大学院新入生のための数学学習の手引

著者: 宇澤 達　　協力: 黒木 玄

1996 年 9 月 11 日 (Original Version)

合格おめでとうございます. この文章は合格が決定してから実際に東北大学に入学されるまでの 6ヶ月間, そして入ってからの指針に役立つことを願って書かれています.

講義を聞き, そして本を読むことについて.

数学においては, ごく小数の中心的なアイデアを把握し, それをさまざまな例についてその意味をよく考えることが大事です. 従って, 講義を聞くときも, 本を読むときも, そのアイデアが何であるかを理解しようとすることが重要になってきます. 問題演習をするのは, ひとつには新しい概念を正確に理解する助けとし, そして多少 non-trivial な状況で応用してみることによってアイデアを理解する助けとするためです. また, 本を読むときにノートを取りながら, 論理的な穴を埋めながら読み進めるのは良い練習になります.

と言われてもどうしたらいいのか?

という人には, 既に知っていることでそれを試してみることを勧めます. 微分積分であれば,
　高木 貞治 「解析概論」 (岩波)
　堀川頴二 「新しい解析入門コース」(日本評論社)
線形代数であれば,
　佐武 一郎 「線形代数学」(裳華房)
　堀田良之 「加群十話」(朝倉書店)
代数では,
　佐武 一郎 「代数学への誘い」(遊星社)
また, 幾何では,
　小林昭七 「曲線と曲面の微分幾何」 (裳華房)
　小林昭七 「ユークリッド幾何から現代幾何へ」(日本評論社)
　シンガーとソープ 「トポロジーと幾何学入門」
がいろいろある本の中で特に目につきました. また, もう少し研究の雰囲気を知りたい人には,
　久賀 道郎 「ガロアの夢」 (日本評論社)
　久賀 道郎 「ドクトル クーガーのジェイ トーク I,II」 (日本評論社)
　長野 正 「曲面の数学」 (培風館)
が参考になると思います.

数学の知識はどのくらい必要か?

というので不安になっている人もいると思います. まず最小限 (これをクリアーしていないひとも多いのですが) として, 微分積分 (ストークスの定理, フーリェ解析初歩, 常微分方程式初歩), そして線形代数 (実対称行列の標準形, Jordan 標準形) があります. あとは, 学部での数学の講義の内容を, 聞いた時は消化不良をおこしたにせよ後から復習しておくことが必要です. 終りに, 理解をためす参考として問題をあげておきます. 必要な知識は分野によっても違うので, いきたい分野, 先生がはっきりしていたら, 恥ずかしがらずに早めにコンタクトをとる事が大事です. この文章の終りに, どの分野に進むにしても知っていて損しない, 現代の数学にとってはかなりスタンダードな範囲をリストアップしておきました.

研究者になりたいのですがどうしたらいいでしょうか?

と聞く人は実は研究者には向いていません. 研究者は, 新しい結果を出さなければなりません. そして, ここが難しいところですが, その結果がある程度意味を持っていなければなりません. 従って, 考えたことの内で正しいのが 10 に１つであり, 正しかった事柄の 10 に１つが意味のあることであるとすれば, 100 考えたことの内 99 は失敗なわけです. 従って, 研究していく上では正しいか正しくないかはっきりしない仮説を根気よく考えていく能力が必要です. 「タナボタ」に見えることも不断の報われない努力が背後にあることを忘れてはいけません.

従って, 研究者になるには, 幅広い知識と根気, そして運が必要なわけです.

ですから, まず自分が研究者に向いているかどうか考えてみて下さい. 例えば, 解けるか解けないかわからない一つの問題を一週間ずっと考えて解けたのがうれしかったとか, 考えることが好きな人は見込みがあります. そして, 新しい問題を作ることを試みてください.

リスト

このリストには現代数学でかなりスタンダードな考え方になっているものを挙げました. 自分で勉強するのも, 良い本が多いので楽な範囲です. 各分野で大事な概念で, スタンダードといいがたいものは, 最後に, 知っておいた方がよい分野としてリストしてあります. 微分幾何の接続の概念, また層の理論が「セミスタンダード」な分野になります.

がはずれていることもあります. かなり独断が入っています. 例えば, 幾何学では接続の概念は不可欠ですが, 必ずしも他の分野にとってスタンダードな考えとは言えないのではずれています.

