幾何学的 Langlands program とその周辺

長谷川 浩司　(東北大学大学院理学研究科数学専攻)
堀田 良之　(岡山理科大学理学部応用数学科)
黒木 玄　(東北大学大学院理学研究科数学専攻)
中島 啓　(東京大学大学院数理科学研究科)
落合 啓之　(立教大学理学部数学教室)
塩田 隆比呂　(京都大学理学部数学教室)
武部 尚志　(東京大学大学院数理科学研究科)

1996 年 11 月 26 日版

このノートは, ニュースサーバー

`shitan.math.tohoku.ac.jp (130.34.108.128)`

に存在するニュースグループ

`shitan.math`

の記事 (の一部) を黒木が TEX に変換したものである. ほぼこの版と同じ内容を持つものが, 去年の今年 (1996 年) の 1 月には完成していた. それ以後, ほとんど変更を加えていない. なお, 上記の著者名はローマ字に直すとアルファベット順になるように並べてある.

各節の始めにもとの記事のヘッダーを引用しておくが, 黒木が書き変えた部分があるので, もとの記事そのままの内容にはなっているとは限らない. 書き変えの主たる内容は, TEX 化に伴う記号の変更, 細かいミスや文字化けの修正, section や subsection のタイトルの設定などであり, 大幅に省略した部分もある. したがって, 細部の間違いに関する責任は黒木にある. 細い内容について異和感を感じた場合は上記の場所に, アクセスすることによってオリジナルの記事を読むようにして欲しい[1]. なお, “*” の付いている footnote は記事を TEX に変換するときに追加されたものであり, “*” の付いてない footnote はもとの記事に含まれていた註である.

[1]管理者より: shitan.math.tohoku.ac.jp のニュースサーバーへのアクセス許可は外にも開かれています. そこにおける議論に興味のある人のアクセスは大いに歓迎されます! これを読んで興味を持った人は是非ともアクセスしてみてください. なお, `shitan.*` だけではなく, `jmath.*` という newsgroups も運営されているので, 興味のある人はそちらも覗いてみてください.

目次

1. takebe: [BD2] における oper の定義 (oper 1)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: ms.misc
Subject: oper No.1
Date: 13 Oct 1995 10:06:28 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Oct13100628@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

G の Langlands dual を $\hat{G}$ とする. $\hat{G}$-oper にたいして G-bundle の moduli space 上の twisted $\mathcal{D}$-module を対応させて, その characteristic variety を考える と, Hitchin の可積分系の Lagrangean variety ($\pi^{-1}(0)$ in Hitchin's notation) になる.

以下の対象は全て $\mathbb{C}$ 上定義されたものであるとする:

$$\begin{aligned}&G = \text{semisimple algebraic group}, \qquad \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G),\\ &B = \text{fixed Borel subgroup of } G, \qquad H = \text{Cartan subgroup in } B,\\ &\mathfrak{g}_\alpha = \text{root space w.r.t. } H,\\ &Y = \text{smooth connected projective algebraic curve, genus} > 1.\end{aligned}$$

定義. G-oper とは, triple (R, ∇, F) で次の条件を満たすもの.

(1) R は G-bundle over Y であり, ∇ は connection on R であり, F は flag on R ($= R$ の B-bundle への reduction) である.

(2) 局所的に coordinate と B-trivialization を取って, $\nabla = d/dz + q(z)$ ($q(z) \in \mathfrak{g}$) と表わし, $q_\alpha(z)$ を $q(z)$ の $\mathfrak{g}_\alpha$ への projection とする. このとき, 以下が成立する:

  (a) α が positive かつ non-simple のとき, $q_{-\alpha}(z) = 0$.

  (b) α が simple のとき, $q_{-\alpha}(z) \neq 0$ for all z.

定義. $\mathfrak{g}$-oper とは $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$-oper のことである.

注意. "Oper" は Drinfeld-Sokolov で 出て来た概念の言い替え (+ 一般化) に過ぎない. differential operator で表されるからこういう名前が付けられた.

注意. 以上の formulation は [BD2] による. [BD1] では reductive group について, 少し違った formulation で 話を進めている.

2. takebe: "Opers" ([BD1]) の目次 (oper 2)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: ms.misc
Subject: Re: oper No.1
Date: 15 Oct 1995 02:52:04 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Oct15025204@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

Beilinson and Drinfeld による未発表の論文 "Opers" [BD1] の目次:

1. G-opers and $\mathfrak{g}$-opers:

  1.1 記号の準備.

  1.2 reductive group G に対して G-oper を定義.

  1.3 $\mathfrak{g}$-oper の定義と性質.

1.4 $\mathfrak{g}_{ss}$-oper を G-oper に持ち上げる. ($\mathfrak{g}_{ss}$ は G の semisimple part の Lie 環.)

2. G-opers for classical G.

2.1 $GL(n)$-oper: 微分作用素による記述

2.2 $GL(n)$-oper: 微分作用素の formal adjoint との関係

2.3 $Sp(n)$-oper: 微分作用素による記述

2.4 $sp(n)$-oper: 微分作用素による記述

2.5 $O(n)$-oper

2.6 $sl(2)$-oper: $sp(2)$ とも $o(3)$ とも思えるから. 幾つかの記述がある.

2.7 $sl(2)$-oper の性質.

2.8 $SL(n)$-oper の性質.

2.9 $SO(2n)$-oper の性質.

3. A description of the set of $\mathfrak{g}$-opers.

3.1 – 3.3 $sl(2)$-oper の同型類全体の記述. ($H^0(Y, \Omega^2)$ 上の等質空間として)

3.4 – 3.7 一般の $\mathfrak{g}$-oper の同型類全体 $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y)$ の等質空間としての記述.

4. Singularities of $\mathfrak{g}$-opers.

4.1 – 4.3 Y の finite subscheme D に対して, そこに特異性を許した oper (その同型類全体を $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ と書く) の定義と性質.

5. The algebra $A_{\mathfrak{g},D}(X)$ ($A_{\mathfrak{g},D}(X) = \mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(X)$ の座標環)

5.1 $A_{\mathfrak{g},D}$ に grading と filtration を定義.

5.2 Planck constant h を導入して oper を定義しなおす.

5.3 h を使って filtration を定義. 5.1 の物と一致する.

5.4 $\mathrm{gr}(A_{\mathfrak{g},D}(X))$ は canonical に $\mathrm{Hitch}_{\mathfrak{g},D}(X)$ の座標環と同型. ここで, $\mathrm{Hitch}_{\mathfrak{g},D}(X)$ は Hitchin の fibration の base space. ($\mathrm{gr}(A_{\mathfrak{g},D}(X))$ は oper の “classical limit” ($h = 0$) 全体の座標環と一致.)

このノートの節との対応表[2]:

1.1, 1.2. 第 14 節 (p. 26) oper 4.

1.3. $\mathfrak{g}$-oper の定義は 第 1 節 (p. 6) oper 1 に書いてある.

1.4. 第 50 節 (p. 68) oper 7.

[2]* TEX 化の時点で追加した.

2.1. 第 37 節 (p. 52) oper 6.

2.2, 2.3, 2.6. 第 51 節 (p. 71) oper 8, 第 48 節 (p. 67).

3.1–3.3. 第 62 節 (p. 87) oper 9.

3.4–3.7. 第 65 節 (p. 92) oper 9+, 第 102 節 (p. 145) oper 10++.

4.1–4.3. 第 23 節 (p. 38) oper 5, 第 72 節 (p. 103) oper 10−, 第 75 節 (p. 106) oper 10, 第 81 節 (p. 116) oper 10+, 第 102 節 (p. 145) oper 10++.

5.1 第 75 節 (p. 106) oper 10.

5.2–5.4. 第 23 節 (p. 38) oper 5, 第 31 節 (p. 46) oper 5+, 第 75 節 (p. 106) oper 10.

3. takebe: [BD2] の内容の概略 (oper 3)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: oper 3
Date: 18 Oct 1995 10:13:48 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Oct18101348@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

節は全部で 1 から 9 まであり, 9 は Acknowledgements でしかも書きかけ. 以下「」でかこった所は翻訳.

記号. 以下の記号を用いる:

$$X = \text{smooth connected projective algebraic curve over } \mathbb{C} \text{ of genus } g > 1,$$
$$\Omega_X = \text{X 上の canonical line bundle},$$
$$G = \text{semisimple algebraic group over } \mathbb{C},$$
$$\mathfrak{g} = \text{Lie algebra of } G,$$
$$\mathrm{Bun}_G = \text{moduli stack of } G\text{-bundles on } X.$$

1. 「この論文では Bun_G 上の $\mathcal{D}$-module を作って, その Langlands program との関係を議論します. この idea は独立に Witten も見付けましたが, 彼は何ら書いていない様です.」

2. Hitchin の可積分系の復習. Hitchin's fibration:

$$\pi : T^* \mathrm{Bun}_G \to V,$$

$V = \oplus_i V_i$, $V_i = H^0(X, \Omega_X^{k_i})$. (今は細かい説明略.)

3. $B_{\mathfrak{g}}(X) = V$ 上の多項式関数環とすると π から自然に

$$\phi_{\mathrm{cl}} : B_{\mathfrak{g}}(X) \to (T^* \operatorname{Bun}_G \text{上の関数環})$$

という graded morphism が誘導される．$\hat{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の Langlands dual として, $A_{\mathfrak{g}}(X)$ を X 上の $\hat{\mathfrak{g}}$-opers の全体のなす多様体 (manifold) の座標環とする．$A_{\mathfrak{g}}(X)$ は filtered ring になって, $\operatorname{gr} A_{\mathfrak{g}}(X) = B_{\mathfrak{g}}(X)$. さらに

$$\phi : A_{\mathfrak{g}}(X) \to H^0(\operatorname{Bun}_G, \mathcal{D}')$$

という ϕ_{cl} と compatible (*i.e.*, $\operatorname{gr}(\phi) = \phi_{\mathrm{cl}}$) となる ϕ が作れる, $\mathcal{D}'$ は $\Omega^{1/2}_{\operatorname{Bun}_G}$ に作用する微分作用素環の層．この構成をこれから説明.

4. $\mathfrak{g}$-oper の定義．これは以前に書いたから略.

5. ϕ の構成. (まず local に各点 $x \in X$ の formal neighbourhood で作って, それが x に依らない事を言う.)

$\mathcal{O}_x = x$ での局所環の完備化,

$K_x = \mathcal{O}_x$ の商体,

$\hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{g} \otimes K_x$ の central extension,

$U_c = \hat{\mathfrak{a}}$ の普遍包絡環で, (center $= c$) としたもの,

$I_c = U_c$ の 左 ideal, $\hat{\mathfrak{a}}$ の元で x で正則なものから生成されるもの,

$R_c = \{\, u \in U_c \mid I_c u \subset I_c \,\}$.

とすると, Feigin-Frenkel によって, $c = -h^\vee$ (critical level) とすると,

$$R_c/I_c \text{ は canonical に } A_{\mathfrak{g}}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_x) \text{ に同型.}$$

($A_{\mathfrak{g}}(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_x)$ は $A_{\mathfrak{g}}(X)$ と同様にして定義. cf. [Fr2]) また, 作り方から, 自然に R_c/I_c から $\mathrm{Diff}^{\mathrm{tw}} = \mathcal{D}'$ の大域切断全体への morphism がある．従って,

$$\phi_x : A_{\mathfrak{g}}(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_x) \to \mathrm{Diff}^{\mathrm{tw}},$$

ができる．一方, $A_{\mathfrak{g}}(X)$ は $A_{\mathfrak{g}}(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_x)$ の商である.

Theorem 1. ϕ_x は $\phi : A_{\mathfrak{g}}(X) \to \mathrm{Diff}^{\mathrm{tw}}$ から来ている.

6. 「G を単連結としましょう．そうでないと $\Omega^{1/2}_X$ の取り方の問題がある．(以下の $\mathcal{D}$-module がこの取り方に依らない事を check していない.)」

この仮定のもとで $\hat{G}$-oper は $\hat{\mathfrak{g}}$-oper と同じ．従って, $\hat{G}$-oper ξ に対応して $A_{\mathfrak{g}}(X)$ の極大 ideal $\mathfrak{m}_\xi$ があります．$E = \mathcal{D} \otimes \Omega^{-1/2}$ として,

$$E_\xi := E/E\phi(\mathfrak{m}_\xi)$$

という Bun_G 上の $\mathcal{D}$-module を定義する.

Theorem 2. E_ξ は holonomic でその characteristic variety は, cycle として $\pi^{-1}(0)$ (Hitchin's fibration の 0-fiber) に一致する.

7. ξ は Langlands の意味で (R, ∇) に対応すると予想される. (つまり flag の data はいらない.) これは次のような意味である.

$$H = (\text{“big” Hecke correspondence}) = (4\text{ つ組 } (x, F_1, F_2, \phi) \text{ 全体のなす stack}).$$

ここで, $x \in X$ であり, F_1, F_2 は G-bundle であり, ϕ は $X - \{x\}$ での F_1 から F_2 への同型.

このとき, ϕ は G の dominant coweight λ を決める. だから, H は locally closed substack H_λ による stratification を持つ. H_λ の閉包を $\bar{H}_\lambda$ とすると, 一般にはこれは特異点を持つ.

$f : \bar{H}_\lambda \to \mathrm{Bun}_G$ と $h : \bar{H}_\lambda \to \mathrm{Bun}_G \times X$ を

$$f(x, F_1, F_2, \phi) = F_1, \qquad h(x, F_1, F_2, \phi) = (F_2, x)$$

で定める. M_λ, V^λ を次のように定める:

$$M_\lambda = \bar{H}_\lambda \text{ 上の MacPherson } \mathcal{D}\text{-module},$$
$$V^\lambda = \text{highest weight } \lambda \text{ の既約 } \hat{G}\text{-module}.$$

ここで, λ を $\hat{G}$ の dominant weight とみなしたことに注意せよ.

予想 (Hecke eigenvalue property): 任意の $\lambda \in P_+$ に対して, canonical isomorphism

$$h_*(f^! E_\xi \otimes M_\lambda) \simeq E_\xi[n+1] \boxtimes V^\lambda_R,$$

が存在する. ここで, $n = (\lambda, 2\rho)$ であり[3], V^λ_R は (R, ∇) と V^λ に対応する X 上の局所系.

Theorem 3. λ が $\hat{G}$ の microweight (*i.e.* $\bar{H}_\lambda = H_\lambda$, $M_\lambda = \mathcal{O}_{H_\lambda}$) ならば,

$$i_x^! h_* f^! E_\xi \simeq E_\xi[n] \otimes V^\lambda,$$

但し, $i_x : \mathrm{Bun}_G \to \mathrm{Bun}_G \times X$ は $x \in X$ に対応する埋め込み.[4]

Theorem 2, 3 と Laumon による Langlands 変換の characteristic variety の計算は Hecke eigenvalue property を支持している.

8. Langlands program によれば Bun_G 上の $\mathcal{D}$-module があって任意の (R, ∇) に対して, それに Hecke eigenvalue property の意味で対応する $\mathcal{D}$-module が存在する. そのような pair は $2N$ 個の parameters に依存しているが, oper は N 個の parameters に依存している. ここで, $N = (g-1)\dim G$.

9. 謝辞「だれにしようか」

---

[3]* 第 6 節 (p. 14) によると, $H_\lambda \to \mathrm{Bun}_G \times X$ は smooth であり relative dimension は $n = (\lambda, 2\rho)$ に等しい.

[4]* [Gin] の Theorem 1.5 および第 6 節も参照せよ. そこには, この Theorem 3 の結論 $+\alpha$ を仮定すると上の予想の結果が出ると書いてある.

4. nakajima: Hitchin fibration の解説

第 3 節 (p. 9) へのフォローです.

From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper 3
Date: 19 Oct 1995 01:05:42 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Oct19010542@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Oct18101348@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:

> **1.** 「この論文では Bun_G 上の $\mathcal{D}$-module を作って, その Langlands program との関係を議論します. この idea は独立に Witten も見付けましたが, 彼は何ら書いていない様です.」

ほんとかな?

> **2.** Hitchin の可積分系の復習. Hitchin's fibration:
>
> $$\pi : T^* \mathrm{Bun}_G \to V,$$
>
> $V = \oplus_i V_i$, $V_i = H^0(X, \Omega_X^{k_i})$. (今は細かい説明略.)

E を G-bundle とするとき, E における Bun_G の接空間は $H^1(X, \mathrm{Ad}(E))$ である. よってその双対空間は Serre duality によって $H^0(X, \mathrm{Ad}(E) \otimes \Omega_X)$ になる. ($\mathrm{Ad}(E)$ の双対は自分自身) そこで E と $H^0(X, \mathrm{Ad}(E) \otimes \Omega_X)$ の元 Φ をまとめて, Higgs 束という. Higgs 束の全体が $T^* \mathrm{Bun}_G$ である.

G の不変多項式 (例えば GL_n だったら, 何乗かして trace を取る) があったら Φ に apply したら $H^0(X, \Omega_X^{k_i})$ の元を得る. k_i は不変多項式の次数. これが Hitchin fibration である. そしてこれが completely integrable system になることが Hitchin の観察です[5].

これは非常におおざっぱに見ると, moment map

$$\mu : (\text{cotangent bundle of flag variety}) \to \mathrm{Lie}(G)^*$$

に似ていると言えないこともない. あまり他の人は賛同してくれないけど...

[5]* 0-fiber $\pi^{-1}(0)$ が Lagrangian であることの証明については 第 70 節 (p. 101) を見よ.

> **3.** $B_{\mathfrak{g}}(X) = V$ 上の多項式関数環とすると π から自然に
>
> $$\phi_{\mathrm{cl}} : B_{\mathfrak{g}}(X) \to (T^* \mathrm{Bun}_G \text{ 上の関数環})$$
>
> という graded morphism が誘導される. $\hat{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の Langlands dual として, $A_{\mathfrak{g}}(X)$ を X 上の $\hat{\mathfrak{g}}$-opers の全体のなす多様体 (manifold) の座標環とする. $A_{\mathfrak{g}}(X)$ は filtered ring になって, $\mathrm{gr}\, A_{\mathfrak{g}}(X) = B_{\mathfrak{g}}(X)$. さらに
>
> $$\phi : A_{\mathfrak{g}}(X) \to H^0(\mathrm{Bun}_G, \mathcal{D}')$$
>
> という ϕ_{cl} と compatible (*i.e.*, $\mathrm{gr}(\phi) = \phi_{\mathrm{cl}}$) となる ϕ が作れる, $\mathcal{D}'$ は $\Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G}$ に作用する微分作用素環の層. この構成をこれから説明.

似ていないこともない.... と書いたこととの対比で言うと ϕ は Beilinson-Bernstein の定理

$$U(\mathrm{Lie}(G)) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda) \text{ は全射である}$$

に対応する. これの gr を取ると moment map になる.

> **Theorem 2.** E_ξ は holonomic でその characteristic variety は, cycle として$\pi^{-1}(0)$ (Hitchin's fibration の 0-fiber) に一致する.

全体に一致するの?? それともその既約成分になるという意味??

> **7.** ξ は Langlands の意味で (R, ∇) に対応すると予想される. (つまり flag の data はいらない.) これは次のような意味である.
>
> $$H = (\text{“big” Hecke correspondence}) = (4 \text{ つ組 } (x, F_1, F_2, \phi) \text{ 全体のなす stack}).$$
>
> ここで, $x \in X$ であり, F_1, F_2 は G-bundle であり, ϕ は $X - \{x\}$ での F_1 から F_2 への同型.
> このとき, ϕ は G の dominant coweight λ を決める. だから, H は locally closed substack H_λ による stratification を持つ. H_λ の閉包を $\bar{H}_\lambda$ とすると, 一般にはこれは特異点を持つ.

H_λ の定義がいまひとつよくわからないけど...... 点 x に dominant weight がささっている様子を考えているのではないのですか？ そしたら, coweight と言っている意味が分からない.

5. takebe: Hecke 対応 (1)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper 3
Date: 19 Oct 1995 09:13:59 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Oct19091359@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

Seminar があると思っていたら，お休みでした．と言う訳で，もうちょっと
だけあそぼ．

In article <NAKAJIMA.95Oct19010542@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:

> H_λ の定義がいまひとつよくわからないけど......

へい, あっしにも良く分かりません. ただ,

$$(x, F_1, F_2, \phi) \mapsto \phi \mapsto \lambda \in G(\mathcal{O}_x)\backslash G(K_x)/G(\mathcal{O}_x)$$

で, 最右辺が dominant coweight の全体 P_+, ということです. だから, この morphism の λ での fibre が H_λ と言う事と推測しています.

後, MacPherson $\mathcal{D}$-module の定義も書いてありますが, これは, [HT] の言葉では $\mathcal{O}_{H_\lambda}$ の $H_\lambda \hookrightarrow \bar{H}_\lambda$ という埋め込みに対応する極小拡大 $L(H_\lambda, \mathcal{O}_{H_\lambda})$ です.

尚, "Quantization of Hitchin's fibration and Langlands program" の方については, 内容的にはこれでほぼ 100 % お話しした事になります. たった 3 pages のものですから, 証明も何もついていません. 証明は一部は "opers" の方に書いてあるようですが, なにしろ記号も違うので, 辞書を作らないと分かりません. しばらくお待ち下さい.

お願いが一つ. どなたか, この一連の記事 (oper) を紙に印刷して送ってくれませんか. TeX でうち直してくれるともっとうれしい. こちらで日本語を印刷するのは大変そう. ちなみに, こちらは printer がひどい (Apple Laser Writer II) 上に, visitor は一学期当たり 500 pages までで, しかも 50 ドル前払いで払い戻し無し.

6. takebe: Hecke 対応 (2)

From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper 3
Date: 21 Oct 1995 02:59:20 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Oct21025920@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

中島先生の質問への返事への追加.

In article <TAKEBE.95Oct19091359@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:

> $$(x, F_1, F_2, \phi) \mapsto \phi \mapsto \lambda \in G(\mathcal{O}_x)\backslash G(K_x)/G(\mathcal{O}_x)$$
>
> で, 最右辺が dominant coweight の全体 P_+, ということです. だから, この morphism の λ での fibre が H_λ と言う事と推測しています.

$\phi \mapsto \lambda$ の所は, x の回りでの F_1, F_2 の trivialization を取って, それに関して ϕ を書けば $G(K_x)$ の元になる trivialization の取り方の任意性を両側から $G(\mathcal{O}_x)$ で割って消す, と言う事で良いでしょうか. この double coset が P_+ と一致する, と言う所はどういう対応を付けるのですか[6].

書き忘れてましたが, H_λ は $\mathrm{Bun}_G \times X$ 上 smooth で, relative dimension $= (\lambda, 2\rho)$ だそうです. ($2\rho = G$ の positive roots の和.) こういう事 ("smooth", "relative dim") は, どうやって調べるのですか. 意味の分かりやすい「いい加減な」説明と, 厳密にはどうやるのか, という事について, 教えて頂ければ幸いです. (文献とかも...)

"Opers" の方の紹介もする予定なのですが, なにしろ言葉がさっぱり分からない. 具体例の話になるともうちょっと分かりやすくなるようですが, 最初の 1 page 目に一般的な定義をする所でよく分からない単語が並んでいて, くじけそうです. 多分, その 1page をまるまるここに載せて, 御知恵拝借ということになると思いますのでよろしく.

7. ochiai: Hitchin Hamiltonian は moment map か?

```
Date: Wed, 29 Nov 95 19:02:31 JST
From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
Message-Id: <9511291002.AA19330@rkmath.rikkyo.ac.jp>
To: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp
Subject: Hitchin
```

10 月 18 日ごろのやり取りでヒッチン・ハミルトニアンの作る写像 π はモーメント写像と思っていいか, というやり取りがあるように思います[7]. 私はとりあえず, 中島さんの説に賛成. ただし, ちょっと留保があります.

$\pi : T^* \mathrm{Bun}_G \to V$ は

$$\mu : (\text{cotangent bundle of flag variety of G}) \to \mathrm{Lie}(G)^*$$

そのものに似ているというよりは, それを

$$\mathrm{proj} : \mathrm{Lie}(G)^* \to \mathrm{Lie}(G)^*//G \simeq \mathrm{Lie}(T)//W$$

という自然な射影と合成したものによりよく似ていると思います. (T : maximal torus of G, W : Weyl group of G, 同形 $\simeq$ はシェバレイの制限定理.)

これですと, 一般の型のときコクセタ・エクスポネントが出てくるのは自然な成り行きですし, 右辺は, , , あ, 右辺は $\mathrm{Lie}(T)//W$ ではなくて $\mathrm{Lie}(T)^*//W$ の間違いです. いまは, そういうデリケートなところをぎろんしていたのですよね.

いずれにしても, モーメント写像でしょう.

[6]* 第 8 節 (p. 16) に回答あり.
[7]* 第 4 節 (p. 12).

8. kuroki: Hecke 対応 (3) — Cartan 分解

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper 3
Date: 21 Oct 1995 07:03:36 JST
Message-ID: <KUROKI.95Oct21070337@take.math.tohoku.ac.jp>
```

第 3 節 (p. 9) の 7 における「ここで, $x \in X$ であり, F_1, F_2 は G-bundle であり, ϕ は $X - \{x\}$ での F_1 から F_2 への同型. このとき, ϕ は G の dominant coweight λ を決める.」の部分の説明です.

$\phi \mapsto \lambda$ なる対応は以下のように構成します. x の周りで F_1, F_2 の trivialization を取って, ϕ を $G(K_x)$ の元とみなし, trivialization の取り方の任意性を両側から $G(\mathcal{O}_x)$ で割って消すということになります. そして, Cartan 分解によって, $G(\mathcal{O}_x)\backslash G(K_x)/G(\mathcal{O}_x)$ の要素と positive coweight が一対一に対応することに注意すると, ϕ に対して positive coweight λ が対応することがわかります.

例えば, $F = \mathbb{C}((z))$, $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]]$ で $G = GL_n$ の場合なら簡単です:

$$GL_n(F) = \bigcup GL_n(\mathcal{O})\, t_a\, GL_n(\mathcal{O}) \qquad \text{(disjoint union)}.$$

ここで, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $t_a = \mathrm{diag}(z^{-a_1}, .., z^{-a_n})$ であり, a は例えば $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ の範囲を動きます.

SL_n の場合も同様ですが, a の動く範囲には $a_1 + \cdots + a_n = 0$ という条件が付け加わります. 証明は単因子論を使えば直ちに出るので, Jordan 標準形を習った学生の演習にはちょうど良い問題になります.

一般の場合は以下の通り ([Ca]).

F は $\mathbb{Q}_p$ や $\mathbb{F}_q((T))$ などの p 進体もしくは $\mathbb{C}((z))$ であるとし, 付値を $v : F \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ と表わす. ($F = \mathbb{C}((z))$ なら $v(z^{-n}) = n$.) $\mathcal{O} := \{\, f \in F \mid v(f) \geq 0 \,\}$ と置く. ($\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_q[[T]], \mathbb{C}[[z]], \mathrm{etc.}$) F 上の乗法群を $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ と表わす.

G は connected reductive algebraic group over F であるとし, 簡単のため $\mathbb{Z}$ 上 split すると仮定する. (GL_n や SL_n は当然 OK.) T を G の split maximal torus とし, $W := N_G(T)/T$ (Weyl 群) と置く.

$\mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_\mathrm{m})$ を G の weight lattice と呼び, $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_\mathrm{m}, T)$ を G の coweight lattice と呼ぶ. その間の complete pairing が

$$\mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_\mathrm{m}) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_\mathrm{m}, T) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_\mathrm{m}, \mathbb{G}_\mathrm{m}) = \mathbb{Z}$$

によって定まる. ($\to$ の部分は準同型の合成によって定まる写像.)

$t \in T$ に対して, coweight $v(t) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_\mathrm{m}, T) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_\mathrm{m}), \mathbb{Z})$ が

$$\mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_\mathrm{m}) \ni \lambda \mapsto v(t) := v(\lambda(t)) \in \mathbb{Z}$$

によって定まる.

positive coweights 全体の集合は coweight lattice を Weyl 群の作用で割ったものの代表系になっている.

positive coweight a に対して, $v(t) = a$ となる $t \in T$ をひとつ選び, それを t_a と書くことにする.

以上の記号のもとで次が成立する (Cartan decomposition):

$$G(F) = \bigcup G(\mathcal{O})\, t_a\, G(\mathcal{O}) \qquad \text{(disjoint union)}.$$

ここで, a は positive coweights の全体を走る.

9. kuroki: Hecke 対応 (4)

第 3 節 (p. 9) へのフォロー.

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper 3
Date: 21 Oct 1995 07:33:14 JST
Message-ID: <KUROKI.95Oct21073314@take.math.tohoku.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Oct18101348@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>:
```

> **予想 (Hecke eigenvalue property):** 任意の $\lambda \in P_+$ に対して, canonical isomorphism
> $$h_*(f^! E_\xi \otimes M_\lambda) \simeq E_\xi[n+1] \boxtimes V_R^\lambda,$$
> が存在する. ここで, $n = (\lambda, 2\rho)$ であり, V_R^λ は (R, ∇) と V^λ に対応する X 上の局所系.

なるほど! GL_n なんかの場合 (すなわち vector bundle の場合) の「普通の」Hecke 対応は fundamental coweights に対するもののみを考えていたことになるのですね.

principal G-bundle の点 x での modification を, "fundamental" なものに限らず, その全てを考えるというアイデアなのですね!

> **Theorem 3.** λ が $\hat{G}$ の microweight (*i.e.* $\bar{H}_\lambda = H_\lambda$, $M_\lambda = \mathcal{O}_{H_\lambda}$) ならば,
> $$i_x^! h_* f^! E_\xi \simeq E_\xi[n] \otimes V^\lambda,$$
> 但し, $i_x : \mathrm{Bun}_G \to \mathrm{Bun}_G \times X$ は $x \in X$ に対応する埋め込み.

microweight の example がないので, よくわからん$\cdots$.

10. nakajima: Hecke 対応 (5)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper 3
Date: 21 Oct 1995 09:57:56 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Oct21095756@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

まだ今一つピンときてないので, 馬鹿なことを言ってしまうかも知れませんが...

```
In article <KUROKI.95Oct21073314@take.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

> In article <TAKEBE.95Oct18101348@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>:
>
> > **7.** ξ は Langlands の意味で (R, ∇) に対応すると予想される. (つまり flag の data はいらない.) これは次のような意味である.
> >
> > $$H = (\text{“big” Hecke correspondence}) = (4 \text{ つ組 } (x, F_1, F_2, \phi) \text{ 全体のなす stack}).$$
> >
> > ここで, $x \in X$ であり, F_1, F_2 は G-bundle であり, ϕ は $X - \{x\}$ での F_1 から F_2 への同型.
> > このとき, ϕ は G の dominant coweight λ を決める. だから, H は locally closed substack H_λ による stratification を持つ. H_λ の閉包を $\bar{H}_\lambda$ とすると, 一般にはこれは特異点を持つ.

ふつうの parabolic bundle の定義とだいぶ違うので..... きっと似て非なるものなのだな. 次のような理解で大丈夫でしょうか?

(1) $G(F_x)/G(\mathcal{O}_x)$ に Schubert 分解みたいなものがある.

(2) X が unit disk のときは, H_λ は次のようなものを思い浮かべればよい.

$$G(F_x) \times_{G(\mathcal{O}_x)} (\text{Shubert cell}) \subset G(F_x)/G(\mathcal{O}_x) \times G(F_x)/G(\mathcal{O}_x)$$

包含写像と, 第一第二成分への射影が, 4 つ組 (x, F_1, F_2, ϕ) に対して F_1 と F_2 を対応させるものである.

(3) X がリーマン面のときも, まあだいたいそんなようなものである. (なんという理解の仕方だ....)

黒木先生これで間違ってませんか?

> > **予想 (Hecke eigenvalue property):** 任意の $\lambda \in P_+$ に対して, canonical isomorphism
> > $$h_*(f^! E_\xi \otimes M_\lambda) \simeq E_\xi[n+1] \boxtimes V_R^\lambda,$$
> > が存在する. ここで, $n = (\lambda, 2\rho)$ であり, V_R^λ は (R, ∇) と V^λ に対応する X 上の局所系.
>
> なるほど! GL_n なんかの場合 (すなわち vector bundle の場合) の「普通の」Hecke 対応は fundamental coweights に対するもののみを考えていたことになるのですね.

fundamental coweights というのは,

```
In article <KUROKI.95Oct21070337@take.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

> $F = \mathbb{C}((z))$, $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]]$ で $G = GL_n$ の場合なら簡単です:
> $$GL_n(F) = \bigcup GL_n(\mathcal{O})\, t_a\, GL_n(\mathcal{O}) \qquad \text{(disjoint union)}.$$
> ここで, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $t_a = \mathrm{diag}(z^{-a_1}, .., z^{-a_n})$ であり, a は例えば $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ の範囲を動きます.

でいうと, $a_i - a_{i+1}$ が, どれかの i だけ 1 でその他は 0 という意味でしょうか ? 普通の Hecke 対応は, GL_n のときでいうと

$$(F_1 \supset F_2 \supset F_1(-x))$$

という pair (F_1, F_2) で, F_2/F_1 が x の上に一次元のベクトル空間が乗っている skyscraper sheaf と思ってましたが...

> > **Theorem 3.** λ が $\hat{G}$ の microweight (*i.e.* $\bar{H}_\lambda = H_\lambda$, $M_\lambda = \mathcal{O}_{H_\lambda}$) ならば,
> > $$i_x^! h_* f^! E_\xi \simeq E_\xi[n] \otimes V^\lambda,$$
> > 但し, $i_x : \mathrm{Bun}_G \to \mathrm{Bun}_G \times X$ は $x \in X$ に対応する埋め込み.
>
> microweight の example がないので, よくわからん$\cdots$.

一般の λ だとまだ予想でしかないので, 一番簡単な microweight のときに確かめてみたということではないでしょうか ? microweight というのは, Schubert 分解のときでいえば, 一番小さい cell に対応するようなものではないですか? H_λ が closed な stratification になっていれば, 極小拡大 M_λ は $\mathcal{O}_{H_\lambda}$ になるでしょう. fundamental weight のときは, closed になってませんか?

```
In article <TAKEBE.95Oct21025920@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> 書き忘れてましたが, H_λ は $\mathrm{Bun}_G \times X$ 上 smooth で, relative dimension $= (\lambda, 2\rho)$ だそうです. ($2\rho = G$ の positive roots の和.) こういう事 (“smooth”, “relative dim”) は, どうやって調べるのですか. 意味の分かりやすい「いい加減な」説明と, 厳密にはどうやるのか, という事について, 教えて頂ければ幸いです. (文献とかも...)

$H_\lambda \to \mathrm{Bun}_G \times X$ の fiber は私の前の理解が正しければ, Schubert cell のようなものになります. だから, “smooth” はなんとなくいいかんじがする. 次元は, 計算してみないと....

11. kuroki: Hecke 対応 (6)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper 3
Date: 22 Oct 1995 10:39:17 JST
Message-ID: <KUROKI.95Oct22103917@take.math.tohoku.ac.jp>
```

H_λ の様子をなかなか想像できないのですが⋯.

In article <NAKAJIMA.95Oct21095756@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:

> fundamental coweights というのは,
>
> In article <KUROKI.95Oct21070337@take.math.tohoku.ac.jp>
> kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
>
>> $F = \mathbb{C}((z))$, $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]]$ で $G = GL_n$ の場合なら簡単です:
>>
>> $$GL_n(F) = \bigcup GL_n(\mathcal{O})\, t_a\, GL_n(\mathcal{O}) \qquad \text{(disjoint union)}.$$
>>
>> ここで, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $t_a = \mathrm{diag}(z^{-a_1}, .., z^{-a_n})$ であり, a は例えば $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ の範囲を動きます.
>
> でいうと, $a_i - a_{i+1}$ が, どれかの i だけ 1 でその他は 0 という意味でしょうか ? 普通の Hecke 対応は, GL_n のときでいうと
>
> $$(F_1 \supset F_2 \supset F_1(-x))$$
>
> という pair (F_1, F_2) で, F_2/F_1 が x の上に一次元のベクトル空間が乗っている skyscraper sheaf と思ってましたが...

以下では, GL_n の場合だけを考え, F_1, F_2 の代わりに E, E' と書き, principal bundle ではなく rank n の vector bundle の方で考えます.

だいたい中島さんの言う通りで, 私が “fundamental” なものとして想像していたものは,

$$a = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \qquad (1 \text{ が } i \text{ 個で}, 0 \text{ が } n - i \text{ 個})$$

の形の (co-)weight です．これに対応する t_a は,

$$t_a = \mathrm{diag}(z^{-1}, \dots, z^{-1}, 1, \dots, 1)$$

です．ϕ は同型

$$\phi : E \otimes F_x \xrightarrow{\sim} E' \otimes F_x$$

を与えるので, ϕ に t_a が対応しているということは, ϕ が t_a に見えるような E, E' の frame を x の近傍の取れるということなので, そのとき, ϕ を通して,

$$E \otimes \mathcal{O}_x(-x) \subset E' \otimes \mathcal{O}_x \subset E \otimes \mathcal{O}_x$$

が成立していることがわかります．結局, X 全体の上では, ϕ を通して,

$$E(-x) \subset E' \subset E$$

が成立し, 見慣れた式が出てきます．ただし, E/E' は x 上に i 次元のベクトル空間がのっている skyscraper sheaf になります．これが, T_i と書く Hecke operator に対応していたのではなかったでしょうか?

$G = GL_n$ の場合は principal G-bundle と rank n の vector bundle は同じものの別の姿であると思えるので, vector bundle の方で扱えば, 理解をし易くなるのでした．例えば, eigensheaf の formulation はだいたい

$$T_i(E_\xi) \simeq \bigwedge^i (V_\rho) \boxtimes E_\xi$$

のように簡明に書けます．ここで, V_ρ は X の基本群の n 次元表現に対応する X 上の connection ($\mathcal{D}$-module) で, $\bigwedge^i(\quad)$ はその外積であり, E_ξ は V_ρ に対応する Bun_G 上の $\mathcal{D}$-module です．(T_i は Hecke 対応.)

これの拡張として, Beilinson-Drinfeld は,

$$T_\lambda(E_\xi) \simeq V_{\lambda,\rho} \boxtimes E_\xi$$

という形の定式化を考えたのだと思います．ここで,

$\rho = (X$ の基本群の $\hat{G}$ での表現$)$,

$\lambda = (\hat{G}$ の有限次元既約表現 V_λ の highest weight$)$,

$V_{\lambda,\rho} = (\rho$ の定める基本群の V_λ における表現に対応する connection$)$,

$E_\xi = (\rho$ に対応する $\mathcal{D}$-module on moduli space of principal G-bundles$)$,

$T_\lambda = (\lambda$ に対して決まるある種の Hecke 対応を使って定義される functor$)$.

こういう感じの理解ができるのではないかと考えていたのですが….

でも, 中島さんの記事を読んでも, H_λ の様子を想像できないのが残念!!

点付きの場合の話 (分岐する場合も含めた理論) に関して, eigensheaf の定式化がどのようになるかについて, 武部さんの持っている原稿には書いてありますか?

E. Frenkel の q-alg に出たやつを読むと, 点付きの genus が 0 の場合では, ρ が trivial 表現になる場合の話が, 量子可積分系の話 (Gaudin model) において非常に重要だということになっています. trivial 表現のようなものだけではあまり情報量は多くないはずですから, どこにトリックが隠れているのかはっきり明確に Langlands program の言葉で理解したいのですが, まだよくわかりません[8].

12. nakajima: Hecke 対応 (7)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper 3
Date: 22 Oct 1995 16:26:06 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Oct22162606@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.95Oct22103917@take.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

| でも, 中島さんの記事を読んでも, H_λ の様子を想像できないのが残念!!

H_λ が closed でないというのは, どういうことかを考えればいいのではないかな?? だいたい, こういう問題のときは H_λ が global にどうなっているかが重要なのではなく, H_λ の閉包の中に他の stratum H_μ がどのように入っているかが大切なはずだ. そして, 私の直観が間違ってなければ, Schubert cell を思い浮かべれば, 似ているはずだ. $G(F_x)/G(\mathcal{O}_x)$ の Schubert cell は, きちんとした理論がないとは思えない. それを理解するのがまず第一歩かな??

curve が Riemann sphere のときは, 全てのベクトル束は, 直線束の直和になるわけでその分かれ方によって stratification を入れるのは非常に自然です. 例えば, rank 2 で $c_1 = 0$ ならば, $\mathcal{O}(0) \oplus \mathcal{O}(0)$ が open stratum で, 以下 $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1)$, $\mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(-2)$, ... と段々小さくなっていきます. 一般の genus のときには, Harder-Narashimhan filtration というのがあって, (黒木先生の言われていた単因子論です) そのタイプによって stratification をいれるのは自然です. でも, Laumon の論文を見ていたらもう少し細かい stratification を入れなくてはいけないようなことがかいてあったような気もします.

13. kuroki: 辞書 Version 0.1

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: 辞書 v.0.1
Date: 20 Oct 1995 03:58:46 JST
Message-ID: <KUROKI.95Oct20035846@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

[8]* これについては 第 58 節 (p. 80) の Bethe Ansatz の話も参照せよ.

これ以上書く気はあまりないのですが, こんなのを少し書いてみました.

13.1. affine Lie algebra

複素有限次元半単純単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の loop algebra $L\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}((z)) = \mathfrak{g}\Big(\mathbb{C}((z))\Big)$ の universal central extension のこと. 以下 において, affine Lie algebra を $\hat{\mathfrak{g}}$ と表わす.

Riemann 面上の理論では, p 進体上の簡約群の代わりにこれを扱う. affine Lie algebra の critical level における表現論は p 進代数群の表現論の類似になっている.

13.2. classical Drinfeld-Sokolov reduction

affine Lie algebra に関するある種の Hamiltonian reduction のこと.

$\mathfrak{g}$ は有限次元単純 Lie 環とし, $\hat{\mathfrak{g}}$ は対応する affine Lie algebra であるとする. $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}$ の maximal nilpotent subalgebra であるとし, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$ に対応する群を G, N と書くことにする.

$\hat{\mathfrak{g}}$ の dual space $\hat{\mathfrak{g}}^*$ は無限次元空間だが Poisson structure を持つとみなせる. Poisson bracket は

$$S(\hat{\mathfrak{g}}) = \operatorname{gr} U(\hat{\mathfrak{g}})$$

から自然に定まるものを考える. $\hat{\mathfrak{g}}^*$ は (dual space の取り方を適切に定めると),

$$k\frac{d}{dz} + A(z) \qquad (k \in \mathbb{C},\, A(z) \in L\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}((z))\,)$$

の形の作用素 (“k-connection”) の空間と同一視できる. ($k\frac{d}{dz}$ は affine Lie algebra の centar の dual の元 (level) であるとみなす.) そして, loop 群 $L(G) = G\Big(\mathbb{C}((z))\Big)$ の $\hat{\mathfrak{g}}^*$ への coadjoint 作用は connection の gauge 変換と一致する.

$k =$ 一定 $(\neq 0)$ の部分空間を $\hat{\mathfrak{g}}^*_k$ と表わす. $\hat{\mathfrak{g}}^*_k$ にも自然に Poisson structure が入っていると思うことができる. (structure ring は大体 $\operatorname{gr} U_k(\hat{\mathfrak{g}})$ であると思う. ここで, $U_k(\hat{\mathfrak{g}}) = U(\hat{\mathfrak{g}})/(K-k)$. ここで, K は $\hat{\mathfrak{g}}$ の canonical central element.)

loop 群 $L(N) = N\Big(\mathbb{C}((z))\Big)$ は $\hat{\mathfrak{g}}^*_k$ に自然に作用する. その moment map は $\hat{\mathfrak{g}}^*_k$ から $L\mathfrak{n}^*$ への自然な projection である. それを π_k と書くことにする:

$$\pi_k : \hat{\mathfrak{g}}^*_k \to L\mathfrak{n}^*.$$

p を $L\mathfrak{n}$ のある定められた character であるとする. このとき, $p \in L\mathfrak{n}^*$ は $L(N)$ の coadjoint action の fixed point になる. affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ の $(\mathfrak{n}, k, p)$ に関する Drinfeld-Sokolov reduction とは, 適切な意味付けによって定義される

$$X = \pi_k^{-1}(p)/L(N)$$

のことである. 形式的には, $\hat{\mathfrak{g}}^*_k$ の Poisson structure は X の Poisson structure を導く. 厳密な意味付けは無限次元の状況なので non-trivial である.

X の Poisson structure の定める Lie algebra は **Gelfand-Dikii algebra** と呼ばれている.

Remark. $k \neq 0$ のとき, (k, p) と $(1, k^{-1}p)$ に対する Drinfeld-Sokolov reduction は互いに同型になる. maximal nilpotent subalgebra $\mathfrak{n}$ の取り方は conjugate を除いて一意的なので $\mathfrak{n}$ の取り方に X の構造はよらない.

$S_k(\hat{\mathfrak{g}}) = \operatorname{gr} U_k(\hat{\mathfrak{g}})$ と置く. 大体において $\operatorname{Spec} S_k(\hat{\mathfrak{g}}) = \hat{\mathfrak{g}}_k^*$ であると思う. $S(L\mathfrak{n})$ は $S_k(\hat{\mathfrak{g}})$ の subalgebra とみなせる. $f \in S(L\mathfrak{n})$ に対する $f - p(f)$ から生成される $S_k(\hat{\mathfrak{g}})$ の ideal を $I(n,p)$ と書く. 可換環 B を

$$B = [S_k(\hat{\mathfrak{g}})/I(n,p)]^{L(N)}$$

と定める. ここで, $[\ \ ]^{L(N)}$ は loop 群 $L(N)$ の作用に関する invariant subspace を取る操作を表わす. このとき, 大体において $X = \operatorname{Spec} B$ が成立していると思える.

さらに, 適切に定式化を行えば, B は次のような complex $C(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, k, p)$ の 0 次の cohomology に同型になる:

$$C(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, k, p) = S_k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge(L\mathfrak{n}) \otimes \bigwedge(L\mathfrak{n}^*).$$

$C(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, k, p)$ は Poisson superalgebra とみなせ, differential はそのある特定の元との Poisson bracket を取る作用によって定義される.

この complex を

$$\begin{aligned} &S_k(\hat{\mathfrak{g}}) \mapsto U_k(\hat{\mathfrak{g}}), \\ &\bigwedge(L\mathfrak{n}) \otimes \bigwedge(L\mathfrak{n}^*) \mapsto \mathrm{Cl}(L\mathfrak{n} \oplus L\mathfrak{n}^*) \end{aligned}$$

なる置き換えによって量子化することによって, quantized Drinfeld-Sokolov reduction が定義される. ここで, Cl( ) は Clifford algebra を表わす.

13.3. quntized Drinfeld-Sokolov reduction

classical Drinfeld-Sokolov reduction の量子化のこと. 以下 QDSR と略.

affine Lie algebra に対する Hecke algebra の類似を構成するために用いられる. しかし, 問題になるのは Hecke algebra の定義である.

一つの立場は, 群 G とその部分群 H の対 (G, N) に対する Hecke algebra とは, G の表現の N に関する (co-)invariant space に作用する「普遍的な」代数のことであるという見方に立つことである.

(co-)invariant space を取るという操作の導来函手は N に関する (co-)homology である. 状況が非常に良ければ acyclic になり 0 次の (co-)homology のみを考えれば良いのだが, 一般にはそうとは限らない. そこで, N に関する (co-)homology に作用する「普遍的な」代数のことを Hecke algebra であるとみなす考え方をとる.

QDSR のアイデアはこの立場のもとで Hecke algebra の類似を考えることである. ただし, 普通の (co-)homology の代わりに, affine Lie algebra の表現の modify された semi-infinite (co-)homology を考える点が non-trivial である.

QDSR によって得られた algebra は Feigin-Frenkel の W-algebra と呼ばれている.

QDSR によって得られた local な Hecke algebra の類似物と correspondence によって定義される global な Hecke algebra の関係は大変重要である. (まだよくわかってないので調べなければいけない.)

13.4. semi-infinite (co-)homology

有限次元単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現の maximal nilpotent subalgebra n に関する Lie algebra (co-)homology の affine Lie algebra に対する類似物.

有限次元単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその maximal nilpotent subalgebra $\mathfrak{n}$ を考える. $\mathfrak{g}$ の表現 M の $\mathfrak{n}$ に関する standard homology complex $C(\mathfrak{n}, M)$ は

$$C(\mathfrak{n}, M) = M \otimes \bigwedge(\mathfrak{n})$$

と定義される. $C(\mathfrak{n}, M)$ の degree は $\bigwedge(\mathfrak{n})$ の degree として定義する. $C(\mathfrak{n}, M)$ の differential は algebra

$$U(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{Cl}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^*)$$

の元として定義可能である. ($\mathrm{Cl}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^*)$ は $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^*$ から生成される Clifford algebra を表わす.)

