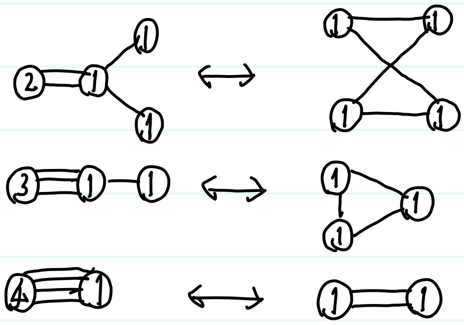
2012-03-15	山川によるWeyl群の同型	黒木玄

山川氏は arXiv math/1003.3633 で次のような Weyl 群の同型(およびその一般化)を証明している:

$$W(B_3^{(1)}) \cong W(A_3^{(1)}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$W(G_2^{(1)}) \cong W(A_2^{(1)}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$W(A_2^{(2)}) \cong W(A_1^{(1)}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$



右の図の各ノードに付けられた数は d_i であり, ノードとノードを結ぶ線は $-d_i a_{ij}$ 本になっている. この方法で symmetrizable GCM を図で表わすことにする.

以下, symmetrizable GCM $A=[a_{ij}]$ は次の形をしていると仮定する:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -d & 2 & {}^t(D'a) \\ 0 & a & A' \end{bmatrix}$$

A' は GCM,
a は列ベクトル,
d は2以上の整数,
D' は正の整数を対角成分に持つ対角行列,
DA は対称行列.

$$DA = \begin{bmatrix} 2d & -d & 0 \\ -d & 2 & {}^t(D'a) \\ 0 & D'a & D'A' \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} d & & \\ & 1 & \\ & & D' \end{bmatrix}$$

行列 Φ を次のように定める: $\Phi := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E' \end{bmatrix}$

ここで E' は A' と同じサイズの単位行列であるとする. このとき,

$$({}^t\Phi)^{-1} D A \Phi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2d & -d & 0 \\ -d & 2 & {}^t(D'a) \\ 0 & D'a & D'A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d & -(d-2) & 0 \\ -d & 2 & {}^t(D'a) \\ 0 & D'a & D'A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -(d-2) & {}^t(D'a) \\ -(d-2) & 2 & {}^t(D'a) \\ D'a & D'a & D'A' \end{bmatrix} \leftarrow \text{これは対称行列}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & D' \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -(d-2) & {}^t(D'a) \\ -(d-2) & 2 & {}^t(D'a) \\ a & a & A' \end{bmatrix}}_{\text{GCM}}$$

となるので,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & -(d-2) & {}^t(D'a) \\ -(d-2) & 2 & {}^t(D'a) \\ a & a & A' \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & D' \end{bmatrix}$$

とおくと, $\check{A}$ は $\check{D}$ で対称化可能なGCMになり,

$${}^t\Phi \check{D} \check{A} \Phi = DA \quad (\Phi\text{は内積を保つということ})$$

が成立している. さらに

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E' \end{bmatrix} \quad (1\text{と}2\text{を交換する置換行列})$$

とおくと, $\Sigma \check{A} \Sigma = \check{A}$ なので $\check{A}$ には1と2を交換する "diagram automorphism" (σと書くことにする) が作用している.

$\boxed{\text{山川の定理}}$ $W(A) \cong W(\check{A}) \rtimes \langle \sigma \rangle$, $\begin{cases} s_1 \longleftrightarrow \sigma \\ s_i \longleftrightarrow \check{s}_i \quad (i \neq 1) \end{cases}$

$\boxed{\text{証明は以下の通り}}$

DA から simple roots α_i たちの内積が $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = {}^t e_i DA e_j$ によって定められるのであった。ここで e_i は第 i 成分が 1 で、他の成分が 0 の列ベクトルである。同様に $\langle \check{\alpha}_i, \check{\alpha}_j \rangle = {}^t e_i \check{D}\check{A} e_j$.