代数

線型代数（部分空間, 商空間, Jordan 標準形, 対称行列の標準形）環上の加群, 関手 Hom, $\otimes$, 単項イデアル整域上の加群の構造, 外積代数, 可換環論初歩（局所化, 一意分解環, ネーター環, ネーターの正規化定理, ヒルベルトの零点定理）, 群論初歩 (準同形定理, 直積, 組成列, シローの定理), ガロア理論, 数論初歩 (ディリクレの算術級数定理まで)

参考書

佐武一郎, 「線型代数学」(裳華房)
Atiyah and MacDonald, "Introduction to Commutative Algebra", Addison-Wesley
アルティン, 「ガロア理論入門」 (東京図書)
ファン デル ヴェルデン, 「現代代数学」 (東京図書)
セール, 「数論講義」 (岩波書店)
セール, 「有限群の線型表現」 (岩波書店)
S.Lang, "Algebra" Addison-Wesley

幾何

位相空間（分離公理, コンパクト性, 商位相, proper map）, ２次元閉曲面の分類, 基本群と被覆空間, ホモロジー群, コホモロジー群（キャップ積を含む）, 多様体の概念 (接バンドル, 余接バンドル, 写像の微分), レフシェッツの不動点定理, ポアンカレ双対性, ベクトル場 (フロベニウスの定理), ド ラム の定理

参考書

Adams, "Lectures on Lie Groups"
Bott-Tu, "Differential forms in algebraic topology", Springer
W. Massey, "A Beginning Course in Algebraic Topology", Springer
Hicks, "Notes on Differential Geometry", Van Nostrand-Reinhold
スピヴァック 「多変数解析学入門」 (東京図書)
Seifert, Threlfall, "Topology", Academic Press
Frank Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie groups, Springer
Manfredo do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhäuser
松島 与三 「多様体論」 (裳華房)
河田敬義編 「位相幾何学」(岩波)
ミルナー 「モース理論」(吉岡書店)
Wolf, "Spaces of Constant Curvature"

解析

一変数, 多変数の微分積分, 関数論（リーマンの写像定理まで）, ルベーグ積分, 確率論初歩 (中心極限定理まで) フーリェ解析, distribution の理論の初歩, ソボレフ空間（埋蔵定理まで）, 関数解析 (閉グラフ定理, ハーン バナッハの定理, スペクトル理論), リーマン面初歩, 常微分方程式論 (解の存在と一意性, 安定性, フックス型の方程式の理論), 偏微分方程式初歩 (表象, コーシー コワレフスカヤの定理まで)

参考書

アーノルド 「常微分方程式」 (現代数学社)
アーノルド 「古典力学の数学的方法」 (岩波)
Rudin, Real and Complex Analysis, MacGraw-Hills
Liusternik-Sobolev, "Elements of Functional Analysis"
H.Dym,H.P. McKean, "Fourier Series and Integrals" Academic Press
ゲルファント フォーミン 「変分法」
ゲルファント 他 「超関数入門 I」(共立)
Ahlfors, "Complex Analysis"
シナイ 「確率入門コース」(シュプリンガー東京)
Kirillov, Gvichiani, "Theories and problems of functional analysis",Springer
Polya-Szegö, "Problems and Theorems in Analysis, I & II", Springer
猪狩 惺 「実解析入門」(岩波)
増田 久弥 「非線型解析入門」 (朝倉)
小平 邦彦「複素多様体入門」(岩波)
吉田 耕作「積分方程式論」(岩波)

参考問題

A. 定義をたしかめる程度の易しい問題.

問 函数 $f(x, y) = x - y$は全微分可能であるか? また, 全微分可能ではない函数をつくれ.

問 次の函数はどの指数のソボレフ空間にはいっているか?

$$|x|, \quad x, \quad \delta(x).$$

問 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は位数 4 の体か?

問 αを無理数とし, $\mathbb{Q}$ 上の函数 fを

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > \alpha \\ 0 & \text{if } x < \alpha \end{cases}$$

として定める. このとき fは $\mathbb{Q}$ 上の函数として連続か?