$\mathfrak{n}$ の loop algebra $L\mathfrak{n} = \mathfrak{n} \otimes \mathbb{C}((z))$ は $\mathfrak{g}$ に対応する affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ の subalgebra になっている. $\hat{\mathfrak{g}}$ の level k の表現 M に対して, $L\mathfrak{n}$ に関する semi-infinite standard complex が, 上の類似として,

$$C(L\mathfrak{n}, M) = M \otimes \bigwedge^{\infty/2+\bullet}(L\mathfrak{n})$$

のように定義される. ここで, $\bigwedge^{\infty/2+\bullet}(L\mathfrak{n})$ は無限次元 Clifford algebra $\mathrm{Cl}(L\mathfrak{n} \oplus L\mathfrak{n}^*)$ が作用する semi-infinite exterior products の空間である. $C(L\mathfrak{n}, M)$ の differential は algebra

$$A = U_k(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathrm{Cl}(L\mathfrak{n} \oplus L\mathfrak{n}^*) \text{ のある種の完備化}$$

の元として定義可能である. (A が $C(L\mathfrak{n}, M)$ に自然に作用することに注意せよ.) ここに現われる無限次元の Clifford algebra の元は Fermion と呼ばれることが多い. differential d の具体的な式は, affine Lie algebra と Fermion の母函数 (field operator とも言う) および normal product を用い, 有限次元の場合の diffrential の公式の直接的な類似でもって定義することになる.

なお, 上記の algebra A と differential d の組は differential graded Lie algebra (Lie superalgebra と言うこともある) を為す. d と A の 元の (super-)bracket が A に differential を定めるのである. degree は Fermion の degree である.

$\hat{\mathfrak{g}}$ の quantized Drinfeld-Sokolov reduction は, この differential を $L\mathfrak{n}$ の character p によって少し modify したものに関する (co-)homology として定義される. それは, p によって modify された semi-infinite standard complex の (co-)homology に自然に作用する. k を generic にして A の gr を取って可換の世界に持っていったものは, classical Drinfeld-Sokolov reduction を与える.

13.5. Wakimoto module

p 進体上の群の主系列表現の affine Lie algebra に対する類似物.

affine Lie algebra の Wakimoto module を知らないということは, 通常の表現論における主系列表現を知らないということと同じである.

主系列表現とは Borel subgroup の 1 次元表現から誘導される簡約群の表現のことだが, affine Lie algebra の場合にそれを単純に実行すると admissible 表現を作ることができない. p 進体上の簡約群の場合は p 進体の剰余体の有限性より, Borel から誘導された表現は admissible になる. $\mathbb{C}$ 上の理論では単純にはうまくいかない.

そこで, string theory や conformal field theory などで物理学者が頻繁に用いた normal product という無限大を人為的に引き去る処方箋を用いる. そのため, loop Lie algebra そのものの表現はできず, level が $-h^\vee$ ($h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の dual Coxeter number) の affine Lie algebra の表現 (critical level の表現) ができてしまう.

さらに少し工夫すれば, level を一般の k にずらした表現が構成可能である. それを Wakimoto module と言う. affine Lie algebra の Wakimoto module の character は Verma module の character に等しい.

通常の表現論では主系列表現は基本的な役割を果たす. それと同様に affine Lie algebra の critical level における表現論では Wakimoto module が基本的な役割を果たす.

14. takebe: "Opers" ([BD1]) の 1 ページ目の内容 (oper 4)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: oper No 4.
Date: 24 Oct 1995 07:16:29 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Oct24071629@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

Beilinson and Drinfeld の "Opers" ([BD1]) の 1 page 目の内容 (言葉の定義だけです) をほぼそのまま写します.

Section 1. ***G*-opers and $\mathfrak{g}$-opers**

1.1. 記号の準備.

以下の記号を用いる:

$G =$ 複素数体上の連結 reductive 群, $\quad B =$ Borel 部分群, $\quad H =$ Cartan 部分群,

$\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{h}$: 対応する Lie 環,

$\Gamma = \{\mathfrak{b}$ に対応する simple roots$\}$, $\quad \mathfrak{g}^\alpha = \alpha$ に対応する root 部分空間.

$\mathfrak{g}$ の grading $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_k$ を

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}, \qquad \mathfrak{g}_1 = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathfrak{g}^\alpha, \qquad \mathfrak{g}_{-1} = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathfrak{g}^{-\alpha}$$

となるように決める (unique). これで, B-不変な filtration

$$\mathfrak{g}^k = \bigoplus_{r \geq k} \mathfrak{g}_r$$

が決まる.

Y は複素数体上の滑らかな代数曲線であり, F は Y 上の B-bundle であるとする. これに対して,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_F &= F \text{ の無限小 symmetries の algebroid}, \\
\mathcal{E}_F^{\mathfrak{g}} &= F \text{ に対応する } G\text{-bundle の無限小 symmetries の algebroid}, \\
\mathfrak{b}_F &= \mathfrak{b} \text{ の } F\text{-twist}, \qquad \mathfrak{g}_F = \mathfrak{g} \text{ の } F\text{-twist}
\end{aligned}$$

とすれば,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{b}_F & \longrightarrow & \mathcal{E}_F & \longrightarrow & \mathcal{T}_Y & \longrightarrow & 0 \qquad \text{(exact)} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}_F & \longrightarrow & \mathcal{E}_F^{\mathfrak{g}} & \longrightarrow & \mathcal{T}_Y & \longrightarrow & 0 \qquad \text{(exact)}
\end{array}$$

という可換図式を得る. (左の 2 つの $\downarrow$ は inclusion です. $\mathcal{T}_Y$ は Y の tangent sheaf.)

$\mathfrak{g}_F$ には filtration $\mathfrak{g}_F^k$ があるが, これから, $\mathcal{E}_F^{\mathfrak{g}}$ の filtration を $\mathfrak{g}_F^k/\mathfrak{b}_F$ の

$$\mathcal{E}_F^{\mathfrak{g}} \to \mathcal{E}_F^{\mathfrak{g}}/\mathcal{E}_F = \mathfrak{g}_F/\mathfrak{b}_F$$

による引き戻しとして定める. すると,

$$\mathcal{E}_F^{-1}/\mathcal{E}_F = \mathfrak{g}_F^{-1}/\mathfrak{b}_F = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}_F^{-\alpha}.$$

ここで, $\mathfrak{g}_F^{-\alpha}$ は B-bundle $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ の F-twist. ($\mathfrak{g}^{-\alpha}$ への B の作用は $B \to H \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}^{-\alpha}$ で定まる.)

1.2. reductive group G に対して G-oper を定義.

Definition. Y 上の G-oper とは, Y 上の B-bundle F で次のような接続 $\nabla : \mathcal{T}_Y \to \mathcal{E}_F^{\mathfrak{g}}$ を持つものである:

(i) $\nabla(\mathcal{T}_Y)$ は $\mathcal{E}_F^{-1}$ に含まれる.

(ii) 任意の $\alpha \in \Gamma$ に対して,

$$\mathcal{T}_Y \to \mathcal{E}_F^{-1} \to \mathcal{E}_F^{-1}/\mathcal{E}_F \to \mathfrak{g}_F^{-\alpha}$$

は同型である.

G-oper の同型は自然に定義できるから, Y 上の G-oper 全体は groupoid になる.

15. kuroki: Principal bundle に付随する Lie algebroid

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper No 4.
Date: 24 Oct 1995 21:42:02 JST
Message-ID: <KUROKI.95Oct24214202@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

基本的な言葉については文献 [HS] と [BB] が参考になると思います. [HS] は Beilinson-Schechtman による CFT の枠組を curve から高次元の多様体に一般化する話に関係しています. [BB] は, 1981 年に証明できていたことを発表するというものです. 前半は sheaf of tdo の一般論が書いてあります. どちらも, Lie algebroid[9] の枠組が基本的な言葉として採用されています. Lie groupoid や Lie algebroid の differential geometry の範中での解説書として, [Mack] という本もあるようです.

以下の文章の説明をしましょう:

> Y は複素数体上の滑らかな代数曲線であり, F は Y 上の B-bundle であるとする. これに対して,
>
> $$\mathcal{E}_F = F \text{ の無限小 symmetries の algebroid},$$
> $$\mathcal{E}_F^{\mathfrak{g}} = F \text{ に対応する } G\text{-bundle の無限小 symmetries の algebroid},$$
> $$\mathfrak{b}_F = \mathfrak{b} \text{ の } F\text{-twist}, \qquad \mathfrak{g}_F = \mathfrak{g} \text{ の } F\text{-twist}$$
>
> とすれば, $\cdots$

$\mathfrak{b}_F$ は F と B の $\mathfrak{b}$ への adjoint action から定まる vector bundle です. (こちらは説明の必要はないと思います.) Y 上の Lie algebra の構造も自然に入ります. すなわち, $\mathfrak{b}_F$ を sheaf と見たとき, $\mathfrak{b}_F$ は $\mathcal{O}_Y$ 上の Lie algebra になる.

projection $F \twoheadrightarrow Y$ を π と書くとき, $\mathcal{E}_F$ は sheaf として,

$$\mathcal{E}_F = [\pi_*(\mathcal{T}_F)]^B$$

と定義されます. $\mathcal{T}_F$ は F の tangent sheaf であり, $[\ ]^B$ は B の作用による invariant subsheaf を取るという操作を表わします. fiber に沿った B-invarinat な vector fields on F の空間と $\mathfrak{b}_F$ を同一視することにします. このとき, $\mathcal{E}_F$ から $\mathcal{T}_Y$ への projection によって, 次の exact seqence が定まります:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{b}_F & \longrightarrow & \mathcal{E}_F & \longrightarrow & \mathcal{T}_Y & \longrightarrow & 0 \qquad \text{(exact)} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}_F & \longrightarrow & \mathcal{E}_F^{\mathfrak{g}} & \longrightarrow & \mathcal{T}_Y & \longrightarrow & 0 \qquad \text{(exact)}
\end{array}$$

[9]* 第 35 節 (p. 49) に Lie algebroid の定義が書いてある.

$\mathcal{E}_F^{\mathfrak{g}}$ は F から誘導される principal G-bundle を使って同様に定義されます. このような exact sequence のことを, Atiyah の short exact sequence と言うこともあります ([A]). 局所的に trivialization を取って見てやると, $\mathcal{E}_F$ の元は次のような 1 階の微分作用素の形をしています:

$$f(z)\frac{d}{dz} + B(z) \qquad (B(z) \text{ は } \mathfrak{b}\text{-valued function}).$$

$\mathcal{E}_F$, $\mathcal{E}_F^{\mathfrak{g}}$ をなぜ infinitesimal symmetries の (Lie) algebroid と言うかについて少しだけ説明しましょう. $\mathfrak{b}_F$ は principal B-bundle F の gauge 群の Lie 環です. つまり, $\mathfrak{b}_F$ は fiber に沿った方向のみに関する F の無限小 symmetry であると言えます. Y 方向 (fiber に trasversal な方向) についても無限小の動きを許して考えたものが $\mathcal{E}_F$ になります.

[BS] や [HS] の内容は curve と principal bundle の pair $F \to Y$ の無限小変形を $H^1(Y, \mathcal{E}_F)$ ととらえることが基礎になっています. 一般に, ○○の無限小変形の空間は, ○○の無限小 symmetry の H^1 になると考えることができます. (Čech の cohomology で考えると, その H^1 は貼り合わせによって作った○○の貼り合わせ方の無限小変換の空間であると解釈できる.)

次の定義の内容についても少しコメントしておきます.

> **Definition.** Y 上の G-oper とは, Y 上の B-bundle F で次のような接続 $\nabla : \mathcal{T}_Y \to \mathcal{E}_F^{\mathfrak{g}}$ を持つものである:
>
> (i) $\nabla(\mathcal{T}_Y)$ は $\mathcal{E}_F^{-1}$ に含まれる.
>
> (ii) 任意の $\alpha \in \Gamma$ に対して,
>
> $$\mathcal{T}_Y \to \mathcal{E}_F^{-1} \to \mathcal{E}_F^{-1}/\mathcal{E}_F \to \mathfrak{g}_F^{-\alpha}$$
>
> は同型である.

$\mathcal{O}_Y$-homomorphism $\nabla : \mathcal{T}_Y \to \mathcal{E}_F^{\mathfrak{g}}$ で $\mathcal{E}_F^{\mathfrak{g}} \to \mathcal{T}_Y$ の section になっているものと F から誘導される principal G-bundle 上の connection は同じものの別の表現に過ぎません.

(i) の条件は, F の local trivialization をとって,

$$\nabla\left(\frac{d}{dz}\right) = \frac{d}{dz} + A(z)$$

と書くとき, $A(z)$ が,

$$A(z) = \begin{bmatrix} * & & & & * \\ ? & * & & & \\ & ? & \ddots & & \\ & & \ddots & * & \\ 0 & & & ? & * \end{bmatrix}$$

のような形をしているということです.

さらに, (ii) の条件を仮定するということは, 上の ? の部分に現われる函数が零点を持たないと仮定するということになります.

Principal bundle 上の connection の formulation を奇麗に整理し, そちらの奇麗な言葉を使って書き直したということのようですね.

16. nakajima: 自己紹介 (1)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: self-introduction
Date: 25 Oct 1995 07:45:44 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Oct25074544@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

せっかくいろいろなところからアクセスがあるようなので, 自己紹介をしたいと思います. (geometric Langlands の話しに急に参加できるような人が多いとは思えない)

中島 啓@東大数理, 昨年度東北大と申します. 研究していることは,

(1) 箙多様体という対象を用いて, Kac-Moody Lie algebra(の展開環) やその q-類似を研究すること.

(2) 4 次元多様体の上のゲージ理論について, アフィン・リー環の対称性を見い出すこと. これは, 最近始めたばかりなので, いろいろと実験をしている段階です.

17. takebe: 自己紹介 (2)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: self-introduction
Date: 25 Oct 1995 08:51:16 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Oct25085116@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

中島先生がする必要があるかどうかは問題ですが, それは置いといて, 私も自己紹介させて頂きます.

数理物理を研究しております武部 尚志と申します. 東大数理科学研究科助手ですが, 現在, 日本学術振興会の海外特別研究員として, University of California at Berkeley に滞在中です. と言う訳で, 「UCB の」という枕言葉をつけていながら, mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp から書き込んでいます.

今時「数理物理」と言ったって広すぎて限定できませんが, 広い意味で可積分系を研究しております. 具体的には,

(1) 可積分な非線形偏微分方程式系である KP hierarchy や戸田格子 hierearchy を代数解析的に調べるいわゆる佐藤理論. 最近では, その位相的弦理論への応用に興味があります.

(2) 統計力学に於ける可解格子模型, 特に楕円型 R 行列と関係した模型. 例えば, この間まで一般化した eight vertex model の S 行列を Bethe Ansatz で計算していました. ほとんど物理です. これを, 博士論文にしてしまった. 楕円関数, テータ関数の計算に強いと思っていますが, 東北大の長谷川さんには負けます.

なんで, こんな私が "geometric Langlands program" なんかに興味を持ったかと申しますと, 最近 E. Frenkel らによってこの話が上の 2. に関係しているという事が言われているからです. 詳しくは [Fr2] か, 黒木さんによるその解説を www で見て下さい. 私自身は楕円型 Gaudin 模型の変数分離 (Sklyanin の意味で) を Sklyanin と一緒に考えているのですが, これは genus 1 の場合の geometric Langlands の話と関係があるらしいと思われます.

Beilinson and Drinfeld の論文は, 以前にも書きましたようにロシア人の知合いから手にいれました. 1990 年 10 月から 1991 年 9 月まで Leningrad/St. Petersburg に留学し, Moscow にも何度か行ったのでその時のコネ等です.

18. nakajima: Hecke 対応が作る algebra (1)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Ginzburg
Date: 27 Oct 1995 07:36:44 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Oct27073644@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Oct27022234@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

| 昨日から Victor Ginzburg がこちらに来ています. 昨日は表現論の seminar

まだ, 帰ってないとしたらよろしく言っておいて下さい. シカゴではどうもお世話になりましたと.

UCB に Grojnowski という人がいるはずですが, 彼とは会ったことがありませんが, 仕事が重なったりしているのでメールのやりとりがあります. 彼にもよろしく. いつか日本に呼びたいと思ってます.

> で "Hecke algebra araising from a double loop group" という話をしていました．2 次元の局所体 K 上で Hecke 環を作る, という話で,
>
> $$H\Big(G(K)//G(\mathcal{O})\Big) = \mathrm{gr}\,(\text{ある Heisenberg alg の Weyl inv. part}),$$
> $$H\Big(G(K)//I\Big) = \mathrm{gr}\,(\text{Cherednik の double affine Hecke}),$$
>
> とか．($K = k((u))$, $k = \mathbb{F}_p((v))$, $\mathbb{F}_p$: p 元体, $\mathcal{O} = \mathbb{F}_p[[v]] + uk[[u]]$, I : Iwahori subgroup) 表現は楕円曲線上の (G の Langlands dual)-bundle, resp., Higgs bundle でparametrize される, とか．よく分からん．Parshin tree とかの話は楽しそうだけど．
> あとで NSF への彼の research proposal というのを覗き見した所では,「動機の一つは中島啓の仕事にある」, と書いてありました．どの仕事がどう繋がっているのか教えて頂けませんか?

ううむ, こういう企業秘密を公開の場でばらしてしまったらどうなるのだろうか? でも科研費のプロポーザルには書いているし, まあいいか.

私の仕事は, ALE 空間という複素 2 次元で Dynkin 図式の形で $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ が埋め込まれている空間の上のベクトル束のモジュライのホモロジー群とか, constructible functions の空間とかの上に convolution を考えて, できる algebra が Kac-Moody algebra になるということです．ここでは, convolution は, Hecke 対応が作る積分作用素です．Riemann 面のときと全く同じ定義ですが, 点の回りでひねる Hecke 対応だけでなく, 曲面の回りでひねるものが出てくるところが新しいところです．この構成は, おそらくもっと一般の複素曲面とそれに埋め込まれている曲線についてできると考えられています．今のところ $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ でないとどんな algebra になりそうか見当がつかないのですが......

複素 1 次元のときは, Hecke 対応が作る algebra は可換で, Langlands 対応でできる $\mathcal{D}$-module はその同時固有関数になると予想されているわけですね．しかし, 曲面にするといろいろと非可換の面白い algebra がでてくるようです．Cherednik の double Hecke algebra や toroidal algebra とか言われている algebra は, affine Hecke algebra や affine Lie algebra をもう一回 affine 化した algebra と考えられるわけですが, この algebra も現れることを予想しています．さらにその表現のパラメトリゼーションもできるはず．

ちなみに, さき程の Grojnowski の announcement によれば affine QUE の有限次元表現のパラメトリゼーションは箙多様体の幾何で与えられる．黒★先生, 長★川先生に教えていただいたことによると, パラメトリゼーション自身は Drinfeld の読めない論文に書いてあるそうですが... affine sl_n のときは難しくない．Jimbo map を使うとできる．なぜ難しくないのかも箙多様体の幾何で説明できますが....

以上, できている話しではないので, 非常におおざっぱな話しでした．多分理解不能だと思います．清水さんが企画されている geometric Langlands symposium で複素曲面の部分についてはお話しできると思います．その前にレジュメを shitan.math に投稿する予定ですので, お楽しみに.

19. nakajima: Hecke 対応が作る algebra (2)

From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Ginzburg
Date: 27 Oct 1995 12:18:29 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Oct27121829@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Oct27095425@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:

>> UCB に Grojnowski という人がいるはずですが, 彼とは会ったことがありませんが, 仕事が重なったりしているのでメールのやりとりがあります. 彼にもよろしく. いつか日本に呼びたいと思ってます.
>
> います. 変な人です. 最近まで MIT にいて Lusztig と仕事をしていたようです. よく会います. 特に Givental の講義には必ず出て来ています. 分かって聞いているのは彼くらいのようです. この前, 彼が表現論の seminar で話した時は perverse sheaf の equivariant K theory と Hodge modules を使って量子群を作る, といった話をしていましたが, Reshetikhin 以下参加者全員が「K 群って? 説明して」, と言ったもんだから「何てこった」と頭を抱えていい加減な話になりました.
>
> # 東北で私が「ideal 類群って何ですか」と加藤先生に質問した時と似たよう
> # なもんです.
>
> この仕事については preprint を立教の落合啓之氏におくりました. その内 alg-geom にでも載るでしょうが.

箙多様体の上で equivariant K-theory を考えるというアナウンスメントは知っているのだけれど, それの証明かなあ? 論文のタイトルはなんですか?

>> 点の回りでひねる Hecke 対応だけでなく, 曲面の回りでひねるものが出てくる
>
> この捻るという所がよく分からない (知らない) のですが, Hecke 対応 (古典的 ?) の説明は何を見るのが良いでしょうか.

shitan.math の 武部さんの記事の oper 3 がよろしいかと思います[10]. (^_^)

7. に Hecke 対応の説明があります. 二つのベクトル束があって点 x の外では同型なので, これは x の回りで捻るという感じを表わしてます. もしこれでも納得行かなければ, 直線束のときに

$$L = x \text{ で消えている正則関数の芽の層} \mapsto \mathcal{O} = \text{正則関数の芽の層}$$

[10] * 第 3 節 (p. 9).

を考えれば, L と $\mathcal{O}$ は x を除いたところで同型で, L は x の回りで $\mathcal{O}$ を捻っている感じがつかめるのではないかと思います[11].

それからなぜ, これが古典的なモジュラー形式の Hecke 対応に対応するかということについては, モジュラー形式の教科書を見て

リーマン面	素数全体
ベクトル束のモジュライ上の関数とか $\mathcal{D}$-加群	モジュラー形式

という対応があるなあ, と分かると納得がいくと思います. これで理解可能とはとても思えませんが, もし興味があれば [Gel] を見てください[12]. (もう見ているかとは思いますが.......)

20. takebe: Hecke 対応が作る algebra (3)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Ginzburg
Date: 28 Oct 1995 04:03:46 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Oct28040346@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

20.1. Grojnowski について

```
In article <NAKAJIMA.95Oct27121829@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:
```

> 箙多様体の上で equivariant K-theory を考えるというアナウンスメントは知っているのだけれど, それの証明かなあ? 論文のタイトルはなんですか?

“Affinizing quantum algebras: from D-modules to K-theory” です.

こういうでかい題の論文を一生に一度くらいは書いて見たいものです.

中身は全然見ていませんが,「エビラの表現の moduli 空間の上のある種の偏屈層にたいして central charge = 0 の affine Kac-Moody Lie 環を対応させる.」のだそうです. Abstract だけでもいろんな言葉が出て来て,「嫌味な奴だ」とひがんでしまいます. それはともかく, Nakajima: Instantons on ALE spaces, quivrs and Kac-Moody algebras, を使いながら $U_q\hat{\mathfrak{g}}$ の有限次元表現論をするとか.

[11] リーマン面では L は直線束となりますが, 複素曲面で同じものを考えると L は torsion-free sheaf ですが locally free でない sheaf になります. このような torsion-free sheaf を集めたモジュライ空間が Hilbert scheme になって, そのホモロジー群に Heisenberg algebra が作用することが証明できます. (alg-geom/9507012)

[12] * Langlands program の入門には [Bo] も良い.

20.2. Vector bundle を捻る話

> > この捻るという所がよく分からない (知らない) のですが, Hecke 対応 (古典的 ?) の説明は何を見るのが良いでしょうか.
>
> gnus shitan の 武部さんの記事の oper 3 がよろしいかと思います. (^_^)

訳も分からずにやっているのがばれてますね (^_^);; とはいえ, 「捻る」という言葉の定義というかイメージはなんとなくでも分かっているつもりなのですが, (KP の Krichever map とかの話でもでてきましたし) 今の場合に捻るのに何のご利益があるのかが, さっぱり.

> | リーマン面 | 素数全体 |
> | --- | --- |
> | ベクトル束のモジュライ上の関数とか $\mathcal{D}$-加群 | モジュラー形式 |
>
> という対応があるなあ, と分かると納得がいくと思います. これで理解可能とはとても思えませんが, もし興味があれば

????? です. この表だけ覚えて分かったふりくらいはできるかもしれませんが, 多分分かっている人にはこれで分かるのでしょうね. (なんのこっちゃ)

21. nakajima: Hecke 対応が作る algebra (4)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Ginzburg
Date: 28 Oct 1995 08:01:24 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Oct28080124@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Oct28040346@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> “Affinizing quantum algebras: from D-modules to K-theory” です.

この論文は持ってます. q-alg に投稿したのかと思ってました.

谷崎さんの Hodge module を使って Hecke algebra と affine Hecke algebra を構成する話しを知っていれば, ほぼ明らかかと思います. 箙の表現のモジュライを旗多様体のかわりに使えば良いわけです. 詳しいことは, 企業秘密なので省略します. どうしても知りたいかたは, 私の科研費の申請書類を見て下さい.

> 中身は全然見ていませんが, 「エビラの表現の moduli 空間の上のある種の偏

“箙” ですね. 今, 普及活動につとめていますので, 漢字をお使いくださって協力してくださるとありがたいです. 第二水準の JIS code は, なんだったか忘れてしまいました. (私の辞書には登録されています.) 辞書に登録をお願いします.

> 訳も分からずにやっているのがばれてますね (^_^);; とはいえ, 「捻る」という言葉の定義というかイメージはなんとなくでも分かっているつもりなのですが, (KP の Krichever map とかの話でもでてきましたし) 今の場合に捻るのに何のご利益があるのかが, さっぱり.

なんのご利益かと言えば,

(1) モジュラー形式のときは, 同時固有関数になっていることと, オイラー積を持つことが同値になる. (モジュラー形式のどんな教科書にも載っています)

(2) 代数曲面のときは, ベクトル束が trivial なベクトル束を捻ることによってたくさん構成されますが, モジュライのホモロジーは, “ほぼ” これで構成されます. すなわち, 表現が highest weight 表現になるという感じです. さらに integrable であることも「あまり同じ方向に捻りすぎることはできない. 」ということから従います.

とまあ, こんなところでしょうか?

> > | リーマン面 | 素数全体 |
> > |---|---|
> > | ベクトル束のモジュライ上の関数とか $\mathcal{D}$-加群 | モジュラー形式 |

この下にもいっぱいアナロジーがあるので, http://www.math.tohoku.ac.jp/ の黒★さんのホームページを御覧になるとよいかと思います.

22. takebe: Separation of Variables

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Separation of variables
Date: 31 Oct 1995 10:53:46 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Oct31105346@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

黒木さんの www.math.tohoku.ac.jp の記事を何とか読む事が出来ました.

```
# Thanks to Prof H Nakajima and Mr Shigematsu !
```

気になった事: “数理物理と Langlands” 1 の方の

> - Sklyanin の ”separation of variables” の話
> - Drinfeld の Amer. J. Math. 105 (1983) 85–114 における GL_2 に対する Langlands 対応の構成の仕方 (geometric な Whittaker function (sheaf) の構成) が実は同じものだそうです.

はちょっと言いすぎですね. “...” 2. の方には詳しく書いてありますが,

- Gaudin 模型に対する Sklyanin の ”separation of variables” の話

と言って欲しかった. Sklyanin の Separation of Variables (SoV) は, 可積分系を解く (古典系なら運動方程式を解く, 量子系なら Hamiltonian の spectrum を決定し, 固有関数 = 波動関数を求める) ために多自由度の問題を 1 次元系に帰着するある種のスキームをさします. と言ってしまうと 18 世紀? まで遡ってしまいそうですが, 可積分系, と言った所が重要です.

話を量子系に限って, 非常に大雑把に言えば, 量子力学系を $\mathcal{D}$-module や差分系で表現した時, それを量子化接触変換して一変数の $\mathcal{D}$-module/差分系の tensor 積にして解く, という事が SoV です. 物理でよく使われる, いにしえより伝わる変数分離は座標変換 (位置座標の変換) だけであった訳ですが, 彼は momentum 座標を含む変換をも考えている訳で, 正しく SKK の意味での量子化接触変換です. (Sklyanin は $\mathcal{D}$-module とかの考え方には不案内ですが.) 差分系だと何に相当するのでしょう?

Sklyanin は多くの可積分系の場合に当てはまるうまい変数 (separated variables) の取り方に対する recipe を提唱しています. 曰く "poles of Baker-Akhiezer function" を取れ.

こうして変数分離された系は実際的に解きやすい形をしているとは限らないのですが, 例えば Gaudin 模型に適用すれば出て来る一変数方程式が確定特異点型なので多くの事 (例えば spectrum の非退化性とか) が分かるとか, highest weight vector に相当するもののないような系に対しても適用できるとか, Bethe vector の完備性のような悩ましい問題が減る等のご利益があります.

詳しい事は [Sk2], [Sk3] 等を見て頂くのが良いと思います. いずれ, 東大でやった講義が講義録になって, 重点の方から出版されるはずです.

その昔は Sklyanin は functional Bethe Ansatz と呼んでいたのですが, 単なる Bethe Ansatz (eigenvector の構成) 以上の事を含んでいるということからか, SoV という呼び方に変えた様です.

閑話休題.

私は他の人の仕事に対する評価を言う事は好きではない (自信がない) のですが, 大栗さんに「東大は Sklyanin を引き留めなかったの ?」と言われたことでもあり, この機会に Sklyanin 先生については一言.

Sklyanin は物理の問題の中から良い数学的構造を見付けて来る事に長けている人だと思います. 量子逆散乱法, 量子群のプロトタイプ (fusion の話等), Sklyanin 代数, boundary 付 Bethe Ansatz, SoV といった例が挙げられるでしょうか. しかし, それらを数学として料理して数学者の興味を満足させる事にはほとんど関心を示さない人です. そこの所は, 他の人 (多くはロシア人) が発展……文字化け…… Sklyanin の仕事, というか idea をもっと評価して良いと思います. 私としては, Sklyanin が東大にいる間に彼の仕事のなにがしかを数学として会得したかったのですが, 今一つ果たせませんでした.

本人は「自分は物理をやっているか数学をやっているか分からない. 物理の人には数学的すぎる, と言われるし, 数学の人には物理と言われる. 」というような事を言っていました. つまり, 彼がやっている事を数学と見るか, 物理と見るかが, 数学者と物理学者を区別する criterion になる ??

この意味では，私はまだ数学をやっていると言えそうです．
私は彼の fan なので，そういう観点から書いています．

23. takebe: “Opers” ([BD1]) の Sections 4, 5 の内容 (oper 5)

第 14 節 (p. 26) の記号を踏襲します.

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: oper No.5
Date: 3 Nov 1995 02:34:56 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Nov3023456@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

“Opers” の Section 4.

4.1. D は curve Y の有限部分 scheme であるとし, D の台 (D を集合とみたもの) を $\operatorname{supp} D$ と書くことにする. Y の tangent sheaf を $\mathcal{T}$ もしくは Θ と書く[13].

$\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y)$ を Y 上の $\mathfrak{g}$-oper 全体の集合とする. D に特異点を持つ oper (の同型類) 全体の集合 $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ を次の性質を満たすように作ろう.

(1) $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y) \subset \mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y-D)$,

(2) $D_1 \subset D_2$ ならば $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D_1}(Y) \subset \mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D_2}(Y)$,

(3) S を Y の任意の有限部分集合とすると, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y-S)$ は, $\operatorname{supp} D \subset S$ となるような全ての D についての $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ の和集合になる.

4.2. $\mathfrak{g}$-oper の定義.

Definition Y 上の D に特異点を持つ $\mathfrak{g}$-oper とは, Y 上の B-bundle F で次のような $\mathcal{O}_Y$-linear map $\nabla : \mathcal{T}(-D) \to \mathcal{E}_F^{-1}$ を持つものである:

(i) 次は可換図式になる:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(-D) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{E}_F^{-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T} & = & \mathcal{T}. \end{array}$$

(ii) 任意の $\alpha \in \Gamma = \{\text{simple roots}\}$ に対して,

$$\mathcal{T}(-D) \to \mathcal{E}_F^{-1} \to \mathcal{E}_F^{-1}/\mathcal{E}_F \to \mathfrak{g}_F^{-\alpha}$$

の合成は同型になる.

[13]* “Opers” では Θ と書いてあるが, 以下では主に $\mathcal{T}$ の方を用いる.

4 節では, このように定義した特異点を許した oper が実際に上の (1), (2), (3) の性質を満たす事を示しています.

5 節では, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ の座標環 $A_{\mathfrak{g},D}(Y)$ に filtration をいれるのですが, 2 通りの方法が使われています. その一方はある principal homogeneous space (affine space) と $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}$ の canonical な bijection を使うものですが, これによる affine 構造は "suspicious" なものだ, と言ってあまりお勧めではないようです. 結局同じ filtration を定めるのですが, この affine space としての実現を使わない方法は, 次のように Planck constant h を導入して, $h \to 0$ という極限を考えるものです.

5.2. Planck constant h を導入して oper を定義しなおす. [14]

Notation:

$$\begin{aligned} h &= \text{複素数 (Planck constant)}, \\ Y &= \text{複素数体上の滑らかな曲線}, \\ G &= \text{複素数体上の代数群}, \\ F &= \text{principal } G\text{-bundle}, \\ \mathcal{E}_F &= F \text{ の algebroid of infinitesimal symmetries}. \end{aligned}$$

このとき, F 上の h-connection とは射 $\nabla : \mathcal{T} \to \mathcal{E}_F$ で,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{h} & \mathcal{T}. \\ {\scriptstyle\nabla}\downarrow & & \uparrow \\ \mathcal{E}_F & = & \mathcal{E}_F \end{array}$$

を可換にするもの. ここで, $\mathcal{T} \xrightarrow{h} \mathcal{T}$ は h 倍写像. L が局所自由 $\mathcal{O}_Y$ 加群の層ならば, L 上の h-connection は $\mathbb{C}$-線形写像 $\nabla : L \to L \otimes \Omega$ で,

$$\nabla(fs) = f\nabla(s) + hs \otimes df$$

を満たすもの. f, s はそれぞれ $\mathcal{O}_Y$, L の section.

勿論, h が 0 でなければ, $h^{-1}\nabla$ を考えれば, 普通の接続になり, $h = 0$ のとき h-connection は只の $\mathcal{O}_Y$-linear map $L \to L \otimes \Omega$

この h-connection を使って今までの定義を全部書き直して, (G, h)-oper とか $(\mathfrak{g}, h)$-oper とか D に特異点を持つ $(\mathfrak{g}, h)$-oper とかが定義できます. 例えば, $\mathrm{Op}^h_{\mathfrak{g},D}(Y)$ とかいう記号で表しましょう.

5.3. h を使って filtration を定義. 5.1 の物と一致する.

Oper をこの h という datum を込めてまとめて考える事にして,

$$\mathrm{OP}_{\mathfrak{g},D}(Y) = \{\, (h, u) \mid h \in \mathbb{C},\ u \in \mathrm{Op}^h_{\mathfrak{g},D}(Y) \,\}$$

[14]* 第 30 節 (p. 45) も参照せよ.

とする. (大文字と小文字の区別に注意 !) ここから $\mathbb{C} = \mathbb{A}^1$ (affine 直線) への射影

$$\mathrm{OP}_{\mathfrak{g},D}(Y) \to \mathbb{A}^1, \qquad (h, u) \mapsto h$$

を p とする[15]. 実は $\mathrm{OP}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ には affine variety の構造が入って p は平坦になるのだが, ここでは略.

∇ を $t\nabla$ に移す作用で, $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ (乗法群 $\mathbb{C}^*$) が $\mathrm{OP}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ に作用し, p はこの作用に関して同変. そこで, $\mathrm{OP}^*_{\mathfrak{g},D}(Y) = p^{-1}(\mathbb{C}^*)$ とすると,

$$\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y) = p^{-1}(1) = \mathbb{G}_\mathrm{m} \backslash \mathrm{OP}^*_{\mathfrak{g},D}(Y).$$

つまり, $A_{\mathfrak{g},D}(Y)$ は $\mathrm{OP}^*_{\mathfrak{g},D}(Y)$ 上の $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ 不変関数の空間と同一視できる. だから, $p^{-1}(0) = \mathrm{Op}^0_{\mathfrak{g},D}(Y)$ での pole の order で filtration $\{A^{(n)}_{\mathfrak{g},D}(Y)\}$ を入れる事が出来る.

ちょっとこの filtration はイメージが涌きません. もう一つの定義もそのうち御紹介します. (記号の準備がめんどくさい.)

とりあえず, 新しい定義の類はこの位でしょうか.

そしてこの準備のもとで, 5.4 節で次のような文脈でこの論文の主定理が登場します.

上の filtration の gr を取れば, $p^{-1}(0) = \mathrm{Op}^0_{\mathfrak{g},D}(Y)$ の座標環で, 次数は自然な $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ の作用から来ている. この次数環を Hitchin の fibration の base space V の函数環と同一視する事ができる.

(D のないとき, $V = \bigoplus_i V_i,\ \ V_i = H^0(X, \Omega_Y^{k_i})$. D 付き (特異点付き) のとき, 「定義は section 0.2 に書いてある」とあるが, そんな節は存在しない !) [16]

次回は 2 節に沿って少し例を見てみましょう.

24. takebe: 点付きの Hitchin's fibration (1)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper No.5
Date: 3 Nov 1995 10:29:38 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Nov3102938@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

追伸

点付の場合の Hitchin's system については, 他にもあるかも知れませんが, Nekrasov の論文 [Nek] にあります. もっとも statements が並んでいるだけなので, 「本物」かどうかは私には何とも言いかねます. これは, 中島先生あたりに振ろう.

```
# この Nekrasov は Olshanetsky, Krichever, A. Levin 等 Moscow の人達の
# お気に入りの「天才少年」(22 歳だったかな) です.
```

[15]* もとの記事では p ではなく π と書いてあったが, Hitchin's fibration の記号と紛らわしいので p に変更した.

[16]* 第 68 節 (p. 97) 以降の節も参照せよ.

25. nakajima: 点付きの Hitchin's fibration (2)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper No.5
Date: 3 Nov 1995 11:21:43 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Nov3112143@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Nov3102938@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> 点付の場合の Hitchin's system については, 他にもあるかも知れませんが, Nekrasov の論文 [Nek] にあります.

introduction によれば Hitchin's system の degeneration とか書いてあります. ここで, degeneration といったときには, stable curve への degeneration のようです. これが, 点つきの意味でしょうか？

Hitchin's hamiltonian を 点つきの場合に拡張することは, ほとんど straight forward であると思います. parabolic bundle の定義は通常と同じですが, Higgs 場は, marked points で nilpotent な residue を持つものを考えます. このとき, モジュライは, symplectic form を持って, parabolic bundle のモジュライの余接束を open set として含み, Higgs 場の巾乗の trace を取って hamiltonian commute する関数たちが構成できる.....etc. 文献は, あまり知りません. Boden-Yokogawa で Betti number が計算されています.[17]

但し, parabolic bundle のモジュライ空間を通常のモジュライ空間の間の correspondence と思う場合には, その conormal bundle を考えた方が自然だと思います. このときは, parabolic な residue を持つものを考えなければいけないはずです. (詳細はチェックしてません.) すなわち, Hecke 対応の microlocalization を考えるためには.... という意味です. こちらの方は, 文献どころか, そういうことを言っている人を自分以外知りません.

26. takebe: 点付きの Hitchin's fibration (3)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper No.5
Date: 4 Nov 1995 03:03:49 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Nov4030349@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <NAKAJIMA.95Nov3112143@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:
```

[17]* 第 68 節 (p. 97) 以降の記事も参照せよ.

> > 点付の場合の Hitchin's system については, 他にもあるかも知れませんが, [Nek] にあります.
>
> introduction によれば Hitchin's system の degeneration とか書いてあります. ここで, degeneration といったときには, stable curve への degeneration のようです. これが, 点つきの意味でしょうか？

Stable curve の正規化, *i.e.*, 点つき smooth curves と, その上の bundle, それに点の上での同一視写像を data として持ってくる, という形で定式化しています. だから stable curve に落としても他の点と同一視されずに残った点が自然に stable curve の marked points と見なされています. 標準的な手法ですか.

> Hitchin's hamiltonian を 点つきの場合に拡張することは, ほとんど straight forward であると思います. parabolic bundle の定義は通常と同じですが, Higgs 場は, marked points で nilpotent な residue を持つものを考えます.

Nekrasov のやっているのは, どうも parabolic bundle とは直接は繋がらない様なのですが. つまり, parabolic bundles ではなく stable bundles の moduli を考えている. この辺になると, お互いの関係がどうなっているのか私には良く分かっていません.

Nekrasov は幾つか簡単な例を計算して, 具体的に (彼の意味での generalized) Hitchin's system がどうなるかを示しています. もっとも簡単な場合は, genus = 0, 点つきで, 期待通り Gaudin model が出て来るので, この方法で点つき oper に対応する system が作られているようには見えます.

> 但し, parabolic bundle のモジュライ空間を通常のモジュライ空間の間の correspondence と思う場合には, その conormal bundle を考えた方が自然だと思います. このときは, parabolic な residue を持つものを考えなければいけないはずです. (詳細はチェックしてません.) すなわち, Hecke 対応の microlocalization を考えるためには.... という意味です. こちらの方は, 文献どころか, そういうことを言っている人を自分以外知りません.

これは何が何だか ??? でも面白そうですね.

昨日の Frenkel の話は予想通り ICMP Paris 94 での彼の話とさほど違わなかった. 例の q-alg に載った奴です[18]. でも明解な解説で良く分かった. (去年聞いた時はさっぱり分からなかった. 要するにこちらの予備知識の問題ですね.)

中島先生お勧めの Gelbart の survey[19] を読んでいます. ただ L や ζ が出て来ると頭の中で鶴が機織りを始めちゃってうんざりします. KK 先生の performance は私にはついていけない. おかげで ζ とか L とか聞くと反射的に顔を背けそうになってしまう. これはいけませんね.

---

[18]* 文献 [Fr2].

[19]* 文献 [Gel]

27. nakajima: Conformal block の定義について (1)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: CFT on elliptic curves  (Re: Gaudin model)
Date: 13 Nov 1995 12:26:00 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Nov13122600@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Nov10025949@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> KZB 方程式に関する仕事で, 確か解の積分表示とかではなかったかと思います. いい加減な follow だったので, 突っ込まれると降参です. 鈴木さん, すみません. (一度, 東大に来て話をして頂きました.)

この前の城崎で講演をされていました. 体調が悪かったので途中で寝てしまいました, すみません. (飲みすぎではありません. 風邪を引いているのです)

まだ, 途中段階であるというお話しでしたが, vector bundle のモジュライの上で conformal block を作って, flat connection を作るというようなこともありました.

但し, 私はいつも conformal block = semistable bundle のモジュライの上の determinant line bundle の holomorphic section が本来の定義であると思うことにしているので, この辺のことはありがたみが分からないで聞いていましたので, 大切なことを聞き逃している可能性が大です.

28. kuroki: Conformal block の定義について (2)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Definition of conformal blocks?  (Re: CFT on elliptic curves)
Date: 13 Nov 1995 15:56:58 JST
Message-ID: <KUROKI.95Nov13155658@ume.math.tohoku.ac.jp>

In article <NAKAJIMA.95Nov13122600@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:
```

> 但し, 私はいつも conformal block = semistable bundle のモジュライの上の deteminant line bundle の holomorphic section が本来の定義であると思うことにしているので, この辺のことはありがたみが分からないで聞いていましたので, 大切なことを聞き逃している可能性が大です.

対応する 2×2 の表を 2 つ書くと,

Borel-Weil-Bott の定理	Beilinson-Bernstein 対応
有限次元表現	任意の表現

semistable bundle の moduli variety 上の determinant line bundle の global holomorphic sections の空間	bundle の moduli stack 上のある種の $\mathcal{D}$-module
affine Lie 環の可積分表現	affine Lie 環の許容表現

となります.

上の 2×2 の表は有限次元半単純 Lie 環の表現論の世界の話で, 下は共形場理論の世界の話です. 表現論の立場から見た場合, Borel-Weil-Bott の定理の世界だけでは不十分な感じなので, conformal block の定義も $\mathcal{D}$-module 的にずっと一般化されなければいけないという感じがします.

実際, Drinfeld-Beilinson theory では, critical level の表現 (それはもちろん integrable ではない) を扱う必要があり, conformal block の定義を determinant bundle の global sections の空間とするのでは不十分な感じがします.

もちろん, どのように一般化したら良いかについては,

- Beilinson-Schechtman の CMP での論文
- Beilinson-Feigin-Mazur の Beilinson の原稿
- 僕の数理研講究録の原稿

などによって, すでにわかっているわけですが, 内容を詳しく調べるのはこれからの仕事だと思います.

29. nakajima: Conformal block の定義について (3)

From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Definition of conformal blocks? (Re: CFT on elliptic curves)
Date: 13 Nov 1995 16:28:28 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Nov13162828@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.95Nov13155658@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:

> 上の 2×2 の表は有限次元半単純 Lie 環の表現論の世界の話で, 下は共形場理論の世界の話です. 表現論の立場から見た場合, Borel-Weil-Bott の定理の世界だけでは不十分な感じなので, conformal block の定義も $\mathcal{D}$-module 的にずっと一般化されなければいけないという感じがします.

おっしゃる通りです. 前の記事で述べたときには conformal block は positive level しか考えていなかったので, あのように書いたのでした.

但し, 言いたかったことは, bundle の moduli の上の “もの” を扱っているわけで, localization するときに, どの点で localization しようと変わらないものであるはずだということです. 実際のところ, 曲面の複素構造を与えなければ conformal block の定義が出来ないということもあまり気に入りません. 位相構造だけで定義されてしかるべきです. 今の所どうしたらいいか分からないけど....

注: $U(n)$ のように moduli が連結でないときは点の取り方によります.

とにかく私が分からないなんか理由があって, vector bundle を止めて conformal block を定義して, それから vector bundle の取り方によらないことを示すという回り道をしているはずだと言うのが前に言いたかったことです.

30. nakajima: Planck 定数付きの opers (1)

第 23 節 (p. 38) oper 5 へのフォロー.

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper No.5
Date: 19 Nov 1995 18:08:22 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Nov19180822@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Nov3023456@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> この時, F 上の h-connection とは射 $\nabla : \mathcal{T} \to E_F$ で, ...

この定義は Deligne によるものですね. Simpson の ICM の Proceeding に載っています. おそらく目的は, Hitchin の Higgs bundle の moduli と connection の moduli を同時に取り扱い, さらに Higgs bundle の moduli の自然な hyper-Kähler structure に関する twistor space の構成であると思います.

> Oper を, この h という datum を込めてまとめて考える事にして, ... p は平坦になるのだが, ここでは略.

Simpson の論文に書いてある. (但し GIT で semistable なところだけを取り出してくる.)

> ∇ を $t\nabla$ とする作用で, $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ (乗法群 $\mathbb{C}^*$) が .... この次数環を Hitchin の fibration の base space V と同一視する事ができる.

このあたりのことは, Simpson の論文を読んでじっと考えれば分かるかもしれないです. だれか幾何の人, よろしく.

31. takebe: Planck 定数付きの opers (2) (oper 5+)

From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper No.5
Date: 21 Nov 1995 04:22:47 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Nov21042247@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <NAKAJIMA.95Nov19180822@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:

> この定義は Deligne によるものですね. Simpson の ICM の Proceeding に載っています. おそらく目的は, Hitchin の Higgs bundle の moduli と connection の moduli を同時に取り扱い, さらに Higgs bundle の moduli の自然な hyper-Kähler structure に関する twistor space の構成であると思います.

“Deligne” というのは, “Equations differentielles de sing...” (France 語なので覚えてない) ですか. Simpson の ICM の, というのは ICM94 ですか?

自分の記事[20]から引用:

> 上の filtration の gr を取れば, $p^{-1}(0) = \mathrm{Op}^0_{\mathfrak{g},D}(Y)$ の座標環で, 次数は自然な $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ の作用から来ている. この次数環を Hitchin の fibration の base space V の函数環と同一視する事ができる.

因みに, この最後の主定理の証明は, [Kos1] にある次の定理の immediate consequence だそうです. 今昼飯時で腹減ってきたので記号などはいつもの通り, という事で,

Kostant の定理: $\Gamma = \{\text{simple roots}\}$, $W = \text{Weyl}$ 群 であるとし,

$$\mathfrak{g}_*^{-1} := \{\, u + \sum_{\alpha\in\Gamma} v_\alpha \mid u \in \mathfrak{b},\ v_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}\ (\alpha\in\Gamma)\,\},$$
$$f : \mathfrak{g} \to \mathrm{Spec}(\mathrm{Inv}(\mathfrak{g})) = W\backslash\backslash\mathfrak{h} \qquad (\text{自然な写像}),$$

と置く. このとき,

(i) $\mathfrak{g}_*^{-1}$ のある affine subspace L で

$$B \times L \to \mathfrak{g}_*^{-1}, \qquad (b, v) \mapsto bvb^{-1},$$

が代数多様体の同型になるものが存在し,

(ii) f から誘導される $B\backslash\backslash\mathfrak{g}_*^{-1} = L \to W\backslash\backslash\mathfrak{h}$ は代数多様体の同型になる.

どこが immediate なんだか, さっぱり分かりませんが. これは表現論ですから (?!), 中島先生, どうぞ.

[20]* 第 23 節 (p. 38).