行列 $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E' \end{bmatrix}$ は $Q = \bigoplus_i \mathbb{Z}\alpha_i$ から $\check{Q} = \bigoplus_i \mathbb{Z}\check{\alpha}_i$ への内積を保つ同型写像 $\varphi : Q \to \check{Q}$ を定める:

$$\varphi(\alpha_i) = \begin{cases} \check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_2 & (i=1) \\ \check{\alpha}_i & (i \neq 1). \end{cases}$$

内積を保つことは

$$\langle \varphi(\alpha_i), \varphi(\alpha_j) \rangle = {}^t(\Phi e_i) \check{A}\check{D} \Phi e_j = {}^t e_i {}^t\Phi \check{A}\check{D} \Phi e_j$$
$$= {}^t e_i AD e_j = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$$

と示される。

α_i と $\check{\alpha}_i$ が定める simple reflections をそれぞれ s_i と $\check{s}_i$ と書く。

$W(A) = \langle s_i \text{たち} \rangle$, $\quad W(\check{A}) = \langle \check{s}_i \text{たち} \rangle$ であり、

σ は $W(\check{A})$ に $\check{s}_1$ と $\check{s}_2$ の交換で自然に作用している。よって

$$W(\check{A}) \rtimes \langle \sigma \rangle = \langle \sigma \text{ と } i \neq 1 \text{ に対する } \check{s}_i \text{たち} \rangle,$$

そして φ によって Q と $\check{Q}$ を同一視すると、$i \neq 1$ のとき

$$s_i = (\alpha_i \text{に関する simple reflection})$$
$$= (\varphi(\alpha_i) = \check{\alpha}_i \text{に関する simple reflection}) = \check{s}_i,$$

$$s_1 = (\alpha_1 \text{に関する simple reflection})$$
$$= (\varphi(\alpha_1) = \check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_2 \text{ に関する simple reflection}) =: s_{\check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_2}$$

なので $s_{\check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_2} = \sigma$ を示せば証明が終わる。

しかし, $\sigma : \check\alpha_1 \leftrightarrow \check\alpha_2$ が $(\check Q, \langle , \rangle)$ の automorphism であることから, $s_{\check\alpha_1-\check\alpha_2} = \sigma$ となることがみちびかれる.

(1) $k \neq 1,2$ のとき

$$\langle \check\alpha_1-\check\alpha_2, \check\alpha_k\rangle = \langle \check\alpha_1, \check\alpha_k\rangle - \langle \underbrace{\check\alpha_2, \check\alpha_k}_{\text{これらを}\sigma\text{でうつす}}\rangle = \langle \check\alpha_1, \check\alpha_k\rangle - \langle \check\alpha_1, \check\alpha_k\rangle = 0$$

なので,

$$s_{\check\alpha_1-\check\alpha_2}(\check\alpha_k) = \check\alpha_k.$$

(2) 同様にして $\langle \check\alpha_1-\check\alpha_2, \check\alpha_1+\check\alpha_2\rangle = 0$ なので

$$s_{\check\alpha_1-\check\alpha_2}(\check\alpha_1+\check\alpha_2) = \check\alpha_1+\check\alpha_2,$$

$$s_{\check\alpha_1-\check\alpha_2}(\check\alpha_1-\check\alpha_2) = -\check\alpha_1+\check\alpha_2.$$

よって

$$s_{\check\alpha_1-\check\alpha_2}(\check\alpha_1) = \check\alpha_2, \quad s_{\check\alpha_1-\check\alpha_2}(\check\alpha_2) = \check\alpha_1.$$

これで $s_{\check\alpha_1-\check\alpha_2} = \sigma$ が示された. $\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{注意}}$ [山川] arXiv math/1003.3633 では GCM A の非対角部分の -1 倍 $2E-A$ が右から $D = \mathrm{diag}(d_i)$ で割り切れる場合を主に扱っている. たとえば

$$2E-A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}}_{=D} \quad (B_3\text{型})$$

はその条件をみたしているが,

$$2E-A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}^{=D} \quad (C_3\text{型})$$