B. 多少考えないといけない問題

問 単位円周上に座標が共に有理数であり, 互いの間の距離が有理数であるような稠密な部分集合があることを示せ.

問 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフは閉かつ連結とする. この時 fが連続であることを示せ. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$についてはどうか?

問 写像 $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$は連続, 全単射であれば, $m=n$ であり, f は同相写像になることを示せ.

問 $I=[0,1]$ とし, λを Iの上のルベーグ測度, μを Iの上のボレル測度とする. 自然数 $m>1$ を固定する. 任意のボレル集合 A に対して, $\lambda(A)=1/m$ ならば$\mu(A)=1/m$ であれば, 任意のボレル集合 Bに対して$\mu(B)=\lambda(B)$ となるとを示せ.

問 ベクトル値の函数 $U(x,t):\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$について次の方程式を考える.

$$u(x)=U(x,0)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}U+\frac{\partial}{\partial x}F(U)=0(t\geq 0,-\infty<x<\infty)$$

この方程式の解が次の方程式を満すことを示せ.

$$-\int(U\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}+F(U)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x})dxdt+\int u\cdot\varphi dx|_{t=0}=0$$

ここでφ は無限回微分可能な函数で $|x|,t>0$ が十分大なときに 0 になるような函数である.

また, $F(U)=U^2$とした時, $U=\pm k$が解となることをしめせ. Uが交互に$+k$, $-k$の値をとることは可能か? また, 衝撃波 $U=G(st-x)$ 解で, $st-x<0$ の時 $U=10$, そして $st-x>0$ の時 $U=-1$ となるものを求めよ. $st-x<0$ の時 $U=-1$, そして $st-x>0$ の時 $U=10$ となる解はあるか?

問 $\{(x_1,...,x_n);x_i\geq 0,\ x_i+x_{i+1}\leq 1\}$ の体積を求めよ. (ヒント:$P_0(x)=1,\ P_n(x)=\int_0^{1-x}P_{n-1}(t)dt$ と置いて, 母函数 $F(x,y)=\sum P_n(x)y^n$のみたす微分方程式を考えよ. これは A_n 型のディンキン図形に対応している. 他の図形についてはどうか?)

問 σを $\{0,1,\ldots,9\}$ の置換とする. $f:[0,1)\to[0,1)$ をσの延長とする. すなわち, $a\in[0,1)$ の十進展開を $a=0.a_0a_1\ldots a_n\ldots$ とする時, $f(a)=0.\sigma(a_0)\ldots\sigma(a_n)\ldots$ とおく. 十進展開の一意性を保証するために, ある Nから先, $a_n=9$ とはならないようにする.

この時 fの連続点を求めよ. また, 微分可能である点も求めよ.

fがリーマン積分可能であることを示して, その積分を求めよ.

問 p を奇素数とする. 体の有限部分群は巡回群であることを示し, それを用いて, $x^2\equiv a(mod\ p)$ が整数解を持つのは $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(mod\ p)$ であることを示せ.

問 コンパクト リーマン面 Xから n 個の点 $\{p_1,\ldots,p_n\}$ を抜いた開リーマン面を X_0で表わす. A で X_0上の正則函数の環をあらわす. この時, $A^\times/\mathbb{C}^\times$はどういう構造をしているか? A を有理数体の有限次拡大の整数環で置き変えると結論はどうなるか?

問 p-進整数 $\mathbb{Z}_p$を定義するのに, p-進距離に対する Cauchy 列による完備化による方法と, $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の逆極限として書く方法がある. 二つが同値であることを吟味せよ.

問 有限体 F_{2^h}上で $x^2+x+d=0$ が解をもつ必要十分条件は $T(d)=\Sigma_{i=0}^{h-1} d^{2i}=0$ である. また, $T(d)=0$ となる F_{2^h}の元の個数は

$$\frac{1}{4}(2^h-3-2(-\sqrt{2})^h\cos(h\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{8}})))$$

であることを示せ.

問 生成元 a,b,c および関係式 $a^\ell=b^m=c^n=(abc)=1$ であたえられる群が有限群であるための必要十分条件が$\frac{1}{\ell}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>1$ で与えられることを証明せよ. (ヒント：幾何的に考えた方が良い. ユークリッドとは限らない幾何で三角形でのしきつめを考える).