32. nakajima: Planck 定数付きの opers (3)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper No.5
Date: 21 Nov 1995 23:02:11 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Nov21230211@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

とりあえずすぐ答えられることだけ.

```
In article <TAKEBE.95Nov21042247@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> "Deligne" というのは, "Equations differentielles de sing..." (France 語なので覚えてない) ですか. Simpson の ICM の, というのは ICM94 ですか?

論文は見た憶えがありません. 例によってお手紙かもしれません. Simpson のは ICM90 です. Hitchin の hyperKähler metric と話しがつながると面白いと思います.

33. kuroki: $W_{1+\infty}$-algebras (1)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: W_{1+\infty} algebra
Date: 4 Nov 1995 12:28:06 JST
Message-ID: <KUROKI.95Nov4122806@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

10 月の頭にあった, 清水勇二さん主催の京大理学部での workshop における粟田さんのお話で (恥ずかしながら) 初めて $W_{1+\infty}$ algebra の定義を知りました.

それによると, $W_{1+\infty}$ algebra とは大体以下のようなものだそうです. (私の解釈が混じっているので, 粟田さんの話の内容の再現にはなってないかもしれない.)

$\mathbb{C}((z))$ 係数の線型常微分作用素の環を $\mathcal{D}$ と書き, $\mathcal{D}$ を commutator によって, Lie algebra とみなします. $\mathcal{D}$ は Lie algebra としての canonical (???) な central extension $\mathcal{D}'$ を持ちます. この $\mathcal{D}'$ のことを $W_{1+\infty}$ algebra と呼ぶのだそうです.

$W_{1+\infty}$ algebra は高々1 階の作用素 (+ center) のなす部分環として, Heisenberg algebra (Boson) と Virasoro algebra の半直積を含んでいます (Abelian CFT の世界). また, 1 階以上の作用素 (+ center) のなす部分環も含んでいて, そちらは W_∞ algebra と呼ばれているのだそうです.

"$1+\infty$" という名前の由来は W_∞ の方が始めに名付けられたので, それより大きい $\mathcal{D}'$ の方は ∞ に 1 を足して $W_{1+\infty}$ 代数と名付けたのだそうです. これには笑ってしまいました!!!! なんともいいかげんな名前の付け方です. (実はこの話をしたいがためにこの文章を書いているのだ.)

おそらく, この辺の話のもとは KP 系の佐藤理論が端緒になっているらしいのですが, その辺の歴史は全く知りません. $\mathcal{D}$ の central extension $\mathcal{D}'$ は所謂 Sato cocycle によって与えられます.

常微分作用素全体のなす Lie algebra の central extension の話はおそらく色々な文献にあると思いますが, 私は少数しか知りません. 私がよく引用する Beilinson-Schechtman では trace Ω-extension というのがちょうどその話になっています.

vector bundle の場合に $W_{1+\infty}$ の対応物を考えると, その高々1 階の作用素のなす部分環は Virasoro (1 階) + affine gl_n (0 階) になるので, curve + vector bundle の変形を記述することになります. (central extension の部分は determinat bundle に関係する.) もっと高階の作用素も何かの変形を記述しているというような話はあるのでしょうか? もしもあれば大変面白そうだと思いました.

34. takebe: $W_{1+\infty}$-algebras (2)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: W_{1+\infty} algebra
Date: 5 Nov 1995 03:14:51 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Nov5031451@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.95Nov4122806@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

> 数日で書いたものなので, かなりいいかげんな書き方で, 尻切れとんぼになってしまいましたが, Riemann 面の Gaudin model などの定式化などにも参考になることが書いてあるかもしれません.
> そこに書いてある「定式化」の方針は以下の通りです. ...

この定式化は [FFR] の構成を一般の Riemann 面に拡張する, ということでしょうか.

```
In article <KUROKI.95Nov4122806@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

> “$1+\infty$” という名前の由来は W_∞ の方が始めに名付けられたので, それより大きい $\mathcal{D}'$ の方は ∞ に 1 を足して $W_{1+\infty}$ 代数と名付けたのだそうです. これには笑ってしまいました!!!! なんともいいかげんな名前の付け方です. (実はこの話をしたいがためにこの文章を書いているのだ.)

私の聞いた話は, Virasoro が W_2, 以下 W_3 (Zamolodchikov), W_4, ... と続き, 一般に W_N は spin N 以下の operator で生成される. 例えば Virasoro なら energy-momentum tensor $T(z)$. W_N ($N>2$) は Lie algebra としては閉じないが, それら全てを「集める」と Lie algebra となって W_∞ 代数と呼ばれる. 更に, これに spin 1 の field = Heisenberg algebra をくっつけて $W_{1+\infty}$ 代数と呼ばれる, と言うものです. どっちにしろ, naming は遊びです

ね. 因みに, $W_{1+\infty}$ の quasi-classical limit は $w_{1+\infty}$ と言います. (dispersionless KP の対称性として現われます.)

> おそらく, この辺の話のもとは KP 系の佐藤理論が端緒になっているらしいのですが, その辺の歴史は全く知りません. $\mathcal{D}$ の central extension $\mathcal{D}'$ は所謂 Sato cocycle によって与えられます.

事実, 知る人ぞ知る (知らない人も残念ながら多い) Sato-Sato という KP hierarchy の話の古典の中で, 既に $W_{1+\infty}$ 代数の交換関係がしっかり現われています. このことは野海さんに教えてもらいました. $W_{1+\infty}$ 自身はそれ固有の歴史を持つようですが, 私は知りません.

> 常微分作用素全体のなす Lie algebra の central extension の話はおそらく色々な文献にあると思いますが, 私は少数しか知りません.

[O. Kravchenko] というのもありませんでしたっけ. 郡先生がよく引用されています. 擬微分作用素のだったかな.

> vector bundle の場合に $W_{1+\infty}$ の対応物を考えると, その高々1 階の作用素のなす部分環は Virasoro (1 階) + affine gl_n (0 階) になるので, curve + vector bundle の変形を記述することになります. (central extension の部分は determinat bundle に関係する.)

これが algebroid ですか？

35. kuroki: Lie algebroid の定義

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: W_{1+\infty} algebra
Date: 5 Nov 1995 14:42:42 JST
Message-ID: <KUROKI.95Nov5144242@ume.math.tohoku.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Nov5031451@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> この定式化は [FFR] の構成を一般の Riemann 面に拡張する, ということでしょうか.

[FFR] の構成というのを勉強不足で知らないので答えられないのだ. (;_;) [FFR] の構成はどういうものなのでしょうか? (見ればすぐにわかるかな?) ちなみに, 私の構成は Beilinson-Schechtman 流なので完全に座標不変な形をしています.

> ..... は遊びですね. 因みに, $W_{1+\infty}$ の quasi-classical limit は $w_{1+\infty}$ と言います. (dispersionless KP の対称性として現われます.)

あ, そっか! そう言えば, $W_{1+\infty}$ は KP 系の解の対称性になっているということでしたよね?

KP 系の解は代数幾何的には Riemann 面 + その上の line bundle + ⋯ のデータから得られ, その幾何的データの無限小変形を記述するものとして Boson + Virasoro が現われるのでした.

$W_{1+\infty}$ の残りの部分は, 幾何的データの変形とは transversal な方向の解の変形を記述しているのでしょう. 残りの方向にも何か代数幾何的な意味付けができると面白いと思うのですが, KP 系や dispersionless KP 系やその仲間達ではそのようなものは見えてないのでしょうか?

> > vector bundle の場合に $W_{1+\infty}$ の対応物を考えると, その高々1 階の作用素のなす部分環は Virasoro (1 階) + affine gl_n (0 階) になるので, curve + vector bundle の変形を記述することになります. (central extension の部分は determinat bundle に関係する.)
>
> これが algebroid ですか ?

Virasoro algebra と affine Lie algebra の「正しい定義」は何か? ということを考えると, 変形理論の立場からは, それらは differential graded Lie algebroid の一種として定義されるのが正しいであろうという結論が出ます. ([BS] の仕事の内容.)

しかし, 普通に定義される $\mathbb{C}$ 上の Virasoro + affine Lie algebra は普通の Lie algebra であって, $\mathbb{C}$ 上の話をする場合は特別に Lie algebroid という言葉を使う必要はありません. (「$\mathbb{C}$ 上」=「(1 点) = Spec $\mathbb{C}$ 上」) base space を S として, S 上の family の話をするとき, 初めて, Lie algebroid が登場します.

Lie algebroid はあまり見掛けない言葉なので, 一応定義を書いておきましょう. $\mathcal{A}$ が複素多様体 S 上の Lie algebroid であるとは,

- $\mathcal{A}$ は S 上の left $\mathcal{O}_S$-module である.
- $\mathcal{A}$ から tangent sheaf $\mathcal{T}_S$ への left $\mathcal{O}_S$-module homomorphism ε が与えられている.
- $\mathcal{A}$ は $\mathbb{C}$ 上の Lie algebra structure を持ち, ε は Lie algebra hom. である.
- $a, b \in \mathcal{A}$, $f \in \mathcal{O}_S$ に対して,

$$[a, fb] = \varepsilon(a)(f)b + f[a, b].$$

が成立していることです. S が differentiable manifold のときや, S が algebraic variety のときなどでも, 同様に Lie algebroid が定義できます. S = (1 点) の場合は, Lie algebroid = Lie algebra となります. 最後の式を見ればわかることですが, Lie algebroid の概念は connection と相性が良いようです.

実は, 多様体 S 上の Lie groupoid という概念があって, Lie groupoid に対する Lie algbra の概念の拡張として, Lie algebroid が登場します. 抽象代数系として, 集合 S 上の groupoid とは, S を objects の集合として持つ category であって, 全ての arrows が isomorphic なもののことです. S = (1 点) の場合は, gropoid = group となります. group の代わりに groupoid から出発し, group → Lie group → Lie algebra と類似の議論をたどると, groupoid → Lie groupoid → Lie algebroid のようにして, Lie algebroid が登場します.

groupoid は結構よく現われる代数系だと思う．

36.　takebe: KP 方程式系

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: W_{1+\infty} algebra
Date: 7 Nov 1995 08:26:19 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Nov7082619@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.95Nov5144242@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

> KP 系の解は代数幾何的には Riemann 面 + その上の line bundle + ⋯ のデータから得られ, その幾何的データの無限小変形を記述するものとして Boson + Virasoro が現われるのでした.
> $W_{1+\infty}$ の残りの部分は, 幾何的データの変形とは transversal な方向の解の変形を記述しているのでしょう．残りの方向にも何か代数幾何的な意味付けができると面白いと思うのですが, KP 系や dispersionless KP 系やその仲間達ではそのようなものは見えてないのでしょうか?

塩田先生どうでしょう.

KP はあまりに universal だから, どこにでも現われて, 果たして同じ物の別の顔なのか, それとも只の偶然の一致かよく分からない．例えば, どこに現われるかと言うと, 代数幾何的な話に限っても:

- 古くは Krichever 以来の代数幾何との結びつき．村瀬, 塩田の Shottoky 問題, Novikov 予想の解決.

- Donagi and Markman による, Hitchin's system を KP に埋め込む, という話. (KP ではなく Toda が正しい場所だ, と秘かに思っているのですが.) Donagi and Witten の最近の話[21]はこの辺と関係あるらしいけど, どなたか解説してくれませんか.

- ちょっと違いますが, Kontsevich model (matrix Airy function). そこから現われる KP の解とその $g = 0$ part としてあらわれる dispersionless KP の解の独立変数は A 型特異点の versal deformation の parameter になっている, という話しもあります．*cf.* Nakatsu-Kato-Noumi-Takebe hep-th/9307115.

- また, KP についての Whitham 理論というのもあって, これは, moduli の parameter も「ゆっくり」動かしながら解を作ろう, という話です．Moscow の ITEP の人達はこれが Seiberg-Witten 方程式と関係ありそうだ, と言っています．これに関して [Nakatsu-Takasaki] という論文が最近 hep-th に載りました.

[21]* `hep-th/9510101`.　★島: 「読んでみて帝国主義の論文だということがわかった. "Hitchin Hamiltonian" 帝国主義というのがあるというのがわかった. 類似語: ルート系帝国主義.」

以上, 宣伝でした.

37. takebe: “Opers” ([BD1]) の第 2.1 節の内容 (oper 6)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: oper No. 6
Date: 11 Nov 1995 18:45:21 GMT
Message-ID: <TAKEBE.95Nov12034521@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

Beilinson and Drinfeld の “Opers” 第 2.1 節に沿って $GL(n)$-oper を微分作用素として記述します. 他の $Sp(n)$, $O(n)$ の場合にもこれが基本になります.

おっと, その前に 1.3 節の Remark を拾っておきましょう. これは歴史についての comment です.

- $\mathfrak{g}$-oper は [DS1], [DS2] において algebraic curve Y 上の tangent sheaf $\mathcal{T}$ が trivial で trivialization が固定されているという条件の下で導入された.
- 任意の Y に対して $sl(n)$-oper を定義したのは [Te] である.
- $sl(2)$-oper は Sturm-Liouville operator 又は射影接続のことだから, 長い歴史を持っている. (cf. [Ty])

では $GL(n)$-oper の記述. 以下, “Opers” には書いてない非常に初等的な事まで, 私の理解の順番に沿って書きます. なんて阿呆な奴だと笑ってやって下さい.

Y は smooth algebraic curve であるとし, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_Y$ は Y の構造層であるとする.

```
# 考えているのは滑らかな曲線だから, 局所的な話は全部
# trivialization を取って考えていいんですよね. 気をつけるべ
# き所があったら指摘して頂けると助かります.
```

元の定義では Borel B を固定して B-bundle を取りますが, これは rank n の局所自由 $\mathcal{O}$ 加群の層 E とその filtration

$$E = E_n \supset E_{n-1} \supset \cdots \supset E_0 = 0$$

で

(i) E_i/E_{i-1} は可逆層

となるものを考えることと同じ. G-oper は E と E 上の接続 ∇ で次を満たすものとなる:

(ii) $\nabla(E_i)$ は $E_{i+1} \otimes \Omega$ に含まれ, ∇ は同型

$$E_i/E_{i-1} \tilde{\to} (E_{i+1}/E_i) \otimes \Omega$$

を引き起こす.

今から, これが

$A, B : Y$ 上の可逆層,
$L :$ n 階の微分作用素 $A \to B$ で主シンボルが消えていないもの

という 3 つの data の組と同値になる事を示します.

I: $GL(n)$-oper から (A, B, L) へ

黒木さんが shitan.math の article 35 で[22]書かれたように,

> (i) の条件は, F の local trivialization をとって,
>
> $$\nabla\left(\frac{d}{dz}\right) = \frac{d}{dz} + A(z)$$
>
> と書くとき, $A(z)$ が,
>
> $$A(z) = \begin{bmatrix} * & & & & * \\ ? & * & & & \\ & ? & \ddots & & \\ & & \ddots & * & \\ 0 & & & ? & * \end{bmatrix}$$
>
> のような形をしているということです.
> さらに, (ii) の条件を仮定するということは, 上の ? の部分に現われる函数が零点を持たないと仮定するということになります.

ですから, やる事はよくある n 階 1 未知関数の微分方程式を 1 階 n 未知関数の微分方程式系に書き直す話と同じですが, 捻ってあるので少し注意が必要. 全体として consisitent に作っている, という事は $\mathcal{D}$-module 等の言葉でいう方がすっきりしているけれど, 何やっているかは, 上の trivialization を見ながら local に考えないと (私には) 分かりにくい.

$\mathcal{D}$ を Y 上の微分作用素の層とする. $\mathcal{D}_i$ を階数 i 以下の微分作用素のなす層とする.

上の trivialization を取った時の E の基底を $u_1, \ldots, u_n$ とする. これは, u_i が E_i/E_{i-1} の E_i への持ち上げの代表元と言う事. E 上の $\mathcal{D}$-module の構造が, この trivailization で section ϕ に対して

$$\frac{d}{dz}\phi = -A(z)\phi$$

[22] * 第 15 節 (p. 28).

で定義される. 全体にうまく張り合わさるということは ∇ が $E \to E \otimes \Omega$ という射である事から従う. Oper の定義の条件 (上の引用の最後の 2 行) から, 基底については,

$$\frac{d}{dz}u_i = -(a_{i+1,i}u_{i+1} + a_{i,i}u_i + \cdots + a_{1,i}u_1)$$

が $i = 1, \ldots, n-1$ について成り立つ. 特に, $a_{i+1,i}$ は決して 0 にならないので, $\mathcal{D}$-module の射

$$\mathcal{D} \otimes E_1 \to E$$

があり, また $\mathcal{O}_Y$ 同型

$$\mathcal{D}_{n-1} \otimes E_1 \to E$$

がある. (どちらも微分作用素 P に対して $P \otimes u_1$ を (P を u_1 に作用させたもの) に写す.) ここまでがいつもの話. ここから, 捻りの所をきちんと押える.

n 階の symbol を取る射に 可逆層 E_1 を tensor して

$$0 \to \mathcal{D}_{n-1} \otimes E_1 \to \mathcal{D}_n \otimes E_1 \to \Omega^{-n} \otimes E_1 \to 0 \qquad \text{(exact)}$$

となっているけれど, これは, 実は分裂している. というのは, 上で作った 2 つの $\mathcal{O}_Y$ module の射を組み合わせると,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{n-1} \otimes E_1 & \longrightarrow & \mathcal{D}_n \otimes E_1 \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ E & = & E \end{array}$$

は可換でで左側は同型だから. というわけで,

$$\mathcal{D}_n \otimes E_1 \leftarrow \Omega^{-n} \otimes E_1$$

という射が出来る. (局所的には $(d/dz)^n u_1$ が E の中で何になるかを見ている.)

$$A = E_1^{-1}, \qquad B = E_1^{-1} \otimes \Omega^n = A \otimes \Omega^n$$

とすれば, $\mathcal{O}_Y \to A^{-1} \otimes D_n \otimes B$ という射ができて, これによる 1 の行き先を L として, n 階の作用素が得られる. (局所的に見れば, u_1 の満たす n 階微分方程式が $L\,u_1 = 0$ になるという事.)

$$\begin{array}{ccc} & & A^{-1} \otimes \mathcal{D}_{n-1} \otimes B \\ & & \Big\downarrow \\ \mathcal{O}_Y & \longrightarrow & A^{-1} \otimes \mathcal{D}_n \otimes B \\ \Big\| & & \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ \mathcal{O}_Y & = & A^{-1} \otimes \Omega^{-n} \otimes B \end{array}$$

という図式を追えば, L の主 symbol $\sigma(L) = 1$ (in $\mathcal{O}_Y$) が分かる.

II: (A, B, L) から $GL(n)$-oper へ

L が $A^{-1} \otimes \mathcal{D}_n \otimes B$ の global section でその主 symbol $\sigma(L)$ が決して 0 にならないことから,

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} A^{-1} \otimes \Omega^{-n} \otimes B$$

という同型ができて, これから $B = A \otimes \Omega^n$ と同一視できる. (この同一視を決めて初めて $\sigma(L) = 1$ と言える.)

$\mathcal{D}$-module の射 $\mathcal{D} \otimes A \to \mathcal{D} \otimes B$ を $P \otimes u$ ($P \in \mathcal{D}$, $u \in A$) に対して $PuL \in \mathcal{D} \otimes B$ を対応させるものとする. この cokernel を E とする:

$$0 \to \mathcal{D} \otimes A \xrightarrow{L} \mathcal{D} \otimes B \xrightarrow{\pi} E \to 0 \qquad \text{(exact)}.$$

E の filtration を $E_i = \pi(\mathcal{D}_i \otimes B)$ で決める. Tangent sheaf $\mathcal{T}$ を $\mathcal{D}$ の $\mathcal{O}_Y$ 部分層と思えば, E の $\mathcal{D}$-module 構造から

$$\mathcal{T} \otimes E \to E$$

が決まっているが, これから $\nabla : E \to E \otimes \Omega$ という接続が定まる. この $(E, \{E_i\}, \nabla)$ が $GL(n)$-oper の条件を満たす事は局所的に調べれば良く, L の最高階の部分が $(d/dz)^n$ である事から I の最初の部分の手順を逆にたどれば良い.

以上です.

\# 大分余計な事を書き込んでしまいました. 分かっている方にはさ
\# ぞうるさかった事と思います. この記事（以前の記事も）は自分
\# のノートの代わりにしてしまっているので....

(A, B, L) から (A', B', L') への射を, 同型 $A \xrightarrow{\sim} A'$, $B \xrightarrow{\sim} B'$ の組で,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & A' \\ {\scriptstyle L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L'} \\ B & \xrightarrow{\sim} & B' \end{array}$$

という可換図式が存在する物の事とします.

上の対応をもう少し細かく見ると, 次のような事になります.

$\mathrm{Diff}_n(A, B)$ を n 階の微分作用素 $L : A \to B$ で主表象がいたる所消えていないものの全体とします. E_i/E_{i-1} が $E_{i+1}/E_i \otimes \Omega$ と canonical に同型という条件を帰納的に使って, $GL(n)$-oper $(E, \{E_i\}, \nabla)$ が (A, B, L) に対応していれば, 上の構成方法から,

$$E_i/E_{i-1} = A^{-1} \otimes \Omega^{1-i} = B^{-1} \otimes \Omega^{n+1-i}$$

なので, $\mathrm{Op}_n(A, B)$ を $E_1 = A^{-1}$, $E/E_{n-1} = \Omega \otimes B^{-1}$ となる oper 全体とすれば, 標準的に

$$\mathrm{Op}_n(A, B) \to \mathrm{Diff}_n(A, B)$$

という bijection が得られた事になる訳です.

次回は微分作用素 L の共役と oper の対応の話 (2.2 節) と $Sp(n)$-oper の記述 (2.3 節) を考えています. いや, 2.7 節に飛んで, $sl(2)$-oper, 続いて 2.8 節 $SL(n)$-oper の方が良いでしょうか. 御意見をお願いします.

38. kuroki: 共形場理論の定式化

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: On a formulation of CFT
Date: 4 Nov 1995 11:33:04 JST
Message-ID: <KUROKI.95Nov4113305@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

`http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/index-j.html` から「日本語 TeX で書いた文書」へのリンクをたどると, 今年の 8 月に RIMS の研究集会でした話の内容 (を少し詳しくしたもの) の JTeX file を見付けることができます.

事務にわたしてある原稿は, 研究集会の主催者の齋藤睦さんに月曜日に送る予定になっているようですが, すでに締め切り (10/23) が過ぎていてやばい状態です.

数日で書いたものなので, かなりいいかげんな書き方で, 尻切れとんぼになってしまいましたが, Riemann 面の Gaudin model などの定式化などにも参考になることが書いてあるかもしれません.

そこに書いてある「定式化」の方針は以下の通りです.

(1) 複素単純群 G に対して,

- X = コンパクト Riemann 面,
- P = X 上の principal G-bundle,
- Q_i = X 上の互いに異なる点 $(i = 1, \ldots, N)$,
- F_i = Q_i における P の quasi parabolic structure

の 4 つ組の family を考える. family の base space を S と書く.

(2) family から S 上の affine Lie algebra (と Virasoro algebra の半直積) を構成する. その algebra を $\mathcal{A}$ と書く.

(3) $\mathcal{A}$ および level, central charge, weight のデータから S 上の twisted diff. op. の層を自然に構成することができる. その tdo の層を $\mathcal{D}$ を書く.

(4) $\mathcal{A}$ の表現に対して, $\mathcal{D}$ 加群を自然に対応させることができる. すなわち, $\mathcal{A}$ の表現から S 上の (twisted) 線型微分方程式系が得られる. その微分方程式系は conformal blocks の満たす方程式系の一つの定式化である.

具体的な話との関係はしりきれとんぼで書けませんでした. しかし, 以上に書いたことはかなり詳しく説明してあります. WWW にのせた文書の紹介は以上です.

最近, 可積分系との関係で興味が持たれているのは, critical level の場合の WZW model なのですが, 全く同じ方針で定式化できます. ただし, 菅原構成が使えないので, affine Lie algebra の表現に Virasoro を作用させることができないので, Virasoro algebra が記述している点付き Riemann 面の変形方向の微分作用素を自然に決めることができません. だから, 点突き Riemann 面は固定して, その上の quasi parabolic bundle の変形のみを考え, それに関する線型微分方程式を考えることになります. Virasoro algebra は critical level で互いに可換な 2 階の微分作用素系に化けます. それが一般の Riemann 面における Gaudin model の (2 階の部分の) 拡張を与えているはずです. というわけで, 当然のことですが, 一般の Riemann 面でも定式化だけだったらすでに明確に数学化されたものがあると言って良いと思います.

39. kuroki: Gaudin 模型

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Gaudin model  (Re: W_{1+\infty} algebra)
Date: 8 Nov 1995 12:46:07 JST
Message-ID: <KUROKI.95Nov8124608@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

$\mathbb{P}^1$ の場合に Gaudin Hamiltonian を CFT の枠組から出す話をまとめておきます. ([FFR] は見てないのですが, 他の定式化は考えられないので, $\mathbb{P}^1$ 上の話の場合は同じものになっていると思います. [FFR] は $\mathbb{P}^1$ のみの話ですよね?)

G は複素単純 Lie 群であるとします. $\mathbb{P}^1$ 上の semistable な principal G-bundle は trivial bundle しかありません. $\mathbb{P}^1$ 上の N 個の点で trivial bundle に quasi parabolic structure を指定するということは, N 個の各々の点に対して G の Borel subgroup を指定するということです. N 個の Borel subgroups 全体の集合は G の flag variety F の N 個のコピーの直積と同一視されます. しかし, N 個 Borel subgroups を同時に同一の $g \in G$ による conjugation でで動かしてやっても, quasi parabolic bundle (= principal bundle + quasi parabolic structure) の同型類は変化しませんから, 同型類の集合をちょうど得るためには, flag varieties の直積を G で割ってやらないといけません. ($g \in G$ の左作用によって, trivial principal bundle の automorphism とみなす.) 結論は,

$$
\begin{aligned}
&(\mathbb{P}^1 \text{ 上の quasi parabolic } G\text{-bundle の moduli space}) \\
&\quad = (N \text{ 個の flag varieties の直積})/G \\
&\quad = F^N/G
\end{aligned}
$$

です. 実際の取り扱い (特に具体形な計算) のときには, flag varieties の直積 F^N の方を考え, その上の G-invariant なものを考えることになります.

今の場合は trivial bundle を考えているので, global trivialization をひとつ fix しておきます. このとき, 共形場理論の枠組によって, affine Lie algebra の N 個の表現に対して, F^N および F^N/G 上に twisted $\mathcal{D}$-module が canonical に構成されます.

$\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ の有限次元既約表現 $V_1, \ldots, V_N$ から induce される $\hat{\mathfrak{g}}$ の critical level の表現 (generalized Verma module) を $M_1, \ldots, M_N$ と書くことにします. M_i 達に対応して得ら

れる F^N 上の twisted $\mathcal{D}$-module は, F^N 上の vector bundle (*i.e.* locally free coherent $\mathcal{O}$-module) をなし, その fiber は

$$V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$$

と書くとき

$$V/\mathfrak{g}V = V/\{\, xv \mid v \in V, x \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G\}$$

に同型になります. ここで, $V/\mathfrak{g}V$ は V への $\mathfrak{g}$ の diagonal action に関する coinvariants の空間です.

上のように, $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現の話が $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ の表現の話に落とせることは, $H^1(\mathbb{P}^1, \mathfrak{g}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \{0\}$ という簡単な cohomology vanishing から従います. さらに, $\mathfrak{g}$-coinvariants を取らなければいけないことは, $H^0(\mathbb{P}^1, \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \mathfrak{g}$ から出ます[23].

$\mathbb{P}^1$ 以外の場合でも同様に H^1 が消えていれば, 有限次元の $\mathfrak{g}$ の表現の世界の話に持ち込むことができます. Belavin-Drinfeld の elliptic r-matrix の世界でも H^0 も H^1 も消えているので同様のことができます[24].

次に, L_i を M_i の irreducible quotient としましょう. ただし, irreducible quotient の取り方は一意的ではありません. critical level の状況では Sugawara operators が M_i の intertwining operators として作用しています. M_i を既約になるまで潰してやるためには, 少なくとも Sugawara operators の L_i への作用が定数倍作用になるようにしてやる必要があります. (少なくともその定数達のデータの取り方の分だけ異なる irreducible quotient がある.) その条件を対応する $\mathcal{D}$-module (微分方程式系) の方で見てやると, さらに

$$((\text{Sugawara operator から来る微分作用素}) - (\text{固有値}))v = 0$$

の形の方程式も付け加えて考えるということになります. $\mathbb{P}^1$ の場合は Casimir から来る 2 次の Sugawara operator $S_2[-1] = \text{“}\kappa L_{-1}\text{”}$ の作用の各 M_i への作用がちょうど Gaudin Hamiltonian に対応する 2 階の微分作用素に化けます. これは, KZ 方程式を CFT の枠組から出す計算と全く同じことをやると出てきます. そこに, rational r-matrix が登場するのも同様です. (V_i への $\mathfrak{g}$ の作用と, V_i の flag F 上の localization への tdo の作用をごっちゃに述べたので注意してください.)

参考: Sugawara operators は vertex operator algebra の言葉によって, $\mathrm{Lie}\, G$ の trivial 表現から誘導される $\hat{\mathfrak{g}}$ の critical level の表現の中の singular vector で weight が imaginary negative root に等しいものから得られます. (一般の $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ に対する, ここで必要な singular vector の存在の詳しい証明は見たことがありません. 知っている唯一の文献は E. Frenkel の Thesis であり, これ以外にはないのかな? A_n, B_n, C_n 型の場合は林さんの仕事で OK なのですが.)

次に, elliptic curve の場合をまとめておきましょう. elliptic curve X を $X = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ と表わしておきます. すなわち, $q = \exp(2\pi i\tau)$ 倍の作用で $\mathbb{C}^*$ を割るという形で X を表現し

---

[23]* $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ の代わりに, $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\infty)$ を考えれば $H^p = \{0\}$ $(p = 0, 1)$ となり, $V/\mathfrak{g}V$ ではなく V 自身が得られる. ここで, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\infty)$ は無限遠で 0 になる正則函数の層である.

[24]* より一般に classical r-matrix が出て来る設定では $H^p = \{0\}$ が任意の p に対して成立している.

ておきます. X 上の任意の semistable principal G-bundle は q 倍の作用で $\mathbb{C}^*$ 上の trivial G-bundle を $\exp(2\pi i H)$ の左作用によって同一視することによって得られます. ここで, H は $\mathrm{Lie}\, G$ の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ の元です. そして, $w \in W =$ (Weyl 群) に対して, H と $w(H)$ は同型な bundle を X 上に与えます. これによって,

$$\begin{aligned}&(\text{elliptic curve } X \text{ 上の principal bundle の moduli space})\\&\quad = (\text{Cartan subalgebra})/W\\&\quad = \mathfrak{h}/W\end{aligned}$$

とみなせます. 計算するときには $\mathfrak{h}$ に持ち上げて考えます. $\mathrm{Lie}\, G$ の Cartan subalgebra における coroot system は G の dual group の root system とみなすことができます. elliptic curve の場合にはこのような形で, bundle の moduli space の covering として, G の dual group の root system が登場します. このことは genus 1 の場合の大きな特徴です. これは, なぜ elliptic function が root system 上の量子可積分系に登場するかの一つの説明になっていると思います.

さらに, X 上に N 点を取って, quasi parabolic bundle の moduli を考え, affine Lie algebra の表現から moduli の上の twisted $\mathcal{D}$-module を作れば, それは Gaudin model の elliptic version に関係しているはずです. Nekrasov の論文も見てませんが, おそらくこの辺の話をまじめに計算したものになっているのではないでしょうか?

さらに, $N=1$ とすると, それは root system 上の微分方程式系というおもむきが強くなります. $N=1$ の場合でさらに elliptic curve を degenerate させると Jack polynomial の世界が登場するはずです. このことを僕自身はちゃんとチェックしてませんが, q-version および $q=1$ の場合の Etingof 達の仕事はそれをまじめにチェックした話になっているはずです.

root system 上の KZ eq. の類似というような話が結構ありましたが, その言い方は誤解を与える可能性があります. もともとの KZ eq. は $\mathbb{C}^N$ の上の方程式であり, $\mathbb{C}^N$ の点は curve $\mathbb{P}^1$ の直積の点であると思っているわけです. 一方, root system に対する KZ eq. の類似は, 上の立場のもとでは elliptic curve (もしくはその退化したもの) の上の principal bundle の moduli space(の covering) 上の方程式であるとみなされるので, もともとの KZ eq. とは方程式を考えている空間の出処が全く違います. A_{N+1} 型の場合に限っては, 式の上ではどちらも同じように見えてしまっているのです. だから, 上の立場のもとでは, root system 上の KZ eq. という言い方は, 幾何的な起源を正しく表現した言葉であるとは言えません. そのことがわかっていれば, root system 上の KZ eq. の類似という言い方も問題がないと思いますが, わかってない人には誤解を与える可能性のある危険な言い方であると思います.

最後にもうひとつ注意を述べておきます. Belavin-Drinfeld の elliptic classical r-matrix の世界は上で述べたものとは少し違います. 上で述べた話は任意の型の G に適当できる話ですが, BD の elliptic r-matrix は A_n型 ($G = SL_n(\mathbb{C})$) のみに適用できる非常に特殊な話です. (注意: 「特殊」=「特別に興味深い」 (^_^)) この特殊な例は, $\mathbb{P}^1$ 上で trivial bundle を考えた場合に似ていて, adjoint bundle の H^1 が消えている場合になっていま

す. (実は H^0 も消えている.) そのおかげで, 表現に対応する conformal block の空間が, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ の表現の言葉で書けます.

40. kuroki: 楕円曲線に関係した可積分系 (1)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: CFT on elliptic curves  (Re: Gaudin model)
Date: 9 Nov 1995 19:45:21 JST
Message-ID: <KUROKI.95Nov9194521@ume.math.tohoku.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Nov9032242@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> 鈴木武史さんや Felder がやっている話 (elliptic curve 上の CFT) とはどう繋がるのですか.

最近論文を読むのをサボっているのがまたばれてしまうのですが, 鈴木武史さんはどのような仕事をやったのでしょうか? それも elliptic curve 上の CFT ですか? hep-th に出ていた Felder 単著の仕事と Wieczerkowski と共著の仕事の方には目を通してあります.

私の話との関係は次のようなものです:

> すでに一般の Riemann 面上の定式化できっちりしたものがあり, それを elliptic curve の場合に適用し, 適切に trivialization を fix すると Felder が扱った場合の話になる.

Riemann 面上の WZW model の定式化として [TUY] というきっちりした論文がありますが, そこでの定式化は trivial bundle のみを考えた場合になっているので, そのままでは Felder およびそれよりずっと以前に Bernard が扱った場合を含んでいません. bundle の変形の方向のパラメーターも含めて方程式を立てることが本質的です.

ただし, Felder が扱った場合は Belavin-Drinfeld の elliptic r-matrix の世界では**ない**方の話です. 私は可積分系の用語に詳しくないのですが, dynamical r-matrix の場合を扱っていると言って良いのだと思います. (Felder は R-matrix の version も扱っていますが, q-version の話は私が解説した話の中にはもちろん含まれません.) 別の言い方をすると affine Lie algebra の表現の character (elliptic curve 上の 0 点函数) の N 点函数への一般化を扱っていると言うこともできます.

長谷川さんには何度も話したことですが, elliptic の世界で不思議なことの一つは intertwining vector の存在です. intertwining vector は Belavin の elliptic R-matrix と face W-matrix を繋げるものとして登場します. R と W それぞれの $q \to 1$ での対応物は

Belavin-Drinfeld の elliptic r-matrix と dynamical elliptic r-matrix になります:

$$\begin{tikzcd} \text{Belavin's elliptic } R\text{-matrix} \arrow[r, "\text{quasi classical limit}"] \arrow[d, "\text{intertwining vector}"'] & \text{BD elliptic } r\text{-matrix} \arrow[d, "???????????????"] \\ \text{Jimbo-Miwa-Okado face } W \arrow[r, "\text{quasi classical limit}"'] & \text{dynamical elliptic } r \end{tikzcd}$$

この図式の ???? の部分が何かというのは大変興味深い問題です.

Belavin-Drinfeld の elliptic r も dynamical elliptic r もその (代数) 幾何的な起源が何かということはわかっています. BD の r の方は別記事で少し触れた特殊な bundle が由来の対象であり, dynamical r の方は elliptic curve 上の principal bundle の moduli がその住みかになっています.

だから, ???? の部分が何かというのを確かめることは, intertwining vector の $q = 1$ の場合における幾何的な解釈を見付けよという問題を解くことになるはずです. BD の r と dynamical r は全く異なる幾何的由来を持つように見える対象であり, その間の関係を知ることは興味深いことだと思います.

問題なのは, dynamical r の方は本当によくわかっているとは言えないという点です. どこに住んでいるかはわかっているが, そこでどのように生活しているかはわかってないという感じだと思います. (私の知らないところですでにわかっているかもしれませんが….)

41. takebe: 楕円曲線に関係した可積分系 (2)

`From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)`
`Newsgroups: shitan.math`
`Subject: Re: CFT on elliptic curves  (Re: Gaudin model)`
`Date: 10 Nov 1995 02:59:49 JST`
`Message-ID: <TAKEBE.95Nov10025949@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>`

`In article <KUROKI.95Nov9194521@ume.math.tohoku.ac.jp>`
`kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:`

> $$\begin{tikzcd} \text{Belavin's elliptic } R\text{-matrix} \arrow[r, "\text{quasi classical limit}"] \arrow[d, "\text{intertwining vector}"'] & \text{BD elliptic } r\text{-matrix} \arrow[d, "???????????????"] \\ \text{Jimbo-Miwa-Okado face } W \arrow[r, "\text{quasi classical limit}"'] & \text{dynamical elliptic } r \end{tikzcd}$$
>
> この図式の ???? の部分が何かというのは大変興味深い問題です.

今, 実はそれを考えようとしていた所でした. 以前にも言いましたが, Sklyanin と一緒に elliptic Gaudin model の変数分離を考えているのですが, 我々の模型は黒木さんの言われ

るのとは, 少なくとも表面上は別の方向から定義します. こちらの方が「伝統的」approach だと思いますが, XYZ 模型の quasi-classical limit としてです.

“$\mathbb{P}^1$” Gaudin model はその名の通り Gaudin が定義した物で, これは XXX 模型の quasi-classical limit です. つまり,

$$(u) = 1 + (\eta/u)P$$

(u : spectral parameter, P : flip) と Yang's R matrix を書いた時, $\eta \to 0$ の極限として定義できる模型です. 詳しくは [Sk1] を御覧下さい. 自然な拡張として trigonometric や elliptic にしたらどうなる, という事になるわけです.

これは上の図の上の行に当たる訳ですが, Felder や Nekrasov, Rubtsov-Enriquez らの仕事を見ていると, Hitchin's system とか geometric Langlands とかいう高尚な数学に結びつくのはどうやら下の行の方です. (そもそも XYZ から定義すると Jacobian の分の変数が現われない.) でも, 上の図のような対応はある訳ですから, 両者には何か関係があるはずだ, と思っています.

大体, 変数分離については, XYZ Gaudin の方が Enriquez-Rubtsov が変数分離した Gaudin (彼らは “Gaudin-Calogero” と呼んでいる) より遥かに難しいのに, Enriquez-Rubtsov らのやっている簡単な方が受けが良いというのは悲しい.

長谷川さん, 御意見ありませんか.

42. kuroki: 楕円曲線に関係した可積分系 (3)

From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: CFT on elliptic curves (Re: Gaudin model)
Date: 13 Nov 1995 01:12:05 JST
Message-ID: <KUROKI.95Nov13011205@ume.math.tohoku.ac.jp>

まず, elliptic R and r の「基本図式」を再掲しておきます.

$$\begin{tikzcd}
\text{Belavin's elliptic } R\text{-matrix} \arrow[r, "\text{quasi classical limit}"] \arrow[d, "\text{intertwining vector}"'] & \text{BD elliptic } r\text{-matrix} \arrow[d, "???????????????"] \\
\text{Jimbo-Miwa-Okado face } W \arrow[r, "\text{quasi classical limit}"'] & \text{dynamical elliptic } r
\end{tikzcd}$$

まだ, いいかげんにしか考えてないことなのですが, 「上の図の上の行」(「上の図」=「基本図式」) も, Belavin-Drinfeld の elliptic r-matrix を生み出す代数幾何的な設定についてなのですが, その辺をしっかりさせれば, geometric Langlands 的な話に繋がる可能性があると考えています.

その一つの可能性は, 複素代数群 G の設定を curve X 上の group scheme に対するものに一般化することです. principal G-bundle は $G_X = G \times X$ を curve X 上の group scheme

とみたときの G_X-torsor と同じものです. Belavin-Drinfeld の elliptic classical r-matrix は elliptic curve 上の non-trivial な group scheme $\mathbf{G}$ (fiber は $SL(n,\mathbb{C})$ に同型) に対する trivial $\mathbf{G}$-torsor の世界から生み出されたものだと解釈することができます.

Lie algebra のレベルでは, BD r-matrix を生み出す設定は次のようなものです. まず, elliptic curve X を $X = X_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ といつものように表わしておきます. $sl(n)$ の自己同型として,

$$a = \mathrm{diag}(1,\zeta,\dots,\zeta^{n-1}) \quad (\zeta \text{ は } 1 \text{ の原始 } n \text{ 乗根}), \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

による conjugation を考えます. $z \mapsto z+1$ においては $\mathrm{Ad}(a)$ によって $sl(n)$ を貼り合わせ, $z \mapsto z+\tau$ では $\mathrm{Ad}(b)$ によって $sl(n)$ を貼り合わせることによって, X 上の Lie algebra bundle を構成します. (a, b の定める X の基本群の $PSL(n) = \mathrm{Ad}(sl(n))$ における表現に付随した fiber が $sl(n)$ に同型な flat vector bundle の “flat str.” を忘れたもの.) それを, $\mathbf{g}$ と書くことにします. $\mathbf{g}$ は fiberwise には $sl(n)$ と同型な Lie algebra の構造を持ちます. その特徴は $H^p(X,\mathbf{g}) = \{0\}$ が任意の p に対して成立することです. このおかげで, diagonal Δ における residue map

$$H^0(X \times X, \mathbf{g} \boxtimes \mathbf{g}^o(\Delta)) \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{g})$$

が同型写像になります. ($(\ )^o$ は dual vector bundle をとって Ω_X (実は $= \mathcal{O}_X$) を tensor するという Serre dual をとる functor です.) この同型写像における右辺の identity map に対応する左辺の元が BD の r-matrix になります. これは, [Ch] Cherednik の “Definition of τ-functions for generalized affine Lie algebras” で学んだ formulation です.

上の設定における $\mathbf{g}$ を Lie algebra scheme として持つような X 上の group scheme を構成することもできます. 上の a, b を $sl(n)$ に作用させる代わりに $SL(n)$ に作用させ, 同様に X 上の group bundle を構成すれば良いのです. それを $\mathbf{G}$ と書くことにします. $\mathbf{G}$ は fiberwise には $SL(n,\mathbb{C})$ に同型な群の構造を持ちます.

一つの重要な注意は, $H^p(X,\mathbf{g}) = \{0\}$ $(p = 0,1)$ より, trivial $\mathbf{G}$-torsor は non-trivial な infinitesimal automorphism と infinitesimal deformation を持たないということです.

数論における定式化を参考にして, この $\mathbf{G}$ から出発して, 理論を再定式化すれば状況がもう少しはっきりするように思えるのです. 数論の話では基礎体上で split してない代数群も含めた議論がなされてます. 例えば, 本来の (数論における) Langlands program は基礎体上 split してない簡約代数群の場合に関する定式化も含んでいます. しかし, 可積分系の方では, 上の $\mathbf{G}$ のような場合に関してはまだ十分に議論されてないように思えます.

XYZ Gaudin は上で述べた elliptic curve 上で $SL(2)$ をひねったものの世界の話ですよね. 話が難しくなる原因の一つは, ひねってあるので Cartan subalgebra のような便利なものが単純には使えないということですよね. そういう状況は基礎体上で split してない代数

群を扱う状況に似ているので, そちらの方で何か参考になるテクニックがないかどうかさがしてみるのは自然な考え方だと思います.

ところで, その Enriquez-Rubtsov の論文は eprint に出ていましたっけ?

| 長谷川さん, 御意見ありませんか.

ありゃ? 長谷川さんの home を見ても .newsrc-shitan が見当たりません. 読んでないのかもしれません. 長谷川さんに「話がふられましたよ! 」と教えておきます.

43. takebe: 楕円曲線に関係した可積分系 (4)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: CFT on elliptic curves  (Re: Gaudin model)
Date: 14 Nov 1995 03:32:04 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Nov14033204@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

この週末は天気が良かったのに表にも出ず intertwining vector を使って XYZ Gaudin (XYZ の quasi-classical limit) を Nekrasov (Enriquez-Rubtov) の書き下した Hitchin's system on an elliptic curve = elliptic Gaudin-Calogero model に繋げる事を考えていました. 黒木さんの記事をまだ全部は読んでいないのですが, geometric Langlands correspondence (Drinfeld の第二の構成) で出て来る Jacobian の変数は, intertwining vector の足 (ϕ_ν^λ と書く時の λ とか ν) から出て来るようなので, やはり, 直接 XYZ Gaudin で geometric Langlands correspondence を考えるのは無理がありそうな気がしてきました.

でも XYZ Gaudin だって, どこかに代数的な解釈があるはずだと信じていますので, 黒木さんの記事をこれから勉強します.

| ところで, その Enriquez-Rubtsov の論文は eprint に出ていましたっけ?

どうやら, まだ投稿してませんね. 6 月に Moscow で貰った奴です. 以前に書いた higher order Gaudin の論文に間違いがあったとかで, そこの訂正が済むまでは出さないつもりなのかも知れません. また, $\mathbb{P}^1$ についての Gaudin の変数分離と geometric Langlands の関係をどう書くか (E. Frenkel のに書かれているのでいれないか, 説明の都合上詳しく書くか) で二人の意見が割れている, とも言っていました. この間, この二人と A. Yu. Orolov の共著の別の仕事が q-alg かどこかに出ていたから, そちらで忙しかったのかも.

```
# > ありゃ?  長谷川さんの home を見ても .newsrc-shitan が見当たりません.
#
# こういう風に行動が読まれてしまう所が net の恐ろしい所なんだよな.
# といいつつ, finger や w を使いまくっている私でした. でも本郷で管理者
# 権限を悪用した事はなかったので, そこだけは胸を張れる.
```

ところで, incoming intertwining vectors は [TF] に現われている事を, 昨日になってやっと気づきました. この論文は私が eight vertex model の一般化の Bethe Ansatz を計算する時に, 下敷にしているもので (本当に下に敷いて計算してたりする (^^;;)) 長谷川さんの話も何度も聞いていながらちゃんと理解していなかった事を懺悔します. [TF] では outcoming vectors をまとめて (discrete な空間上の) gauge 変換の行列と考え, その逆行列も重要な役割を演じるのですが, これが incoming intertwining vectors そのものですね.

44. kuroki: 楕円曲線に関係した可積分系 (5)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: CFT on elliptic curves  (Re: Gaudin model)
Date: 14 Nov 1995 14:44:16 JST
Message-ID: <KUROKI.95Nov14144417@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

他の記事でも書いたことですが, elliptic curve X の上の CFT に Jacobian (今は elliptic curve の話なので Jacobian $= X$ 自身のコピー) の直積が登場するのは,

(∗) X 上の semistable principal G-bundle の moduli space

の covering としてです. (Weyl 群で割ると moduli variety になる.) semistable vector bundle の場合の話は [Tu] にあります.

それでは, 別記事に書いた Belavin-Drinfeld の elliptic classical r-matrix の代数幾何的な設定に登場する elliptic curve 上の group scheme $\mathbf{G}$ (fiber は $SL(n,\mathbb{C})$) の場合における (∗) の類似物は, semistable $\mathbf{G}$-torsor です. おそらく, $\mathbb{P}^1$ の場合の状況との類似性から, 適切な定義のもとで,

$$\{\text{semistable } \mathbf{G}\text{-torsors}\} = \{\text{trivial } \mathbf{G}\text{-torsors}\}$$

というのを信じて良いと思います. 要するに $\mathbb{P}^1$ の場合のように trivial な bundle (torsor) のみを考えれば良いということです. あとは, $\mathbb{P}^1$ の場合の類似をたどることがどこまで可能かということをつきつめて行けば, 計算的な方法でも geometric Langlands 的な話に繋げられるであろうと考えています.

$\mathbb{P}^1$ の場合の類似をたどるというのは, まず, $\mathbb{P}^1$ の場合のように N 個の点を elliptic curve X の上に与え, その上の quasi parabolic structure を考え, quasi parabolic torsor の moduli を考えます. 今の場合, その moduli space は $SL(n,\mathbb{C})$ の flag F の N 個の直積 F^N に等しくなります. $\mathbb{P}^1$ の場合と違って G の diagnal action で割る必要はありません. sl_2 の場合は $F = \mathbb{P}^1$ なのでかなり分かり易い対象になります. ……

…という調子で E. Frenkel が q-alg/9506003 の Section 5 に書いてある議論をほとんどそのままたどることができそうに思えるのですが, 武部さんいかがでしょうか? そして, Section 6 の SoV の話も $\mathbb{P}^1$ の場合と類似の議論をたどることができそうな感じがします.