はその条件をみたしていない. $\square$

A と $\check{A}$ の関係の図による説明

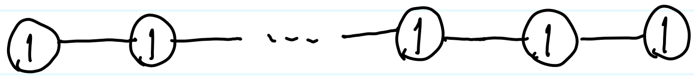
$D=\mathrm{diag}(d_i)$ で対称化される GCM $A=[a_{ij}]$ を次のように図で表わすことにする:

(1) 各ノードに d_i と書く

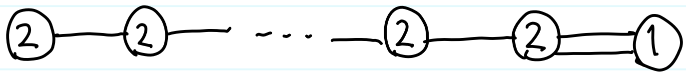
(2) ノード i と j を $-d_i a_{ij} = -d_j a_{ji}$ 重の線で結ぶ

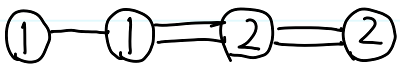
n 重線 ← ($n = -d_i a_{ij} = -d_j a_{ji}$ は d_i と d_j の両方で割り切れる.)

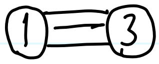
$\boxed{例}$

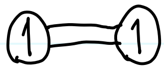
(A_n) 

(B_n) 

(C_n) 

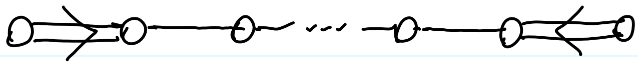
(F_4) 

(G_2) 

$(A_1^{(1)})$ 

$(A_2^{(2)})$ 

$(C_n^{(1)})$ 

(Dynkin diagram では )

$$
C_5^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}
$$

この方法による図示は cluster mutation とも相性が良い.

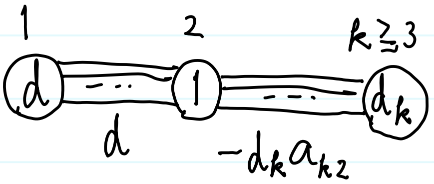
GCM A とそれを対角化する D が

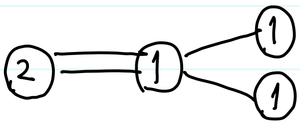
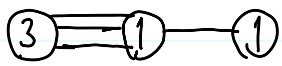
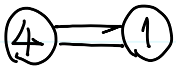
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -d & 2 & {}^t(D'a) \\ 0 & a & A' \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d & & \\ & 1 & \\ & & D' \end{bmatrix}, \quad d \geqq 2$$

の形をしていることと対応する図が次の条件をみたすことは同値:

(1) ノード1には $d \geqq 2$ が書かれ, ノード2には1と書かれている

(2) ノード1とつながっているノードは2だけであり,
ノード1と2は d 重線でつながっている

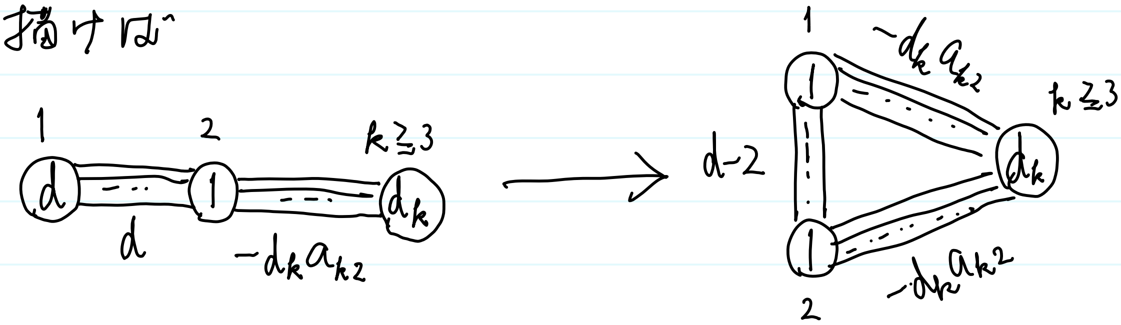


例 $(A_5^{(2)})$  $(D_4^{(3)})$  $(A_2^{(2)})$ 

対応する $\check{A}$ と $\check{D}$ は次の形:

