もわかっていない.