$\mathbb{P}^1$ + trivial bundle と Belavin-Drinfeld の r-matrix の設定の共通点は adjoint bundle (上の場合は $\mathbf{G}$ の Lie algebra (scheme)) の H^1 が消えていることです. BD r-matrix の設定では H^0 も消えています.

45. takebe: 楕円曲線に関係した可積分系 (6)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: CFT on elliptic curves  (Re: Gaudin model)
Date: 14 Nov 1995 08:02:39 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Nov14080239@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

P²S (post-postscript)

```
In article <TAKEBE.95Nov14033204@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> どうやら, まだ投稿してませんね. 6 月に Moscow で貰った奴です. 以前に書いた higher order Gaudin の論文に間違いがあったとかで, そこの訂正が済むまでは出さないつもりなのかも知れません. また, $\mathbb{P}^1$ についての Gaudin

失礼しました. 変数分離を扱っているのはこの未発表の論文ですが, formulation と Hamiltonian, L-operator, r-matrix 等は既に alg-geom/9503010 の論文で示されています. 但し, $sl(2)$ の時は良いのですが, $sl(n)$, $n > 2$ については, 計算に間違いがあるそうですのでご注意下さい.

46. ochiai: Borel の取り方 (1)

```
Date: Wed, 8 Nov 95 10:16:52 JST
From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
To: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp
Subject: Re:  Question
```

たけべさん, 日本語きちんと読めましたよ.

質問の件ですが, 私は次のような方法を「強く」推奨したいと思います.

ボレル部分群は B, C, D 型でもやはり上三角行列全体に取りましょう.

で, そのためには, 群を適切に実現しておくことが必要です. すなわち, まず, D 型で説明しましょう. 普通は直交群と言いますと, 二次形式 $x_1^2 + \cdots + x_{2n}^2$ を不変にする線形変換全体, としますが, これではなく二次形式 $x_1x_{2n} + x_2x_{2n-1} + \cdots + x_nx_{n+1}$ を不変にする線形変換全体とします. もちろん群としては同形です. 複素数体上では. (実数体上ではスプリットした二次形式とよくいいます.)

別の言い方をすると, 反対角線上 1 でほかの成分が零の行列を J とすると $gJg^t = J$ を満たす行列全体が, 今の直交群です.

このように実現すると, 上三角に取れます.

B 型でも J を上と同じ様にとり, C 型でも J は反対角線上のみに 1 か -1 のある交代行列 (右上の n 個が 1 で左下の n 個が -1) に取れば, まったく同じ構成です.

このようにとっておくことは, flag variety の幾何をやる人には常識のようですが, 表現論では必ずしも浸透しているとはいえないと思います.

47. kuroki: Borel の取り方 (2)

第 46 節 (p. 66) へのフォロー.

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Borel of B, C, D
Date: 16 Nov 1995 16:51:05 JST
Message-ID: <KUROKI.95Nov16165105@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

あと, Drinfeld-Sokolov (J. Sov. Math. 30, 1985, 1975–2036) の Appendix 1 に書いてある B, C, D 型の Lie 環の実現も, やはり, Cartan は対角線上に住んでいて, Borel は上もしくは下三角になっているようです. ただし, B, D 型に対する二次形式の取り方は落合さんおすすめのものとは (見かけ上) 違っていて, 二次形式も対角行列で表現されたものを取っています. (そこには Chevalley generators の取り方も書いてあります.)

たしか, 昔の佐藤学派の KdV, KP とその仲間達に関する論文でも似たような実現を用いていたと思います.

$\mathbb{Q}$ 上で split する形での実現を用いておかないと, Chevalley generators の行列表示の中に無理数や虚数が出てきてカッコワルくなります.

48. takebe: Borel の取り方 (3) — B, C, D 型の opers に関するヒント

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Borel of B, C, D
Date: 17 Nov 1995 02:39:29 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Nov17023930@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

Beilinson and Drinfeld "Opers" を見ると, 確かに B, C, D 型の時も Borel の principal bundle を考える時 flag を

$$0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = E$$

と取って「E_i と E_{n-i} が直交する」等の条件を付けている事に気が付きました.
詳しくは又今度

49. ochiai: Borel の取り方 (4)

```
Date: Wed, 29 Nov 95 18:46:48 JST
From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
Message-Id: <9511290946.AA19308@rkmath.rikkyo.ac.jp>
To: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp
Subject: on Borel
```

ボレルの取り方についての黒木さんのコメントについて,

Drinfeld-Sokolov の取り方を調べてみました. そこに explicit に書かれているようにやはりボレルは上三角に取るのです. ただし, 「対角行列に取っています」というのは少々 misleading と思うのでひとこと. 彼らの使っている転置行列は, 「第 2 対角線に関する」転置なので, これをもし通常の転置行列で表示したら, 両側から挟む行列は, 「第 2 対角線上のみに成分を持つ行列」となりますから, 以前書いたものとは, 各成分の符号を除いて一致することになります.

このような論文にも, 取り方がわざわざ書いてあるということは, 必ずしも, この取り方が広く流通していないことを, 意味しているわけでがっかりです.

50. takebe: reductive な G に対する G-opers の記述 (oper 7)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: oper No.7
Date: 21 Nov 1995 11:14:25 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Nov21111425@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

$sl(2)$-oper の記述の話をするとお約束してありましたが, その中でどうしても避けられないのが center の話で, 黒木さんが shitan.math の article 70 で書いておられるように[25],

> simple Lie algebra $\mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{g}$-oper = $Ad(\mathfrak{g})$-oper が $\mathfrak{g}$-oper の定義だったので,
>
> $$sl(n)\text{-oper} = \mathrm{Ad}(sl(n))\text{-oper} = PSL(n)\text{-oper}$$
>
> であるということになります. そして, $SL(n)$ の Langlands dual は $PSL(n)$ です. その最も簡単な場合である $sl(2)$-oper = $PSL(2)$-oper の話を聞きたいです.

です. Global に $sl(2)$-oper の話をする時には, この $SL(2)$ $(= Sp(2))$ と $PSL(2)$ との関係をみる必要があります. (後で $sl(2)$-oper を Sturm-Liouville 型微分作用素 L として記

[25]* このノートには収録されてない.

述するには, まず $Sp(2)$-oper を L と $M=\Omega^{1/2}$ の組として表して, それが $sp(2)$-oper としては M に依らない, というように話を進めます.)

お分かりのように Lie 環では測れない所が問題になります. 困った. 代数群の良く分かっていない私には辛い物があり, 避けたかったのですが仕方がない.

一般論で話した方が記号が楽 (例えば "G" のほうが "$SL(2)$" より楽) なので, そうさせて下さい.

記号の復習:

$$
\begin{aligned}
&G = \text{複素数体上の連結 reductive group},\\
&B = \text{Borel 部分群},\\
&H = \text{Cartan 部分群},\\
&\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{h} : \text{対応する Lie 環},\\
&\Gamma = \{\mathfrak{b}\ \text{に対応する simple roots}\},\\
&\mathfrak{g}^\alpha = \alpha\ \text{に対応する root 部分空間},\\
&Y = \text{複素数体上の滑らかな代数曲線},\\
&\Omega = \text{その上の canonical bundle}.
\end{aligned}
$$

新しい記号:

$$
\begin{aligned}
&G_{\mathrm{ss}} = G\ \text{の交換子群} = \text{半単純部分},\\
&\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} = \text{その Lie 環},\\
&Z = G\ \text{の中心},\\
&B_{\mathrm{ss}} = B\ \text{と}\ G_{\mathrm{ss}}\ \text{の共通部分},\\
&H_{\mathrm{ss}} = H\ \text{と}\ G_{\mathrm{ss}}\ \text{の共通部分},\\
&G_{\mathrm{ad}} = G/Z, \qquad B_{\mathrm{ad}} = B/Z, \qquad H_{\mathrm{ad}} = H/Z.
\end{aligned}
$$

例:

$$
\begin{aligned}
&G = SL(2), \qquad G_{\mathrm{ss}} = SL(2), \qquad Z = \{+1, -1\}, \qquad G_{\mathrm{ad}} = PSL(2).\\
&B = \{\ \text{上半三角行列}, \det = 1\} = B_{\mathrm{ss}},\\
&H = \{\ \text{対角行列}, \det = 1\} = H_{\mathrm{ss}}.
\end{aligned}
$$

以下 ??? で始まるのは「質問行」です.

??? Z が B や H に含まれる, というのはどうしてですか. Borel や Cartan の定義を見ればすぐに分かりましたっけ. $SL(2)$ なら計算すればさすがに分かりますが.

これから, $\Omega^{1/2}$ を固定したとき, 次の category 同値が得られることを示します:

$$
(G\text{-oper の category}) \quad \simeq \quad ((E_1, E_2)\ \text{の category}).
$$

ここで E_1 は $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$-oper, E_2 は接続を持った principal Z-bundle. 以下はこの category 同値の説明です.

50.1. G-oper から (E_1, E_2) へ

$\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$-oper $=$ Ad$(\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}})$-oper で Ad$(\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}) = G_{\mathrm{ad}}$ だから, G-oper, つまり B-bundle と接続がしかるべく与えられればその fiber を Z で割って B_{ad}-bundle と接続で G_{ad}-oper の条件を満たす物が得られる. これで E_1 ができた.

??? Ad$(\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}) = G_{\mathrm{ad}}$ はどうして???

E_2 の作り方. 分からない. (書いてない.)

??? 簡単な筈だと思います. 急いでいるので, 今は pass. 誰か follow お願いします.

50.2. (E_1, E_2) から G-oper へ

(ここで E_1 は $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$-oper, E_2 は接続を持った principal Z-bundle.)

E_1 から G_{ss}-oper が作れれば, それと E_2 を Z 上でかけてやれば G-oper ができる. (G_{ss}-oper は principal B_{ss}-bundle とその上の接続であった事に注意.)

以下, $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$-oper $= G_{\mathrm{ad}}(= G/Z)$-oper を G_{ss}-oper に持ち上げる.

$(F_{\mathrm{ad}}, \nabla)$ が G_{ad}-oper であるとする. F_{ad} は B_{ad}-bundle だが, これを B_{ss}-bundle に持ち上げられれば, $G_{\mathrm{ss}} \to G_{\mathrm{ad}}$ の核は離散的だから (Lie 環を計算すれば分かる), 接続は自動的に持ち上る.

??? これはこういってしまって大丈夫?

B_{ad} は H_{ad} と N_{ad} (nilpotent) の半直積だから, F_{ad}^H を F_{ad} の H_{ad} に対応する部分として, F_{ad}^H を H_{ss}-bundle F_{ss}^H に持ち上げられれば, F_{ss}^H と B_{ss} を H_{ss} 上かければ F_{ad} の B_{ss}-bundle としての持ち上げが得られる.

G-oper の定義から, $\mathfrak{g}_{F_{\mathrm{ad}}}^{-\alpha}$ は標準的に $\mathcal{T}$ (tangent sheaf) と同型だから, $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ の零でない元 y^α を決めれば, 同型写像

$$F_{\mathrm{ad}}^H \times_{H_{\mathrm{ad}}} \mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_{F_{\mathrm{ad}}}^\alpha \xrightarrow{\sim} \Omega$$

が定まる. 一方,

$$\mathfrak{g}_{F_{\mathrm{ad}}}^\alpha = G_{\mathrm{ad}}^H \times_{H_{\mathrm{ad}}} \mathfrak{g}^\alpha$$

とも表される. ここで, G_{ad}^H は Ω に対応する $\mathbb{C}^*$-torsor の構造群の射

$$\lambda : \mathbb{C}^* \to H_{\mathrm{ad}} \qquad (\lambda(t) \text{ はどの } \mathfrak{g}^\alpha \text{ 上も } t \text{ 倍で作用する } H_{\mathrm{ad}} \text{ の元})$$

による direct image. これが任意の α について成り立つのだから, F_{ad}^H は G_{ad}^H と同型.

λ は $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ の fundamental coweight の和 $\rho^\vee$ に対応するが, $2\rho^\vee$ は $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ の coroot lattice に属するから, それに対応する $\mu : \mathbb{C}^* \to H_{\mathrm{ss}}$ があって, (??? ここが key point なんですが, どうして H_{ss} になったのか分かりません.)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ {\scriptstyle\mu}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\lambda} \\ H_{\mathrm{ss}} & \longrightarrow & H_{\mathrm{ad}} \end{array}$$

が可換. ここで, 上の $\to$ は $t \mapsto t^2$. この図の右側が Ω と $G_{\mathrm{ad}}^H = F_{\mathrm{ad}}^H$ に対応していた訳なので, 左側から$\Omega^{1/2}$ に対応する $\mathbb{C}^*$-torsor の μ による direct image を取れば F_{ad}^H の持ち上げになっている H_{ss}-bundle が得られる.

??? $G_{\mathrm{ss}} = SL(2)$, $G_{\mathrm{ad}} = PSL(2)$ の場合なら, S^1 を「半周」すると -1 まで来て, $PSL(2)$ の中では unit に戻った. $SL(2)$ の中で unit に戻るにはもう半周しなければならない, というイメージで良いと思うんですが, もっと厳密に一般的に言うとどうなるんでしょうか?

先に述べたように, これが出来れば G_{ss}-torsor が作れる.

途中で y^α というのを固定して $\mathfrak{g}_{F_{\mathrm{ad}}}^\alpha$ と Ω の同型を作ったが, 出来た物はこのとりかたに依らず同型.

??? 上で, G_{ad}^H というのは私が勝手に付けた名前で, 論文では, この辺は極簡単に数行で書いてあります. 余計な事を書いて間違いが混入しているかも知れません. 指摘して頂ければ幸いです. 分からない話を書くと, つい細かい所まで書き込んで長くなってしまう. 退屈したら御免.

50.3. $\Omega^{1/2}$ の取り方によらないこと

$\Omega^{1/2}$ (=: M) を固定して議論していますが, これを M' に変えたとすると, E_1 は変わらず, E_2 の方が少し捻られます. 今日は略.

$sl(2)$-oper だけ考えようとしても, 既にいろいろな事がでて来ます.

次回こそ共役と $sl(2) = sp(2)$-oper だ! ($o(3)$-oper としての記述はまた今度.)

51. takebe: $sl(2) = sp(2)$-oper の記述 (oper 8)

```
Date: Sat, 25 Nov 1995 05:58:41 +0900
From: TAKEBE Takashi <takebe@ms.u-tokyo.ac.jp>
Message-Id: <199511242058.FAA21477@mail.ms.u-tokyo.ac.jp>
Subject: oper No.8
```

予告通り $sl(2)$-oper を $sp(2)$-oper と考えて Sturm-Liouville 作用素として記述出来る事を示します. 「予告」なぞしたわりにはたいした事はありません.

51.1. $GL(n)$-oper の共役

その準備として微分作用素の共役が oper とどういう関係になっているかを見ておきましょう. $Sp(2m)$, $SO(m)$ ともまず $GL(n)$-oper として微分作用素で記述し, その微分作用素が共役に対してどう振舞うかで $Sp(2m)$-oper, $SO(m)$-oper を記述しています. これは $GL(n)$ の元でこれこれの二次形式を不変にするものが $Sp(2m)$, $SO(m)$ だ, という事に対応します[26].

[26]* 第 48 節 (p. 67) も参照せよ.

ここで共役と言っているのは formal adjoint の事で,

$$P = a(z)\partial^n \mapsto P^t = (-\partial)^n a(z)$$

で定義されます. L が可逆層 A から B への微分作用素であれば, L^t は $\Omega \otimes B^{-1}$ から $\Omega \otimes A^{-1}$ への微分作用素になります.

(L, A, B) という三組に対して $GL(n)$-oper $(E, \{E_i\}, \nabla)$ が定義されるのだから, $(L^t, \Omega \otimes B^{-1}, \Omega \otimes A^{-1})$ に対する $GL(n)$-oper は何か, という問題があります. 以前にも書いた通り

$$\begin{aligned} &E_1 = A^{-1}, \\ &0 \to E_{n-1} \to E \to \Omega \otimes B^{-1} \to 0, \end{aligned}$$

だから $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\ \ , \mathcal{O})$ で dual を取ってやれば, $E^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(E, \mathcal{O})$ に $(E^*)_i = \mathrm{Annihilator}(E_{n-i})$ で filtration が入り,

$$\begin{aligned} &(E^*)/(E^*)_{n-1} = (E_1)^* = A, \\ &(E^*)_1 = (\Omega \otimes B^{-1})^* = \Omega^{-1} \otimes B. \end{aligned}$$

これで, 接続も dual をとれば (E^*, E_i^*, ∇^*) という $GL(n)$-oper が出来て $\Omega \otimes B^{-1}$ から $\Omega \otimes A^{-1}$ への微分作用素で表される筈です. 実際,

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & -L^t \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ (E, \{E_i\}, \nabla) & \longrightarrow & (E^*, \{E_i^*\}, \nabla^*) \end{array}$$

は可換になります. 証明は L から作った oper (E, E_i, ∇) と $-L^t$ から作った oper $(\tilde{E}, \dots)$ が pairing $E \times \tilde{E} \to \mathcal{O}$ defined by

$$(u, v) = \mathrm{res}(u L^{-1} v^t)$$

で dual になる事を示します. (u, v は simply generated $\mathcal{D}$-module E, $\tilde{E}$ の $\mathcal{D}$ の中での代表元. L^{-1} は擬微分作用素としての inverse, res は擬微分作用素として ∂^{-1} の係数を取ると言う事.) 詳細は略. 難しくないので.

51.2. $sl(2) = sp(2)$-oper

$sl(2) = sp(2)$-oper は, “oper No.7” の記事で述べたように, $\Omega^{1/2}$ の取り方を fix すれば $SL(2) = Sp(2)$-oper modulo $((SL(2) = Sp(2)$ の中心$) = \{+1, -1\})$-torsor と見なす事が出来ます.

$Sp(2)$ は shitan.math Article No.84 で落合氏の言われるように[27], 行列 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ に対応する二次形式 (symplectic form) を fix する行列全体として定義すれば, Borel は上半三角行列に取れるので, $GL(n)$-oper を記述する時に使った flag の記述がそのまま使えます.

[27]* 第 46 節 (p. 66).

$GL(2)$-oper (E, E_1, ∇) が $Sp(2)$-oper という条件は上の symplectic form が global に定義されていて, 接続 ∇ に対して horizontal である, という事 (と flag に関する条件) に還元されます.

(Flag に関する条件とは, この symplectic form を使って, E と E^* を同一視すれば, $Sp(n)$-oper ならば E_i の annihilator が E_{n-i} になる, という条件ですが, $n = 2$ ならばこれはいつでも成り立っている.)

(E, E_1, ∇) に $GL(2)$-oper の意味で対応している微分作用素を $L : A \to B$ として, $Sp(2)$-oper である条件を書くと:

$$B \text{ は } \Omega \otimes A^{-1} \text{ と同型}, \qquad L^t = L.$$

証明は上の symplectic form で canonical に E と E^* を同一視できるので, それと 51.1 で見た微分作用素の共役との関係を見れば良い. 難しくないので, 略.

特に, L の主表象から $\Omega^2 \otimes A \to \Omega \otimes A^{-1}$ という同型ができるので, $\Omega^{1/2}$ の取り方を fix すれば A は$\Omega^{-1/2}$ と同型.

$sp(2)$-oper については, $\{+1, -1\}$-torsor で捻る自由度を modulo すればよく, これにより

$$L : \Omega^{-1/2} \to \Omega^{3/2}, \qquad L^t = L, \qquad \text{主表象} = 1$$

という 2 階の微分作用素で表される事がわかる. (つまり, $\Omega^{1/2}$ の取り方を指定する必要は無い. 詳細は略. いま腹が減っているので.)

というわけで, $sl(2)$-oper と Sturm-Liouville 型微分作用素の対応ができました.

##
今 Belgie にいる塩田さんから，「Thanksgiving の連休だという
のに仕事ばかりしてますね」と言われたので (?) これから昼飯です.
##

さて, 賢島ではどのような話があったのでしょう.

52. nakajima: 4d Gauge Theory and affine Lie algebras

From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: 4d Gauge Theory and affine Lie algebras
Date: 21 Nov 1995 17:46:53 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Nov21174654@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

賢島の講演の予稿を投稿することを約束したのですが, 城崎の講演録に原稿を書かなければいけないこともあり, どうせなら一緒に書いてしまおうと思って書き出したら, 序だけでもかなり長くなってしまったので取り敢えずそれだけ投稿します.

52.1. 序

昨年および今年に 4 次元のゲージ理論 (特にトポロジーへの応用) は様相を一変させた. その契機となったのは, Seiberg-Witten という物理学者による “双対性” の研究であった. これは 70 年代に発見された Olive-Montonen の “電気-磁気双対性予想” を $N = 2$ の超対称 Yang-Mills 理論に適応するように modify したものである. $SU(2)$ インスタントン方程式の双対であるところの $U(1)$ モノポール方程式が発見されて, Donaldson 理論で懸案であった数々の問題が次々と解かれていった. また純粋に物理的な動機づけからも “ 双対性” は $N = 2$ の超対称 Yang-Mills 理論だけでなく, 様々な理論について活発に研究されている (らしい).

この “双対性” において実は, ゲージ群は, Langlands dual に変えなければならない. また, なぜだか理由はよく分からないのであるが[28], 様々な場所に楕円曲線が顔を覗かせている. これを聞いて私は Langlands 双対性を思いおこした. 今のところ登場人物が共通しているというだけで, これからどう発展していくのか海のものとも山のものとも分からないが, Langlands 双対性の高次元化への第一歩として考えて見たらどうだろうかと思うのである[29].

さて, Langlands 双対性を念頭において, モジュラー形式の対応物としてインスタントンのモジュライ空間のホモロジー群をとることにしよう[30]. 次に考えなければならない対象は, いささかこじつけ的であると思われるかもしれないが, “Hecke 環” である. 次の節で局所大域原理と質量の類似を説明するときに詳しく述べるが, 高次元の理論である為に 4 次元多様体の中に埋め込まれた部分多様体に対応する Hecke 作用素も導入する必要がでてくる. するともとの Langlands 対応の場合と大きく異なることとして “Hecke 環” が非可換になる. その理由を標語的に言えば, 「リーマン面の上の二つの点は一般には交わらないが, 4 次元多様体の中の部分多様体は, 少々動かしても交わらないようには出来ない」からである.

というわけで, ここ数年, 特に代数曲面上の正則ベクトル束のモジュライ空間[31]の場合について, 主に有理曲線に対応する Hecke 作用素を調べてきた. ナント非常に驚いたことに, affine Lie 環が我々の Hecke 環として現れた. affine Lie 環は, 有限次元 Lie 環に値を持つ Laurent 多項式の成す Lie 環を central extension したものであるが, これが 2 次元の理論, 例えば共形場理論と馴染みやすいのは当然である. ところがどう想像しても結び付きそうもない 4 次元の理論にも, 何故か affine Lie 環が現れる[32]今のところ希望でしかない

[28]私が分かっていないという意味でなく, だれも分かっていないという意味である.

[29]同じく物理から動機づけられた双対性としてミラー対称性があり, 活発に研究されていることはご存じのことであると思う. こちらも活発に研究されてしかるべきと思うのだがそうでもないことが残念だ.

[30]インスタントンのモジュライ空間の上の何かを考えることは自然である. しかしホモロジー以上に精密な構造を取り扱うことは現在のところほとんど不可能である.

[31]Donaldson の定理によって代数曲面の場合にはインスタントンのモジュライ空間と同じ. 但し安定なベクトル束のみを取ってくる必要がある

[32]そもそも affine Lie 環にたどり着いたのも一朝一夕ではなかった. 私の動機は, Ringel と Lusztig の量子展開環の上三角部分の箙による構成を Kronheimer-Nakajima の ALE 空間上の ADHM 構成により理解することにあり, また Göttsche や吉岡くんがモジュライの Betti 数を計算して, そこに affine Lie 環の指標を発見した. これら数々の状況証拠から今書いているような考えにいたったのである.

が, affine Lie 環が現れる理由と, "双対性" において楕円曲線が現れる理由は何らかの関係があるのではないかと思う.

素数	4 次元多様体上の点や 部分多様体 C
モジュラー形式の空間	インスタントンのモジュライ空間のホモロジー群
Hecke 作用素	我々の Hecke 作用素
Hecke 環	affine Lie 環

以上のようなわけで, 現在までのところ理解したという状態からは程遠いのであるが, ここでは幾つかの affine Lie 環が現れる例について, 城崎では述べる時間のなかったものまで含めて紹介したい. いわばこれらは, 現象の理解を深めて行くための「実験」である[33]. 理論を構築することは, 今後の大きな課題としたい.

52.2.　局所大域原理と質量の類似

例に入る前に Hecke 環がなぜ重要であるか, 私の理解を述べ, さらに物理における質量の概念との類似について述べる. いささか手抜きで申し訳ないが, これは代数シンポジウムの講演録の原稿を少し手直ししたものである.

`{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}`

52.3.　Heisenberg algebra と代数曲面上の点の Hilbert scheme

X : 代数曲面

$S^n(X)$: X の n 次の対称積

$X^{[n]}$: X の colength n の $\mathcal{O}_X$ のイデアルの成す Hilbert scheme の成分

$\pi : X^{[n]} \to S^n(X)$: イデアルに対して, その support をおもみ付きで

`{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}`

以下の続きは城崎シンポジウムの報告集を見て下さい.

53.　nakajima: 賢島 Workshop の報告 (1)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: vertex operator algebra(?) associated with projective surface
Date: 28 Nov 1995 19:32:25 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Nov28193225@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

[33] この意味で私のやっていることは「実験数学」である

話題を拡散するのはあまりよくないと思うのですが, 賢島で時間がなくて話せなかったことを自分のメモ代わりに投稿しておきます. もし間違っていることがあれば, 指摘いただけるとありがたいです.

X を代数曲面とするときに, n 個の点の成す Hilbert scheme $X^{[n]}$ のホモロジー $H_*(X^{[n]})$ を考えます.

X のホモロジーの基底 C^i とその交叉形式に関する双対基底 D^i を取ったとき, 直和 $\bigoplus H_*(X^{[n]})$ (和は n を走る) の上に Heisenberg/Clifford 代数の積が作用します. 但し各 i にたいして C^i が偶数次元のときには, Heisenberg 代数が D^i が奇数次元の時には Clifford 代数が積の成分です.

このとき, 2 次元のホモロジーに対する Heisenberg 代数の積がどのように表現されるかを考えることは非常に面白い問題です. 2 次元のホモロジーは交叉形式によって lattice と思うことが出来るわけで, それが表現の上に別の algebra の対称性を引き起こす可能性があります.

一番典型的なのは, X として (射影的ではありませんが) ALE 空間, すなわち単純特異点の特異点解消を取ってきたときです. このとき, 例外集合は射影直線の和であり, 各既約成分が 2 次元ホモロジーの基底を与えて交叉形式は Cartan 行列の符号を代えたものになります. このとき Hilbert scheme の上への Heisenberg の作用は affine Lie 環の level 1 の表現を与えます. これは Frenkel-Kac によって観察された事実ですが, 最近ではより発展されて vertex operator algebra の理論となっています[34].

代数曲面のホモロジーとすると制限がきつすぎるかもしれませんが, この例のように準射影的なものまで広げておくと, 特異点理論との関連も出てくる可能性があるので非常に面白いことになると思います. 今のところは ALE 空間以外のときは何も調べていません.

54. nakajima: 前節に対する質問への回答

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: vertex operator algebra(?) associated with projective surface
Date: 29 Nov 1995 18:17:41 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Nov29181741@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.95Nov29073111@tsuru.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

> (1) 4 次元だから, 2 次元のホモロジーは交叉形式によって, lattice と思うことができる. lattice として simple Lie algebra の root system のみならず, 非常に一般のものが得られる.

[34] これは私が vertex operator algebra の理論を理解しているということを意味していません. Grojnowski の論文にそんなことが書いてあったので, 何人かの人に説明してもらっただけです.

代数曲面 (コンパクト) なものに限ると, unimodular, 定値ではない, その他の条件が出てきてあまり面白いものが出てこない来れど, ノンコンパクトまで許せばいろいろと面白いものが出てくる. あとは ホモロジー全体を取らなくて, 代数的サイクルで represent されるものだけ考えるとか, sublattice を考えれば良いかもしれません.

> (2) lattice があれば, それに対して Heisenberg 代数の VOA が得られる. ($\mathbb{P}^1$ 上の Boson に対する共形場理論.)
>
> (3) 予想: 複素代数曲面の 2 次元のホモロジーの lattice に対応する Heisenberg 代数の表現が, 直和 $\sum H_*(X^{[n]})$ の上に correspondence の形で構成されるであろう.
>
> これは, 物理学者の意味での予想ですか? それとも物理学者の意味では定理?

私の説明の仕方があまりよくなかったのですが, これは数学者の意味で定理[35]ですね. lattice の情報が, 交叉形式に関する双対基底を取っているところに含まれていたことに注意. lattice に対応する Heisenberg 代数の定義を, 基底を取って与えたために formulation が汚くなりました. でも計算するときはそうしておかないと...

> (4) VOA の世界を利用すると, affine Lie algebra の level 1 の表現や Monster のような散発型有限単純群の表現が得られる.
>
> (5) 予想: (3) で得られた Heisenberg 代数の表現の上に, (4) に挙げたような「別の algebra の対称性」の作用を幾何的に構成できるであろう.

そうそう. 正確には, 別の algebra 自身もやはり幾何学的に見えてくるはずだという気持ちも含みます. そうでなければ, 代数的には出来ているのだからあまり意味はない.... そして, それは “higher level” に拡張される. ここで “higher level” の定義はありません.

> 「それが表現の上に別の algebra の対称性を引き起こす可能性があります.」をこのように解釈しましたが, こんな感じのものを想像していたのですか?
>
> Monster のような面白い対象が代数曲面の世界に現われるとすれば, それは大変面白いことだと思います.

K3 と関係する可能性は十分あると思います. Monster に対応する lattice は, K3 lattice の sublattice になると聞いたような気がします..... 勘で言ってますので差し引いて受け取ってください.

55. kuroki: 賢島 Workshop の報告 (2)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Kashiko-jima Workshop
```

[35]* 「物理学者の意味での予想」と「数学者の意味での定理」に関する中島発言の引用: いや, 私が言ったのは “conjecture” と “theorem” との違いは, 「絶対正しい」と信じることが出来るかどうかによるのだということです. より正確には絶対正しいと他人を信じさせることが出来るかどうか, かもしれませんが... そこには物理屋さんと数学屋さんの違いはありません. 違いは, 数学屋は証明をしてみないとなかなか絶対正しいと思えないのだけれど, 物理屋さんは見えているものが少し違うから証明をつけなくても正しいことが分かる.... ということです.

```
Date: 29 Nov 1995 07:08:21 JST
Message-ID: <KUROKI.95Nov29070821@tsuru.math.tohoku.ac.jp>
```

賢島 workshop 『幾何学的 Langlands 対応とその周辺』(1995 年 11 月 23 日〜25 日) の超簡単な報告です.

私は遅れて行ったので全ての話を聞くことができなかったのですが, 11/23 の夕食には間に合い, その後であった落合さんの話から聞くことができました. 私が聞くことができた話は (以下敬称略),

(1) 落合: Charcter sheaves

(2) 粟田: Introduction to W algebras – II. Representations

(3) 永友: Introduction to Drinfeld-Sokolov theory

(4) 藤原: Langlands correspondence over a finite field

(5) 松尾: Feigin-Frenkel-Reshetikhin の仕事

(6) 黒木: よもやま話

(7) 中島: Langlands conjecture for 4D gauge theory

個人的には (1) の話を聞いて, character sheaf のことをもっと勉強しなければいけないことを痛感しました.

$\mathbb{C}$ 上の Langlands program に関係して, よくある穴埋め問題として, 問題を提出すると次のようになります.

体	有限体 $\mathbb{F}_q$	実数体 $\mathbb{R}$	$\mathbb{C}((z))$
Galois 群	だいたい $\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	だいたい $\mathbb{Z}$
表現論の幾何学化	Character sheaf	Character D-module	??????

ここで, Galois 群とは $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ (F は体) のことです. 「だいたい $\mathbb{Z}$」というのは, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の n を増加させたときの projective limit のことです. 有限体 $\mathbb{F}_q$ の代数閉包は $\mathbb{F}_q$ に 1 の巾根を全て付け加えたものになり, $\mathbb{C}((z))$ の代数閉包は z の巾根を全て付け加えたものになります.

上の穴埋め問題は, local な場合として $\mathbb{Q}_p$ を付け加えたり, さらに global な場合の話として, $\mathbb{F}_q$ 上の一変数代数函数体, 代数体, Riemann 面の代数函数体などの 1 次元の場合の話を付け加えて拡張することができます.

可積分系の理論と直接関係するのは, $\mathbb{C}((z))$ と Riemann 面の場合の話です. Riemann 面の場合の ?????? の部分には Hitchin の可積分系の量子化が入ると信じられているのですが, local な場合はどう見れば良いのでしょうか?

Drinfeld-Sokolov reduction の話は Whittaker function の話と関係しているのですが, そこら辺のことを誰か解説してくれると全体の繋がり (Drinfeld がすでに 10 年以上も前から見ていた世界) がはっきりして良かったと思います.

さらに高次元の場合なども考えることができると思いますが, これは来世紀の数学ですね.

56.　nakajima: 賢島 Workshop の報告 (3)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Kashiko-jima Workshop
Date: 29 Nov 1995 21:16:22 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Nov29211622@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

```
In article <TAKEBE.95Nov29110250@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> | (1) 落合: Charcter sheaves
>
> 落合先生, この記事を読めたら教えて下さい. これ何ですか.

$\mathbb{C}$ 上ですが, reductive group G 上の irreducible (adjoint-)invariant regular holonomic $\mathcal{D}$-module でその特性多様体が $G \times$ (nilpotent cone) に入っているもの.

落合さんの話しにでてきた induction は, 箙で QUE を作るときの積の定義に似てますね. さらに 余積を定義するときに使う Res という operation があるのですが (Lusztig: Introduction to Quantum Groups, 9.2.4), これはきっと "制限" の類似のはずで, そのようなことが Lusztig の本に書いてあります.

graded Lie group を考えると, 箙の話し (但し ADE) と指標層の同時拡張ができるというようなことを最近の Advanced in Math. でやっていたはず.

箙のときは, intersection cohomology を使った内積が定義されて, canonical bases はそれによる特徴づけができるのだけれど, 指標層のときも同じことができるのでしょうか??

57.　ochiai: 賢島 Workshop の報告 (4)

```
From ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp Tue Nov 28 21:22:42 1995
Date: Wed, 29 Nov 95 14:13:45 JST
From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
Message-Id: <9511290513.AA18743@rkmath.rikkyo.ac.jp>
To: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp
Subject: kashikojima
```

11/29 02:02 の質問から

私はルスティックの指標層の話を紹介しました. 土屋先生から, もっと式を書くように, 良い式を書くようにいわれました. (発表のあとで) 反省しています.

有限体では, コホモロジー (きか) も, 積分 (かいせき) も困難が無いので, うまく行きます. geometric Langlands は, コホモロジーは無限次元の問題, 積分はハール測度がないなどの, 瑣末な困難があり, 入り口が大変と思います.

黒木氏 11/28 22:08 から[36]

$\mathbb{C}((t))$, $\mathbb{F}_q$ はガロア群が同じですが, どちらも可換なので, 非可換類体論の示唆的なモデルとは言いがたいとおもいます. (非可換局所類体論の)

うまく, 定式化すれば, もちろんそうだと思いますが, やはり $\mathbb{Q}_p$はその分, 変なことが起こっていますよね. ....

58. kuroki: 賢島 Workshop の報告 (5)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Kashiko-jima Workshop
Date: 30 Nov 1995 03:41:32 JST
Message-ID: <KUROKI.95Nov30034132@tsuru.math.tohoku.ac.jp>
```

今眠い状態なので簡単にすませますが, 後でまた何か書くかもしれません.

```
In article <TAKEBE.95Nov29110250@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> | 私が聞くことができた話は (以下敬称略),
>
> この前にはどのような人が何を話したのでしょうか. 確か Gaudin の場合の Separation of Variables の事を誰かが話したのではないかと思うのですが.

手許にコピーするために借りた長谷川さんのノートがあるので, それを見てみると (敬称略), 私が聞けなかったのは次の 2 つの話です:

(-1) 清水: Introduction to the whole workshop (全体の様子)

(0) 高木: E.K.Sklyanin の “Separation of variables in the Gaudin model” の紹介

長谷川さんによると, 高木さんの話はクリアーだったとのことで, 聞けなくて惜しいことをしました.

> | (1) 落合: Charcter sheaves
>
> 落合先生, この記事を読めたら教えて下さい. これ何ですか.

[36]* おそらく 第 55 節 (p. 77).

Lusztig の有名な仕事であり, 雑誌『数学』に庄司さんの論説があったと思います. それを見たくてたまらないのですが, 整理をしてないのでなかなか見付かりません. (;_;)

Lusztig の仕事は有限体上の reductive group の場合の話なのですが, それに触発されて複素数体上の reductive group の場合の類似を考えたのが, 堀田・柏原の character D-module です[37]. 堀田先生によると, これは理論発展の

$$\mathbb{C} \to \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$$

というパターンの一つだそうです. Riemann 面上の話における Hitchin's fibration の量子化は複素数体上における character D-module の類似になっていると考えられています[38].

落合さんの話を聞いて charcter sheaf の話をもっと知る必要があることを痛感させられました. しかし, character sheaf の話は全く理解してないし, character D-module の話は耳学問に過ぎないので, 私がそれらを説明することはかなり困難です. character D-module の話の方はある種の量子可積分系の話であると思うので, 私にはそちらの方がイメージしやすかったと思います.

> | (2) 粟田: Introduction to W algebras – II. Representations
>
> Edik Frenkel が来た時も, さかんに Awata-Kubo-Odake-Shiraishi の話をしていきました. この粟田さんの話は q- とかではない普通のやつですか?

q-verion の話はしませんでした. Feigin-Frenkel の W-algebra の表現に関する結果の説明で話の最後になっています.

> | (3) 永友: Introduction to Drinfeld-Sokolov theory
>
> なぜか永友先生の話は聞き損ねてばかりいる.

永友さんは「KdV 方程式の世界にどのようにして Drinfeld-Sokolov reduction が登場するか」を説明してくれました.

> | (6) 黒木: よもやま話
>
> これでは中身が分かりませんが, 大体この newsgroup に書いておられる事だと思って良いですか.

賢島に夕方に着いて, 夕食をすかさず食って, のんびりしていたときに, 清水さんから明日の晩に何かお願いと言われたので, 内心「うげげ, そういうことなら何か準備してくるんだった」と思いながら, 表面的にはにこやかな表情 (のつもり) で引き受けました. :-)

話の内容は, よく憶えてないのですが, 手許の長谷川さんのノートを見ると大体次のような内容だったようです. 賢島では説明不足であった点も補足して説明しましょう. (3 つの話題に分かれている.)

---

[37]* これは大嘘. 史実はこの逆! 第 59 節 (p. 83) を参照せよ!

[38]* よって, これも嘘.

58.1. Bethe Ansatz

E.Frenkel の q-alg に出たやつの $\mathbb{P}^1$ 上の Gaudin model の Bethe Ansatz の話を読むと, それは大体次のようなことを言っているように見える.

$X = \mathbb{P}^1$ とし, D はその有限部分集合とし, $X^* = X - D$ と置く. この場合に, $G = SL_2(\mathbb{C})$ の場合に Beilinson-Drinfeld theory を適用すると, D に特異点を持つ $sl(2)$-oper を与えることと, Gaudin Hamiltonians の spectrum data を与えることは同じことになる. Gaudin Hamiltonians を微分作用素で書き下したものを H_i と書くと, 与えられた spectrum data に対して,

$$(*) \qquad H_i\, u \,=\, \mu_i\, u \qquad (i = 1, \dots, N)$$

という形の微分方程式 ((twisted) D-module) が得られる. これが, $sl(2)$-oper に対応する Hitchin's fibration の量子化である.

Gaudin model の問題は $(*)$ の解を line bundle の global section の形で求めよという形に変形される. $(*)$ がそのような解を持つためには spectrum data $=$ $sl(2)$-oper が特別なものでなければいけない. E.Frenkel の論文を読むと, 次の 3 つの条件は互いに同値らしい:

(a) 方程式 $(*)$ が line bundle の global section の形での解を持つ.

(b) 方程式 $(*)$ の spectrum data を与える $sl(2)$-oper を常微分方程式だとみなして得られる基本群のモノドロミー射影表現 $\pi_1(X^*) \to PSL(2, \mathbb{C})$ が trivial になる.

(c) Bethe Ansatz equation.

58.2. ramified case の場合も含む Hecke eigensheaf property (HEP) の定式化

これは武部さんが紹介してくれた Beilinson-Drinfeld の "Quantization of Hitchin's fibration ...." における HEP の定式化を ramified case に安易に拡張するとどうなるかについて説明しました.

予想. X は compact Riemann 面であり, D はその有限部分集合であるとする. G は任意の reductive 複素代数群であるとし, その Langlands dual を $G^\vee$ と表わす. このとき, ある surjective map

$$r : \{\text{ ある条件を満たす } \mathcal{D}\text{-modules on } \mathrm{Bun}_{G,D}\} \twoheadrightarrow \{\pi_1 \text{ の表現 } \rho : \pi_1(X - D) \to G^\vee\}$$

が存在して, 任意の $\mathcal{L} \in$ (左辺) に対して, $\mathcal{D}$-module $\mathcal{L}$ は $\rho = r(\mathcal{L})$ に関する "Hecke eigensheaf property" を満たす[39].

注意. Hitchin fibration を π と書くことにする. $\mathcal{D}$-module が満たすある条件には最低限

[39]* unramified case における写像 r の構成については, 文献 [Gin] も参照せよ.

(1) irreducible regular holonomic $\mathcal{D}$-module である[40].

(2) characteristic variety $\subseteq \pi^{-1}(0)$.

の 2 つは含まれている．この後者の条件は $\mathcal{D}$-module が Hitchin's fibration の量子化になっているという条件である．

注意. unramified case における r の構成は Ginzburg の最近の preprint に書いてある．ただし, $\mathcal{D}$-module の満たすべきある条件として, 上の注意に述べたものよりもかなり強い条件を仮定している．

注意. r の各 fiber は有限集合になると考えられていて, 各 fiber は L-packet と呼ばれている (のだったと思う)．Bethe Ansatz equation は trivial な ρ 上の L-packet を調べていることになっているようだ．

58.3. elliptic Gaudin model

上で述べた formulation の枠に Belavin-Drinfeld の elliptic classcial r-matrix の話は含まれない．この話は別の記事に書いたので[41]説明は略．

```
# 書いているうちに眠気が醒めてしまった．
# 体に悪いですね．これはいけません!
```

59. hotta: character D-module と character sheaf (どちらが先か?)