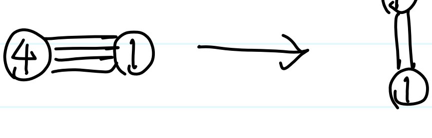
$$\check{A} = \begin{bmatrix} 2 & -(d-2) & {}^t(D'a) \\ -(d-2) & 2 & {}^t(D'a) \\ a & a & A' \end{bmatrix}, \quad \check{D} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & D' \end{bmatrix}$$

図で描けば

A  $\check{A}$

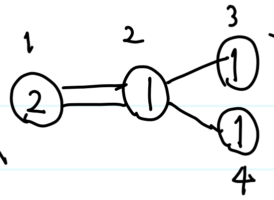
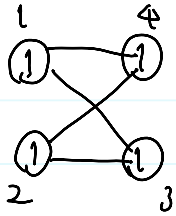
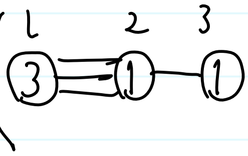
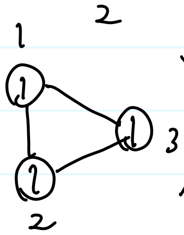
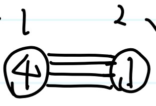
例 $A_5^{(2)}$  $A_3^{(1)}$

$D_4^{(3)}$  $A_2^{(1)}$

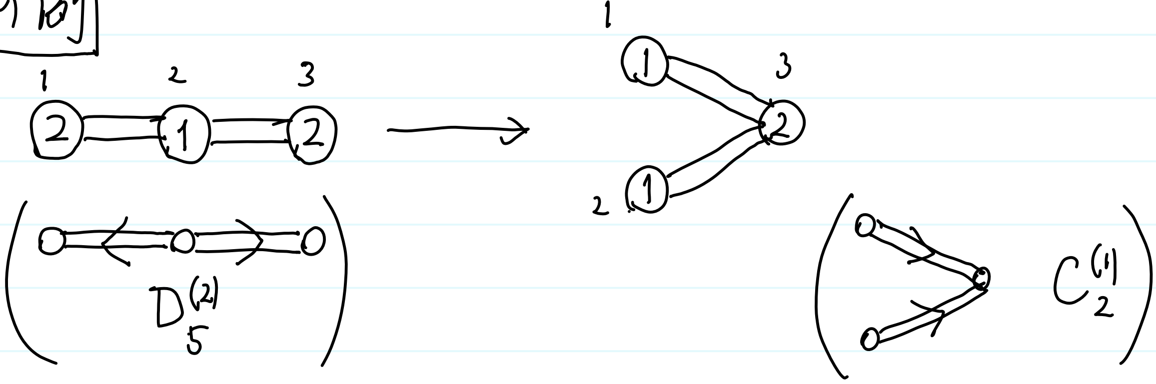
$A_2^{(2)}$  $A_1^{(1)}$

系 (山川の定理から次が出る.)