問 $a_k=-a_{-k}, a_{k+n}=a_k$なる数列が与えられているとする. a_k は kについての周期函数であるから, 次の様にフーリェ展開をすることができる. $a_k=\sum_{r=0}^{n-1} b_r e^{\frac{2\pi irk}{n}}$. このとき,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}=-\frac{\pi i}{n}\sum_{r=0}^{n-1} b_r r$$

となる.

これを用いて, $S_m=1+1/3+\cdots+1/(2m-1)-1/(2m+1)-\cdots-1/(4m-1)+\cdots$ とした時 (つまり正の項と負の項が m の周期性を持ってあらわれる) その和を求めよ. ($S_1=\frac{\pi}{4}$ が有名なライプニッツの公式である).

問 $\mathrm{Aut}_K\, K[X_1^{\pm 1},\ldots,X_n^{\pm 1}]$ を Kが複素数体であるときに求めよ. 他の体についてはどうか?

問 $\mathrm{Aut}_K\, K[X,\frac{1}{X},\frac{1}{(X-1)}]$ はどうなるか?

問 $I=(x^3-y^2,y^3-z^2,z^3-x^2)$ の準素イデアル分解が次の様になることを示せ.

$$I=(x^2,y^2,z^2)\cap_{k=0}^{18}(x-\alpha^k,y-\alpha^{11k},z-\alpha^{7k})$$

ただし, ここで$\alpha=e^{\frac{2\pi i}{19}}$とする.

問 Perron-Frobenius の定理：行列 $A=(a_{ij})$ $(a_{ij}\geq 0)$ の固有値は負でない実数であることを Brouwer の不動点定理を使ってしめせ.

問 S^1, S^3にはリー群の構造が入ることを示せ. S^4, S^5はどうか?

問 三本脚の椅子は常に水平に置けることを示せ.

問 コンパクト 3 次元多様体 Mは solid 多面体 Pの面を同一視することで得られることを示せ. また, solid 多面体 Pの面を同一視して 3 次元多様体ができる必要十分条件は Pのオイラー数が 0 であることを示せ. ここで solid 多面体とは, 中身が詰まっている多面体のことである.

問 ガウス ボンネの定理を使って, リーマン計量を与えられた一つ穴のトーラスに曲率が負の点があれば, 曲率が正の点も存在することを示せ.

問 煙草の煙で 2 つ穴, 3 つ穴の輪ができるか?

問 $C=\{(x,y)|x^2=y^3\}\subset\mathbb{C}^2$を原点を中心とする半径$\epsilon$の球面 S^3で切ることを考える.

i) $S^3 \cap C = L$ が S^1と同相であることを示し, L が S^3に入っているようすを絵に書きなさい.

ii) $\pi_1(S^3 - L)$ を i) の絵を元に Van Kampen の定理を用いて決定せよ.

iii) $SL(2,\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$ と $S^3 - L$ が同相であることを次の様にして示せ. まず $SL(2,\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$ を基本領域の面積が 1 であるような $\mathbb{R}^2$内の格子 L 全体と同一視する. 各格子 L にたいして正数 t が一意に存在して, $(t^{-4}g_2, t^{-6}g_3) \in S^3$となることを示せ. ここで, $g_2(L) = 60\sum_{\lambda\in L-0}\lambda^{-4}$, $g_3 = 140\sum_{\lambda\in L-0}\lambda^{-6}$である. このことより問題の同相が誘導されることを示せ. L によって定まる Weierstras のペー函数を $p(z)$ とすれば

$$(\frac{dp}{dz})^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$$

となる. (詳しくは最寄りの楕円函数の教科書).

C. いろいろな分野での未解決問題のリストです.

問 数学のよい論文を定義し, その例をつくりなさい.

問 6 次元球面 S^6 に複素構造は入るか? (Kähler 構造が入らないことはいくぶん簡単である).

問 任意のコンパクト リーマン多様体に無限個の閉測地線が存在することを示せ. (例えば S^nに任意のリーマン計量をいれた時は知られている.)

問 任意の有限群 G を与えられた時, それをガロア群として持つ有理数体のガロア拡大を構成せよ. (類似として, G を被覆変換群としてもつリーマン球面の分岐被覆を構成する問題があるがこれは容易.)