```
From: hotta@math.tohoku.ac.jp (Ryoshi Hotta)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Kashiko-jima Workshop
Date: 30 Nov 1995 12:38:56 JST
Message-ID: <HOTTA.95Nov30123856@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

本筋はとてもフォローは出来てないのですが，ちょっと歴史と違うようなので．最初で最後の書き込みになると思います．

```
In article <KUROKI.95Nov30034132@tsuru.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

[40]藤原さんは “regular” という条件を付けるとまずいというようなことを言っていたように思えますが, 私 (黒木) はそれがどうしてなのか理解できませんでした．

[41]* 第 40 節 (p. 60), 第 42 節 (p. 62), 第 44 節 (p. 65).

> Lusztig の仕事は有限体上の reductive group の場合の話なのですが, それに触発されて複素数体上の reductive group の場合の類似を考えたのが, 堀田・柏原の character D-module です. 堀田先生によると, これは理論発展の
>
> $$\mathbb{C} \to \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$$
>
> というパターンの一つだそうです. Riemann 面上の話における Hitchin's fibration の量子化は複素数体上における character D-module の類似になっていると考えられています.

初めに堀田・柏原の Invariant holonomic system = Harish-Chandra eq. があって，それを Riemann-Hilbert で有限体上に載せてみたのが Lusztig の character sheaf ですね (Orange Book の最後のところに書いてあると思う)．そのあと私めが名前を借りて character D-modules なんて言っていたことがありましたが，まだほんとの指標をコントロールするところまでは行っていない．L 先生の偉いところはほんとにこれで指標を (殆ど) 決めてしまったこと．

60. nakajima: Eisenstein series and quantum affine algebras

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Eisenstein series and quantum affine algebras
Date: 1 Dec 1995 13:47:23 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec1134723@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

Kapranov の送ってくれた Eisenstein series and quantum affine algebras について紹介します. 一部は, ebira.memo でも紹介したので, 読んだ人はいるかもしれません.

Langlands 哲学で, Hecke algebra の eigenfunction であるということが重要な役割を果たしますが, 私にはこのことの意味が良くつかめませんでした. 以下の Kapranov による説明によれば, U_q において Chevalley generators が Cartan の eigenfunction であるということの類似であると解釈できるようです. また L-関数の関数等式は, Cartan 行列が対称であること (ADE しか考えていません) に対応するそうです. 私には, Eisenstein series が出てくる所が良く理解できません (Langlands の Eisenstein series の論文が refer されていますが....) どなたか理解して説明してくださるとありがたいです.

A := exact category, $H(A)$:= the Hall algebra of A, *i.e.*, $\mathbb{C}$-algebra with basis corresponding to the isomorphism classes of $\mathrm{Obj}(A)$ with multiplication:

$$[L] * [M] = \sum_{[N]} g_{L,M}^N [N], \qquad g_{L,M}^N := \sharp\{0 \to L \to N \to M \to 0\},$$

or Ringel's modification

$$[L] *' [M] = \langle L, M\rangle^{-1/2} \sum_{[N]} g_{L,M}^N [N], \qquad \langle L, M\rangle = \prod_i (\sharp \operatorname{Ext}^i(L,M))^{(-1)^i},$$

and comultiplication:

$$r([N]) = \sum_{[L],[M]} \langle L, M\rangle^{1/2} g^N_{L,M} \frac{\sharp \operatorname{Aut}(L) \sharp \operatorname{Aut}(M)}{\sharp \operatorname{Aut}(N)} [L] \otimes [M].$$

例. 以下の例が存在する:

(1) representations (over $\mathbb{F}_q$) of a quiver. (NB. If quiver is not of finite type, must impose nilpotency condition.)

(2) X = smooth curve over $\mathbb{F}_q$, A = category of coherent sheaves.

説明は以下の通り:

(1) Ringel-Lusztig によって, $H(A)$ は quiver に対応する U_v^- $(v = q^{1/2})$ になります. (全部, perverse sheaf で formulate し直すことが出来て canonical base を与えることが出来る.)

(2) で, A_0 を torsion sheaves (*i.e.* 0-dim support) の subcategory とし, A_1 を locally free sheaves の subcategory とすると,

$$\begin{aligned} &H(A_0) = \text{classical Hecke algebra} \qquad (\text{by } T_{x,l} = [i_{x*}(\mathbb{F}_q^l)]), \\ &H(A) = H(A_0) \otimes H(A_1) \qquad (\text{by multiplication}), \\ &H(A_0) \text{ acts on } H(A_1) \end{aligned}$$

となります.

最初にちょこっと述べた U_q^- と $H(A)$ の類似は, $X = \mathbb{P}^1$ のときに $H(A)$ が (大体) $U_q(\hat{\mathfrak{b}}^-)$ に等しいということです. (ここで $\hat{\mathfrak{b}}^- = \mathfrak{n}^-[t, t^{-1}] + \mathfrak{h}[t^{-1}] \subset \widehat{sl}_2$)

さて, Langlands 哲学と繋げるためには, "cusp form" の空間を導入して, さらにその L 関数が affine sl_2 の Drinfeld realization の $F(z)$ と $F(w)$ の交換に関する基本関係式に現れる関数 (Ginzburg-Vasserot では θ で表わされている) に等しいことを見なければいけません.

このあたりになると, 私の力が及ばなくなってきましたので, そのうちまた考えるか, 他の人にお任せしたいと思います.

また, $U_q(\hat{\mathfrak{b}}^-) \mapsto U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ とするために, Hall algebra を derived category の場合に拡張するということを考えています. このあたりかなり準備しなければいけないので, ここも別の機会に回します.

最後に, 私の仕事との関連を言うと, 代数曲面の中に代数曲線が入っているとき, 代数曲面のモジュライ空間上の関数の空間の上に上の $H(A)$ が働くことは, 良いと思います. $\mathbb{P}^1$ が入っているときになぜ私の話しに $U_q(\widehat{sl}_2)$ の表現が出てきたかは, これによって非常に良く説明されます. higher genus のときは, より難しいかも知れませんが, もしかすると曲面から見たほうがいろいろと良く分かったりするかもしれません. そうなると私は非常にうれしいのですが... また, この構成では曲線が代数曲面の中でどのように交わっているかということが私の話しで大切であったことが説明できません.

61. ochiai: 半単純 Lie 群の center などについて

```
Date: Tue, 5 Dec 95 09:12:53 JST
From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
Message-Id: <9512050012.AA22525@rkmath.rikkyo.ac.jp>
To: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp
```

武部さん,

途中を飛ばして 11 月 21 日の記事 (Oper 7) が目につきました[42]. center について私の知っている範囲で補足します.

61.1. 半単純 Lie 群の center

$\mathfrak{g}$ を複素半単純 Lie 環とする (例えば sl_n を想定してください). これを Lie 環に持つような複素半単純 Lie 群 (または代数群) G を考える. 典型的なものは二つあって単連結なもの (G_{sc} と書くことにする) と adjoint 群 (G_{ad} と書いている) である. ($\mathfrak{g} = sl_n$ とすれば $G_{\mathrm{sc}} = SL_n$, $G_{\mathrm{ad}} = PSL_n$.) 他のものはすべてこの中間に位置する. その意味は以下の通り.

Z_{sc} を G_{sc} の中心とする. Z_{sc} は有限群であり, G_{ad} の基本群と同型 (つまり $G_{\mathrm{sc}}/Z_{\mathrm{sc}}$ は G_{ad} と同型) である. 被覆空間は基本群の部分群と対応していたから, Z_{sc} の部分群 Z' を一つ与えるごとに $G = G_{\mathrm{sc}}/Z'$ ができる. これによって, $\mathfrak{g}$ を Lie 環に持つような半単純代数群がパラメトライズされる. G の中心 Z は Z_{sc}/Z' である.

Cartan 部分群と Borel 部分群の定義から, Z は G の (任意の)Cartan 部分群および Borel 部分群に含まれる. 従って, 被覆の状況はここに忠実に反映していて, $H = H_{\mathrm{sc}}/Z'$, $H_{\mathrm{ad}} = H/Z$ などが成り立つ.

61.2. root と weight

$\mathfrak{g}$ の weight lattice, root lattice を P, Q ($\subset \mathfrak{h}^*$) とすれば, P/Q は Z_{sc} と (アーベル群として) 同型である. 上の説明との関係を付けると,

$$P = X^*(H_{\mathrm{sc}}) = \mathrm{Hom}(H_{\mathrm{sc}}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}), \qquad Q = X^*(H_{\mathrm{ad}}) = \mathrm{Hom}(H_{\mathrm{ad}}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$$

である. 完全列

$$1 \to Z_{\mathrm{sc}} \to H_{\mathrm{sc}} \to H_{\mathrm{ad}} \to 1$$

の character group を考えると

$$1 \to Q \to P \to \mathrm{Hom}(Z_{\mathrm{sc}}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \to 1$$

となる. (だから P/Q は Z の指標群と同型.)

[42]* 第 50 節 (p. 68).

上の表示から Q の元は H_{ad} に (従ってどんな G の Cartan 部分群 H にも) 持ち上がることがわかる. 特に「正ルートの和」2ρ はその定義から root lattice Q に属するので H に持ち上がる.

一方 ρ は「任意の simple coroot との pairing が 1」という性質で特徴づけられる (affine の時はこれが ρ の定義だったようだから有名). すなわち ρ は P に属する. 従って ρ は H_{sc} の指標に持ち上がることがわかる.

61.3. 可換図式

ここで武部さんの書いた可換図式 (の双対かな) をもう一度描くと

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{sc}} & \xrightarrow{\text{自然}} & H_{\mathrm{ad}} \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 2\rho} \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow[\text{二乗}]{} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

と成ります. 何となくいいですか?

61.4. 双対

これらの話を双対の状況に持って行くのは黒木先生の 10 月 20 日頃の記事に説明があったようだが, , , なんだか昔のが見つからない[43].

しり切れとんぼで済みません. あきらめて, 関連する別の質問へ.

61.5. シフト?

同じ記事の項目 7 について. 予想と定理 3 のシフトの差が 1 なのはどうしてでしょう. 点 x は曲線 X の中で実余次元 2 なので単純に 2, としてはいけないのだろうか?

62. takebe: $sl(2)$-oper の同型類全体の空間の記述 (oper 9)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: oper No.9
Message-ID: <TAKEBE.95Dec6100850@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

前回は $sl(2)$-oper ($= sp(2)$-oper) が Sturm-Liouville 型微分作用素として記述される事を見ました. $sl(2)$-oper は $o(3)$-oper と見做す事で 3 階の微分作用素としての記述もあり, それと上で述べた Sturm-Liouville 型作用素との関係を見るのも面白そうなのですが, もうすこし一般論と繋がる話をしておきましょう.

第 3 節 “A description of the set of $\mathfrak{g}$-opers” の

[43]* おそらく 第 8 節 (p. 16).

3.1 – 3.3. $sl(2)$-oper の同型類全体の記述 ($H^0(Y,\Omega_Y^2)$ 上の等質空間として)

を御紹介します. これは

3.4 – 3.7. 一般の $\mathfrak{g}$-oper の同型類全体 $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y)$ の等質空間としての記述

の基礎となるものです. 但し, 3.4 節の最後に書いてある事によると, この等質空間としての記述は canonical ではあるが reasonable なものかどうか分からないので, 使わないで済ませられるときは使わないようにする, との事.

??? 5 節の頭で (特異点付の) $\mathfrak{g}$-oper の同型類全体に代数多様体の構造を入れる事は, こんな記述を使わないでも, 「scheme で parametrize された (D-特異点付の) $\mathfrak{g}$-oper の族という自然な概念があるから」勿論できる, という事ですがどなたか説明して下さい.

しかし $sl(2)$-oper の場合だけは, とにかく見ておきましょう. どこでどう使われているか, 予断を許さないので.

この場合は $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y)$ が principal homogeneous space (日本語では何と言いますか?) になることは「良く知られている」, と書いてあり, 多分, Deligne の Equations differentielles a points singuliers reguliers (accent 記号は略) あたりを念頭においているのですが, 幸い, この論文でも復習してくれています.

記号は以前に使っていたものを踏襲します.

前回に述べたように, $sl(2)$-oper は Sturm-Liouville 型微分作用素として記述されます. この 2 階の作用素の定数項をずらすことで $H^0(Y,\Omega^2)$ が free かつ推移的に $sl(2)$-oper 全体に作用します. 詳しく書くと, ω を $H^2(Y,\Omega^2)$ の元とすると,

$$L \mapsto L+\omega$$

です. L の作用は局所座標で書くと,

$$(Lf)(z) = f''(z)\,(dz)^2 + u(z)f(z)\,(dz)^2$$

となっていましたから, この $u(z)\,(dz)^2$ を ω だけずらすことに相当します.

??? 「別の記述を使うと $L \mapsto L+\alpha\omega$, (α は有理数) となる」, となっているのですが, ここの所は良く分からない.

Sturm-Liouville 型作用素を使わずに接続の言葉でこの $H^0(Y,\Omega^2)$ の作用を書くと次のようになります.

Borel (B_{ad}) として { 非退化上半三角行列全体 }$/\{+1,-1\}$ を取る. 今は $sl(2)$-oper を考えているので, $\mathfrak{g}_F^{-1}/\mathfrak{g}_F^0$ は rank 1 で, 従って oper の定義より ∇ は tangent sheaf $\mathcal{T}$ から $\mathfrak{g}_F^{-1}/\mathfrak{g}_F^0$ への同型を与える. $\mathrm{Tr}(XY)$ で $\mathfrak{g}_F^1$ をこの双対と見做せば, $\mathfrak{g}_F^1$ は Ω と同一視できる.

この同一視のもとで, $L \mapsto L+\omega$ は, ω を

$$H^0(Y,\Omega^2) = H^0(Y,\mathfrak{g}_F^1\otimes\Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{T}_Y,\mathfrak{g}_F^1)$$

の元と見做して $\nabla \mapsto \nabla - \omega$ とずらす事に他ならない.

今考えた作用で Borel bundle のほうは全く動かさなかった訳ですが, 実際, Borel (B_{ad}) bundle を $E = E_2$ という rank 2 bundle とその rank 1 subbundle E_1 で表示した時, $\Omega^{1/2}$ を決めれば

$$E_1 = \Omega^{1/2}, \qquad E_2 = \mathcal{D}_1 \otimes E_1$$

($\mathcal{D}_1$ は一階以下の微分作用素のなす層) で決まっている. $\Omega^{1/2}$ の取り方は B_{ad} を考える時は関係ない.

Remark として, この B_{ad}-bundle が Deligne の前掲の本で "nice description" を与えてある, とありますが, 詳しくは略. 射影接続の話ですから, いろいろ関係があるはずですね.

この作用を使う事で, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y)$ が空集合ではないという事が証明できます. B_{ad} bundle が trivial になるような小さい開集合上なら $sl(2)$-oper は trivial に作れます. 上の作用を使って各々の開集合上で Ω^2 の断面で補正してこれらを貼り合わせる事が出来れば良い訳ですが, これは $H^1(Y, \Omega^2) = 0$ ならば可能. 従って Y の種数が 2 以上ならば OK. 種数 0, 1 の場合は具体的に $sl(2)$-oper を作ってしまえるので OK.

63. kuroki: Oper 9 へのフォロー

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: oper No.9
Date: 6 Dec 1995 16:19:29 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec6161929@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

63.1. モジュライ空間

```
In article <TAKEBE.95Dec6100850@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> ??? 5 節の頭で (特異点付の) $\mathfrak{g}$-oper の同型類全体に代数多様体の構造を入れる事は, こんな記述を使わないでも, 「scheme で parametrize された (D-特異点付の) $\mathfrak{g}$-oper の族という自然な概念があるから」勿論できる, という事ですがどなたか説明して下さい.

代数幾何のことはよく知らないのですが, 私の知っている限りのことを書きましょう.

素朴には, D-特異点付きの $\mathfrak{g}$-oper の普遍族の底空間が, 集合として $\mathfrak{g}$-oper の同型類の全体になっているかのように考えれば良いのだと思います.

素朴には, ○○のモジュライ空間とは最も普遍的な○○の族の底空間のことです. だから, 素朴には, ○○の族の category が定義されていれば, ○○のモジュライ空間も定義されます (fine moduli space).

しかし, 一般には, 考えている族の category の中に「最も普遍的な族」が存在するとは限らず, 厳密な数学として定式化するためには, そこのところを何とかする必要があります. 何とかするための方法としては,

(1) 「最も普遍的な族の底空間」という条件をずっと弱めて考える (coarse moduli space).

(2) ○○の stability を定義し stable な○○の族のみを考える (GIT).

(3) 空間概念として scheme より広いものを考える. 例えば, algebraic space や algebraic stack のようなものを考える.

などがあるようです. モジュライ空間を構成する問題を線型偏微分方程式を解く話にたとえれば, 最後の (3) は超函数解を考えることに相当していると考えられます.

$\mathfrak{g}$-opers のモジュライ空間はかなり奇麗になっているようなので, そういう微妙な話は関係ないのかもしれませんが, 私にはよくわかりません.

族の category について説明を補足しておきましょう. 2 つの族の間の morphism は族の "pull-back" によって定義します. すなわち, "$X \to S$" と "$Y \to T$" がそれぞれ○○の scheme S, T 上の族であるとき, その間の morphism とは "pull-back diagram"

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & T \end{array}$$

のことであると定義します. このとき, ○○の族および族の "pull-back" の定義が適切であれば, "descent" がうまくいって, 族の category は schemes の category (+ 適切な topology) 上の "stack" (= sheaf 概念のある種の一般化) をなします. モジュライの問題はその stack の構造を調べる問題であると解釈することができます. 任意の scheme は stack とみなせるので, 族の category のなす stack が scheme で表現されるという命題が意味を持ちます.

この辺の general non-sense については教科書的な文献は無いように思えます. SGA1, SGA4 や J. Giraud の本や Mumford, Deligne-Mumford, M. Artin などの論文が基本文献であり, survey として G. Laumon と L. Moret-Bailly による Paris-Sud の prepublication (92-42) があります. 一時読みかけたけど, 「こりゃとても読む暇がない! 」と思って私はあきらめました.

63.2. Riemann 面上の projective connection

> この場合は $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y)$ が principal homogeneous space (日本語では何と言いますか?) になることは「良く知られている」, と書いてあり, 多分, Deligne の Equations differentielles a points singuliers reguliers (accent 記号は略) あたりを念頭においているのですが, 幸い, この論文でも復習してくれています.

$\mathfrak{g} = sl(2)$ の場合は Riemann 面上の projective connection の理論ということで, 少なくとも CFT の関係者には実質的に良く知られていると言って良いと思いますが, 一般の $\mathfrak{g}$ に対しても「良く知られている」のでしょうか? ううむ⋯.

ちなみに, Riemann 面上の projective connection は, [Gun] の第 9 節で結構詳しく解説されています. (他にも文献があったら教えて下さい.) Riemann 面上の Virasoro algebra を理解するためには, Schwarzian derivaticve や projective connection の話が必要になります.

> この作用を使う事で, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y)$ が空集合ではないという事が証明できます. ..... これは $H^1(Y, \Omega^2) = 0$ ならば可能. 従って Y の種数が 2 以上ならば OK. ....

上で紹介した [Gun] にはこの話が非常に詳しく書いてあります.

64. takebe: "Opers" の内容をどこまで紹介できたか

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: oper No.9 appendix(?)
Date: 6 Dec 1995 10:12:00 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec6101200@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

Beilinson and Drinfeld の論文 (未発表) の紹介も (数え方にも依るでしょうが, 多分) 9 回目となりました. 何があったかちょっと振り返って見ます. "Quantization of Hitchin's fibration and Langlands program" については, shitan.math の article 9, "oper 3" を御覧下さい[44]. "oper" の方の目次を再掲します[45]. $*$ はお話しした所, $+$ は一部お話しした所です.

1. G-opers and $\mathfrak{g}$-opers.

- $*$ **1.1.** 記号の準備.
- $*$ **1.2.** reductive group G に対して G-oper を定義.
- $+$ **1.3.** $\mathfrak{g}$-oper の定義と性質. (言い残した事: "$\mathfrak{g}$-oper には non-trivial な自己同型はない", "G が連結 reductive, Y が連結ならば Y 上の G-oper の自己同型群は G の中心に等しい.")
- $*$ **1.4.** $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$-oper を G-oper に持ち上げる. ($\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ は G の semisimple part の Lie 環)

2. G-opers for classical G.

- $*$ **2.1.** $GL(n)$-oper: 微分作用素による記述
- $*$ **2.2.** $GL(n)$-oper: 微分作用素の formal adjoint との関係

[44]* 第 3 節 (p. 9).
[45]* 第 2 節 (p. 7) にこのノートの節との間の対応表がある.

+ **2.3.** $Sp(n)$-oper: 微分作用素による記述 ($n=2$ はやった)

  2.4. $sp(n)$-oper: 微分作用素による記述 (やはり $n=2$ はやった.)

  2.5. $O(n)$-oper

+ **2.6.** $sl(2)$-oper: $sp(2)$ とも $o(3)$ とも思えるから, 幾つかの記述がある. (言い残した事: $o(3)$-oper としての話, それと Sturm-Liouville 型作用素との関係.)

  2.7. $sl(2)$-oper の性質. (解析的な観点から.)

  2.8. $SL(n)$-oper の性質.

  2.9. $SO(2n)$-oper の性質.

3. A description of the set of $\mathfrak{g}$-opers.

∗ **3.1 − 3.3.** $sl(2)$-oper の同型類全体の記述. ($H^0(Y, \Omega^2)$ 上の等質空間として)

  3.4 − 3.7. 一般の $\mathfrak{g}$-oper の同型類全体 $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y)$ の等質空間としての記述.

4. Singularities of $\mathfrak{g}$-opers.

+ **4.1 − 4.3.** Y の finite subscheme D に対して, そこに特異性を許した oper (その同型類全体を $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ と書く) の定義と性質. (言い残した事: 3 節との関係. 諸性質の証明.)

5. The algebra $A_{\mathfrak{g},D}(X)$ ($A_{\mathfrak{g},D}(X) = \mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(X)$ の座標環)

  5.1. $A_{\mathfrak{g},D}$ に grading と filtration を定義. (3 節の記述に依存している.)

∗ **5.2.** Planck constant h を導入して, oper を定義しなおす.

∗ **5.3.** h を使って filtration を定義. 5.1 の物と一致する.

+ **5.4.** $\mathrm{gr}(A_{\mathfrak{g},D}(X))$ は canonical に $\mathrm{Hitch}_{\mathfrak{g},D}(X)$ の座標環と同型. ここで, $\mathrm{Hitch}_{\mathfrak{g},D}(X)$ は Hitchin の fibration の base space. ($\mathrm{gr}(A_{\mathfrak{g},D}(X))$ は oper の "classical limit" ($h=0$) 全体の座標環と一致.) (言い残した事: 細かい点)

大事な所はかなり見たのではないかと思いますが, 如何でしょうか. ちょっと疲れてきたところでもあり, Beilinson の論文もあとしばらくで出来るらしいので (ホントかな), あと一回くらいでひとまず一段落, という事にさせて頂きたいのですが, 御意見をお願いします[46].

65. takebe: Opers のモジュライ空間の等質空間としての記述 (oper9+)

From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)

Newsgroups: shitan.math

[46]∗ 第 2 節 (p. 7) にこのノートにおける節との対応表がある.

Subject: Re: oper No.9
Date: 7 Dec 1995 03:23:44 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec7032344@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.95Dec6161929@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:

> In article <TAKEBE.95Dec6100850@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
> takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
>
> > **3.4–3.7.** 一般の $\mathfrak{g}$-oper の同型類全体 $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y)$ の等質空間としての記述
>
> どういう等質空間になるのか, 答だけでも教えて頂くと助かります.

x を simple root に対応する root vector の和とする. (勿論, choice は沢山ある.) $V = \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}\,x$ とすると, $\mathfrak{g}$ の grading に対応して V は grading を持つ. その homogeneous subspace を V_k とすると, k は $\mathfrak{g}$ の exponent を走る. x の choice に依らずこれらは同型なので, 抽象的な線形空間として $V_k(\mathfrak{g})$ と書こう. x に対応する $V_1(\mathfrak{g})$ の元を χ とする.

$$V_k^{\mathfrak{g}}(Y) := V_{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes H^0(Y, \Omega^k), \qquad V^{\mathfrak{g}}(Y) := \bigoplus_k V_k^{\mathfrak{g}}(Y)$$

とする. この時, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y)$ は $\mathrm{Op}_{sl(2)}(Y) \times V^{\mathfrak{g}}(Y)$ を次の同値関係で割ったものと同一視できる.

$$(L + \omega, \eta) \sim (L, \eta - \omega\chi).$$

ここで, L は Sturm-Liouville 型作用素, ω は $H^0(Y, \Omega^2)$ の元, η は $V^{\mathfrak{g}}(Y)$ の元. これにより, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y)$ は $V^{\mathfrak{g}}(Y)$ 上の principal homogeneous space と見做せる.

良く分かりません.

66. kojihas: 遅れてやって来ました.

第 43 節 (p. 64) へのフォロー.

From: kojihas@math.tohoku.ac.jp (Koji HASEGAWA)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: CFT on elliptic curves (Re: Gaudin model)
Date: 9 Dec 1995 02:33:09 JST
Message-ID: <KOJIHAS.95Dec9023310@take.math.tohoku.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Nov14033204@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:

> ```
> # > ありゃ?  長谷川さんの home を見ても .newsrc-shitan が見当たりません.
> #
> # こういう風に行動が読まれてしまう所が net の恐ろしい所なんだよな.
> ```

こんにちは. 長谷川@東北大です. 楕円 R 行列で食べております. 何分黒木さんと同じところですので shitan.math を知らないでいたわけはないのですが, そのうちまとまった時間が出来たら読もうと思っているうちに, どんどん膨らんでいくので, 気遅れしておりました. そろそろ tex version を〆るというので, 何も書かずにいるのは義務を果してないと思い, 出てきました. 遅ればせながらよろしく.

> ところで, incoming intertwining vectors は [TF] に現われている事を, 昨日になってやっと気づきました. この論文は私が eight vertex model の一般化の Bethe Ansatz を計算する時に, 下敷にしているもので (本当に下に敷いて計算してたりする (^^;;)) 長谷川さんの話も何度も聞いていながらちゃんと理解していなかった事を懺悔します. [TF] では outcoming vectors をまとめて (discrete な空間上の) gauge 変換の行列と考え, その逆行列も重要な役割を演じるのですが, これが incoming intertwining vectors そのものですね.

intertwining vectors は, 僕も使っているだけで理解はしていません. (いろいろ試みはしたのですが, 力が及びませんでした.) それゆえ式の上でしか僕は語れないのですが, trigonometric への退化もかなりヘンテコです. すでに黒木さんが書いてますように, これは elliptic 特有のことで, 幾何的に解釈されるべきものなのでしょう. intertwining vectors を使って, Belavin の楕円 R 行列に対する L 作用素ができ, これは Sklyanin 先生の有名な algebra とその表現の sl_n 版と考えることができます.

これについても, trigonometric limit をとると $U_q(\widehat{sl}_n)$ の表現を与えるべきだと誰しも思うわけですが, 事実としてそのような limit は確かにあるもののかなり技巧的なことをしないといけません. theta 関数は $\exp 2\pi i\tau$ の級数だと思うと, intertwining vector は成分ごとに leading term が違っていて, そのまま limit をとると殆どの成分が 0 になってしまって, 意味がある量がのこりません. ではどうするか, については, そのうち論文を書かないといけないと 2 年くらい思っているのですが, たいしたことでないのにとにかく論文を打つのが面倒で, まだ書いてません. このあいだ城崎では結果だけ, 林くんが昔作った q-boson の表現からくる L-operator になることを述べました. そのうちそのときのノートがそのときの院生諸氏参加者の努力でできれば, 日本語では形にのこることになります.

なにしろ計算があまりナンベンもやりたいようなものではなくて, 書くとなるともう一度 convention とかちゃんと合わせねばとか思うと, まず気持がなえてしまいます. 結果は weight lattice と root lattice は意味ありげに出てきて, 面白いのですが.

あと, 年内に書くつもりでいて, とても書けない気がしてきているのは Sklyanin 先生の dynamical r-structure について. これも全て, face weight の微分として得られます. あの微妙に非対称な行列成分の所以もわかるのですが, ... 武部さん, Sklyanin 先生に mail を書く機会があればサボッテいてすいませんとお伝えください. Felder の algebra の表現との関係もあり, それは BCD で差分にするとき指針になるはず. いづれ書きます.

あと, ずいぶん前からいろんな所で話させていただいてる「Ruijsenaars commuting difference system as corner transfer matrices 」ですが, これはさすがに年内にすませたいと思っています. さっきの L (= Krichever's Lax matrix の差分化, そして Higgs field の差分化? のはず) の trace をとると出てくる commuting operators が, Ruijsenaars のむずかしい計算をして出てくる可換差分作用素になる, というやつです. このことにはじめて気がついたのは 1 年半くらい前でしたが, サボッテいるうちにもうこんなことは今さら書いても誰も驚かないような御時世になってしまいましたねえ. オソロシイコトジャ.

夏には出せる体裁になっていたのですが, その後微分極限のことなどを書いておくべきだと思うようになり, この間賢島に行く前にその計算をしていました. Debiard という人がいて, Jack の場合の commuting operator を書きくだしています. その elliptic 版が Lax 表示からバサッと出るというのがわかりました. 大島-落合-関口の表示との関係までちゃんと書けると気持がいいのですが, これはある種の行列式の公式を作ることになるようです (難しい)... そんなことでなく二つがつながれば, 年内には投稿できるようになります. あるいはもうあきらめて, そこは放っておいて出してしまおうか. (落合さん, また沖縄でなにか聞くかもしれません, よろしく.) この為にしていた計算の過程で, 以前ひたすら計算で示していた行列式の公式が, 関数論であっという間に出てしまうことに気づきました. これだけでもまあ寝かせていた甲斐はあった気がしてます.

> この週末は天気が良かったのに表にも出ず intertwining vector を使って XYZ Gaudin (XYZ の quasi-classical limit) を Nekrasov (Enriquez-Rubtov) の書き下した Hitchin's system on an elliptic curve = elliptic Gaudin-Calogero model に繋げる事を考えていました. 黒木さんの記事をまだ全部は読んでいないのですが, geometric Langlands correspondence (Drinfeld の第二の構成) で出て来る Jacobian の変数は, intertwining vector の足 (ϕ_ν^λ と書く時の λ とか ν) から出て来るようなので, やはり, 直接 XYZ Gaudin で geometric Langlands correspondence を考えるのは無理がありそうな気がしてきました.
> でも XYZ Gaudin だって, どこかに代数的な解釈があるはずだと信じていますので, 黒木さんの記事をこれから勉強します.

intertwining vector を使うと, 差分・elliptic でも Gaudin Hamiltonian の類似はすぐに作れます. 解くのは仲々手がつかないけれど. (intertwining vector の理解がないので, そうして出来たものが何であるというべきか, 胸を張れないのも問題です.) 今のところ, 赤坂さん@京大 M1 とちょっとずつ 1 点の場合を話しあっています. まだまだ勉強不足ですが, そのうちに多点の場合の努力にむかいたいと思いますので, 武部さんよろしく御教示ください.

`# Calogero 系と思うと, 所謂 spin Calogero にする方向もやらねばいけません.`

長くなりました, とりあえずこれにて. 今横では黒木さんが tex version の最終 check にかかっています. 仙台は一昨日から一段と寒く, 外はいつのまにかうっすら雪化粧しています, というとカッコ良いけど山道は氷で滑って帰りにくくなるのだ! (現在 02:30 am)(;_;)

67. takebe: とうとう現われましたね.

From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: CFT on elliptic curves (Re: Gaudin model)
Date: 9 Dec 1995 04:02:39 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec9040239@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KOJIHAS.95Dec9023310@take.math.tohoku.ac.jp>
kojihas@math.tohoku.ac.jp (Koji HASEGAWA) writes:

> こんにちは. 長谷川@東北大です. 楕円 R 行列で食べております.

とうとう現われましたね.

> これについても, trigonometric limit をとると $U_q(\widehat{sl}_n)$ の表現を与えるべきだと誰しも思うわけですが, 事実としてそのような limit は確かにあるもののかなり技巧的なことをしないといけません. theta 関数は $\exp 2\pi i\tau$ の級数だと思うと, intertwining vector は成分ごとに leading term が違っていて, そのまま limit をとると殆どの成分が 0 になってしまって, 意味がある量がのこりません.

Gaudin を考えていると, quasi-classical limit ($\eta \to 0$) が問題になるのですが, そちらについてはどうでしょう. これは naive に limit をとっても構わないと思っているのですが, "gauge 変換" なだけあっていろいろ汚いゴミが残ってしまって困っています.

> なにしろ計算があまりナンベンもやりたいようなものではなくて, 書くとなるともう一度 convention とかちゃんと合わせねばとか思うと, まず気持がなえてしまいます. 結果は weight lattice と root lattice は意味ありげに出てきて, 面白いのですが.

私も論文を書く度に convention を変えてしまっているので, もし読んでくれている人がいたらたまらんだろうとは思います. でも長谷川さんの重点の講演集に載った記事を見て, 最終的な normalization に落ち着きそうです.

> あと, 年内に書くつもりでいて, とても書けない気がしてきているのは Sklyanin 先生の dynamical r-structure について. これも全て, face weight の微分として得られます. あの微妙に非対称な行列成分の所以もわかるのですが, ... 武部さん, Sklyanin 先生に mail を書く機会があればサボッテいてすいませんとお伝えください.

もしかして, かなり近い事を考えているかも知れませんね. Face weight を微分して, というのは Felder の elliptic quantum group の論文にもありませんでしたか. Sklyanin 先生は今の所どこにいるのか ??? 京都にもしばらく access していないようなので, 多分 St. Petersburg にお帰りかなと思い, 昨日 e-mail を打った所です. 来週くらいには返事が来て欲しい.

> あと, ずいぶん前からいろんな所で話させていただいてる「Ruijsenaars commuting difference system as corner transfer matrices」ですが, これはさすがに年内にすませたいと思っています. さっきの L (= Krichever's Lax matrix の差分化, そして Higgs field の差分化? のはず) の trace をとると出てくる commuting operators が, Ruijsenaars のむずかしい計算をして出てくる可換差分作用素になる, というやつです. このことにはじめて気がついたのは 1 年半くらい前でしたが, サボッテいるうちにもうこんなことは今さら書いても誰も驚かないような御時世になってしまいましたねえ. オソロシイコトジャ.

Krichever-Zabrodin の hep-th/9505039: Spin generalization of the Ruijsenaars-Schneider model, nonabelian 2-d Toda chain and representateions of Sklyanin algebra, とかいうのもでてますから, 早くして下さい.

> intertwining vector を使うと, 差分・elliptic でも Gaudin Hamiltonian の類似はすぐに作れます. 解くのは仲々手がつかないけれど. (intertwining vector の理解がないので, そうして出来たものが何であるというべきか, 胸を張れないのも問題です.) 今のところ, 赤坂さん@京大 M1 とちょっとずつ 1 点の場合を話しあっています. まだまだ勉強不足ですが, そのうちに多点の場合の努力にむかいたいと思いますので, 武部さんよろしく御教示ください.

1 点の場合は Lamé に成る筈です. これについては Sklyanin 先生と詳しく調べて, 原稿まで出来ているのですが, 一般の場合が解けなくては, と放り出したまま. (separation of variables の事.) でも 1 点の時は intertwining vector を使わずにやりました. というか, 模型の構成自身には intertwining vectors は関係なかったのですが. 長谷川さんの考えている模型とは少し違うかも知れません. 長谷川さんのは Enriquez-Rubtsov のやっているのと関係ありませんでしょうか. また, 差分の Gaudin とは?

> ... 仙台は一昨日から一段と寒く, 外はいつのまにかうっすら雪化粧しています, というとカッコ良いけど山道は氷で滑って帰りにくくなるのだ! (現在 02:30 am)(;_;)

Berkeley は緯度は仙台と同じくらいですが, 海流などの影響か, 雪とかには縁が無いそうです. 今年は特に暖かく, 近くのスキー場が悲鳴を上げているとか. 30 歳を過ぎたら薄着はやめて体をいたわる事にしていたのですが, セーターを着て学校への坂道を登ったりしたら汗ダクになりそうで.

68. kuroki: 点付きの Hitchin's fibration (4)

第 25 節 (p. 41) へのフォロー.

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: parabolic Hitchin system (Re: oper No.5)
Date: 11 Dec 1995 02:48:51 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec11024851@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

すでに一ヶ月以上立っていますが….

```
In article <NAKAJIMA.95Nov3112143@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:
```

> Hitchin's hamiltonian を 点つきの場合に拡張することは, ほとんど straight forward であると思います. parabolic bundle の定義は通常と同じですが, Higgs 場は, marked points で nilpotent な residue を持つものを考えます. このとき, モジュライは, symplectic form を持って, parabolic bundle のモジュライの余接束を open set として含み, Higgs 場の巾乗の trace を取って hamiltonian commute する関数たちが構成できる.....etc. 文献は, あまり知りません.

点付きでない場合の筋道を知っている人にとっては, 確かに straight forward なようです. Parabolic structure 付きの場合に関する Hitchin's fibration の話は文献 [Fal] の Section V に書いてあるのを見付けました.

例えば, $G = SL_n$ のとき, 点付き (点の集合を D と書く) の Hitchin's fibration は次のように定義されます. Higgs 場 ϕ の定義は上に引用した中島さんの記事通りです. Higgs 場 ϕ に対して

$$\det(\lambda - \phi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i(\phi) \lambda^{n-i}$$

によって,

$$a_i(\phi) \in H^0\Big(X, \Omega^i((i-1)D)\Big)$$

が定義されます. これらの a_i $(i = 2, \dots, n)$ が定める写像が点付きの場合における Hitchin's fibration です. Fibration の底空間は,

$$V = \bigoplus_{i=2}^{n} H^0\Big(X, \Omega^i((i-1)D)\Big)$$

であり, D の点の個数を N と書くとき,

$$\begin{aligned}
\dim V &= \sum_{i=2}^{n} \Big((g-1)(2i-1) + N(i-1)\Big) \qquad \text{(by Riemann-Roch)} \\
&= (g-1)(n^2-1) + N(n-1)n/2 \\
&= (g-1)\dim G + N \dim(\text{flag variety}) \\
&= \dim(\text{moduli space of parabolic bundles}) \\
&= \frac{1}{2}\dim(\text{moduli space of parabolic Higgs bundles})
\end{aligned}$$

が成立することがわかり, 辻褄が合っていることがわかります.

> Boden-Yokogawa で Betti number が計算されています.

これは, parabolic bundle の moduli space の Betti number が計算されているという意味でしょうか? もしもそうなら, moduli の特異点なんかの扱いはどうするのでしょうか? Boden-Yokogawa の論文はどこに出ていますか?

```
# Nekrasov の方はまだ見ていません.
```

69. nakajima: 点付きの Hitchin's fibration (5)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: parabolic Hitchin system (Re: oper No.5)
Date: 11 Dec 1995 11:45:30 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec11114530@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.95Dec11024851@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

> これは, parabolic bundle の moduli space の Betti number が計算されているという意味でしょうか? もしもそうなら, moduli の特異点なんかの扱いはどうするのでしょうか? Boden-Yokogawa の論文はどこに出ていますか?

たしか, 横川さん本人からもらったので論文/プレプリントはどこに出たか知りません.

parabolic bundle の moduli space は, 黒木さんが説明されていた quasi parabolic bundle の isomorphism class の集合とは少し異なるので, 少し説明しておきましょう. その違いは GIT で moduli space を作ることなのですが, geometric Langlands の話しでどこまで本質的なのかはよく理解していません. (私が, 箙の表現の moduli space の "cotangent" を使って $U(\mathfrak{g})$ を作ったときには, stability が本質的な役割を果たしました.)

簡単のため $G = GL(r, \mathbb{C})$ と仮定します.

X を Riemann 面とし, $D = \{p_1, \dots, p_n\}$ を有限個の点の集合とします. quasi parabolic bundle とは holomorphic vector bundle E と D の各点における (partial) flag

$$E_{p_i} = F_1(p_i) \supset F_2(p_i) \supset \cdots \supset F_{s_{p_i}}(p_i) \supset \{0\}$$

の組みのことです. さらに, parabolic bundle とは quasi parabolic bundle と weight

$$0 \leq \alpha_1(p_i) < \alpha_2(p_i) < ... < \alpha_{s_{p_i}}(p_i) < 1$$

のことです.

$m_a(p_i) = \dim F_a(p_i) - \dim F_{a+1}(p_i)$ とおくとき, parabolic bundle の parabolic degree を

$$\text{par-deg}(E, F, \alpha) = \deg E + \sum_{i,a} m_a(p_i)\alpha_a(p_i)$$

で定義します. また S が E の subbundle であるとき, S は E_{p_i} の flag, weight から誘導される parabolic structure を持ち, parabolic bundle になります. このとき

$$\text{par-deg}(S, F_S, \alpha_S) < \text{par-deg}(E, F, \alpha)$$

が全ての subbundle S について成立するならば, (E, F, α) は stable であると呼ばれます. 等号も許すときには semistable と呼ばれます.

parabolic bundle の moduli space と言ったときには, α を固定しておいて, semistable な (E, F, α) の S-同値[47]類の集合にしかるべく scheme の構造を入れたものです. (Mehta-Seshadri による.)

α を動かしたときに (E, F, α) は stable から stable でなくなったりします. よって moduli space は α によって変化します. α は有限次元の実ベクトル空間を動くのですが, ある超平面の族があって, その中にないときは stability と semistability が同値になって moduli space は nonsingular になります. 超平面の中にあるときは, semistable だが stable でない点が moduli space の singular points です. さらに moduli space 達が森理論で言うところの flip の関係にあるということを observe したのが Thadeuss であり, これをうまく使うことによって rank 2 のときに conformal block の次元を計算しました. α が十分小さければ vector bundle の moduli space の上の projective bundle であり, α が十分大きいと射影空間 (これはうろ覚えですが) になるのでよく分かるというアイデアです. Betti 数も同じアイデアで計算できます.

以上は parabolic bundle でしたが, parabolic Higgs bundle でも同様です. (E, F, α) と Higgs 場 $\Phi : E \to E \otimes K(D)$ であって, p_i での residue が nilpotent なものとの pair が parabolic Higgs bundle です. stability は全ての subbundle ではなく Φ で不変な subbundle だけについて上の不等式が成り立つものと定義します.

このとき, Boden-Yokagawa の observation は α を変えると, parabolic Higgs bundle の moduli space 自体は, 上と同様に変わるのですが (超平面の上にない)moduli space の Betti 数は変化しないということです. moduli space の構成自体は, Maruyama-Yokogawa によって (一般の代数多様体上で) 証明されています.

私は, 実際には moduli space 達がすべて diffeo であることを証明しました. これは, 一種人工的にみえる stability の概念が cotangent space については自然であることを示しているのではないかと思います.

箙多様体のときも stability の概念はいろいろと変えることが出来るのですが, differential structure は unique で, 特に langrangian の既約成分の個数 = 中間次元のホモロジーの次元が, Kac-Moody の既約 integrable 表現の weight 空間の次元に等しくなっていました.

今の場合も, lagrangian の既約成分の個数は何等かの意味があるものと思います.

上に述べた diffeo であることの証明は, hyper-Kähler structure を使って$\pi_1(X - D)$ の表現のモジュライ空間に移ることによってなされますが, 詳しいことは省略します.

Higgs 場が nilpotent である subvariety (Hitchin's hamiltonian の 0 の逆像) が lagrangian であることの証明は, 箙多様体のときも含めて非常に簡単に出来るので, 別の記事で説明します[48].

47* Jordan-Hörder 組成列の因子たちが等しいこと.

48* 第 70 節 (p. 101).

70. nakajima: Hitchin's fibration の $\pi^{-1}(0)$ が Lagrangian であること

From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Lagrangian
Date: 11 Dec 1995 12:14:14 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec11121414@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

Hitchin's hamiltonian の 0 の逆像が lagrangian であることを [Nak] に従って証明します. 難しいのは, 次元の評価であり, もともとは Riemann-Roch + Kostant の定理を使っていたはずです.
次のような一般的な状況で考えます:

- M は symplectic manifold with $\mathbb{C}^*$-action であり, $t \in \mathbb{C}^*$ の作用で symplectic form ω は t 倍される.
- N は affine variety with linear $\mathbb{C}^*$-action, *i.e.*, $N \subset \mathbb{C}^n$ であり, $\mathbb{C}^*$-action は $\mathbb{C}^n$ への線形な写像からくる. 更に, weight はすべて正とし, N は原点を含むとする.
- $\pi : M \to N$ は equivariant proper morphism である.

Hitchin hamiltonian のときは, $\mathbb{C}^*$-action は Higgs 場を定数倍することです. Hitchin hamiltonian が proper であることの証明はそれ程難しくありません.
仮定から原点 0 は N のただひとつの fixed point であることに注意します.

Claim. $\pi^{-1}(0)$ は M の lagrangian subvariety である.

証明:

$$\pi^{-1}(0) = \{\, x \in M \mid \lim_{t\to\infty} t.x \text{ exists} \,\}$$

は明らか.
v, w が $\pi^{-1}(0)$ の接ベクトルであれば $t \in \mathbb{C}^*$ に対して

$$\omega(dt\, v,\, dt\, w) = t\,\omega(v, w)$$

が $t \to \infty$ で収束しなければならない. だから $\omega(v, w) = 0$. よって $\pi^{-1}(0)$ は isotropic である.
fixed point set は $\pi^{-1}(0)$ に含まれていますが, $\mathbb{C}^* \ni t$ で $t \to 0$ とすれば, M の全ての点は fixed point に収束します. よって $\pi^{-1}(0)$ の次元を求めるのには, fixed point で tangent space を調べればよい.
fixed point で tangent space を $\mathbb{C}^*$-module として weight 分解

$$T_x M = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} V_m$$

します．m は weight です．このとき，$\pi^{-1}(0)$ の接空間は，非正の weight space 達の直和です．ところが symplectic form が weight 1 で作用されていたことから V_m と V_{1-m} が互いに dual です．よって

$$\bigoplus_{m\le 0} \dim V_m = \bigoplus_{m>0} \dim V_m = \frac{1}{2}\dim M$$

よって lagrangian であることが証明された． □

71. kuroki: Kostant の定理

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Whittaker models and opers (Re: oper No.9)
Date: 11 Dec 1995 17:59:03 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec11175904@take.math.tohoku.ac.jp>
```

```
In article <TAKEBE.95Dec7032344@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> x を simple root に対応する root vector の和とする．(勿論，choice は沢山ある．) $V = \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}\,x$ とすると，$\mathfrak{g}$ の grading に対応して V は grading を持つ．その homogeneous subspace を V_k とすると，k は $\mathfrak{g}$ の exponent を走る．x の choice に依らずこれらは同型なので，抽象的な線形空間として $V_k(\mathfrak{g})$ と書こう．........

この辺の話は次の Kostant の論文 [Kos2] が参考になりそうです． この論文は classical/quantum Drinfeld-Sokolov reduction (DSR) の有限次元での対応物を扱っています．Toda lattice の方の話のアイデアを使っているそうです．Kostant はその後 Toda lattice の論文も書いているようです．

[Kos2] の第 1 節が classical DSR の有限次元での対応物なのですが，その結果の一部を引用しておきましょう．上で引用した武部さんの記事における V は以下の性質を持ちます．

G は複素単純 Lie 群であるとし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,G$ と書く．$\mathfrak{g}$ に non-degenerate invariant symmetric bilinear form を一つ固定し，$\mathfrak{g}$ とその dual space $\mathfrak{g}^*$ を同一視する．$\mathfrak{g}$ の Borel subalgebra $\mathfrak{b}$ を一つ固定し，$\mathfrak{b}$ に含まれる Cartan subalgebra を $\mathfrak{h}$ と書き，$\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ と置く．$\mathfrak{n}$ に対応する G の Lie subgroup を N と書き，$\mathfrak{h}$ に作用する Weyl 群を W と表わす．

e は positive simple roots に対応する non-zero root vectors の和であるとし，$V = \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}\,e$ と置く．negative simple roots に対応する non-zero root vectors の和 f を，e, f, $h = [e, f]$ が sl_2-triple をなすように取る．

$\mathfrak{g}$ 内の最大次元 ($= \dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{h}$) を持つ $\mathrm{Ad}(G)$-orbit を regular orbit と呼び，それらの和集合を R と書く．

以上の記号のもとで，以下が成立する:

(1) $f+V \subset f+\mathfrak{b} \subset R$ であり, $f+V$ は任意の regular orbit とちょうど一点で交わる.

(2) N の $\mathfrak{g}$ への adjoint action は $f+\mathfrak{b}$ を保ち, 次の affine algebraic varieties の同型を誘導する:

$$N \times (f+V) \xrightarrow{\sim} f+\mathfrak{b}.$$

(3) 以上によって, 以下の可換環の同型が得られる:

$$\mathbb{C}[f+\mathfrak{b}]^N \quad \simeq \quad \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \quad \simeq \quad \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W.$$

Classical DSR では, 有限次元の場合における $f+\mathfrak{b}$ と N の adjoint action の代わりに, "$f+\mathfrak{b}$ 値の" 接続全体の空間および N の loop 群による gauge 変換を扱います.

以上の話の "quantization" を $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ を $U(\mathfrak{g})$ に置き換えることによって考えることが, ちょうど Whittaker model の話になっていて, それを調べたのが Kostant の論文 [Kos2] です.

まだ，ちゃんと読んでない⋯.

72. takebe: 点付き opers の moduli space (1)　(oper 10−)

From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Whittaker models and opers (Re: oper No.9)
Date: 12 Dec 1995 03:23:52 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec12032352@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.95Dec11175904@take.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:

> この辺の話は次の Kostant の論文 [Kos2] が参考になりそうです. この論文は classical/quantum Drinfeld-Sokolov reduction (DSR) の有限次元での対応物を扱っています. Toda lattice の方の話のアイデアを使っているそうです. Kostant はその後 Toda lattice の論文も書いているようです.

"Toda lattice の方の idea" とは? 戸田格子の論文, というのはいわゆる, Adler-Kostant scheme ですね.

この部分に限らず, 戸田格子は Hitchin's integrable system と関係が深いと思います. 例えば, Hitchin の Hamiltonian は Higgs 場を invariant polynomial に代入して作りますが, これは戸田格子の保存量の構成と同じ (Higgs 場の代わりに L operator) です. また, Hitchn's system の flow は spectral curve の Jacobian の上の linear flow になるのですから, 当然戸田格子の flow の中に埋め込めます. (良く分かってもいないのに, 言葉の上で帳尻を合わせていますが.) 戸田格子 hierarchy ではなく KP の flow に埋め込んだのが Donagi and Markman ですね. ただ, 細かい点で微妙にずれがあるようなので, きちんと調べて見ないといけないとは思います.

> G は複素単純 Lie 群であるとし, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ と書く. $\mathfrak{g}$ に non-degenerate invariant symmetric bilinear form を一つ固定し, $\mathfrak{g}$ とその dual space $\mathfrak{g}^*$ を同一視する. $\mathfrak{g}$ の Borel subalgebra $\mathfrak{b}$ を一つ固定し, $\mathfrak{b}$ に含まれる Cartan subalgebra を $\mathfrak{h}$ と書き, $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ と置く. $\mathfrak{n}$ に対応する G の Lie subgroup を N と書き, $\mathfrak{h}$ に作用する Weyl 群を W と表わす.
> e は positive simple roots に対応する non-zero root vectors の和であるとし, $V = \mathrm{Ker}\, \mathrm{ad}\, e$ と置く. negative simple roots に対応する non-zero root vectors の和 f を, e, f, $h = [e, f]$ が sl_2-triple をなすように取る.

記号を定義して頂いた事でもあるし, 丁度良いから Oper No.10 で書くつもりだった事を少しだけ. D を Y の有限 subscheme とします. 黒木さんへの返事, 上で引用されている私の記事[49]で,

$$V_k^{\mathfrak{g}}(Y) := V_{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes H^0(Y, \Omega^k), \qquad V^{\mathfrak{g}}(Y) := \bigoplus_k V_k^{\mathfrak{g}}(Y)$$

とする.

という所を, $H^0(Y, \Omega^k)$ の代わりに $H^0(Y, \Omega^k(kD))$ を使って同様に定義したものを $V_{D,k}^{\mathfrak{g}}(Y)$, $V_D^{\mathfrak{g}}(Y)$ として, $\mathrm{Op}_{sl(2)} \times V_D^{\mathfrak{g}}(Y)$ を同値関係

$$(L + \omega, \eta) \sim (L, \eta - \omega\chi)$$

で割って $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ と見做せます. これが 4.1 節に書いてある事なのですが, これよりも以前に shitan.math article 51, oper No.5 で書いた 4.2 節のような定義がお勧めのようです[50].

このようにして作った principal homogeneous space の元 (L, η) (L : Sturm-Liouville 型微分作用素, $\eta : V_D^{\mathfrak{g}}(Y)$ の元) に対しては, 次のようにして oper を対応させます.

L は $sl(2)$-oper $= PGL(2)$-oper (F_0, ∇_0) に対応する. 上で黒木さんの記事にある $sl(2)$-triple (e, f, h) (Beilinson and Drinfeld の論文では (x, y, h)) を取って, これにより

$$\rho : PGL(2) \to G_{\mathrm{ad}}$$

を作る.

??? 具体的に書くとどうなるのですか. とくになぜ ad が付くのか?

これにより (F_0, ∇_0) が B_{ad}-bundle F とその上の接続 ∇ を誘導する. (L, η) に対応する $\mathfrak{g}$-oper は, $(F, \nabla + \eta)$ である.

詳しい証明は省かせて下さい.

---

[49]* 第 65 節 (p. 92).
[50]* 第 23 節 (p. 38).

73. kuroki: 点付き opers の moduli space (2)

From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Whittaker models and opers (Re: oper No.9)
Date: 12 Dec 1995 07:29:22 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec12072922@ume.math.tohoku.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Dec12043241@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:

> | という所を, $H^0(Y,\Omega^k)$ の代わりに $H^0(Y,\Omega^k(kD))$ を使って同様に定義したものを ...

$H^0(Y,\Omega^k(kD))$ ですか? ううむ, 次元の感情が合っているのだろうか?

Faltings の [Fal] の p. 561 の上から 11 行目あたりには, 点付きの Hitchin's fibration の定義は

> The characteristic of θ is defined by the $\phi_i(\theta)$, which are glocal sections of $\omega_C^{\otimes e_j}$ with poles of order $< e_j$ at the x_i.

であるとあります. “$\leq$” ではなく “$<$” であるところがミソなのですが…. つまり, $H^0(Y,\Omega^k(kD))$ ではなく $H^0(Y,\Omega^k((k-1)D))$ ではないかと….

Opers と Hitchin's fibration の場合は違うということなのかな? ううむ.

74. nakajima: Spectral curve (1)

From: nakajima@math.tohoku.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: spectral curve
Date: 12 Dec 1995 08:35:25 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec12083526@take.math.tohoku.ac.jp>

沖縄に行く前に一言だけ.

spectral curve について (私は, Higgs bundle のときに定義を知っているという程度の理解ですが) 説明していただけるとありがたいのですが...