$\sigma = (1 \leftrightarrow 2)$ で 左辺の s_1 に対応

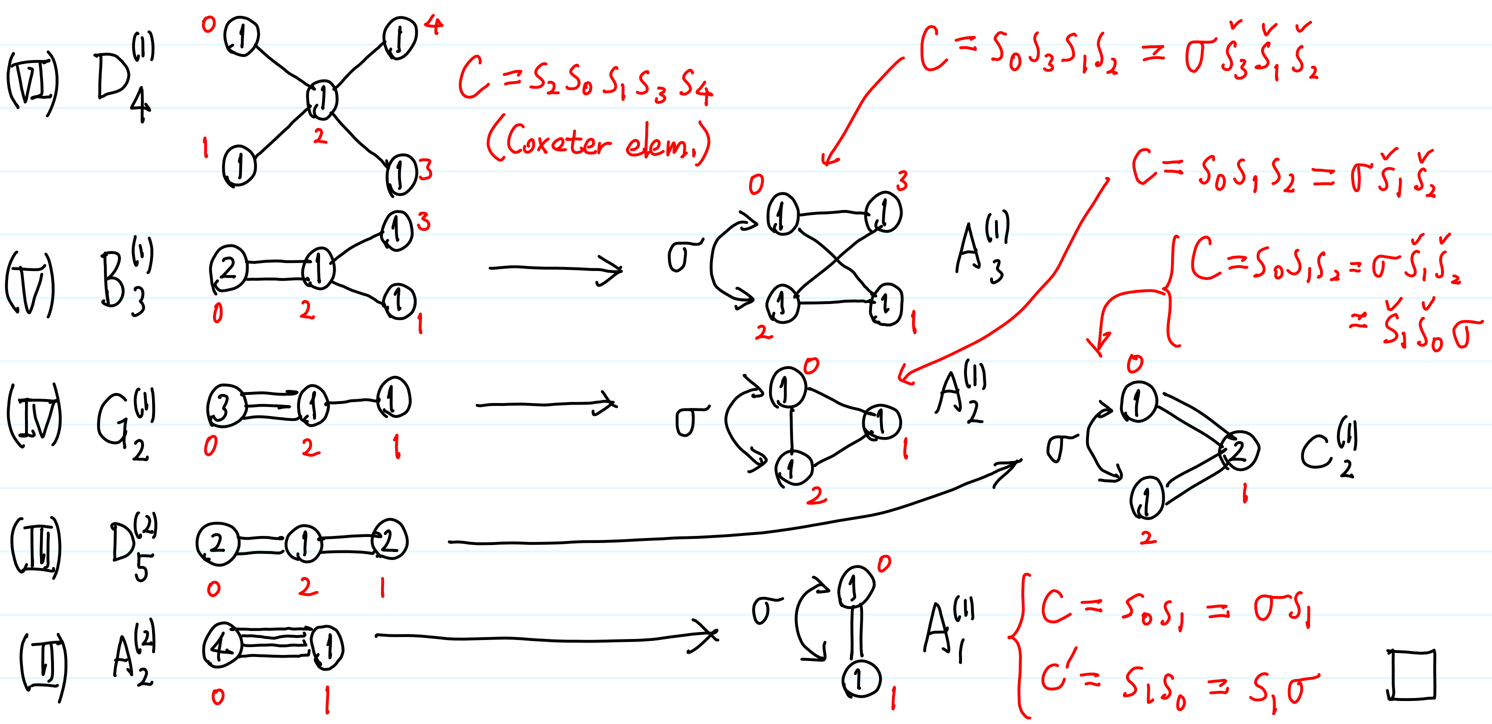
- $W\Big($  $\Big) \cong W\Big($  $\Big) \rtimes \langle \sigma \rangle$,
- $W\Big($  $\Big) \cong W\Big($  $\Big) \rtimes \langle \sigma \rangle$,
- $W\Big($  $\Big) \cong W\Big($  $\Big) \rtimes \langle \sigma \rangle$. $\square$

別の例



よって $W(D_5^{(2)}) \cong W(C_2^{(1)}) \rtimes \langle \sigma \rangle \quad (\sigma = (1 \leftrightarrow 2))$. $\square$

まとめ (型) $A \longrightarrow \check{A}$ と σ



$\square$

$\boxed{\text{注意}}$ 前ページのまとめからわかること

- 古典的な Painlevé 方程式の退化は $\check{A}$ ではなく A の方で見た方が自然である。
- $W(A)$ の Coxeter element は $W(\check{A}) \rtimes \langle \sigma \rangle$ の方でも重要な元になっているようだ。 $\square$

$\boxed{\text{問題}}$ このノートで扱った A と $\check{A}$ 以外の"良い対応"はあるだろうか?