前に, separation of variables に似たアイデアがあると言われていたのように思うのですが.... 武部さんよろしく

75. takebe: 点付き opers の moduli space (3)　(oper 10)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Oper No.10
Date: 15 Dec 1995 04:04:45 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec15040445@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

記号などはこれまでの記事 (Oper No.1 〜 9) を参照して下さい. 但し, 問題となっている複素数体上の滑らかな代数曲線は, X とか Y とか書いて統一しないかも知れません. あしからず. (原論文がそうなっている.) [51]

75.1. "Opers" の 4.1–4.3 と 3 節の関係

まずは, 黒木さんの request に沿って

```
In article <KUROKI.95Dec8230856@take.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

> ジーナスが低い場合の計算に必要な, 特異点 D 付きの場合に必要な話を追加してくださると助かります. すると, ...
>
> > + **4.1 – 4.3.** Y の finite subscheme D に対して, そこに特異性を許した oper (その同型類全体を $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ と書く) の定義と性質. (言い残した事: 3 節との関係. 諸性質の証明.)

の言い残した事をさらってしまいましょう. もっとも, 計算の役にたつかどうかは, 不明ですが.

4.1 点付き oper 全体の空間の principal homogeneous space としての定義ですが, これについては shitan.math の article 149 を御覧下さい[52]. (この file を書きかけの時にその内容の一部を cut して黒木さんの記事への follow に使いました. 以下で, 文章の繋がりがおかしかったら, 御免なさい.)

4.2 節でこの定義と, shitan.math article 51, oper No.5 で[53]述べたような定義の同値性を示していますが, とにかく, 点付きの場合の oper に求められる性質は, oper No.5 にも述べたように,

(1) $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y) \subset \mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y - D)$,

(2) $D_1 \subset D_2$ ならば $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D_1}(Y) \subset \mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D_2}(Y)$,

---

[51]* 実は原論文ではちゃんと使い分けられていることが後で判明した. 第 117 節 (p. 173) を見よ. 原論文では, X は滑らなか射影曲線であり, Y は滑らかな曲線を表わしている.

[52]* 第 72 節 (p. 103) oper 10−.

[53]* 第 23 節 (p. 38) oper 5.

(3) S を Y の任意の有限部分集合とすると, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y-S)$ は, $\mathrm{supp}\, D \subset S$ となるような全ての D についての $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ の和集合になる.

です. 同じ記事の定義を復習して頂けると分かる通り, (1) と (3) は作り方からすぐ分かります. (と思う. 代数的な場合しか考えていないから, 出てくる特異点は高々極なので.) 4.3 節では D と D' が Y の finite subscheme で $D \subset D'$ の時に canonical な単射

$$\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y) \hookrightarrow \mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D'}(Y)$$

を作っています. これで (2) も OK ですが, 実はこれが injective である事を示すのに, 4.1 節の定義, つまり article 149 で[54]述べた principal homogeneous space としての表示を使っています. ここでは, 単射性の証明は置いといて (実際, 「その表示を使えばできる」というような言い方しかしていない), morphism の作り方だけ見てみましょう.

まず, ちょっと Borel principal bundle についての準備.

準備: λ を $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ (ここでは $\mathbb{C}^*$) から H (Cartan) への homomorphism で simple root α に対応する root space $\mathfrak{g}^{\alpha}$ の上では $\lambda(t)$ は t 倍で作用するものとする. (どっかで使いましたね. そこの話とはとりあえず関係ないと思う.)

V を B-module として,

$$V = \bigoplus V_k, \qquad V_k = \{\, x \in V \mid \lambda(t)x = t^k x \,\}$$

と分解する. Filtration $V^r = \bigoplus_{r \geq k} V_k$ は B-不変だから, principal B-bundle F があれば, V_F に V_F^k という filtration が入る.

Δ を Y 上の有限 subscheme として

$$V_F^{\Delta} = \sum_k V_F^k(k\Delta)$$

とする. (この $\sum_k$ は直和ではなくて「和で生成されるもの」の意味.) Deligne-Milne の "Tannakian categories" によれば, B-bundle F^{Δ} が関手 $V \mapsto V_F^{\Delta}$ から決まる. (この定義は, 実は remark に書いてある事で, 本当は切り貼りして作っている. Δ の近傍で λ を使って捻って貼るだけ.) 準備終わり.

やりたいのは, D と D' が有限 subscheme で D が D' に含まれている時, D に特異性をもつ $\mathfrak{g}$-oper (F, ∇) に対して D' に特異性をもつ $\mathfrak{g}$-oper (F', ∇') を作る事. 問題は接続 ∇ が同型 $\mathcal{T}(-D') \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{F'}^{-\alpha}$ を引き起こすようにする事 (点付き $\mathfrak{g}$-oper の定義参照). D', D を effective divisors と見做して $\Delta = D' - D$ とする. F' としては上で定義した F^{Δ} を取る. E_F, $E_{F'}$ を shitan.math article 34, oper No.4 のように[55]定義すると, F' の定義から,

$$\begin{array}{ccc}
E_F^{-1} & \longrightarrow & E_{F'}^{-1}(\Delta) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
E_F^{-1}/E_F & \longrightarrow & E_{F'}^{-1}/E_{F'}(\Delta)
\end{array}$$

[54]* 第 72 節 (p. 103) oper 10−.
[55]* 第 14 節 (p. 26) oper 4.

という可換図式で下の行が同型になるものが出来る. とくに, Δ の外に制限すれば上の行も同型. そこで, $E_{F'}$ の接続 ∇' を

$$\nabla' : \mathcal{T}(-D') \to E_F^{-1}(-\Delta) \to E_{F'}^{-1}$$

で定める. 左の $\to$ は ∇, 右の $\to$ は上の可換図式の上の行. かくして, D' に特異性をもつ (勿論 Δ の所には特異性はない訳ですが) $\mathfrak{g}$-oper ができました.

75.2. "Opers" の 5.1 の内容

お次ぎは, やはり黒木さんの request:

> **5.1.** $A_{\mathfrak{g},D}$ に grading と filtration を定義. (3 節の記述に依存している.)

5.1 で定義している grading と filtration は, 同じモノをやはり shitan.math, article 51, oper No.5 で[56]Planck constant を導入して定義しておきました. Principal homogeneous space としての記述を上のように準備しておけば, 5.1 での定義も書き下せます.

$\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(X)$ は affine space ですから, 「原点」 P を一つ固定すれば, $V_D^{\mathfrak{g}}(X)$ との (標準的ではないが) 同型ができます.

$$V_D^{\mathfrak{g}}(X) = \bigoplus_k V_{D,k}^{\mathfrak{g}}(Y)$$

と grading が入っていたから, これにより $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(X)$ の座標環 $A_{\mathfrak{g},D}(X)$ にも grading が入る. これを使って increasing filtration を入れれば, それは P の取り方によらない.

??? なぜ ???

これで 5.1 節, 上がり.

75.3. "Opers" の 5.4 について言い残した細かい点

最期に, ちがう, 最後に

> \+ **5.4.** $\mathrm{gr}(A_{\mathfrak{g},D}(X))$ は canonical に $\mathrm{Hitch}_{\mathfrak{g},D}(X)$ の座標環と同型. ここで, $\mathrm{Hitch}_{\mathfrak{g},D}(X)$ は Hitchin の fibration の base space. ($\mathrm{gr}(A_{\mathfrak{g},D}(X))$ は oper の "classical limit" ($h = 0$) 全体の座標環と一致.) (言い残した事: 細かい点)

Planck constant h を入れた oper の定義は shitan.math article 51, oper No.5 を御覧下さい[57]. $h = 0$ とした時は $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}^0(X)$ の点 (F, ω) は X 上の B-bundle F と $\mathfrak{g}_F^{-1} \otimes \Omega(D)$ の section ω で $\mathfrak{g}_F^{-\alpha} \otimes \Omega(D)$ に落として見ると零点を持たないものからなっている.

$\mathfrak{g}$ 上の G 不変多項式の空間 $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$ と $\mathfrak{g}$ の Langlands dual $\mathfrak{g}^L$ の上の G 不変多項式の空間 $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g}^{L*})$ とは標準的に同型 (どちらも Cartan 上の Weyl 不変式の空間と同型).

??? そろそろ Langlands dual の正確な定義が知りたいのですが. 私の知っているのは Dynkin を逆にする, 程度の曖昧摸糊としたものです. ついでに, 「あいまいもこ」の正しい漢字は?

---

[56]* 第 23 節 (p. 38) oper 5.
[57]* 第 23 節 (p. 38) oper 5.

f を $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g}^{L*})$ の元とすれば, この同型で $\mathfrak{g}$ 上の多項式とも見做せる. f を斉次としてその次数を n とする. $f(\omega)$ は $\Omega^n(nD)$ の section (f は G 不変だから, ですね?).
まとめると,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Op}^0_{g,D}(X) & \to & \mathrm{Mor}\left(\mathrm{Inv}(\mathfrak{g}^{L*}), \bigoplus_n H^0(X, \Omega^n(nD))\right) \\ (F, \omega) & \mapsto & (f \mapsto f(\omega)) \end{array}$$

左辺は, $\mathrm{Hitch}_{\mathfrak{g},D}(X)$ = Hitchin's fibration の base space[58]. そして, この論文の main result は

Proposition: 上の写像は $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ 同変な代数多様体の同型である.

証明は Remark に押し込められています[59].
やっぱり, ここで $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(X)$ の principal homogeneous space としての記述を本質的に使っています. 5.1 節での grading/filtration の入れ方から, 上の命題は

$$V^{\mathfrak{g}}_D(X) \to \mathrm{Mor}\left(\mathrm{Inv}(\mathfrak{g}^{L*}), \bigoplus_n H^0(X, \Omega^n(nD))\right)$$

が $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ 同変な代数多様体の同型を与えている事を言っています. ここで, 上の射は $V^{\mathfrak{g}}_D(X)$ の元 η を,

$$\mathrm{Inv}(\mathfrak{g}) \ni f \mapsto f(y+\eta) \in H^0(X, \Omega^n(nD))$$

($\deg f = n$) という写像に対応させせます. ここで, $\{x, y, h\}$ は $sl(2)$-triple (shitam.math 149 参照[60]). また, $V^{\mathfrak{g}}_D(X)$ には次のように $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ が作用しています: shitan.math 149 で[61]述べたように,

$$V^{\mathfrak{g}}_{D,k}(X) := V_{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes H^0(X, \Omega^k(kD)), \qquad V^{\mathfrak{g}}_D(Y) := \bigoplus V^{\mathfrak{g}}_{D,k}(Y)$$

ですが, $V^{\mathfrak{g}}_{D,k}(X)$ に $t \in \mathbb{G}_\mathrm{m}$ が t^k で働いているとします.
証明の主要部分は shitan.math article 93 に触れたように[62], Kostant による定理です. 長くなるので再掲はしません. この定理をどう使っているのかは, きちんと書き下せば追えるのだと思いますが, まだやっていません. どなたか, 噛み砕いて下さると嬉しい.
論文の内容に対する follow が雑になってしまった事をお詫び致します. ちょっと疲れた.

76. takebe: Spectral curve (2)

第 74 節 (p. 105) へのフォロー.

[58]* 第 81 節 (p. 116) に Mor の定義が書いてある: 次数付き代数の準同型全体です. n 次の多項式の移った先が $H^0(X, \Omega^n(nD))$ に入ります.
[59]* この辺は少し混乱が合ったようだ. 第 117 節 (p. 173) を見よ.
[60]* 第 72 節 (p. 103) oper 10−.
[61]* 第 72 節 (p. 103) oper 10−.
[62]* 第 31 節 (p. 46) oper 5+.

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: spectral curve
Date: 14 Dec 1995 03:45:35 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec14034535@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <NAKAJIMA.95Dec12083526@take.math.tohoku.ac.jp>
nakajima@math.tohoku.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:
```

> 前に, separation of variables に似たアイデアがあると言われていたのように思うのですが.... 武部さんよろしく

塩田先生に振ろうかな. とりあえず, 私の分かる範囲で雑然とした事実の集積を並べて見ます. 細かい所はいい加減です.

(というか, 細かい話をするには問題を特定しないと話がしづらいのですが, Separation of Variables の話は, Gaudin model を念頭に置き, 一方 Hitchin's system の事は戸田格子と関係がある, と考えながら書いているので, 思考が分裂状態で申し訳ない.)

とんでもなく間違った事はいっていないと思うけど, 条件に限定が足りない所は多々あると思います.

```
# 塩田先生，適宜訂正して下さい.
```

76.1. Lax formalism

多くの知られている非線形可積分系は線形方程式系

$$A_j(x,t,\dots)w(x,t,\dots) = 0, \qquad \text{for} \quad j = 1, 2, \dots$$

の可積分条件の形で表されます. A_j の中の関数に対する方程式が考えたい非線形方程式ですが, w という未知関数を導入して線形問題を使って元の問題に対する情報を引きだそう, というのが方針. 例えば, KdV 方程式なら

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t)\right) w(x,t) = \lambda\, w(x,t), \qquad A(x,t)w(x,t) = 0$$

という微分方程式の可積分条件. (A は 3 階の微分作用素.)

いま, この内の一つが spectral problem:

$$L(x,t,\dots)w(x,t,\dots) = \lambda\, w(x,t,\dots)$$

だとしよう. (KdV はそうなっている.) すると, $A_j w = 0$ の他の方程式たちは, この spectral problem との consistency から, spectral problem の「等スペクトル変形」を記述している事になる. (L は L-operator と呼ばれる. Lax の L.) 一般には考える線形方程式系には (微分や差分の独立変数とは別の) parameter z, があり, 多くの場合 Riemann 面上

を動く. (高次元の多様体に parameter を取るような問題を私は知らない, というだけです.) 上の spectral problem は

$$L(x, t, \ldots; z)w(x, t, \ldots; z) = \lambda(z)w(x, t, \ldots; z)$$

となり, spectrum は z に依存する. そこで, z を spectral parameter z の住んでいる Riemann 面を spectral curve と言います. (これでよかったと思う.) 上の spectral problem の解 w の事を Baker-Akhiezer 関数と呼ぶ. (昔は Riemann 面から作った解だけを B-A 関数と言っていたのだけれど, いつのまにか線形問題の解一般をこう呼ぶようになってしまったようだ.)

少し一般的に書き過ぎてしまった. KP/KdV/戸田等の場合には L は spectral parameter を含まない. 一方, 可解格子模型を量子逆散乱法で定式化する時は L の中の spectral parameter が命.

76.2. Spectral curve の Jacobi 多様体と非線形方程式の関係

詳しい事は塩田先生に任せますが, KdV/KP/戸田の場合には B-A 関数を spectral curve 上の有理関数とすると, その極は系の独立変数に依らない運動の保存量を与える. 実はこうした方程式の発展は Jacobi 多様体上の flow と見做す事が出来, この極で表される divisor を原点とする linear な flow になる. (B-A 関数は適当に normalize されているとする.)

このような解の構成は Krichever 以来の長い歴史があります. Drinfeld module というのも Drinfeld がこの話から着想を得た, と聞いています. 誰か解説してくれないかな.

76.3. Separation of Variables との関係について

Sklyanin の言う "magic recipe" に依れば, B-A 関数の極が separated variables の半分を与え, これに対応する spectrum λ が後の半分を与える. 運動の保存量だから "良い独立変数" になりそうな事は想像に難くないが, ちゃんと正準共役関係を満たし, しかも量子系でもこの方法でうまくいく, というのは, やはりまだ magic, というか mystery.

やっぱり, うまくまとまらなかった. (まとまるようなら, 論文が書けますね.)

Hitchin's system については中島先生にお任せします.

77. nakajima: Spectral curve (3)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: spectral curve
Date: 16 Dec 1995 13:36:07 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec16133607@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

武部さんどうもありがとう．まだ, 今ひとつピンときてませんが, 取り敢えず Higgs 場のときに spectral curve を説明しておきます．基本文献は, [Hit1] です．

X を Riemann 面とし, K を (BD の記号と違いますが) canonical bundle とします．

(E,Φ) を Higgs bundle とします．structure group は $GL(r,\mathbb{C})$ とします．Φ は, $\mathrm{End}(E)\otimes K$ の section です．このとき,

$$C = \{\, y \in K \mid \det(y \,\mathrm{id} - \Phi) = 0 \,\}$$

を (E,Φ) の spectral curve と呼びます．Higgs 場 Φ の eigenvalue = spectrum を集めて出来ている曲線なので, この名前がついています．(もちろん, 武部さんに説明していただいた spectral curve が動機づけになっています.)

射影 $K \to X$ の制限として自然な写像 $p : C \to X$ が定義されますが, これは r-sheated branched cover になります．R をその ramification divisor とします．

更に, eigenvectors を集めて出来る C 上の直線束 L を考えます．すなわち

$$L(-R) = \mathrm{Ker}\left(y \,\mathrm{id} - p^*\Phi : p^*E \to p^*(E\otimes K)\right)$$

です．

逆に, r-sheated branched cover $p : C \to X$ と line bundle L が与えられたとき, E および Φ が

$$\begin{aligned} &E = p_*L \\ &\Phi = L \text{ の section に } y \text{ を掛ける写像が induce する endomorphism} \end{aligned}$$

によって再現されます．ここで y は p^*K の tautological section と思っています．

まとめると次の定理になります．

定理: $p : C \to X$ given に対して, 次の bijection がある:

$$\text{Higgs bundle } (E,\Phi) \text{ with spectral curve } C \quad \longleftrightarrow \quad \text{line bundle } L \text{ on } C.$$

この結果は, Hitchin fibration

$$\begin{aligned} \pi : \{\text{Higgs bundles}\} \quad &\to \quad \bigoplus_{i=1}^{r} H^0(X, K^{\otimes i}) \\ (E,\Phi) \qquad &\mapsto \quad \det(y \,\mathrm{id} - \Phi) \text{ を } y \text{ のべきに展開したときの係数たち} \end{aligned}$$

ともうまく適合します．行き先 $\bigoplus_{i=1}^{r} H^0(X, K^{\otimes i})$ の点を決めることは, spectral curve C を決めることに他なりません．よって上の定理によって, π の fiber は, L たちの space であり, C 上の Jacobian になります．(line bundle の degree は E の degree が与えられたものになるように適当に定める．E の degree を決めないときは, Jacobian の component をいっぱい並べないといけない.)

また, Higgs bundles の moduli 上の Hamiltonian flow は Jacobian 上では linear な flow になっています.

注: このようにして出来てくる Higgs bundle は semistable なものだけのはずです. (vector bundle の stability と Higgs bundle の stability は若干違うので注意する必要あり) unstable な Higgs bundle から出発したときに何が出てきているかは, よく理解していません.

武部さんのいわれる戸田格子については何も知りませんので, もし関係しそうなときは, どなたか教えてください.

78. nakajima: 点付き opers の moduli space (4)

第 73 節 (p. 105) へのフォロー.

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Whittaker models and opers (Re: oper No.9)
Date: 16 Dec 1995 19:24:01 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec16192401@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.95Dec12072922@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

> > という所を, $H^0(Y, \Omega^k)$ の代わりに $H^0(Y, \Omega^k(kD))$ を使って同様に定義したものを ...
>
> $H^0(Y, \Omega^k(kD))$ ですか? ううむ, 次元の感情が合っているのだろうか?

感情でなくて, 勘定ですよね. そう思って follow します. 私には次元の気持ちが分からないもので.

```
In article <TAKEBE.95Nov3023456@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

4.2. $\mathfrak{g}$-oper の定義.

Definition. Y 上の D に特異点を持つ $\mathfrak{g}$-oper とは, Y 上の B-bundle F で次のような $\mathcal{O}_Y$-linear map $\nabla : \mathcal{T}(-D) \to \mathcal{E}_F^{-1}$ を持つものである:

(i) 次は可換図式になる:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(-D) & \longrightarrow & \mathcal{E}_F^{-1} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{T} & =\!= & \mathcal{T}. \end{array}$$

(ii) 任意の $\alpha \in \Gamma$ に対して,

$$\mathcal{T}(-D) \to \mathcal{E}_F^{-1} \to \mathcal{E}_F^{-1}/\mathcal{E}_F \to \mathfrak{g}_F^{-\alpha}$$

の合成は同型になる.

この定義を Planck 定数つきの場合にそのまま拡張すれば, $h = 0$ のときには Higgs 場の residue が

$$\begin{bmatrix} * & & & & * \\ ? & * & & & \\ & ? & \ddots & & \\ & & \ddots & * & \\ 0 & & & ? & * \end{bmatrix}$$

の形をしていることになりませんか?

であるとあります. “$\leq$” ではなく “$<$” であるところがミソなのですが…. つまり, $H^0(Y, \Omega^k(kD))$ ではなく $H^0(Y, \Omega^k((k-1)D))$ ではないかと….
Opers と Hitchin's fibration の場合は違うということなのかな? ううむ.

そうかもしれません. 何しろ oper と G-bundle の モジュライ空間 Bun_G の関係がまださっぱり分かっていませんので何ともいえません. 存在しない section 0.2 に書いてある点付きのときの Hitchin fibration の base space が何か分かれば解決するのですが....

それに, oper の定義に現れる Borel と G-bundle を点付きで考えるときに点の上に出てくる Borel がどう関係するかも分からない.

実は, Higgs 場の residue が parabolic になるものを考えることもあります. (それでも上のものとは違う) 実際, Hitchin の論文の一番深い結果

stable な Higgs bundle のモジュライ空間

$\longleftarrow$ real analytic diffeo $\longrightarrow$

$\pi_1(X)$ の既約射影表現のモジュライ空間

を点付きの場合に拡張しようとすると, parabolic にしたほうが自然になります. それぞれの空間で, 点で一位の pole を持つものを考えるのですが, その residue の対応はそれ程単純でありません. (前にチョコット述べた parabolic bundle を考えるときの weight も混

ぜて対応が出来る. これ以上詳しいことは私の論文: Hyper-Kähler Structures on Moduli Spaces of parabolic Higgs bundles and filtered $\mathcal{D}$-modules, preprint を見てください.)

前にも述べたとおり Planck 定数を入れる考えは, Higgs bundle のモジュライと基本群の表現空間をつなぐ hyper-kähler 構造の twistor space と関係あるのですが...

79. nakajima: Langlands dual (1)

第 75 節 (p. 106) へのフォロー.

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Oper No.10
Date: 16 Dec 1995 19:43:28 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec16194328@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Dec15040445@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> ??? そろそろ Langlands dual の正確な定義が知りたいのですが. 私の知っているのは Dynkin を逆にする, 程度の曖昧摸糊としたものです. ついでに, 「あいまいもこ」の正しい漢字は?

私の愛用している WX3 で変換した結果によると「曖昧模糊」です. 二番目の選択肢として「曖昧糢糊」もでました. (ここには国語辞典がない) ちなみに私の Wnn では変換できず. やはり Fep は dos/windows のものが一番進んでいるのかな?

```
# 最近は, kinput2 + FepBridge + WX3 の環境以外で日本語を打つ気になれな
# い.
```

それから, Langlands dual の root 系によらない定義は Ginzburg のものがお薦めです. [Gin] です. 賢島では清水さんが基本文献の一つに挙げていました. この内容の紹介は, 既に目を通されている黒木さんに振ります. 間違っているかどうかは私には判断できません.

80. kuroki: 点付き opers の moduli space (5)

第 78 節 (p. 113) へのフォロー.

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Whittaker models and opers (Re: oper No.9)
Date: 17 Dec 1995 04:49:20 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec17044920@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

眠たくなってきました. 今日はこの辺で寝るかな. 寝る前にもう一言.

```
In article <NAKAJIMA.95Dec16192401@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:
```

> | Opers と Hitchin's fibration の場合は違うということなのかな? ううむ.
>
> そうかもしれません. 何しろ oper と G-bundle の モジュライ空間 Bun_G の関係がまださっぱり分かっていませんので何ともいえません. 存在しない section 0.2 に書いてある点付きのときの Hitchin fibration の base space が何か分かれば解決するのですが....

有限次元での類似を見ると,

0-opers の moduli	Hitchin's fibration の base
$\mathfrak{g}_{\geq -1}//B \simeq (f+\mathfrak{b})/N$	$\mathfrak{g}//G \simeq \mathfrak{h}//W$

となっていると考えられます. ここで, 0-oper は $h = 0$ の場合の h-oper という意味です. $\mathfrak{g}_{\geq -1}$ は, $\mathfrak{g} = sl_n$ の場合では,

$$\begin{bmatrix} * & & & & * \\ ? & * & & & \\ & ? & \ddots & & \\ & & \ddots & * & \\ 0 & & & ? & * \end{bmatrix}$$

という形の traceless matrix の全体であり, $f+\mathfrak{b}$ は ? の部分が全て 1 であるような $\mathfrak{g}_{\geq -1}$ の元の全体です. N, B は上三角の方の maximal unipotent と Borel であり, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}$ はそれらの Lie 環であり, $\mathfrak{h}$, W は対応する Cartan subalgebra とそれに作用する Weyl group です. もちろん, $\mathfrak{g}$ とその dual space $\mathfrak{g}^*$ は同一視してあります.

$\mathfrak{g}_{\geq -1}//B \simeq (f+\mathfrak{b})/N$ と $\mathfrak{g}//G \simeq \mathfrak{h}//W$ が自然に同型であるというのが Kosatant の定理です. ($\mathfrak{g} = sl_n$ なら証明は簡単. $n = 2$ の場合にちょこっと計算してみれば良い.) これの類似として, 0-opers の moduli と Hitchin's fibration の base の間の自然な同型を構成するのだと思います.

点付きの Hitchin's fibration の定義がはっきりすればふんぎりが付いて理解できそうに思えるのですが⋯.

```
# おやすみなさい.
```

81. takebe: 点付き opers の moduli space (6) (oper 10+)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Oper No.10
```

```
Date: 17 Dec 1995 06:49:19 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec17064919@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.95Dec17040638@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

> `In article <TAKEBE.95Dec15040445@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>`
> `takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:`
>
> > $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(X)$ は affine space ですから,「原点」P を一つ固定すれば, $V_D^{\mathfrak{g}}(X)$ との (標準的ではないが) 同型ができます.
>
> $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(X)$ の affine space (= $V_D^{\mathfrak{g}}(X)$-torsor = principal homogeneous space of $V_D^{\mathfrak{g}}(X)$) としての記述はどのようになされているのでしょうか?

shitan.math article 150 (149 の文字化け訂正版) で[63]書いたように,

> という所を, $H^0(Y,\Omega^k)$ の代わりに $H^0(Y,\Omega^k(kD))$ を使って同様に定義したものを $V_{D,k}^{\mathfrak{g}}(Y)$, $V_D^{\mathfrak{g}}(Y)$ として, $\mathrm{Op}_{sl(2)} \times V_D^{\mathfrak{g}}(Y)$ を同値関係
>
> $$(L+\omega,\eta) \sim (L,\eta-\omega\chi)$$
>
> で割って $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ と見做せます.

という所では, ダメですか?

> > $\mathrm{Op}^0_{\mathfrak{g},D}(X) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{Inv}(\mathfrak{g}^{L*}), \bigoplus_n H^0(X,\Omega^n(nD))$
>
> 右辺の Mor(,) の定義を教えてください.

書き落としていました. これは, 次数付き代数の準同型全体です. n 次の多項式の移った先が $H^0(X,\Omega^n(nD))$ に入ります.

82. kuroki: 点付き opers の moduli space (7)

第 81 節 (p. 116) へのフォロー.

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Oper No.10
Date: 17 Dec 1995 16:07:31 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec17160732@ume.math.tohoku.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Dec17064919@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

[63]* 第 72 節 (p. 103) oper 10−.

> という所を, $H^0(Y,\Omega^k)$ の代わりに $H^0(Y,\Omega^k(kD))$ を使って同様に定義したものを $V^{\mathfrak{g}}_{D,k}(Y)$, $V^{\mathfrak{g}}_D(Y)$ として, $\mathrm{Op}_{sl(2)} \times V^{\mathfrak{g}}_D(Y)$ を同値関係
>
> $$(L+\omega,\eta) \sim (L,\eta-\omega\chi)$$
>
> で割って $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ と見倣せます.
>
> という所では, ダメですか?

どうやって, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ と $(\mathrm{Op}_{sl(2)}(Y) \times V^{\mathfrak{g}}_D(Y))/\sim$ の間の同型写像を作るのでしょうか? 特異点無しの場合でさえ同型写像の構成がまだはっきりしてないと思います. 同型写像の存在は Kostant の定理の類似になっているはずです.

あと, $(\mathrm{Op}_{sl(2)}(Y) \times V^{\mathfrak{g}}_D)/\sim$ の $\mathrm{Op}_{sl(2)}$ の部分は $\mathrm{Op}_{sl(2),D}$ ではなく, $\mathrm{Op}_{sl(2)}$ なのでしょうか? (どちらでも良いという結論も出るかもしれない.)

あと, これは私の理解の確認ですが, $\mathrm{Op}_{sl(2),D}(Y)$ は affine space であり, 原点を一つ固定すると, $H^0(Y,\Omega^2(2D))$ と同一視できるというのは正しいでしょうか?

もしも正しいなら, genus ≥ 2 のとき, Riemann-Roch より,

$$\dim \mathrm{Op}_{sl(2),D}(Y) = \dim H^0(Y,\Omega^2(2D)) = 3(g-1)+2N$$

となります. (ここで, $g = \mathrm{genus}(Y)$, $N = \deg(D)$.)

一方, D 上に (quasi) parabolic structure を持つ (quasi) parabolic $SL(2)$-bundle の moduli の次元は, $3(g-1)+N$ となります (devisor D は reduced であると仮定した). $SL(2)$ を $PSL(2)$ で置き変えても同じなのですよね? すると, 次元の間には N の差がでます.

これが, 次元の感情, , , ではなく勘定が合わないという私の発言の主旨なのです. 次元の感情, , , ではなく勘定を合わせるためには, どちらかを変更して辻褄を合わせなければいけません. 中島さんの言う通り, parabolic bundle の moduli の定義の方を変えることによって, 辻褄を合わせている可能性が高いと思います. (次元の差 N を stability を決める N 個のパラメーターの分で埋める. パラメーターは複素にしなければいけない.)

```
# 0.2 節が無いということなので，‘‘long announcement’’ が出るのを待った
# 方が良いのかな?
```

次のように考えると確かに辻褄が合っているように思えます. 以下では, D を Y の有限部分集合 (点の個数は N 個) であるし, D を Y の reduced divisor とみなす.

Galois side の object であるとみなされる $sl(2)$-opers は Y 上の projective connection で D 上に確定特異点を持つものです. それを local には

$$L = \left(\frac{d}{dz}\right)^2 - q(z) : \Omega^{-1/2} \to \Omega^{3/2}$$

と表示しておくことにします. $Q \in D$ の近傍で $z(Q) = 0$ となるような local parameter z を取ると, L が Q で確定特異点型であるという条件は, $q(z)$ が $z=0$ において,

$$q(z) = a_Q z^{-2} + b_Q z^{-1} + \text{regular} \qquad (a_Q, b_Q \in \mathbb{C})$$

の形をしていることと同値になります. a_Q が全て 0 であるものに制限して考えると D に特異点を持つ $sl(2)$-opers の moduli の次元が N だけ下って辻褄が合うのですが, 「確定特異点型」であるという条件は魅力的であり, 勝手に a_Q 達を 0 にしてしまうのは不自然な感じがします. だから, 問題になるのは a_Q の解釈です.

一方, automorphic side では, D 上に quasi parabolic structure を持つ quasi parabolic $SL(2)$-bundle の moduli の上での twisted $\mathcal{D}$-module を考えます. このとき, twisted $\mathcal{D}$ = sheaf of tdo の記述が問題になるのですが, この話に必要な sheaf of tdo は affine Lie algebra の level k と各点 $Q \in D$ に与えられた weight $\lambda_Q \in \mathfrak{h}^* = (\mathbb{C}H)^*$ から決定されます[64]. 今の話では, level k は critical value (= − dual Coxeter number) に fix されます.

上の a_Q はこの λ_Q と

$$a_Q = (\text{h.w. } \lambda_Q \text{ を持つ h.w. module における Casimir の固有値}) = (\lambda_Q | \lambda_Q + 2\rho)$$

の関係にあるというのが, Beilinson-Drinfeld の program の一部になっています. だから, Galois side のパラメーター a_Q は automorphic side の sheaf of tdo を決めるパラメーターに関係していると解釈されます.

一応これで辻褄が合っているように思えるのですが, これだと Galois side からいきなり automorphic side に飛んでしまったことになっていて, もともとの疑問であった Galois side の “classical limit” である Hitchin’s fibration の話の方がどうなっているかに対する解答にはなってませんね.

そこで, 中島さんの Hyper-Kähler Structures on Moduli Spaces of parabolic Higgs bundles and filtered D-modules, preprint をこれから見てみようと思ったのですが, どこにやったかな…[65].

83. kuroki: 点付き opers の moduli space (8)

From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Oper No.10
Date: 17 Dec 1995 21:48:12 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec17214812@tsuru.math.tohoku.ac.jp>

In article <KUROKI.95Dec17160732@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:

> どうやって, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y)$ と $(Op_{sl(2)}(Y) \times V_D^{\mathfrak{g}}(Y))/\!\sim$ の間の同型写像を作るのでしょうか? 特異点無しの場合でさえ同型写像の構成がまだはっきりしてないと思います. 同型写像の存在は Kostant の定理の類似になっているはずです.

あ, しまった. 落ちこぼれているのがばれてしまいますね.

[64] http://www.math.tohoku.ac.jp/ kuroki/TeX/cft.tar.gz に私が数理研講究録に書いた原稿 (の修正版) が置いてあります.

[65] * 内容の簡単な紹介が 第 85 節 (p. 122) にある.

<TAKEBE.95Dec12032352@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
(Subject: Re: Whittaker models and opers (Re: oper No.9))

に色々書いてあるようですね[66]. 今, それを TeX 化している最中です. ちゃんと読んで考えてみます[67].

TeX 化しないと, ちゃんと読めない体質になりつつある….

84. shiota: Spectral curve (4)

第 76 節 (p. 109) へのフォロー.

```
From: shiota@kusm.kyoto-u.ac.jp (Takahiro Shiota)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: spectral curve
Date: 18 Dec 1995 03:53:46 JST
Message-ID: <4b1ovq$va@shitan.math.tohoku.ac.jp>
```

武部さんに follow を頼まれた京大の塩田です. こんにちは.

In article <TAKEBE.95Dec14034535@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:

> いま, この内の一つが spectral problem:
>
> $$L(x,t,\dots)w(x,t,\dots) = \lambda\, w(x,t,\dots)$$
>
> だとしよう. (KdV はそうなっている.) すると, $A_j w = 0$ の他

一つに限る必要はないでしょう. 一つの作用素のスペクトル問題となると, 解の増大度などに条件を付けて, 関数解析的な枠組で考えることになるでしょうが (例えば KdV のように L が常微分作用素なら, 解析的な条件を何も付けなければ, λ の集合は $\mathbb{C}$ 全体となり, これでは何の情報も得られない), KdV, KP, BKP, Toda 等で代数曲線が現れる場面では, 互いに可換な幾つかの線形作用素の同時固有値問題を考えることで, 関数解析的な条件なしに意味のある情報を引き出しています. 例えば L_1 と L_2 が互いに可換な常微分作用素 (差分作用素でも同様) なら, 同時固有値問題

$$L_1(x,t,\dots)w(x,t,\dots) = \lambda_1 w(x,t,\dots), \qquad L_2(x,t,\dots)w(x,t,\dots) = \lambda_2 w(x,t,\dots)$$

が自明でない解を持つ様な (λ_1, λ_2) の全体は $\mathbb{C}^2$ の affine 代数曲線になり, 「等スペクトル変形」とはこの曲線 (の同型類) が時間発展で変わらない, ということと解釈できます.

[66]* 第 72 節 (p. 103) oper 10−.
[67]* 第 87 節 (p. 124) に続く.

KdV, KP 等の場合の本来の定式化である一つの作用素の "スペクトル問題"

$$L(x,t,\dots)w(x,t,\dots) = \lambda\, w(x,t,\lambda) \tag{$*$}$$

とその変形

$$A_j w = 0$$

から, どうやって上の同時固有値問題にもっていくかが当然問題になりますが (代数曲線といった非自明なものを引き出すには, それなりに種も仕掛けも必要), 僕が好きな論法は Lax 流だか村瀬流だか知らないけど, L の orbit の有限次元性を仮定するものです. KP 等では $A_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - P_j$, 但し P_j は x, t に依存する x の常微分作用素, の形で, $(*)$ から L の時間発展の方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial t_j} = [P_j, L]$$

となります. 本来の hierarchy に ∞ 個あった時間発展 $\frac{\partial}{\partial t_j}$ の内, 独立なものが高々 g 個しかなければ, その差を使って (P_j の一次結合として) L と可換な常微分作用素が $\infty - g = \infty$ 個作れますが, これらの作用素がまたお互い可換になり, w はそれらの同時固有関数になっています. さらに代数的な見方を続ければ, それらの作用素の全体が可換環になり, その環の Spec が spectral curve の affine part をなす事も示せます.

勿論この話は武部さんの言う, Riemann 面上をうごく parameter z を導入して $\lambda = \lambda(z)$ と見る見方の特別の場合とも見られますが, KdV, KP 等の場合には L が z を陽に含まないこともあり, Riemann 面の出所をはっきりさせるにはこの見方が有用だと思います. この見方を使うと, spectral curve の時間不変性なども元の時間発展の compatibility からすぐ証明できます.

> z があり, 多くの場合 Riemann 面上を動く. (高次元の多様体に parameter を取るような問題を私は知らない, というだけです.)

僕も知りません. 常微分作用素とか $\frac{\partial}{\partial t_j} -$ (常微分作用素) の形の作用素の話に本質的に帰着できない偏微分作用素の可換環を扱う話も知りません (n point hierarchy では n 変数の偏微分作用素は出てくるけどイデアルで割った環を考えていて, 本質的に偏微分作用素を扱ってるとは言えない). 中屋敷君がなにか知ってるかも知れません.

> Spectral curve の Jacobi 多様体と非線形方程式の関係.
> 詳しい事は塩田先生に任せますが, KdV/KP/戸田の場合には B-A 関

できれば Mumford の Kyoto Lecture [Mum] を参照してください, と言いたいのですが⋯. KP の言葉で述べられてはいませんが, KP を知った上で読むと極めて明快な論文です. Drinfeld の理論のことも出ています.

> 数を spectral curve 上の有理関数とすると, その極は系の独立変数に依らない運動の保存量を与える. 実はこうした方程式の発展は Jacobi 多様体上の flow と見做す事が出来, この極で表される divisor を原点とする linear な flow になる. (B-A 関数は適当に normalize されているとする.)

つまり B-A 関数の極は保存量と言うより解の初期値 (Jacobi 多様体上の flow の出発点) そのものです. 蛇足ですが, Jacobi 多様体上の flow と見なせるのは L の時間発展の方で, w の方は z の関数 (x に依存しない) 倍の違いを同一視して初めて Jacobi 多様体上の運動となります.

> このような解の構成は Krichever 以来の長い歴史があります.

KdV 等, 多くの特殊な場合が Krichever 以前に Flaschka, Maclaughlin, McKean, van Moerbeke, Mumford, Novikov らによって調べられていました. 勿論 Krichever の一般的な結果が出てから他の結果の影は薄くなってしまいましたが.

以上思い付いたことを書いてみました. 塩田隆比呂

85. nakajima: 非可換 Hodge 理論 (1)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Oper No.10
Date: 18 Dec 1995 12:39:08 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec18123908@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.95Dec17160732@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

> そこで, 中島さんの Hyper-Kähler Structures on Moduli Spaces of parabolic Higgs bundles and filtered D-modules, preprint をこれから見てみようと思ったのですが, どこにやったかな⋯.

前に書いたものを少し訂正したので, http://www.math.tohoku.ac.jp の東北大数学科のプレプリントのところに置いておきまいた. (しかし netscape で取れるようにきちんと設定されているか自信がない.)

```
# 東大の方でやるべきなのでしょうが, 残念ながら ebira の hard disk には
# 空きがない.
```

詳しいことは論文を見てもらえばいいのですが,

parabolic Higgs bundle といったときに, parabolic bundle の moduli space の cotangent bundle を含むためには, Higgs 場の residue が nilpotent なもののみを考えるだけでよいのですが (都立大の今野氏の D-論ではその場合しか考えていない), nonabelian Hodge, *i.e.*,

$$\text{moduli space of stable parabolic Higgs bundles} \longleftrightarrow \text{moduli space of stable filtered } \mathcal{D}\text{-modules}$$

を作るときには, residue が parabolic なものも考えなければなりません. そうしないと, 点の回りの monodromy が特別なものしか扱えない.

更に, hyperkähler structure を持つようにするには, 上では residue の固有値を止めた moduli, 下では点の回りの monodromy を止めた moduli を考える必要があります.

あと, 論文では rank 2 しか扱っていません. higher rank でも full flag の場合は, straight forward に拡張されますが, そうでないときはいささか面倒なことをしなければいけませんので, サボっています.

86. nakajima: 非可換 Hodge 理論 (2)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Oper No.10
Date: 18 Dec 1995 21:56:23 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec18215623@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <NAKAJIMA.95Dec18123908@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:
```

> 詳しいことは論文を見てもらえばいいのですが,

> 更に, hyperkähler structure を持つようにするには, 上では, residue の固有値を止めた moduli, したでは点の回りの monodromy を止めた moduli を考える必要があります.

あまりに簡潔すぎるので, もう一言だけ説明.

moduli spaces は, 上の様なパラメータ σ (複素) と stability を定めるための weight α (実) で決まります. parabolic Higgs bundle の方の moduli を $M_{\mathrm{Dol}}(\alpha, \sigma)$ として, $\pi_1(X-D)$ の表現の方の moduli を $M_{\mathrm{DR}}(\alpha, \sigma)$ で表わします. nonabelian Hodge theory は,

$$M_{\mathrm{Dol}}(\alpha, \sigma) \leftarrow \text{diffeo} \rightarrow M_{\mathrm{DR}}(\alpha', \sigma')$$

ということを主張するのですが, (α, σ) と (α', σ') は,

$$\alpha = \mathrm{Re}(\sigma'), \qquad \sigma = (\sigma' - \alpha')/2$$

というような関係にあります.

四元数の純虚数の全体 $\mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$ を二つの異なる分け方 $\mathbb{R}i+(\mathbb{R}+\mathbb{R}i)j$ と $(\mathbb{R}+\mathbb{R}i)k+\mathbb{R}j$ で見ていると思うと感じがつかめると思います.

何回も言っているように (そのわりに一回も説明していませんが) Planck 定数 h を導入することは hyper-Kähler 構造を考えることや nonabelian Hodge と深い関係があります. しかし点付きのときにどのように境界条件を考えたらいいのかは, それ程明らかでないと思います. うまく weight の情報もいれないと $h \to 0$ のときに繋がってくれない.

また symplectic でなくてよいのなら, $\bigcup_\sigma M_{\mathrm{Dol}}(\alpha,\sigma)$ を考えることも一つのやり方でしょう. Hitchin's hamiltonian は普通と同じ様に定義するとその行き先は $H^0(X, K^n(nD))$ になります. 通常のものにつけ加わった data は σ であるというわけです. また generic fiber が torus になる等のことは OK です. (Poisson 構造として formulate すれば良いのかな????)

P.S. どなたか, $h=0$ oper が Higgs bundle の moduli の中にどのように入っているかを解読してくださると理解が深まると思うのですが... それから, nonabelian Hodge theory で Hitchin hamiltonian の 0 の逆像がどのように移るかも教えて欲しい. $\mathbb{C}^*$ 作用の fixed point は, variation of Hodge structure に移ると書いてあるのだが, あまり親しみがないので分かった気にならないのだ.

87. kuroki: 点付き opers の moduli space (9)

第 72 節 (p. 103) へのフォロー.

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Whittaker models and opers (Re: oper No.9)
Date: 18 Dec 1995 15:55:26 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec18155527@ume.math.tohoku.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Dec12032352@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> このようにして作った principal homogeneous space の元 (L,η) (L : Sturm-Liouville 型微分作用素, $\eta : V_D^{\mathfrak{g}}(Y)$ の元) に対しては, 次のようにして oper を対応させます.

この対応のさせ方が私の知りたいことです.

> L は $sl(2)$-oper $=$ $PGL(2)$-oper (F_0, ∇_0) に対応する. 上で黒木さんの記事にある $sl(2)$-triple (e,f,h) (Beilinson and Drinfeld の論文では (x,y,h)) を取って,

これによって, $\mathfrak{g}$ を $sl(2)$-module とみなし既約分解を考えます. 既約成分の highest weight vectors の空間 ($=\operatorname{Ker}\operatorname{ad}x$) を V と定義したのでした. 既約成分には $sl(2)$ の奇数次元の既約表現しか現われません. 実際, $\mathfrak{g}$ の exponents を m_j と表わすとき, 各既約成分の次元は $2m_j+1$ になります. 例えば, $\mathfrak{g}=sl(n)$ のとき, $m_j=j$ $(j=1,\dots,n-1)$ です. 以下において, m_j に対応する既約成分の highest weight space を V_{m_j} と書くことにします.

> これにより
> $$\rho : PGL(2) \to G_{\mathrm{ad}}$$
> を作る.
> ??? 具体的に書くとどうなるのですか. とくになぜ ad が付くのか?

$sl(2)$ の $\mathfrak{g}$ への adjoint action から, $SL(2)$ の $\mathfrak{g}$ への作用 (すなわち, $SL(2) \to \mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) = G_{\mathrm{ad}}$) が自然に構成されます. ところが, $\mathfrak{g}$ の $sl(2)$-module としての既約成分は全て奇数次元ですから, $SL(2)$ の $\mathfrak{g}$ への作用は $PGL(2)$ の作用を誘導します. これによって ρが得られます.

> これにより (F_0, ∇_0) が B_{ad}-bundle F とその上の接続 ∇ を誘導する.

これは, bundle と connection の誘導の一般論. 例えば, $\mathfrak{g} = sl(4)$ のときに connection の誘導を local に見ると,

$$\frac{d}{dz} + \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ 1 & -a(z) \end{bmatrix} \mapsto \frac{d}{dz} + \begin{bmatrix} a(z) & b(z) & & \\ 1 & 0 & b(z) & \\ & 1 & 0 & b(z) \\ & & 1 & -a(z) \end{bmatrix}$$

という感じになっています.

> (L, η) に対応する $\mathfrak{g}$-oper は $(F, \nabla + \eta)$ である.

わかってしまえば簡単なことだと思いますが, $\nabla + \eta$ の正確な定義がわかりません. (まだ真面目に考えてない.)
この疑問に答えてくださる方にとって便利なように η が住んでいる空間 $V_D^{\mathfrak{g}}(Y)$ の定義を復習しておきましょう. $V_D^{\mathfrak{g}}(Y)$ は次のように定義されたのでした:

$$V_{k,D}^{\mathfrak{g}}(Y) := V_{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes H^0(Y, \Omega^k(kD)), \qquad V_D^{\mathfrak{g}}(Y) := \bigoplus_k V_{k,D}^{\mathfrak{g}}(Y).$$

ここで, k は $m_j + 1$ ($j = 1, \dots, \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}$) を走ります. V_{m_j} はこの記事の始めの方で定義しました. (これで良いのですよね?)

88. kuroki: 点付き opers の moduli space (10)

第 86 節 (p. 123) へのフォロー.

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Oper No.10
Date: 19 Dec 1995 20:09:32 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec19200932@ume.math.tohoku.ac.jp>


In article <NAKAJIMA.95Dec18215623@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:
```

> **P.S.** どなたか, $h = 0$ oper が Higgs bundle の moduli の中にどのように入っているかを解読してくださると理解が深まると思うのですが...

0-opers ($h = 0$ に対する h-opers) の moduli space は Hitchin's fibration の base space に同型になるはずです. そのことは, Oper No.5 において, 武部さんが

> 上の filtration の gr を取れば, $p^{-1}(0) = \mathrm{Op}^0_{\mathfrak{g},D}(Y)$ の座標環で, 次数は自然な $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ の作用から来ている. この次数環を Hitchin の fibration の base space V の函数環と同一視する事ができる.

のように書いています.

Hitchin's fibration の有限次元での類似物を自然な射影

$$\pi : \mathfrak{g}^* \twoheadrightarrow \mathfrak{g}^*//G \simeq \mathfrak{h}^*//W \simeq \mathbb{C}^{\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}}$$

であると思うことにします. $\mathfrak{g}^*$ に自然な Poisson structure を入れて考えると,

$$\pi^* : \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*//G] = S(\mathfrak{g})^G \hookrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = S(\mathfrak{g})$$

の像は Poisson 可換になります.

$S(\mathfrak{g})^G$ が $S(\mathfrak{g})$ の Poisson structure のもとでの適切な意味で完全可積分なのかどうかは知りません. 上の π は Harish-Chandra isomorphism の classical limit になっていて, 表現論にはよく登場するのですが, その周辺のことを私がよく理解しているとは言えません.

一方, 0-opers の moduli space の有限次元での類似物は, Kostant の定理における

$$(f + \mathfrak{b})/N \simeq f + V$$

です. (代表元の集合 $V \subset \mathfrak{b}$ は vector space に取れる.) 左辺が 0-opers の moduli space の類似であり, 右辺の $f + V$ は主等質空間としての opers の moduli space の記述の類似になっています.

注意: 体として $\mathbb{C}$ の代わりに $\mathbb{C}((z))$ を考えると, $(f + \mathfrak{b})/N$ は実際に punctured disk $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}((z))$ 上の 0-opers の同型類の集合になる. $h \neq 0$ の h-oper は loop Lie algebebra の代わりに affine Lie algebra を考えると登場する. なぜなら, affine Lie algebra の dual vector space は h-connections の空間であると自然にみなせるからである. (h は affine Lie algebra の level であるとみなせる.) Drinfeld-Sokolov reduction はちょうどこの場合の話である.

以前の説明の通り, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を同一視すると, $f + V \subset \mathfrak{g}^*$ とみなせますが, Kostant の定理より, $f + V$ に π を制限したものは algebraic variety の同型写像になります.

★島さんが憶えているかどうかわかりませんが, 沖縄で私が「0-oper の話は代表元を選んでいるという感じだ」と言ったのはこういう意味でのことです.

> それから, nonabelian Hodge theory で Hitchin hamiltonian の 0 の逆像がどのように移るかも教えて欲しい.

Non-Abelian Hodge の話はまだ全然理解していないのですが, この話と Planck 定数 h を入れる話は関係しているのでしょうか?

> $\mathbb{C}^*$ 作用の fixed point は, variation of Hodge structure に移ると書いてあるのだが, あまり親しみがないので分かった気にならないのだ.

この辺の言葉に親しみを持っている方々も読んでいるはずなので, 回答を期待しましょう.

89. takebe: 点付き opers の moduli space (11)

第 82 節 (p. 117) へのフォロー.

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Oper No.10
Date: 21 Dec 1995 03:41:06 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec21034106@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

# 元の記事の順番と, follow の順番が違いますが, 御勘弁.

In article <KUROKI.95Dec17160732@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

> あと, $(\mathrm{Op}_{sl(2)}(Y) \times V_D^{\mathfrak{g}})/\sim$ の $\mathrm{Op}_{sl(2)}$ の部分は $\mathrm{Op}_{sl(2),D}$ ではなく, $\mathrm{Op}_{sl(2)}$ なのでしょうか? (どちらでも良いという結論も出るかもしれない.)

$\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y) = (\mathrm{Op}_{sl(2)}(Y) \times V^{\mathfrak{g}})/\sim$ でしたが, $V^{\mathfrak{g}}$ は $V_D^{\mathfrak{g}}$ の subset なので, これで induce した等質空間が $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y)$, というのが点付き oper の一つの定義です. (従って, $\mathrm{Op}_{sl(2)}$ のままで OK.) これが別の定義と同値になる, という事は別に示されます. まだ証明を追っていませんが, やはり Kostant の定理と関係がありそうです.

> あと, これは私の理解の確認ですが, $\mathrm{Op}_{sl(2),D}(Y)$ は affine space であり, 原点を一つ固定すると, $H^0(Y, \Omega^2(2D))$ と同一視できるというのは正しいでしょうか?

$\mathrm{Op}_{sl(2),D}(Y)$ が $V_D^{sl(2)}$ 上の principal homogeneous space, というのは信じる事にして, $V_D^{sl(2)}$ と同一視できる, から, えぇぇぇっと, ちょっと定義に戻って調べて見ましょう. (黒板の所へ行って)

$$V_D^{\mathfrak{g}}(Y) = \bigoplus_k V_{D,k}^{\mathfrak{g}}(Y), \qquad V_{D,k}^{\mathfrak{g}}(Y) = V_{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes H^0(Y, \Omega^k(kD)),$$

と. $V_{k-1}(sl(2))$ は..., $V(sl(2))$ の homogeneous component? $V(sl(2))$ ってなんだっけ. おぉ, $V(sl(2)) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}\,x$, か. $sl(2)$ ならどうせ $x\ (= f)$ の kernel なんて 1 次元だから,

$$V_k(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \quad (k = 1), \qquad = 0 \quad (\text{その他}).$$

と言う事は,

$$V_{D,k}^{\mathfrak{g}}(Y) = V_{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes H^0(Y, \Omega^k(kD)) = \begin{cases} V_1(\mathfrak{g}) \otimes H^0(Y, \Omega^2(2D)) & (k = 2), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$$V_D^{\mathfrak{g}}(Y) = H^0(Y, \Omega^2(2D)),$$

OK!!

多分, 黒木さんの聞きたかった事は最初の principal homogeneous space ..., と言う所だったのだと思いますが, 丁度良いから, 具体例の計算練習をしてしまいました.

90. takebe: 点付き opers の moduli space (12)

第 87 節 (p. 124) へのフォロー.

From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Whittaker models and opers (Re: oper No.9)
Date: 21 Dec 1995 04:03:54 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec21040354@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.95Dec18155527@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:

> | (L, η) に対応する $\mathfrak{g}$-oper は $(F, \nabla + \eta)$ である.
>
> わかってしまえば簡単なことだと思いますが, $\nabla + \eta$ の正確な定義がわかりません.
> (まだ真面目に考えてない.)

すみません. ここも, 「めんどくせぇ」でとばした所で, 細かい同一視を積み重ねて η が $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{T}_Y, \mathfrak{b}_F)$ に入る事を言います. しばらく, お待ち下さい. (あるいはどなたか考えて下さいますか.)

論文とか本では「これは読者の練習問題として残しておこう」と
か言うのはよくあるけど, seminar でこんな事を言う学生がいた
ら本かチョークを投げつけられて血祭だろうな.

91. shiota: Spectral curve (5)

From: Takahiro Shiota <shiota@kusm.kyoto-u.ac.jp>
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: spectral curve
Date: 21 Dec 1995 20:10:42 -0000
Message-ID: <9512212010.AA04185@kusm.kyoto-u.ac.jp>

塩田です. 前回の拙文は中島さんの記事を読まないまま書いてしまったので, Hitchin との関係が不明確なままでした. 武部さんどうも有難うございます.

武部さん曰く:

> | # 一説では佐藤流と言う人も....

Lax のアイデアは 1975 年の CPAM に出た彼の論文 “Periodic solutions of the K-dV equation” にはっきりと書かれています. 佐藤さんが soliton をやったのはずっと後なのでは?

村瀬さんも時期的には遅いけど, Schottky 問題に応用できることを初めて explicit に述べたのは私の知る限りでは彼が最初です. 尤も, Krichever を始め, 当時は他にも実質的には知ってた, という人は多いでしょうから, 村瀬流と言い切るには語弊があるでしょうね.

> 私も, この見方で育った (?さっぱり育っていない!) のですが, この見方と Hitchin's fibration で出てくる spectral curve (Moscow で Nekrasov が説明してたのを覚えていらっしゃるかと思います. 中島さんの記事も御参照下さい.) とは自然に結びつくのでしょうか → 塩田先生. その辺が Donagi-Markman の仕事かな.

L_1, L_2 が可換なら L_2 は L_1 の固有空間に作用するわけだから, L_1 の各固有空間 V_λ に対して $L_2|V_\lambda$ は $\mathrm{End}(V_\lambda)$ の元で, 同時固有値問題

$$L_1 w = \lambda w, \qquad L_2 w = \mu w$$

は $\det(\mu 1 - L_2|V_\lambda) = 0$ に帰着します.

更に例えば KP の有限次元 orbit の話では, L と可換な常微分作用素の全体を R とし, R' を R の部分環で, ある $P \in R$ に対して $R = R'[P]$ となるものとすると, P は R' の同時固有空間に作用するわけだから, $C' - \{\infty\} := \mathrm{Spec}(R')$ の各点 λ に対して, 対応する固有空間を V_λ とすると, $P|_{V_\lambda}$ は $\mathrm{End}(V_\lambda)$ の元で, 同時固有値問題

$$L_1 w = \lambda(L) w, \qquad P w = \mu w \qquad (L_1 \in R')$$

は $\det(\mu 1 - P|V_\lambda) = 0$ に帰着します. R' の元の order の GCD が r ならば V_λ を張り合わせて C' 上 rank r の vector bundle V が得られますが, $\det(\mu 1 - P|V_\lambda) = 0$ で "spectral curve" C (実は $\mathrm{Spec}(R) \cup \{\infty\}$) が得られて, V も C 上の line bundle の直和に分解されるという次第ですから, まあ似てることは確かでしょう. でも Hitchin's fibration がいつもこの形で実現できるかどうかは, 考えたことがないので知りません.

92. takebe: Spectral curve (6)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: spectral curve
Date: 22 Dec 1995 08:38:12 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec22083812@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <9512212010.AA04185@kusm.kyoto-u.ac.jp>
Takahiro Shiota <shiota@kusm.kyoto-u.ac.jp> writes:
```

> 武部さん曰く:
>
> > # 一説では佐藤流と言う人も....
>
> Lax のアイデアは 1975 年の CPAM に出た彼の論文 "Periodic solutions of the K-dV equation" にはっきりと書かれています. 佐藤さんが soliton をやったのはずっと後なのでは?

そのはずです. [Sato-Sato] が 1982 で, そのしばらく前は Sato-Miwa-Jimbo で quantum holonomic field とかをやっていたはず. 佐藤先生の研究歴は, 大山陽介さんに聞けば詳しくご存知ですが.

> 村瀬さんも時期的には遅いけど, Schottky 問題に応用できることを初めて explicit に述べたのは私の知る限りでは彼が最初です. 尤も, Krichever を始め, 当時は他にも実質的には知ってた, という人は多いでしょうから, 村瀬流と言い切るには語弊があるでしょうね.

代数幾何的に扱う対象として有限次元 orbit の解を KP の言葉で定義したのは村瀬先生ですね.

> L_1, L_2 が可換なら L_2 は L_1 の固有空間に作用するわけだから, L_1 の各固有空間 V_λ に対して $L_2|V_\lambda$ は $\mathrm{End}(V_\lambda)$ の元で, 同時固有値問題
>
> $$L_1 w = \lambda w, \qquad L_2 w = \mu w$$
>
> は $\det(\mu 1 - L_2|V_\lambda) = 0$ に帰着します.
> 更に例えば KP の有限次元 orbit の話では, L と可換な常微分作用素の全体を R とし, R' を R の部分環で, ある $P \in R$ に対して $R = R'[P]$ となるものとすると, P は R' の同時固有空間に作用するわけだから, $C' - \{\infty\} := \mathrm{Spec}(R')$ の各点 λ に対して, 対応する固有空間を V_λ とすると, $P|_{V_\lambda}$ は $\mathrm{End}(V_\lambda)$ の元で, 同時固有値問題
>
> $$L_1 w = \lambda(L) w, \qquad P w = \mu w \qquad (L_1 \in R')$$
>
> は $\det(\mu 1 - P|V_\lambda) = 0$ に帰着します. ..... が得られて, V も C 上の line bundle の直和に分解されるという次第ですから, まあ似てることは確かでしょう. でも Hitchin's fibration がいつもこの形で実現できるかどうかは, 考えたことがないので知りません.

この間, 「可積分系の話は Dirichlet の引きだし論法みたいだ. 世の中に可積分な系はそんなに無くて, 同じのが何度もいろんな形で『発見』される. 」とか言っている人がいました. Hitchin's system も..., と思っている私です.

93. nakajima: Spectral curve (7)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: spectral curve
Date: 22 Dec 1995 11:52:11 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec22115211@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

> この間, 「可積分系の話は Dirichlet の引きだし論法みたいだ. 世の中に可積分な系はそんなに無くて, 同じのが何度もいろんな形で『発見』される. 」とか言っている人がいました. Hitchin's system も..., と思っている私です.

— 塩田さん, 武部さん, どうもありがとうございます.

確かに, 似ていると言えなくもありませんネ.

幾つか気になっていることは,

1. Hitchin's self-duality equation の今まで説明されていないいし, Langlands とどう関係するかもしれないし, しかし nonabelian Hodge で重要な部分, *i.e.*, $F_A + [\Phi, \Phi^*] = 0$ が spectral curve の話しに載るのか? (stability と関係してくるはず..?!)
2. Hitchin's self-duality equation の "いとこ" として, torus からの harmonic map equation というのがあるのですが, これも可積分系的なお話しがあるらしいです. (現在, 幾何の人達とは音信不通なので, 私の知識は数年前のものですが) 武部さんが何回かおっしゃられた Toda 何とかも, そのあたりで確か出てきたことがあったように思います.

94. takebe: Spectral curve (8)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: spectral curve
Date: 23 Dec 1995 07:13:19 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec23071319@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

```
In article <NAKAJIMA.95Dec22115211@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:
```

> 1. Hitchin's self-duality equation の今まで説明されていないいし, Langlands とどう関係するかもしれないし, しかし nonabelian Hodge で重要な部分, *i.e.*, $F_A + [\Phi, \Phi^*] = 0$ が spectral curve の話しに載るのか? (stability と関係してくるはず..?!)

どなたか, nonabelian Hodge theory とは一体なんなのか教えて下さいませんか.

> 2. Hitchin's self-duality equation の "いとこ" として, torus からの harmonic map equation というのがあるのですが, これも可積分系的なお話しがあるらしいです. (現在, 幾何の人達とは音信不通なので, 私の知識は数年前のものですが) 武部さんが何回かおっしゃられた Toda 何とかも, そのあたりで確か出てきたことがあったように思います.

3 年程前かな, お茶大で harmonic maps と可積分系の workshop があって, 何故か私が調和写像の人達 (大仁田先生とか, 塚田先生とか) の前で可積分系の survey talk をしました. (塚田先生→ Kxtsxrx 先生→私という経路で話が来た.) 何をどうはなしたら良いか分からずに, 我ながら支離滅裂な話を 2 回に分けて二日間話しました. その時いた人がいたら, 御免なさい.

確か, Pinkall, Sterling, Bobenko 等がいろいろやっていて, Uhlenbeck の uniton 分解が KP の話の Riemann-Hilbert(-Bruhat -Birkhoff) 分解の話と同じで, 等など. 大仁田先生や東京大の酒川さんも何かされていたと思うのですが, 何分にも専門外ですので.

この話は (♯ いまや本当に当局となられた) 岡本理事長が好きなのですが, 歴史上初めて戸田方程式が現われたのは Darboux の曲面論の中で, ついでにミスプリもある, のだそうです (岡本先生がメッケタとか). 実際, 田中-伊達「KdV 方程式」にも書いてありますが, 負の定曲率曲面の Gauss-Codazzi 方程式を適当な座標で書いてやると, Sine-Gordon 方程式, 今風に言えば $A_1^{(1)}$ 型 Toda field equation, になります. そういう意味では, 微分幾何のこの方面で Toda が現われるのは不思議ではない, といえるでしょう. でも, これが Hitchin's equation と繋がっているかどうかは???

(Harmonic map の方程式も, 計量の符号をちょっと変えれば string の話だから, そういう意味でも可積分系とは繋がっていますが.)

「いとこ」とおしゃっられる意味は?

95. nakajima: 非可換 Hodge 理論 (3)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: spectral curve
Date: 23 Dec 1995 17:16:12 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec23171612@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Dec23071319@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

| どなたか, nonabelian Hodge theory とは一体なんなのか教えて下さいませんか.

既によく知られていることを説明することはあまり意味はないと思うのですが, 論文を読んでくださいというだけでは, あまりに不親切ですので, 出来るだけ簡単に説明します. 参考文献は, [Hit2], [Dona], [Simp1], [Cor] です. 簡潔にまとまっているものとして, [Simp2]. 読む前に勇気づけとして.....

注意. 以下の nonabelian Hodge 理論は, H^1 だけの理論ですので, 本当に nonabelian Hodge と呼ぶべきかどうか意見が分かれるところでしょう.

95.1. 第 1 章. 2 dim. self-duality equation

偏微分方程式を解くときによく使われる手法として, 次元の reduction と呼ばれている方法があります. 解に対称性を仮定して, 定義されている空間の次元を下げるというものです. 通常は, 常微分方程式にまで reduce して解くのですが, 少し発想を変えて, 次元の低い空間上に面白い方程式を定義することを目的にすることがあります.

最初に扱われる微分方程式として, 幾何では 4 次元の (anti)self-duality がよく使われます. これに, 2 次元分の対称性を仮定すると, 次のような方程式になります.

$$[\nabla_1, \nabla_2] = [\Phi_1, \Phi_2], \tag{1}$$
$$[\nabla_1, \Phi_1] = -[\nabla_2, \Phi_2], \tag{2}$$
$$[\nabla_1, \Phi_2] = [\nabla_2, \Phi_1] \tag{3}$$

∇ は G-connection ($e.g.$, $G = U(n)$) で, Φ は Lie 環に値を持つ 1-form です. (x^1, x^2) を $\mathbb{R}^2$ の座標として取りました. $\overline{\partial} = \nabla_1 + i\nabla_2$, $\Phi = \Phi_1 - i\Phi_2$ として, 下の二つの方程式を書きかえると

$$[\overline{\partial}, \Phi] = 0 \tag{4}$$

という, Higgs 場 Φ が正則であるという式が現れます. 式 (1) は,

$$F_\nabla = \frac{1}{2} i[\Phi, \Phi^*] \tag{5}$$

となります. F_∇ は ∇ の曲率です. 式 (5) のみが計量に関係し, 式 (4) は計量とは関係の無い式であることを注意しましょう.

Hitchin は式 (4),(5) が一般のリーマン面で意味を持つことに注意し, それを研究したのです.

注意. $\mathbb{R}^4$ に, signature $(2, 2)$ の計量を入れて, 同じ reduction をした方程式が harmonic map の方程式です. これが 2-d self-duality equ. と harmonic map が "いとこ" であるという意味です.

注意. 他の次元への reduction として, 3-dim, 1-dim へ reduce することも出来ます. 対応する方程式は, monopole equation (or Bogomolny equ.), Nahm's equation と呼ばれています. これらは, 2-dim. self-duality equ. も含めて, 同じ親を持つという意味で "兄弟" といって良いでしょう. ちなみに, 実は, 3-dim と 1-dim への reduction が同一人物であったことが知られています. (cf. Nakajima : Monopoles and Nahm's equation)

95.2. 第 2 章. stability と 偏微分方程式の解の存在 (Hitchin-小林対応)

さて, コンパクトなリーマン面 X 上で 2-dim self-duality equation (4),(5) を考えることにします.

見方を若干変えて, vector bundle を $\overline{\partial}$ によって holomorphic vector bundle であるとし, adjoint bundle の正則な切断 Φ があるとしましょう. すなわち, 式 (4) を満たす解が既に与えられているとしましょう. 実際, このようなものを具体的に作ることや, そのモジュライ空間を調べることが出来ます.

そして, この bundle の hermite 計量 h であって, 計量 h を保つ connection ∇ ($\overline{\partial}^* = \nabla_1 - i\nabla_2$ により, ∇_1, ∇_2 が決まる) が式 (5) を満たすものを探すことにします. すなわち, 式 (4)(5)

を一気に考える代わりに, (4) は分かったと思って, (5) を考えるということです. 実は, 次の定理が成立します.

定理 (Hitchin, Simpson). 簡単のため, bundle E は $c_1(E) = 0$ とする. 式 (5) を満たす計量 h は, 存在すれば "ほぼ" 一意で ("ほぼ" の詳しい説明は略), 存在するための必要十分条件は, $\overline{\partial}$, Φ が Higgs bundle として polystable (*i.e.*, slope μ の互いに等しい stable Higgs bundles の直和) であること.

式 (5) を h に関する偏微分方程式に書き直すと, 非線形楕円型になります. Simpson は, これを熱方程式に直して有限時間では必ず解があることを示し, 時刻が∞のときに解が収束する必要十分条件を調べたのでした.

この種の nonabelian な harmonic theory (すなわち, canonical な計量の存在) は, もともと holomorphic vector bundle のときに Hitchin-小林によって予想されて (小林は, 小林昭七先生), Donaldson, Uhlenbeck-Yau によって証明されました. 他にも, holomorphic vector bundle + subbundle, holomorphic vector bundle + holo. section などの version があります.

注意. gravity version として, Kähler-Einstein 計量の問題があります. 私も複素曲面のときにこれを解こうと努力したのですが, 結局 Tian の前に敗れ去りました. これが "転向" の一因であったのかも知れません. そのときは, ほぼ絶望的かと思われていた高次元の場合も現在 Tian によって解かれつつあります.

95.3. 第 3 章. nonabelian Hodge 理論

Hitchin は, 式 (4)+(5) が, もう一つ別の見方が出来ることに注意しました. (背景には, hyperKähler structure があり, h-connection とも関係があるのですが, 詳しいことは機会を改めることにします.)

それは, $d = \nabla + \Phi + \Phi^*$ を, nonunitary な connection と思うと, 式 (4)+(5) から

$$\text{curvature of } d = d^2 = (\nabla + \Phi + \Phi^*)^2 = 0 \tag{6}$$

が従うということです. そこで, 第 2 章で 式 (4) と (5) に分けたのと同様に

(a) まず, nonunitary flat connection d が与えられていて (*i.e.*, (6))

(b) 計量 g によって d を, skew-hermitian + hermitian に $d = \nabla + (\Phi + \Phi^*)$ と分解すると $\overline{\partial}\Phi = 0$ となる.

と二段階に分けます. このとき, 再び偏微分方程式を解くことによって次が示されます.

定理 (Donaldson, Corlette). (nonunitary) flat connection d が与えられたとしましょう. (b) となる様な計量 g は, 存在すれば "ほぼ" 一意で ("ほぼ"の詳しい説明は略), 存在するための必要十分条件は, d の定める基本群の表現が既約表現の直和であること (すなわち, 半単純であること)

よって, 二つの定理をまとめると,

(A) semisimple な基本群の表現を与える nonunitary flat connection

(B) polystable な Higgs bundle

の間に計量 g, h を通じて対応が与えられたことになります.
これは, いかに幾何を蔑視する私の様な人間でも, なるほどといわざるを得ない結果で, おそらく代数的には証明することが出来ないものです. また, 両者モジュライ空間を考えることが出来ますが, 上の対応は微分同相になります.

注意. hyper-Kähler 構造でいうと, 同じモジュライ空間を複素構造 I と J でそれぞれ見たことになる. 類似で, (B) は Dolbeault cohomology の類似です.

また, (B) には自然な $\mathbb{C}^*$-作用 (Higgs 場をスカラー倍する) がありますが, それは (A) では見えません. しかし, その固定点が variation of Hodge str. になっていることが示されています.
また Hitchin's hamiltonian を (A) の立場で定義することは出来ません.
参考までに有限次元のときの対応物は,

(A) regular semisimple orbit

(B) cotangent bundle of flag manifold

です. これらが微分同相であることは, ad-hoc に分かっていたのですが, それの自然な説明が hyper-kähler 構造で与えられます. hyper-Kähler 構造の存在は Kronheimer による結果です.
また, 最近 M. Vergne が同じアイデアで Kostant-関口対応を説明しました. (Comptes Rendus に出ていた. 詳しい番号は忘れた.) この種の話しは, まだ応用があるかも知れません. ちなみに私は, Kostant-関口対応を理解していないので, 落合さんが説明してくださるとありがたいです.
以上, ここまでお読みくださった方ご苦労様でした.
おかげ様で, 沖縄からずっとお騒がせしていた常微分方程式が合流型超幾何に帰着されましたので, 無事修論が書けそうで何とか卒業出来そうです. それで安心してこの記事を書いています.

96. ochiai: Whittaker over archimedean vs non-archimedean

```
Date: Thu, 21 Dec 95 15:22:18 JST
From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
To: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp
Subejct: Whittaker over archimedean vs non-archimedian
Message-ID: <199512220024.JAA19624@mail.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

沖縄で黒木教授に会い, 私がいろいろ誤解していたことがわかりました. 以下, 私がやっと理解したと思ったところを書きます. ...

96.1. oper はどっち側のものか.

まず oper というのものは geometric Langlands/$\mathbb{C}$ の「automorphic side と Galois side を結び付けるもの」と考えるのではなく「Galois side) そのもの)」と解釈すべきものであるということです. global の時は私にはまだはっきりとはわからないのですが, 特に local の時はここが Galois side そのもので,)「基本群の何とか」の様に) 位相的な対象に言い換えることはしない) できない) という印象を持ちました. すなわち微分方程式 oper を解いて基本群の表現にしてしまうと情報落ちが生ずるはずです.

この解釈がわからなかったので特に不分岐の時に佐武パラメータを拾い出してくる機構がないので困っていたところでした. また Gaudin の様に分岐しているときも, 上の解釈がないとアクセサリパラメータが決まらず, そういうものなのかなあと思っていたところでした.

96.2. big Hecke correspondence.

次に Hecke eigen (oper 3 の[68]項目 7 とそれに対する黒木教授や中島さんの反応, Oct 21 頃) の話です. Hecke operator は本来 local なものであり, アデールでの記述に従えばそれは定義により local なはずです.

($\mathbb{C}$ または $\mathbb{F}_q$ 上の) curve に対応する関数体が, 代数体と顕著に違うのは, どの素点での剰余体も同型という事実です. で, oper 3 での[69]取扱いはそれをすべて合わせて書いていることになっています. 「合わせて」と言ったのは, f は Bun_G への写像であるのに対し h は $\mathrm{Bun}_G \times X$ への写像であり, これは “各 $x \in X$ に対しての Hecke 作用素の作用をすべての x についてまとめて書いた” と解釈するのだと教わりました.

ここに X がついていることと, 考えているオブジェクトが Bun_G 上 global に与えられていることから, 私はこのオペレーションが global なもののように錯覚し, いろいろな誤解を生じました. 上の説明にあるように, これは local なオペレーションをまとめて書いたに過ぎません. 従って通常のものに合致しているということになるのでしょう.

ただしまだ良くわからないことがあって, 黒木教授の Oct 22 の記事[70]の最後にあるようにそのときの Hecke eigen sheaf $V_{\lambda,\rho}$ を決めるのには, oper のデータよりも粗い, 基本群の表現 ρ だけが必要なようです. で, そうすると oper の local な情報を保持していないわけです.) 不分岐なところでは何をしていることになるのだろうか.) これが私が 1 で理解したことと合致しないので困っています.

96.3. microweight.

10 月の時点では microweight の定義も例もないのですがその後フォローはあったでしょうか? fundamental weight が全部 micro weight になってしまえば黒木教授の Oct 21 の「な

[68]* 第 3 節 (p. 9)
[69]* 第 3 節 (p. 9)
[70]* 第 11 節 (p. 20).

るほど!」[71]によって, 定理 3 からすべての weight λ に対して予想)Hecke eigen property) が成り立ってしまうでしょう. そこで「fundamental weight の一部が microweight」と考えるのが穏当ではないかと思われます. 関係あるかどうかわかりませんがミニュスキュール weight(つづりがわからん[72]) は, やはり fundamental weight の一部です. 確か A 型の時は全部で, その他の型の時はごく一部だったように思います.

それから microweight の定義で H_λ が閉というのが定義ですか? これは (よくわからないけど) ずいぶん強い条件に見えますね. 必ずしもこれが閉でなくても M_λ が proper direct image そのものということは有り得ると思うのだが. 中島さんの言うとおり Schubert cell と同じならそういうことが起こってもいいから.

96.4. Whittaker function.

Whittaker 関数が 2 通りの意味に用いられていることについて Whittaker 函数という関数は特殊関数をし (っ) ている人に取っては不確定特異点をもつ微分方程式の解という印象があります. で, 確かに実数体上の $GL(2)$ で計算するとその意味での Whittaker 函数が現れます. 一方, 賢島での藤原氏の話でもあったのですが $GL(2)$ の Drinfeld の第 2 の構成というストーリーの中に Whittaker sheaf というものが現れます. たぶん Edward Frenkel の q-alg の第 6 章がそれに関係すると思われます. (賢島の時点で藤原氏が Frenkel の記事を見ていなかったとしたらその話をしたことはとても驚きなのですが.) しかしこの Whittaker という名称は, 上の (実数体での) コンテクストの中では奇異な印象を与えると思います.

非アルキメデス体上の場合にも Whittaker 函数の概念は同じ表現論的な設定で導入されました. (驚くべきことに) Whittaker 函数はある dominant な領域以外では 0 になっていて (アルキメデスの時は急減小ではあるが, ぴったり 0 ではない), その領域では有限次元表現の指標を用いて書くことができます《明示公式》. これは加藤信一さんと Casselman(-Shalika) の 1970 年代後半の結果[73]です. そしてここに L 群が登場します.

アルキメデスの時は, 高いランクの時には明示公式は期待できないし本当に " ランクの高い特殊函数" が現れてそのようなきれいな関係式は期待できないと思われています. ...

もう一つ今月に入ってから黒木教授が Kostant 流の Whittaker 関数についての解説を書かれています. (まだほとんど読んでいないのですが.) これは Drinfeld-Sokolov reduction

---

71* 第 9 節 (p. 17).

72* Kenkyusha's New English-Japanese Dictionary によると:

> **majuscule** *n.* 大文字 (large letter)(特に古写本に用いられた頭文字または uncial 文字). — *adj.* 大文字 (頭文字または uncial 文字) の [で書いてある] (cf. *minuscule*).
>
> **minuscule** *n.* (古写本) の小文字 (7 世紀に uncial から発達し現代のローマ・ギリシャ小文字の基となった); 〚印刷〛 小文字 (lowercase letter). — *adj.* 小文字の [で書いた] (cf. *majuscule*).
>
> **uncial** *adj.* アンシャル文字の (cf. *cursive*). — *n.* アンシャル字体 (紀元 4 〜 9 世紀に用いられた大文字体 (majuscules) とも異なりその後の小文字草書体 (minuscules). とも異なる一種の丸みのある手書体); その字体で書かれた写本 [稿本].

73* 文献 [CS].

の toy model としての解説と思いますが, real(complex) 特有の話と思います. ですから (普通の)Whittaker 函数に近い話です. この両者の間に関係はあるのでしょうか.

96.5. ρ の役割.

oper 4 に[74] gradation がでてきます. 半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の巾零元全体 $\mathcal{N}$ は G の adjoint 作用に関して有限個の軌道に分かれます (Jordan 標準形). 特に $\mathcal{N}$ には (一つだけ) open dense な orbit Ω が存在します.

一般に $\mathfrak{g}$ の巾零元 E に対して, それを「E」とするような sl_2-triple $\{E, F, H\}$ が存在します. しかも G_E 共役を除いて一意. これを Jacobson-Morozov といいます.

特に E が上で定めた Ω に入っているとき (つまり "generic な" 巾零元であるとき) を考えましょう. このとき H は regular で, すなわち $\mathfrak{g}$ の中での H の centralizer $h = Z_{\mathfrak{g}}(H)$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra になります. そこで (g, h) に関するルート系が考えられます. そして E が positive part $\mathfrak{n}$ に (従って F が negative part $\mathfrak{n}_-$ に) 入る様な三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ が一意に存在しこれによって positive root system が一意に決まります. dual ルート系の正ルートの和 $2\rho^\vee$ は Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ の元ですがそれは $H \in h$ と一致します.

oper 4 で[75] $\mathfrak{g}$ に導入されている $\mathbb{Z}$-gradation は $\mathfrak{g}$ に自然に入っている Q-gradation (Q は root lattice) を $Q(\subset \mathfrak{h}^*) \to \mathbb{Z}$ (右側の矢印は $\rho^\vee$ で evaluate する) でつぶしたものに他ならないのです.

96.6. 主系列表現

黒木さんの辞書 ver0.1 (Oct. 20)[76] の第 5 項目に脇本 module の説明がありますが, そこに

> 「主系列表現とは Borel.... admissible 表現を作ることができない」

という記述があります. 理由 (というより原因) を教えて下さい. 初めは何となく納得したつもりで通り過ぎてしまったのですが, やっぱりよくわからない. つまり

(あ) $(G/B)(\mathbb{F}_q)$ は有限集合, $(G/B)(\mathbb{C})$ は無限集合. だけど $(G/B)(\mathbb{C})$ だってコンパクトだ.

(い) p-adic のときは群で話をしていて affine のときは Lie 環で話をしているよなあ.

などと思っているのです.

admissible でないというのは「大きすぎる」ということでしょうか? vacuum の作り方を見ると Borel からいきなり affine Lie 環へ induce up しないで, 一旦 $\mathfrak{g}[[t]]$ を経由してそ

[74]* 第 14 節 (p. 26).
[75]* 第 14 節 (p. 26).
[76]* 第 13 節 (p. 22).

こから affine Lie 環へ induce up しています. Borel から $\mathfrak{g}[[t]]$ へ induce up するのは有限次元の $\mathfrak{b}$ から $\mathfrak{g}$ へ induce up するのと同じ (つまり classical の Verma module を作っている) なので, 一般には既約ではない. そこで vacuum のときはその Verma module の既約な quotient(今の場合は trivial 表現) のみを取り出して来てこれを使って affine へ誘導しています. こういう操作を他のパラメータにしても足りないのだろうか, 足りないんでしょうねえ. わからないい.

97. nakajima: oper はどっち側のものか (1)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: from Dr. Ochiai
Date: 22 Dec 1995 12:00:29 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec22120029@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <199512220024.JAA19624@mail.ms.u-tokyo.ac.jp>
ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai) writes:
```

> **96.1. oper はどっち側のものか.**
> まず oper というのものは geometric Langlands/$\mathbb{C}$ の「automorphic side と Galois side を結び付けるもの」と考えるのではなく「Galois side(そのもの)」と解釈すべきものであるということです. global の時は私にはまだはっきりとはわからないのですが, 特に local の時はここが Galois side そのもので,(「基本群の何とか」の様に) 位相的な対象に言い換えることはしない (できない) という印象を持ちました. すなわち微分方程式 oper を解いて基本群の表現にしてしまうと情報落ちが生ずるはずです.

今, 非常に忙しいので (修論を書かなければいけないのと, string duality の論文が気になってしょうがないのの二つ)oper の理解が深まったわけではないのですが,

$(h = 0)$-oper は, Galois side でなくて, automorphic side のものではないでしょうか? $h = 0$ のときは, 微分作用素でなくて Higgs 場になりますから. そして, automorphic side と Galois side はパラメータ h を通じて繋がっている. しかし, この部分は今ひとつ自信がありません.

少なくとも nonabelian Hodge で stable Higgs bundle と基本群の既約表現を繋げるときは, パラメータ h を通じて繋がっていると言ってもそれ程はずしてはいないと思います.

98. kuroki: oper はどっち側のものか (2)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: from Dr. Ochiai
Date: 23 Dec 1995 04:45:54 JST
```

Message-ID: <KUROKI.95Dec23044554@take.math.tohoku.ac.jp>

In article <NAKAJIMA.95Dec22120029@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:

> (h=0)-oper は, Galois side でなくて, automorphic side のものではないでしょうか? $h = 0$ のときは, 微分作用素でなくて Higgs 場になりますから. そして, automorphic side と Galois side はパラメータ h を通じて繋がっている. しかし, この部分は今ひとつ自信がありません.

私は "Galois side" のものだと考えています.
Beilinson-Drinfeld の program を表にすると以下のような感じになるのだと思います:

	Galois side	automorphic side
quantum	moduli space of opers	Hecke eigen $\mathcal{D}$-modules
classical limit	base sp. of Hitchin's fibr.	char. var. $\subset \pi^{-1}(0)$

さらに,

- 0-opers の moduli space は Hitchin's fibration の base space と同一視できる[77].
- opers の moduli space の str. ring の gr は 0-opers の moduli sp. の str. ring に自然に同型になる.

でしたから, 0-oper は "classical limit of Galois side" に住んでいると言えるわけです.
しかし, 上のプログラムには出発点から悩みがあって,

(1) opers の moduli sp. の次元は connection の moduli sp. の半分しかない.

(2) opers は connection 以上の情報を含んでいる.

などについてどのように考えたら良いのでしょうね?

99. nakajima: oper はどっち側のものか (3)

From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: from Dr. Ochiai
Date: 23 Dec 1995 17:38:41 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec23173841@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.95Dec23044554@take.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:

[77] shitan.math の内部ではまだ未解決

> 私は “Galois side” のものだと考えています.
> Beilinson-Drinfeld の program を表にすると以下のような感じになるのだと思います:
>
> | | Galois side | automorphic side |
> |---|---|---|
> | quantum | moduli space of opers | Hecke eigen $\mathcal{D}$-modules |
> | classical limit | base sp. of Hitchin's fibr. | char. var. $\subset \pi^{-1}(0)$ |

これは, 私には納得しきれません. Galois side にあるものの classical limit であることは認めますが... 極限もまだ Galois side にあると思っていいのか? まあ, 結局両者が同じであると言うのが Langlands 対応ですから, どこにいるのかを分けること自体, 意味があるのか分かりませんが...

> しかし, 上のプログラムには出発点から悩みがあって,
>
> (1) opers の moduli sp. の次元は connection の moduli sp. の半分しかない.
>
> (2) opers は connection 以上の情報を含んでいる.
>
> などについてどのように考えたら良いのでしょうね?

(2) は, bundle の reduction の情報ですよね. 本当により以上なのか

$$(h\text{-})\text{oper の moduli} \to (h\text{-})\text{flat connection の moduli}$$

の写像の “generic” fiber の様子と像の様子が知りたいと, 前の記事で質問して以来ペンディングになってます.

generic には injection で, Lagrangian に入っているとすると, 私の理解もまあまあということなのですが.... ($\pi^{-1}(0)$ とは直交するように入っている.)

100. nakajima: oper はどっち側のものか (4)

From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: from Dr. Ochiai
Date: 23 Dec 1995 22:36:12 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec23223612@ume.math.tohoku.ac.jp>

In article <NAKAJIMA.95Dec23173841@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:

> これは, 私には納得しきれません. Galois side にあるものの classical limit であることは認めますが... 極限もまだ Galois side にあると思っていいのか?

私の理解の範囲では答ははっきり Yes です. classical limit を取るという簡単な操作で Galois side から automorphic side に移ることができるというような簡単な問題ではないと思います.

> まあ, 結局両者が同じであると言うのが Langlands 対応ですから, どこにいるのかを分けること自体, 意味があるのか分かりませんが...

どこで, Galois side と automorphic side が繋がっているかというのは, 結構はっきりしています. local な場合は Feigin-Frenkel による次の結果を使うところで繋がっています.

"定理": $U^* = \operatorname{Spec}\mathbb{C}((z))$ であるとし, $\mathfrak{g}$ は finite dim. complex simple Lie algebra であるとし, $\mathfrak{g}^L$ はその Langlands dual であるとする. このとき, 無限次元 Poisson 多様体の間の自然な同型

$$\operatorname{Op}_{\mathfrak{g}^L}(U^*) \simeq \text{“}\operatorname{Spec} Z_{-h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}})\text{”}$$

が存在する. ここで, 左辺の $\operatorname{Op}_{\mathfrak{g}^L}(U^*)$ は punctured disk U^* 上の $\mathfrak{g}^L$-opers の moduli space であり, 右辺の $Z_{-h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}})$ は $\mathfrak{g}$ に対する affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ の universal enveloping algebra を $K + h^\vee$ で生成される ideal で割ったものの "適切な完備化" の center である. K は $\hat{\mathfrak{g}}$ の canonical central element であり, $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の dual Coxeter number を表わす.

ここで, 微妙なのは無限次元の Poisson 多様体をどのように扱うかであり, それに付随して, 右辺の "$\operatorname{Spec} Z_{h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}})$" の意味を明確にする必要があります. 左辺の $\operatorname{Op}_{\mathfrak{g}^L}(U^*)$ は $U = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[[z]]$ と置くとき,

$$\operatorname{Op}_{\mathfrak{g}^L}(U^*) = \bigcup_D \operatorname{Op}_{\mathfrak{g}^L,D}(U)$$

と表わせます. (Beilinson-Drinfeld はこれが成立するように定義した.) ここで, $\operatorname{Op}_{\mathfrak{g}^L,D}(U)$ は U の finite subscheme D に特異点を持つ $\mathfrak{g}^L$-oper の moduli space であり, その各々は無限次元 affine scheme で表現可能 (なはず) です. だから, $\operatorname{Op}_{\mathfrak{g}^L}(U^*)$ は無限次元 affine scheme の inductive limit であるということになります.

上の "定理" のちゃんとした定式化と証明が書いてある文献を私は見たことがありません. 文献を挙げるとすれば E. Frenkel の Thesis しかありません. そこに書いてある内容は簡単に追えるようなものではないし, 上の "定理" の定式化との間にも距離があります. 私には Beilison-Drinfeld による oper の話よりも, 上の "定理" の方が難しいことのように感じられます.

global な場合は次の結果が成立するらしいのですが, これも証明を見たことがありません.

"定理": X は connected complete smooth curve over $\mathbb{C}$ であるとし, G は connected and simply connected な complex simple algebraic group であるとし, その Langlands dual を G^L と表わす. X 上の principal G-bundle の moduli space を $\operatorname{Bun}_G(X)$ と表わし, その上の determinant line bundle を ω と表わす[78]. $\operatorname{Bun}_G(X)$ 上の $\omega^{1/2}$ に作用する diff. op. の層を $\mathcal{D}_{\omega^{1/2}}$ と表わす. G^L-oper の moduli space を $\operatorname{Op}_{G^L}(X)$ と表わす. このとき, 以下が成立する:

(1) $\mathcal{D}_{\omega^{1/2}}(\operatorname{Bun}_G(X))$ は可換環になる.

[78]* ω は $P \in \operatorname{Bun}_G(X)$ における fiber が $\bigwedge^{\max} H^0(X, \mathfrak{g}_P) \otimes \bigwedge^{\max} H^1(X, \mathfrak{g}_P)^*$ に canonical に同型な line bundle.

(2) 次の自然な同型が存在する:

$$\mathrm{Op}_{G^L}(X) \simeq \mathrm{Spec}\,\mathcal{D}_{\omega^{1/2}}(\mathrm{Bun}_G(X)).$$

特に $\mathrm{Op}_{G^L}(X)$ の closed point と $\mathcal{D}_{\omega^{1/2}}(\mathrm{Bun}_G(X))$ の maximal ideal は一対一に対応している.

特異点 D 付きでの定式化もできるはずですが, 定式化されているのを見たことがありません. (sheaf of tdo の作り方については, 今年の夏に数理研で話した内容を講究録に書きました.)

> > しかし, 上のプログラムには出発点から悩みがあって,
> >
> > (1) opers の moduli sp. の次元は connection の moduli sp. の半分しかない.
> >
> > (2) opers は connection 以上の情報を含んでいる.
> >
> > などについてどのように考えたら良いのでしょうね?
>
> (2) は, bundle の reduction の情報ですよね. 本当により以上なのか
>
> $$(h\text{-})\text{oper の moduli} \to (h\text{-})\text{flat connection の moduli}$$
>
> の写像の “generic” fiber の様子と像の様子が知りたいと, 前の記事で質問して以来ペンディングになってます.

この辺は, 私も何度もこだわっている oper の同型類の空間の主等質空間としての記述の内容を明確に理解すれば答が出そうです.

> generic には injection で, Lagrangian に入っているとすると, 私の理解もまあまあということなのですが....($\pi^{-1}(0)$ とは直交するように入っている.)

上の写像の有限次元の場合での類似 (Kostant の定理) は

$$(f + \mathfrak{b})/N \simeq f + V \hookrightarrow \mathfrak{g}$$

の合成ですからこれは明らかに単射です. $f + V$ が Lagrangian がどうかはこの場合どういうことなのかわかりませんが, $\pi^{-1}(0) = \{\text{nilpotent elements}\}$ との交わりは $\{f\}$ の一点になります.

これを見ると中島さんの言っていることは正しそうに思えます.

101. nakajima: 非可換 Hodge 理論 (4)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: spectral curve
```

```
Date: 24 Dec 1995 09:14:36 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec24091436@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Dec24034808@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> 有難うございました. どうも名前で脅かされていたようで, 中島先生他のお話しでちらちらと部分的には伺っていた事でした. (このようにまとめて頂いて話の各部の全体としての関係が初めて分かりましたが.)「名前」でまとめられると, 本質を簡潔に表したり, sensational な効果もありますが ($\sharp$ 「量子群」は後者だ!), 途中から話にはいるのが難しくなる副作用もあると感じました.

誤解がないように, 一言だけ.

前回の話しでは, 一番本質的な偏微分方程式を解くところを省略しています. 偏微分方程式の可解性という解析的性質と, stability という代数幾何的な性質が結び付くことが大変深いわけです. 私は, 非線形楕円型微分方程式がこれほどきれいに解明された例を他に知りません. (通常, 解析は解析で閉じてしまう.)

ただ素人に説明するときは, そこの部分は説明できないので, ああ説明せざるをえないのです.

> でも, 中島先生のこの記事は素人の私には非常に分かりやすかった. 年明けに図書室が再開したら Simpson を見てみます. この前, h-oper の考え方が Simpson にある, とおっしゃっていた時の論文がこれですか. (まだ check していない事を懺悔致します `f^^);;`)

h-oper でなくて h-connection です.

> > おかげ様で, 沖縄からずっとお騒がせしていた常微分方程式が合流型超幾何に帰着されましたので, 無事修論が書けそうで何とか卒業出来そうです. それで安心してこの記事を書いています.
>
> `#` 修論とは何のネタですか???
> `#` 沖縄にいかなかった僕はどうせ ... !

$$
\begin{aligned}
SU(k+1)\text{-monopole} \quad &\longleftrightarrow \quad \text{solution of Nahm's equation} \\
&\longleftrightarrow \quad \text{rational map } \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^k
\end{aligned}
$$

という対応を作る話しです. monopole $\to$ solution of nahm's equation 以外はできました. ($SU(2)$ のときに Hitchin, Donaldson がやった. 私は, monopole $\to$ nahm の別証明を昔与えました.) Nahm $\to$ monopole のときに線形常微分方程式系を解く必要がでてきたのでした.

この話しにも spectral curve が出てくるはずなので, そのへんも調べられたら面白かったのですが, もう時間がありません.

沖縄では, 常微分を maple でいじっていたのでした. 上の話しははじめて公開しました.

102. takebe: 点付き opers の moduli space (13) (oper 10++)

第 87 節 (p. 124) へのフォロー.

From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Oper No.10
Date: 24 Dec 1995 09:37:37 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec24093737@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Oper No.10
Date: 26 Dec 1995 03:31:05 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec26033105@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

最初に, 今まで黙っていた記号の事を白状します. 実は, Beilinson and Drinfeld は主等質空間としての $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y)$ 等は, “Op” の下に underline をいれています. 始めの内は主等質空間の話は避けて通れるかと思っていたので, ここではわざわざ $\underline{\mathrm{Op}}$ とかするのもバカバカしいと省略していました. 混乱しないように注意して話を進めて来たつもりですが, この記号, うまく書ければそれに越した事は無い. アイディアがあったらお願いします.

(L,η) に対応する $\mathfrak{g}$-oper は $(F,\nabla+\eta)$ である.

ここで, L : Sturm-Liouville 型微分作用素 $= sl(2)$-oper, η は黒木さんの書かれたように,

> この疑問に答えてくださる方にとって便利なように η が住んでいる空間 $V_D^{\mathfrak{g}}(Y)$ の定義を復習しておきましょう. $V_D^{\mathfrak{g}}(Y)$ は次のように定義されたのでした:
>
> $$V_{k,D}^{\mathfrak{g}}(Y) := V_{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes H^0(Y, \Omega^k(kD)), \qquad V_D^{\mathfrak{g}}(Y) := \bigoplus_k V_{k,D}^{\mathfrak{g}}(Y).$$
>
> ここで, k は m_j+1 ($j=1,\dots,\operatorname{rank}\mathfrak{g}$) を走ります. V_{m_j} はこの記事の始めの方で定義しました. (これで良いのですよね?)

です. ただし, 今は特異点 D の事はとりあえず忘れましょう. (後で戻って来ますから, 御心配無く.)

$sl(2)$-oper L から誘導して G_{ad}-bundle F と接続 ∇ を作りましたが, ここで η が $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{T}_Y, \mathfrak{b}_F)$ に入っている事が分かれば, $\nabla+\eta$ という新しい接続ができます. これで (L,η) に $\mathfrak{g}$-oper $(F,\nabla+\eta)$ をに対応させる訳です.

$\therefore \eta$ が $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{T}_Y, \mathfrak{b}_F)$ に入っている事, つまり, $V^{\mathfrak{g}}(Y)$ が $H^0(Y, \mathfrak{b}_F \otimes \Omega)$ に含まれる事が言えれば良い.

(F_0, ∇_0) が L に対応する $sl(2)$-oper でしたが, V は $\mathfrak{b}$ の B_0 不変部分空間でしたから (B_0 は $PGL(2)$ の上半三角行列全体) V_{F_0} は $\mathfrak{b}_{F_0} = \mathfrak{b}_F$ に含まれる. ところで, B_0 の V への作用は, B_0 の対角線の所だけから決まり, 特に, V_k への作用を良く見ると, (oper No.7 参照[79]) 結局

$$V_{F_0} = \bigoplus_k (V_k \otimes \Omega^k).$$

V_k 上には $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ は $(a/c)^k$ で作用している, つまり, Cartan の作用だけ. ところで, oper No.7 で出て来たように, $g \mapsto a/c$ と F_0 に対応する line bundle は canonical に Ω と同型という訳です. まとめると, めでたく

$$V^{\mathfrak{g}}(Y) = H^0(Y, V_{F_0} \otimes \Omega) \subset H^0(Y, \mathfrak{b}_F \otimes \Omega^k).$$

この対応 $(L, \eta) \mapsto (F, \nabla)$ が bijective である, という事は, ($\mathfrak{g}$-oper には non-trivial 自己同型が無い事が分かっているので,) local に次のように示します.
B-bundle は local に trivialization を取って, 接続 ∇ を

$$\frac{d}{dz} + q, \qquad q_{-\alpha}(z) \neq 0 \quad \text{for simple root } \alpha \text{ and for any } z$$

としておきます. そのとき, B-bundle の自己同型で接続を

$$b^{-1}\left(\frac{d}{dz} + q\right) b = \frac{d}{dz} + q' \qquad (b:\ B\text{-valued funtion})$$

と移して q' が $y + V$ ($\{x, y, h\}$ は $sl(2)$-triple であり $V = \operatorname{Ker} \operatorname{ad} x$) に含まれるようにできることを言えば良い. これは, (例えば)

$$\mathfrak{b} = h \exp(B_1 + B_2 + \cdots), \qquad h \in \text{Cartan}, B_k \in g_k,$$

として, recursive に $h, B_1, B_2, \ldots$ と決めていけば良い. これは,

$$\mathfrak{g} = (\operatorname{Im} \operatorname{ad} y) \oplus V \quad (\text{存在}), \qquad (\operatorname{Ker} \operatorname{ad} y) \cap \mathfrak{b} = 0 \quad (\text{一意性})$$

だから可能.
さて, 点付きの場合は, どうなるかと言うと oper No.5 で[80]定義した点付き oper を

$$\mathrm{Op}_{\mathfrak{g},D}(Y) \to \mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y - D)$$

で写した時にその像が主等質空間として定義したもの (cf. 第 72 節 (p. 103)) と一致する事が言いたい.

[79]* 第 50 節 (p. 68).
[80]* 第 23 節 (p. 38).

これも, 上の bijection になる事と同じような手口で示します. やはり, local に考えて, D は $f=0$ で定義されているとしよう. 上の議論とほぼ同じなのですが, 今度は 2 段階. Y 上の正則 B-値関数 b で,

$$b^{-1}\left(f\frac{d}{dz}+q\right)b = f\frac{d}{dz}+q'$$

と gauge 変換して, q' が $y+V$ に入るようにする. 次に, $Y-D$ 上の正則 B 値関数 g で,

$$g^{-1}\left(\frac{d}{dz}+\frac{q'}{f}\right)g = \frac{d}{dz}+q''$$

で q'' が $y+V$ に入るようにする. g は $PGL(2)\to G$ での

$$\begin{bmatrix} f & df/dz \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

の像である事が分かり, $\mathfrak{g}_k$ 成分を見てやると,

$$q''_k = f^{-k-1}q'_k, \qquad q''_1 = f^{-2}\left(q_1 + z\left(\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dz^2}f + \frac{1}{4}\left(\frac{df}{dz}\right)^2\right)\right)$$

となるので, q''_k は $\mathfrak{g}_k\otimes H^0(Y,\mathcal{O}_Y((k+1)D))$ に入る事が分かる.
こんなところで如何でしょうか.

103. kuroki: Whittaker function

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: from Dr. Ochiai
Date: 24 Dec 1995 10:25:51 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec24102552@tsuru.math.tohoku.ac.jp>

In article <199512220024.JAA19624@mail.ms.u-tokyo.ac.jp>
TAKEBE Takashi <takebe@ms.u-tokyo.ac.jp> writes:
```

> ```
> From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
> Subejct: Whittaker over archimedian vs non-archimedian
> ```
>
> 今月に入ってから黒木教授が Kostant 流の Whittaker 関数についての解説を書かれています. (まだほとんど読んでいないのですが.) これは Drinfeld-Sokolov reduction の toy model としての解説と思いますが, real(complex) 特有の話と思います. ですから (普通の)Whittaker 函数に近い話です. この両者の間に関係はあるのでしょうか.

その辺の詳しいことを教えてもらうと嬉しいのですが⋯.

Kostant の論文 [Kos2] によると, Whittaker vector = $\mathfrak{n}$-invariant vector[81] が「全ての表現空間は函数空間である」という哲学[82]を経由すると, Whittaker function に化けるという筋道になっているようです.

104. kuroki: Wakimoto module vs principal series (1)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: from Dr. Ochiai
Date: 24 Dec 1995 11:37:10 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec24113710@tsuru.math.tohoku.ac.jp>

In article <199512220024.JAA19624@mail.ms.u-tokyo.ac.jp>
TAKEBE Takashi <takebe@ms.u-tokyo.ac.jp> writes:
```

> ```
> From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
> Subejct: Whittaker over archimedian vs non-archimedian
> ```
>
> **96.6. 主系列表現**
> 黒木さんの辞書 ver0.1 (Oct. 20) の第 5 項目に脇本 module の説明がありますが, そこに
>
> 「主系列表現とは Borel.... admissible 表現を作ることができない」
>
> という記述があります. 理由 (というより原因) を教えて下さい.

まず, 色々な言葉 (Borel, admissible, etc) の意味をはっきりさせる必要があります.

p-adic group の話における Borel subgroup, Iwahori subgroup に対応するものを loop algebra $L\mathfrak{g} := \mathfrak{g}((z))$ でも考えることができます. $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の Borel subalgebra とする. $L\mathfrak{b} = \mathfrak{b}((z))$ を $L\mathfrak{g}$ の Borel subalgebra と呼び, z に 0 を代入することによって得られる写像 $\mathfrak{g}[[z]] \to \mathfrak{g}$ による $\mathfrak{b}$ の逆像を $L\mathfrak{g}$ の Iwahori subalgebra と呼ぶ.

Iwahori subalgebra は Kac-Moody Lie algeba の表現論において有限次元単純 Lie 環における Borel subalgebra の役割を果たしています. しかし, ここでは, Iwahori を Borel と呼ぶことはしないということにします.

次に loop algebra $L\mathfrak{g}$ の admissible 表現を定義しましょう. V は $L\mathfrak{g}$ の任意の表現であるします. $L\mathfrak{g}$ には自然に z-adic linear topology が入っています. $\mathfrak{k}$ は $L\mathfrak{g}$ の linearly compact open subalgebra を動くものとし,

$$V^{\mathfrak{k}} := \{\, v \in V \mid \mathfrak{k}v = 0 \,\}, \qquad V^{\infty} := \bigcup_{\mathfrak{k}} V^{\mathfrak{k}}$$

81* 正確には relatively $\mathfrak{n}$-invariant vector.

82 もちろん Kostant の論文ではそのようなあやしげな言い方はしていない.

と置きます. V^∞ を V の smooth 化と呼ぶことにし, $V = V^\infty$ が成立するとき, V は smooth であると言うことにします. V が admissible であるとは, V が smooth でかつ任意の $V^{\mathfrak{k}}$ が有限次元になることであると定義します. V が smooth もしくは admissible であることを check するためには, $\mathfrak{k}$ として $\mathfrak{k}_m = z^m\mathfrak{g}[[z]]$ $(m \geq 0)$ のみを考えれば十分です.

p-adic reductive group G の表現論では, Borel subgroup B の既約表現から induce される表現は admissible になります. そのときの要点は, 誘導表現は G 上の函数空間として実現するのですが, G 上の函数として G のある compact open subgroup K の G への右作用で invariant なもののみを考えることです. (実はこの辺のことを真面目に勉強したことはない. 誘導表現が admissible になることの要点はこれで良いのですよね?)

これの単純な類似の一つ目は次のようなものです. まず, Borel $L\mathfrak{b}$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_\lambda$ を考えます. そして,

$$\widetilde{V}_\lambda = U(L\mathfrak{g}) \otimes_{U(L\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda, \qquad V_\lambda = \widetilde{V}_\lambda^\infty = (\widetilde{V}_\lambda \text{ の smooth 化})$$

によって $L\mathfrak{g}$-module V_λ を定義します. しかし, この定義をそのまま追うと, $V_\lambda = 0$ という trivial な結果を得てしまいます. なぜなら, $\mathfrak{b}$ と反対側の maximal nilpotent subalgebra $\mathfrak{n}_-$ を取ると, $L\mathfrak{n}_-$-module として $\widetilde{V}_\lambda$ は rank 1 の free module であるから, その全ての vector は 0 でない $z^m\mathfrak{n}_-[[z]](\subset \mathfrak{k}_m)$ の元の作用で消えることはありません. つまり, このやり方で誘導表現を定義するのは不適切です.

そこで, 今度は群上の函数空間を考えたことの類似を考えることにしましょう. .... ちょっと眠くなってきたので省略します.

結論だけを $G = SL(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = sl(2,\mathbb{C})$ の場合に述べると次のようになります. G の subgroups B_-, N を次のように定める:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix}, \right\} \qquad N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

G の flag variety $B_-\backslash G$ 内の $o = B_-$ を通る N-orbit $o\,N$ を U と書くことにする. 今の場合は $U \simeq N = \mathbb{C}$ である. U の loop 化 $LU = \mathbb{C}((z))$ は大雑把に見ると $\mathbb{C}$ の無限個の直積である. その「半分」である $\mathbb{C}[[z]]$ に台を持つに値を持つ超函数の空間を形式的に定義しそれを $\mathcal{F}$ と書く. LU に座標を z^{-m} の係数 x_m を考えることによって入れると, 形式的に $\mathcal{F}$ は

$$P\left(x_0, x_{-1}, \dots; \frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \dots\right) \delta(x_1, x_2, \dots)$$

の全体であると定義される. ここで, $P(..;..)$ は微分作用素であり, $\delta(..)$ はデルタ函数である. 以下, $v = \delta(x_1, x_2, \dots)$ と書く. E, F, H は sl_2 の standard basis であり, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$X(\zeta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X z^m \zeta^{-m-1}$$

と置く[83]. 実は, 任意の $\lambda(z) \in \mathbb{C}[[z]]^* = z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]\,dz$ に対して, $\mathcal{F}$ における affine Lie algebra

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}((z)) \oplus \mathbb{C}K \qquad (\mathbb{C}K \text{ の部分は loop algebra の central extension})$$

の critical level の表現で

$$H(\zeta)v = \lambda(\zeta)v$$

をみたすものを構成することができる[84]. この表現を $W_{\lambda(z)}$ と書くことにする. これが, critical level における Wakimoto module である. (正確には Wakimoto module の quotient.)

注意: Wakimoto module についていくつかコメントしておこう:

- $\hat{\mathfrak{g}}$ の $W_{\lambda(z)}$ への作用を微分作用素の形で具体的に書き下すこともできる. リクエストがあれば書いても良いがここでは省略した.
- $\lambda(z)$ の全体は $\mathfrak{b}[[z]]$ の 1 次元表現全体をパラメトライズする.
- $\lambda(z)$ が generic なとき $W_{\lambda(z)}$ は irreducible になる.
- loop algebra $L\mathfrak{g}$ ではなくその central extension $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現ができてしまうのは「くりこみ」が必要なためである.
- Wakimoto module の構成ついての詳しい証明については (上のような定式化にはなってませんが…), [Kur1] およびそこで引用してある Feigin-Frenkel の論文を見てください.

後の方はかなりイーカゲンな説明になってしまいましたが…. こんなもんで落合さんの疑問に答えることができたでしょうか?

105. nakajima: 0-oper as Higgs bundle (1)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: 0-oper as Higgs bundle
Date: 24 Dec 1995 19:59:59 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec24195959@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

[83]* $Xz^m \in L\mathfrak{g} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ と考える.
[84]* この節の用語法に従うと, この表現 (Wakimoto module のある quotient) は smooth であるが admissible ではない.

何回か 0-oper のモジュライが Higgs 場のモジュライにどのように入っているか教えて欲しいと言っていました. 実は, 自分で「これではないのかなあ」という候補もあったのですが, 忙しさもあり深く考えていなかったので誰か他の人が考えてくれるのを待っていたのでした. しかし, 他の人が私の方向で考えてくれることを求めるのはあまりに身勝手なので, アイデアだけは述べることにします. この先, どなたか考えてくれることを期待します.

$G = SL(2)$ とします. (他のときは考えていない. どなたか higher rank のときに考えてください.)

$K^{1/2}$ を リーマン面の標準束のルートとします.

Higgs 束の重要な例として, 次のものがあります. (Hitchin: Self-duality....[85]の p. 66 Example (1.5) を見てください)

$$E = K^{1/2} \oplus K^{-1/2}, \qquad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで, $\mathrm{Hom}(K^{1/2}, K^{-1/2}) \otimes K =$ trivial bundle は, canonical な section 1 を持つことに注意してください.

重要性は次で分かります. stable であることは簡単にチェック出来るので, Donaldson, Simpson の定理により 2-dim. self-duality equation の解になるような計量があるのですが, 上の bundle の分解は直交分解になり, $K^{1/2}$ の計量はリーマン面上の曲率 -4 の計量を induce します. (定曲率であることが重要. uniformization theorem の別証明を与えています.)

注意. Kähler-Einstein metric of negative Ricci curvature が Seiberg-Witten monopole equation の解を定めたことと似ているといえば似ています.

実は, 上の Higgs 束は, モジュライの中で極めて特別な点になっています. Higgs 場 Φ をスカラー倍することによって, $\mathbb{C}^*$-作用が定まっていましたが, このとき上の点は固定点になっているのです. 実際,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ですから, (E, Φ) と $(E, t\Phi)$ はゲージ同値です.

$\mathbb{C}^*$ 作用の固定点は他にもあって, 例えば $\Phi = 0$ は bundle のモジュライであり, この近傍では, Higgs 束のモジュライは bundle のモジュライの余接束になっています. 他の固定点は

$$E = L \oplus L^* \qquad (\text{L は直線束}),$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \phi \text{ は } \mathrm{Hom}(L, L^*) \otimes K = \mathrm{Hom}(L^2, K) \text{ の 0 でない} \\ \text{切断, 0 でないことは stability からの要請} \end{pmatrix}$$

[85]* 文献 [Hit2].

となっています. (Hitchin: Prop. (7.1) の証明参照)
上を見ると, 次の意味で最初の例は特別であることが分かります.

1. 0-oper の要請 ϕ が至る所 0 でないためには $L^2 = K$, すなわち $L = K^{1/2}$ でなければならない. (ほんとは, $K^{1/2}$ の取り方の任意性があるので, 最初に取った $K^{1/2}$ と同じであるかどうかは分からない. ここは詳しく考えていません.)

2. $L = K^{1/2}$ のときは, ϕ の取り方は定数倍を除いて unique である. 他の場合は, 必ず次元がある.

さて, $G = SL(2)$ のときの 0-oper とは, $0 \subset L \subset E$ という line bundle と rank 2 bundle with $\bigwedge^2 E \simeq \mathcal{O}$ と Higgs 場

$$\Phi = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

で c が至る所消えないものの組みでした.
このとき,

予想. $\mathbb{C}^*$-作用で $t \to 0$ としたときの極限が, 上に述べた例になっているものが 0-oper に他ならない.

E は $L \otimes L^*$ と分かれているとは限らないので, 以下の議論はいいかげんで証明になっていないのですが,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ta & t^2 b \\ c & td \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

であることからなんとなくいいのではないでしょうか?
次元を勘定します. 前に Hitchin hamiltonian π の 0 の逆像が Lagrangian であることの議論を思い出してやると, 最初の例における tangent space は正の weight を持つ空間たちの直和であり, 丁度 Higgs 束のモジュライの半分になっています. また, Hitchin hamiltonian をここに制限してやれば同型になっていることは, ほぼ大丈夫かと思います. (詳細チェックせず) また, $\pi^{-1}(0)$ との交点は, おそらく $E = K^{1/2} \oplus K^{-1/2}$ だけでしょう.
rank 2 の場合でも, $\deg E = 1$ のときは今の議論はうまくいかないと思います. それは, 最初の例 $E = K^{1/2} \oplus K^{-1/2}$ がないこと, fixed point で 0 次元になるものがないこと..... $SO(3)$-oper と考えるやり方を私は全く考えていませんので, どなたか考えてください.
また, 以上の議論を h-oper のときにそのまま拡張することは出来そうもありません. 前にも言ったとおり, $\mathbb{C}^*$-作用は h-connection では見えないのです. hyperKähler structure を使わなければいけないのでしょうか????

106. nakajima: 0-oper as Higgs bundle (2)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
```

Subject: Re: 0-oper as Higgs bundle
Date: 25 Dec 1995 11:50:46 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec25115046@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <NAKAJIMA.95Dec24195959@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:

> 何回か 0-oper のモジュライが Higgs 場のモジュライにどのように入っているか教えて欲しいと言っていました. 実は, 自分で「これではないのかなあ」という候補もあったのですが, 忙しさもあり深く考えていなかったので誰か他の人が考えてくれるのを待っていたのでした. しかし, 他の人が私の方向で考えてくれることを求めるのはあまりに身勝手なので, アイデアだけは述べることにします. この先, どなたか考えてくれることを期待します.

今日, 電車の中で考えていたら $G = SL(2)$ の場合には, $K^{1/2}$ の取り方の問題を除いてすべて解決しました. やはり, もう少し考えてから投稿すれば良かった. 恥ずかしい....

以下, metric とは関係ない話しですので gauge 群とか gauge 変換と言ったら, $\mathrm{End}(E)$ の C^∞-section で逆があるものとします.

定義. 0-oper を次のように定義する:

> さて, $G = SL(2)$ のときの 0-oper とは, $0 \subset L \subset E$ という line bundle と rank 2 bundle with $\bigwedge^2 E \simeq \mathcal{O}$ と Higgs 場
>
> $$\Phi = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
>
> で c が至る所消えないものの組みでした.

約束. (E, Φ) を 0-oper の underlying な Higgs bundle といいます. (あとで, 実は underlying でないことが分かる.)

$\det E = \mathcal{O}$ より $E/L = L^*$ ですから, E は次の extension で与えられます.

$$0 \to L \to E \to L^* \to 0$$

更に, Φ が $L \to L^* \otimes K$ に induce する写像が至る所消えないことから, $L = L^* \otimes K$, *i.e.*, $L = K^{1/2}$. (ここで, $K^{1/2}$ の取り方の問題がある).

例. Higgs 束の重要な例:

> Higgs 束の重要な例として, 次のものがあります. (Hitchin: の p. 66 Example (1.5) を見てください)
>
> $$E = K^{1/2} \oplus K^{-1/2}, \qquad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
>
> ここで, $\mathrm{Hom}(K^{1/2}, K^{-1/2}) \otimes K = \text{trivial bundle}$ は, canonical な section 1 を持つことに注意してください.

命題. (E,Φ) が 0-oper の underlying な Higgs bundle である為の必要十分条件は, $(E,t\Phi)$ の gauge 同値類が $t\to 0$ のとき上の例に収束することである.

証明. E を C^∞-bundle として $K^{1/2}\oplus K^{-1/2}$ と分解すると,

$$\overline{\partial}_E=\begin{bmatrix}\overline{\partial}_{K^{1/2}} & \beta \\ 0 & \overline{\partial}_{K^{-1/2}}\end{bmatrix}$$

と書ける. β は, $\mathrm{Hom}(K^{-1/2},K^{1/2})$ に値を持つ $(0,1)$-form である. (extension class in $H^1(\mathrm{Hom}(K^{-1/2},K^{1/2})$ の representative になる.) このとき, gauge 変換

$$\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & t\end{bmatrix}$$

をしてやると,

$$\begin{bmatrix}\overline{\partial}_{K^{1/2}} & t\beta \\ 0 & \overline{\partial}_{K^{-1/2}}\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}ta & t^2b \\ c & td\end{bmatrix}$$

となります. よって $t\to 0$ のとき例の Higgs bundle に収束する.
逆の証明は, 1-parameter 部分群 $\mathbb{C}^*\to$ (gauge 群) をとれば, weight 分解として L が見えてくる. (詳細略) □

命題. 0-oper の underlying な Higgs bundle は, Higgs bundle として stable である.

証明その 1. stability は open condition である. 例が stable であることは容易にチェック出来るので, t 十分小のときは $(E,t\Phi)$ は stable である. よって, (E,Φ) も stable. □

証明その 2. $M\subset E$ を stability condition に反するような $\deg M\geq 0$ で Φ で保たれる line subbundle とせよ.

$$M\hookrightarrow E\twoheadrightarrow E/K^{1/2}=K^{-1/2}$$

の合成を考えると, $\deg K^{-1/2}=1-g<\deg M$ より 0 でなければならない. よって M の像は $K^{1/2}$ に入っている必要がある. ところが,

$$\Phi: K^{1/2}\to (E/K^{1/2})\otimes K=K^{-1/2}\otimes K$$

は同型であったから, $\Phi(M)\subset M\otimes K$ となることは不可能である. 矛盾. □

系. 0-oper の underlying な Higgs bundle の自己同型は trivial なものしかない. (stable Higgs bundle の一般論より, 証明は容易.)

命題. $K^{1/2}$ は E の canonical destabilizing subbundle (名前は, これでいいのか忘れてしまいました. Harder-Narashimhan filtration で出てくる E の “一番大きい”subbundle です.)

証明. $L\subset E$ が $\deg L\geq 0$ であるとすると, 上の命題の証明その 2 より L は $K^{1/2}$ に入っていなければならない. よって $K^{1/2}$ が一番大きい. □

系. 0-oper の同型類は, underlying な Higgs bundle の同型類で定まる. *i.e.*, (E, Φ) と (E', Φ') が互いに同型な 0-oper の underlying Higgs bundle であるとすると, $K^{1/2}$ の入り方, すなわち Borel への reduction も同型.

よってめでたく, 0-oper のモジュライ空間が semistable Higgs bundle のモジュライ空間の subvariety として実現されました.

また, $\mathbb{C}^*$-作用で例に収束するような Higgs bundle の集合として実現されましたので, $\mathbb{C}^*$-作用に関する一般論によりアファイン空間と同型であることも分かります.

> rank 2 の場合でも, $\deg E = 1$ のときは今の議論はうまくいかないと思います. それは, 最初の例 $E = K^{1/2} \oplus K^{-1/2}$ がないこと, fixed point で 0 次元になるものがないこと..... $SO(3)$-oper と考えるやり方を私は全く考えていませんので, どなたか考えてください.
> また, 以上の議論を h-oper のときにそのまま拡張することは出来そうもありません. 前にも言ったとおり, $\mathbb{C}^*$-作用は h-connection では見えないのです. hyperKähler structure を使わなければいけないのでしょうか????

この部分は, まだ解決してませんのでどなたかよろしく.

107. ochiai: On a notation $A_{\mathfrak{g}}(X)$ in oper2 vs oper3 (1)

```
From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
Newsgroups: shitan.math
Subject: On a notation A_g(X) in oper2 vs oper3
Date: Mon, 25 Dec 95 09:58:58 JST
Message-ID: <9512250058.AA04555@rkmath.rikkyo.ac.jp>
```

中島さんの返事 (Dec 22)[86]を見ていて僕は, ことの初めから少々誤解していたことに気がつきました. 「Notation の問題」だといいのですが. 非常に古い話を蒸し返します. (もう解決済みか?)

oper2 (Oct 15)[87] の 5.4 節 (または oper5 の 5.3 節のいちばん最後) に

$\mathrm{gr}(A_{\mathfrak{g},D}(X))$ は $\mathrm{Hitch}_{\mathfrak{g},D}(X)$ の座標環と同型

とあり, 一方 oper3 (Oct 18)[88] の 3 節に

$\mathrm{gr}\, A_{\mathfrak{g}}(X) = B_{\mathfrak{g}}(X)$

とあります. この両者は (点つきかどうかを除いては) 同じことを言っているんですよね? つまり, 私の質問の論点は何かと言うと, oper2 では

[86]* 第 97 節 (p. 139)
[87]* 第 2 節 (p. 7).
[88]* 第 3 節 (p. 9).

> $\underline{\mathfrak{g}}$-oper 全体を $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(Y)$ と書きその座標環を $A_{\mathfrak{g}}(X)$ の様に書いている.

一方, oper3 では

> $\underline{\hat{\mathfrak{g}}}$-oper 全体のなす多様体の座標環を $A_{\mathfrak{g}}(X)$ としている.

つまり dual になっている. (武部さんは $\hat{\mathfrak{g}}$ で $\mathfrak{g}$ に対応する affine Lie 環ではなくて $\mathfrak{g}$ の dual Lie algebra を表している.) 非常に細かいことですが, この差異は単なるタイプミスなのでしょうか?

で, oper3 の文脈だとこの同型 $\mathrm{gr}\, A_{\mathfrak{g}}(X) = B_{\mathfrak{g}}(X)$ のところで Feigin-Frenkel を使う (つまり dual group が出てくる, non-trivial なステップ) ということですよね.

中島さんの言われる

> $h = 0$ の時は ($h = 0$)-oper は微分作用素ではなくて Higgs 場である

というのは Dec 19 頃のやりとりをとりあえず勉強してみます. 点つきに固有の話だと思ってこの辺も飛ばしていたのです.

一晩寝かせておいてみたのですが, わからない.

oper2 に紹介してある [BD1] の目次を見ると [BD1] では dual group が出てくるところを全然扱っていないように見えます. ということは automorphic side か Galois side かどちらか (一方) でしょうねえ.

わかっている人には古い話の誤植をあげつらっているように見えるかもしれませんが, 僕は今, 深刻な混乱に陥っていて困っています. 済みませんが助けてください.

108. nakajima: On a notation $A_{\mathfrak{g}}(X)$ in oper2 vs oper3 (2)

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: On a notation A_g(X) in oper2 vs oper3
Date: 25 Dec 1995 14:45:15 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec25144515@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <9512250058.AA04555@rkmath.rikkyo.ac.jp>
ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai) writes:
```

> 中島さんの返事 (Dec 22) を見ていて僕は, ことの初めから少々誤解していたことに気がつきました. 「Notation の問題」だといいのですが. 非常に古い話を蒸し返します. (もう解決済みか?)

> わかっている人には古い話の誤植をあげつらっているように見えるかもしれませんが, 僕は今, 深刻な混乱に陥っていて困っています. 済みませんが助けてください.

シンポジウムと違って, 行ったり来たりしながら理解していくことが出来ることが, ニュースでの議論の利点ではないでしょうか? 数学では, 先に進むと前のことが分かったり, 分かっていたと思っていたことが実は分かっていなかったと判明したり.

黒木教授はどう考えているのか分かりませんが, shitan.math は, シンポジウム以外に研究連絡が出来るかどうかの実験のつもりで参加させていただいてます. 落合さんやその他の方ににいろいろ質問していただければ, 大変有益と思います. (さっき, 藤★さんが帰ったら内★さんに聞いてみますと言ってましたので, そのうち参加されることを期待しましょう.)

> 中島さんの言われる
>
> $h = 0$ の時は $(h = 0)$-oper は微分作用素ではなくて Higgs 場である
>
> というのは Dec 19 頃のやりとりをとりあえず勉強してみます. 点つきに固有の話だと思ってこの辺も飛ばしていたのです.

takebe: oper No.5 により[89], h-oper は $\nabla(fs) = f\nabla s + hs \otimes df$ を満たすので, $h = 0$ のときは微分作用素でなく, 掛け算作用素です.

何度も言っているように h-connection の定義は, Simpson の ICM の Proceeding に載っている. Deligne が考え付いたらしい.

> 一晩寝かせておいてみたのですが, わからない. oper2 に紹介してある [BD1] の目次を見ると [BD1] では dual group が出てくるところを全然扱っていないように見えます. ということは automorphic side か Galois side かどちらか (一方) でしょうねえ.

少なくとも, takebe: Oper. No 10 において, “曖昧模糊” という言葉が出てくるあたりにおいて Langlands dual が現れています. 曖昧模糊と, Ginzburg の論文の紹介を黒木教授に振ることで忙しくて内容は理解してなかったことがたった今分かりました.

109. kuroki: On a notation $A_{\mathfrak{g}}(X)$ in oper2 vs oper3 (3)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: On a notation A_g(X) in oper2 vs oper3
Date: 25 Dec 1995 17:13:47 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec25171347@tsuru.math.tohoku.ac.jp>

In article <9512250058.AA04555@rkmath.rikkyo.ac.jp>
ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai) writes:
```

> 非常に細かいことですが, この差異は単なるタイプミスなのでしょうか?

いえ, タイプミスではないはずです.

[89]* 第 23 節 (p. 38).

Oper 2 は[90] Beilinson-Drinfeld の "Opers" [BD1] の方の目次であり, Oper 3 の方は[91] "Quantization of Hitchin's fibration and Langlands program" [BD2] の方の概説です.

"Opers" の方は Galois side の object である opers の一般論の展開を真面目に行なったものであり, "Quantization of ..." の方は全体のプログラムの概要を 3 ページにまとめた原稿のようです. (手許に実物がないので本当のところはわからないのだが….)

> で, oper3 の文脈だとこの同型 $\mathrm{gr}\, A_{\mathfrak{g}}(X) = B_{\mathfrak{g}}(X)$ のところで Feigin-Frenkel を使う (つまり dual group が出てくる, non-trivial なステップ) ということですよね.

$\mathrm{gr}\, A_{\mathfrak{g}}(X) = B_{\mathfrak{g}}(X)$ 自身の証明に Feigin-Frenkel の結果を使う必要はないと思います.

$\hat{\mathfrak{g}}$ は affine Lie algebra の記号とまぎらわしいので, Langlands dual を $\mathfrak{g}^L$ と書くことにします. $\mathfrak{g}^L$-oper を扱うために, G は simply connected であるとしておきます. (このとき, G^L は adjoint type になるので $\mathfrak{g}^L$-oper = G^L-oper.)

$A_{\mathfrak{g}}(X)$ は X 上の $\mathfrak{g}^L$-oper の moduli $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}^L}(X)$ 上の函数環であり, $B_{\mathfrak{g}}(X)$ は G に対する Hitchin's fibration の base space 上の函数環でした.

$\mathfrak{g}$ の rank を r と書き, $\mathfrak{g}$ の exponents の全体を $m_1, \dots, m_r$ と書くことにする. G に対する Hitchin's fibration の base space は次のように表わせます:

$$(*) \qquad \bigoplus_{j=1}^{r} H^0(X, \Omega_X^{m_j+1}).$$

一方, $\mathfrak{g}^L$ の exponents の全体も $m_1, \dots, m_r$ に等しくなるので, Beilinson-Drinfeld の "Opers" によると, $\mathfrak{g}^L$-oper の moduli space は同じベクトル空間 $(*)$ 上の主等質空間になります. (ただし, $\mathfrak{g}^L$ 内の generic sl_2-triple の取り方は決めておかねばならない.) 函数環の gr を取ることは, 原点をどこに取るのか忘れる操作になっているはずで, 以上のような筋道で

$$\mathrm{gr}\, A_{\mathfrak{g}}(X) \simeq B_{\mathfrak{g}}(X)$$

が証明できるはずです.

> oper2 に紹介してある [BD1] の目次を見ると [BD1] では dual group が出てくるところを全然扱っていないように見えます. ということは automorphic side か Galois side かどちらか (一方) でしょうねえ.

Beilinson-Drinfeld による未発表の論文 "Opers" [BD1] の方は, Galois-automorphic duality にあたる部分を全く扱っていません. "Opers" は Galois side only の話です.

常識的には, "Opers" の話を automorphic side に繋げる部分が論理的に難しい部分であろうと想像するのですが, その目次を見る限りその部分に "Opers" は全く触れてないように見えます.

別記事にも書きましたが, 2 つを繋げる部分は Feigin-Frenkel による結果の global version である以下の Beilinson-Drinfeld の "定理" です:

[90]* 第 2 節 (p. 7).
[91]* 第 3 節 (p. 9).

$\mathfrak{g}^L$-opers の moduli space は principal G-bundle の moduli の上の canonical line bundle の平方根に作用する global differential operators の ring (可換になる) の Spec と同一視できる:

$$\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}^L}(X) \simeq \mathrm{Spec}\,\mathcal{D}_{\omega^{1/2}}(\mathrm{Bun}_G(X)).$$

```
# shitan-math.tex が A4 にぎっしり印刷して 130 ページを越えた!
# 途中ですが今日印刷して武部さんに送る用意をします.
# 今日の分を入れると 140 ページ位になるかな?
```

110. kuroki: On a notation $A_{\mathfrak{g}}(X)$ in oper2 vs oper3 (4)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: On a notation A_g(X) in oper2 vs oper3
Date: 26 Dec 1995 00:15:33 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec26001533@tsuru.math.tohoku.ac.jp>
```

さらに補足します. (Oper 3 の[92]復習です.)

G に対する Hitchin's fibration π の base space を

$$\mathrm{Hitch}_G(X) = \bigoplus_{j=1}^{\mathrm{rank}\,G} H^0(X, \Omega^{m_j+1}).$$

と書くことにします. 大事な点は Langlands dual に移っても exponents $m_1, \dots, m_r$ は変化しないので, 次の等式が成立するということでした:

$$(**) \qquad \mathrm{Hitch}_{G^L}(X) = \mathrm{Hitch}_G(X)$$

fibration は違っていても base space の方は同じものになるのです.

これは, $\mathfrak{g}$ および $\mathfrak{g}^L$ に non-deg. invariant symmetric bilinear form を固定すると

$$\mathfrak{g}//G \simeq \mathfrak{h}//W \simeq \mathfrak{h}^*//W = \mathfrak{h}^L//W^L \simeq \mathfrak{g}^L//G^L$$

が成立することの類似であると言って良いと思います.

質問 1. Hitchin's fibration は群 G が simply connected であるとか, adjoint type であるとか, そういうことには関係無しに完全可積分になるのですよね? 証明はどの文献を見れば書いてあるのでしょうか?

等式 $(**)$ の "量子化" を構成するというのが問題です. Beilinson-Drinfeld は以下のように考えたのだと思います.

[92]* 第 3 節 (p. 9)

まず, $(**)$ の左辺の $\mathrm{Hitch}_{G^L}(X)$ の "量子化" として opers を考える. 実際, Beilinson-Drinfeld は "Opers" [BD1] で次が成立することを証明したようです.

定理 1. $\mathfrak{g}^L$-oper の moduli space を $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}^L}(X)$ と書くと, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}^L}(X)$ は non-singular affine variety になり, ある vector space の主等質空間としての記述を持つ. そこで, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}^L}(X)$ 上の函数環を $A_{\mathfrak{g}^L}(X)$ と書くことにする. このとき, $A_{\mathfrak{g}^L}(X)$ には自然な $\mathbb{Z}$-gradation が入り, 次の自然な同型が存在する:

$$\mathrm{Spec}\left(\mathrm{gr}\, A_{\mathfrak{g}^L}(X)\right) \simeq \mathrm{Hitch}_{G^L}(X).$$

ここで, $A_{\mathfrak{g}^L}(X)$ と書きましたが, この記号法は Beilinson-Drinfeld の "Quantization of ...." [BD2] とは違っています.

一方, $(**)$ の右辺の量子化としては, $\mathrm{Bun}_G(X)$ 上の differential operators の ring であると考えます. G に対する Higgs bundle の moduli space $\mathrm{Higgs}_G(X)$ を principal G-bundle の moduli space $\mathrm{Bun}_G(X)$ の contangent bundle であると思うのです.

質問 2. $T^*\mathrm{Bun}_G(X) \subset \mathrm{Higgs}_G(X)$ となっているのだと思いましたが, $\mathrm{Higgs}_G(X) - T^*\mathrm{Bun}_G(X)$ の codimension は 2 以上であるというようなことは証明されているのでしょうか?

ここで, non-trivial な点は diff. op. の ring として採用するのは, $\mathrm{Bun}_G(X)$ 上の canonical line bundle ω の平方根に作用する twisted diff. op. (tdo) の ring を採用することです. 以下, そのような tdo の sheaf を次のように書くことにします:

$$\mathcal{D}' := \mathcal{D}_{\omega^{1/2}} \qquad (\text{sheaf of tdo on } \mathrm{Bun}_G(X)).$$

このとき, Beilinson-Drinfeld の "Quantization of ...." [BD2] によると以下が成立するらしい.

疑問. 証明は?

定理 2. $\mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X))$ は可換環になり, 次の自然な同型が存在する:

$$\mathrm{Spec}\left(\mathrm{gr}\,\mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X))\right) \simeq \mathrm{Hitch}_G(X).$$

定理 3. G は simply connected であると仮定する. (定義より $\mathfrak{g}^L$-oper $=$ G^L-oper となる.) このとき, 等式 $(**)$ および定理 1, 定理 2 における同型と compatible な次の同型写像が存在する:

$$\phi : A_{\mathfrak{g}^L}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X)).$$

この最後の同型が $(**)$ の "量子化" になっているわけです. この定理 3 の証明には Feigin-Frenkel の結果が使われるはずです.

疑問. Beilinson と Drinfeld は Feigin-Frenkel の結果を「厳密な数学」として理解しているのだろうか…?

この定理を使うと, $\mathfrak{g}^L$-oper に対して, $\mathcal{D}'$-module を対応させることができます. $\mathfrak{g}^L$-oper の同型類は $A_{\mathfrak{g}^L}(X)$ の maximal ideal と一対一に対応しています. $\mathfrak{g}^L$-oper $\xi = (F, \nabla)$ に対応する maximal ideal を $\mathfrak{m}_\xi$ と書き, $\mathcal{D}'$-module E'_ξ を次のように定めます:

$$E'_\xi := \mathcal{D}'/\mathcal{D}'\phi(\mathfrak{m}_\xi).$$

この E'_ξ に $\omega^{-1/2}$ を tensor することによって, $\mathrm{Bun}_G(X)$ 上の $\mathcal{D}$-module を作ることができます. それを E_ξ と書くことにします.

定理 4. E_ξ は holonomic であり, その characteristic variety は G に対する Hitchin's fibration π の 0-fiber $\pi^{-1}(0)$ に含まれている.

予想. E_ξ は connection ∇ に関する Hecke eigenvalue property を満たすであろう.

以上が, Beilinson-Drinfeld [BD2] で立てられたプログラムとそこで主張されている定理の一部です. (論文の実物は手許にないのですが, 武部さんの解説で以上のことがわかりました.)

111. ochiai: Whittaker function over p-adic, supplement

第 96 節 (p. 135) への補足.

```
From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Whittaker function over p-adic, supplement
Date: Mon, 25 Dec 95 14:35:32 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec25161637@tsuru.math.tohoku.ac.jp>
```

111.1. Whittaker 函数, 補足

書いたり消したりしていたので肝心の結論なしで出してしまったようです. 言いたかったことは

- 初めはアルキメデスの時の気持ちで Whittaker と呼ばれた.
- 非アルキメデスの時にも同じように定義した.
- 非アルキメデスの時は明示公式が得られた.
- (元の定義は忘れて) 明示公式の方を用いて幾何化 (層での実現) した.

この明示公式はある意味で非常に奇妙なもので, dual group がでてきます.

Whittaker 函数は $G = KAN$ 上の函数で左から K で不変 (面倒だから今 spherical な時だけしましょう) で右から N のある character に従い, $Z(\mathfrak{g})$ のある無限小指標 λ に従う

(Casimir の固有函数ということ, $SL(2)$ なら). 岩澤分解 $G = KAN$ によって A 上の値でその函数は決まる. これを書いてみようというのが明示公式.

黒木教授の Cartan 分解 (Oct 21) によれば代表系は $A(F)/A(\mathcal{O}) = (G$ の coweight 全体$) = (\widehat{G}$ の weight 全体$)$ と成るのでその上の値を決めればよい[93]. ここで記号は $F = \mathbb{C}((t))$, $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]]$, A は (そこでは T と書かれている) maximal (split) torus.

さて $Z(\mathfrak{g})$ の無限小指標と言うのは p-adic の時は佐武パラメータ λ のことである. それは $\mathrm{Hom}(A(F)/A(\mathcal{O}), \mathbb{C}^\times)$ の Weyl 群同値類の中に住んでいる. ということは dual group $\widehat{G}$ の半単純共役類を一つ定めることになる. (これらの説明は黒木教授が書きます.)

佐武パラメータ λ の G 上の Whittaker 函数を W_λ と書くことにしよう. 知りたいのは $\mu \in (\widehat{G}$ の weight 全体$) = A(F)/A(\mathcal{O})$ での値 $W_\lambda(\mu)$ である.

明示公式: $W_\lambda(\mu)$ は μ を highest weight に持つ $\widehat{G}$ の有限次元既約表現の指標の $\lambda \in \widehat{G}$ での値に等しい[94]. 特に μ が dominant でなければ $W_\lambda(\mu) = 0$.

つまり, 上手に λ と μ の役割が入れ替わっているのですよね. p-adic の人にとっては Whittaker 函数は「分かりやすいもの」の様です.

111.2. Jacobson-Morozov 補足

E を $\mathfrak{g}$ のべき零元とすると sl_2-triple $\{E, F, H\}$ が存在しそれは G_E (G の E での stabilizer) 共役を除いて一意. だから O を $\mathfrak{g}$ のべき零軌道とすると O の元を E とするような sl_2-triple $\{E, F, H\}$ の semisimple part H は G-共役を除いて well-defined である. つまり

$$\text{べき零軌道 } O \quad \mapsto \quad \text{半単純軌道 } \mathrm{Ad}(G)H$$

なる写像ができる. (今は関係ないかもしれないが, これは単射.)

112. ochiai: Wakimoto module vs principal series

```
From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Wakimoto module vs principal series
Date: 26 Dec 1995 04:50:52 -0000
Message-ID: <9512260442.AA05381@rkmath.rikkyo.ac.jp>
```

黒木さん, Wakimoto module についての説明 (Dec 24, 02:37)[95]ありがとうございます. ただ, 私の聞きたいことはもう少しあるのです.

その記事の用語の使い方で Iwahori の 1 次元表現からの誘導 (またはその quotient) は

[93]* ここで, $\widehat{G}$ は G の Langlands dual group である. Langlands dual はこのノートでは他にも G^L, $G^\vee$ のように表わされている. ${}^L G^0$ と表わされることもある.

[94]* 式で書くと, $W^G_\lambda(\mu) = \mathrm{ch}^{\widehat{G}}_\mu(\lambda)$.

[95]* 第 104 節 (p. 148).

(a) admissible にならない.

(b) admissible にはなるが個数が足りない.

(c) (a), (b) のいずれでもない.

のどれでしょう.
(b) と書いた意味は, その記事の注意の 2 番目を見ると Wakimoto module はパラメータが $\mathfrak{b}[[z]]$ の一次元表現全体, つまり $\mathfrak{h}[[z]]^*$ あるわけですが Iwahori の 1 次元表現は $\mathfrak{h}^*$ しかありませんから, そうかなあと思ってみたのです.
でも不思議なんだよなあ.

$$\text{Wakimoto module} \,/\, \text{affine Lie algebra}$$
$$\longleftrightarrow \text{主系列表現} \,/\, p\text{-adic group}$$

と黒木教授の辞書 (Oct 20)[96]の 5 節にあります.
我々のすべき作業は

> Hecke eigen な保型函数 (表現) に対して各素点で Hecke 環の固有値を集めて L 函数を作る. それを Galois side で作られた L 函数と比較する.

ということでした.
p-adic の時の主系列表現の役割はいろいろあるでしょうが, その文脈で見ると,

> 保型表現はほとんどの素点で (不分岐) 主系列表現である. そういう表現に対しては Hecke 環の作用の固有値は佐武同型で与えることができる.

といっていいでしょう.
そうすると p-adic の時に比べて affine Lie algebra の時は不分岐な素点で local に異常にたくさんの情報を持っているように見えるのです. どっちか (例えば automorphic side) のみが異常にたくさんの情報を抱えていることは許されないでしょうから何か僕の理解できないことが起こっているらしい.

113. kuroki: Wakimoto module vs principal series (3)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Wakimoto module vs principal series
Date: 27 Dec 1995 19:29:33 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec27192933@ume.math.tohoku.ac.jp>

In article <9512260442.AA05381@rkmath.rikkyo.ac.jp>
ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai) writes:
```

[96]* 第 13 節 (p. 22).

> その記事の用語の使い方で Iwahori の 1 次元表現からの誘導 (またはその quotient) は
>
> (a) admissible にならない.
>
> (b) admissible にはなるが個数が足りない.
>
> (c) (a), (b) のいずれでもない.
>
> のどれでしょう.

この記事の `References:` にある最初の記事において, loop Lie algebra の表現が smooth である (admissible である) の定義を私は書きましたが, あの定義が正しいものなかかどうかについてはまだ議論の余地があります. その点を留保した上で, 先の記事の用語法に従います.

上の質問に対する答は以下の通りです. loop Lie algebra に制限して考えると後の話の都合上問題が生じるので, affine Lie algebra

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}((z)) \oplus \mathbb{C}K$$

に関する質問であると解釈して答えることにします.

Iwahori subalgebra の 1 次元表現から induce された $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現は, $\hat{\mathfrak{g}}$ を Kac-Moody algebra of affine type とみたときの Verma module のことです. affine Lie algebra の Verma module は, 先の私の記事の用語法に従えば, smooth ですが admissible ではありません. $\mathfrak{k}_1 = z\mathfrak{g}[[z]]$ の作用で消える空間の大きさは少なくとも $\mathfrak{g}$ の Verma module の分だけあるので, admissibility の定義における有限次元性の条件が崩れているのです.

Verma module の irreducible quotient が admissible であるかどうかは, highest weight の取り方によって決まります. affine Lie algebra の Verma module の highest weight は level という central extension の部分の作用を決める複素数 k (level) と $\mathfrak{g}$ の weight $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の組 (k, λ) によって決まります. Verma module の irreducible quotient が admissible になるための必要十分条件は λ が $\mathfrak{g}$ の dominant integral weight になることです. (level k は関係ない.)

ちなみに, Wakimoto module においても事情は Verma module と同様です. (Wakimoto module の formal character は Verma module のそれに等しい.) 先の記事を書いたときにはすでに寝惚けた状態になっていたので, この辺の事情をほとんど意識せずに記事を書いてしまいました.

$\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}K$ の有限次元表現を $\mathfrak{g}[[z]] \oplus \mathbb{C}K$ の表現に持ち上げ, それをさらに $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現に induce up したものは admissible になります. このように, 先の私の記事の用語法に従うと, $\mathfrak{g}$ の表現として有限次元のものから induce されるようなものしか admissible にならないので, この用語法が「正しい定義」なのかどうかはしばらく疑いの目を持って見つめた方が良いでしょう. いずれにせよ, affne Lie algebra の表現論は, p-adic group や Lie 群の表現論に比べると全く未発達な状態です.

問題. Affine Lie algebra の admissible 表現を定義し, admissble 表現を分類せよ. そのとき, admissible 表現論は, p 進群や Lie 群の表現論に似たものにならなければいけない. ま

た, Langlands program over $\mathbb{C}$ に役に立つものでなければいけない.

さて. ここで, affine Lie algebra の表現論における少々微妙でかつ大変重要な点に触れることにします. Kac-Moody algebra の文脈で affine Lie algebra が定義されるときには, loop algebra に central extension を付け加えるだけでなく, $z\frac{d}{dz}$ も affine Lie algebra の中に含めてたものを考えます. しかし, 今まで, 私が affine Lie algebra と言った場合には $z\frac{d}{dz}$ を含まないものを意味しています. この 2 つの定義の違いは, level k が critical でないときには本質的なものではありませんが, level k が critical value ($=$ −dual Coxeter number $= -h^\vee$) のときには大きな違いが生じてしまいます. 例えば, 次が成立しています:

(1) affine Lie algebra の定義として $z\frac{d}{dz}$ を含むものを採用するとき (Kac-Moody 流), Verma module の irreducible quotient は常に一意的に存在する.

(2) affine Lie algebra の定義として $z\frac{d}{dz}$ を含まないものを採用するとき (上の $\hat{\mathfrak{g}}$ の定義), level が critical でないとき Verma module の irreducible quotient は一意的だが, level が critical のとき Verma module の irreducible quotient は全く一意的ではない!

この (2) は critical level における $\hat{\mathfrak{g}}$ の enveloping algebra の “completion” の center $Z = Z_{-h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}})$ が大きくなることに関係しています. ($U(\hat{\mathfrak{g}})/(K-k)$ の “completion” の center を $Z_k(\hat{\mathfrak{g}})$ と書いた.) 大雑把に言えば Z の 1 次元表現の取り方ごとに Verma module の異なる irreducibel quotient ができるのです. (これはかなり大雑把な言い方. Verma module ごとに Z の作用の形は制限される.)

この事実が次の質問に直接関係していることは明らかでしょう.

> (b) と書いた意味は, その記事の注意の 2 番目を見ると Wakimoto module はパラメータが $\mathfrak{b}[[z]]$ の一次元表現全体, つまり $\mathfrak{h}[[z]]^*$ あるわけですが Iwahori の 1 次元表現は $\mathfrak{h}^*$ しかありませんから, そうかなあと思ってみたのです.

正確に言うと次が成立しています:

> $\mathfrak{h}[[z]]^*$ の generic な元と Wakimoto module の generic な highest weight とその irreducible quotient の組は一対一に対応している.

(証明を書いてある文献はないが, Kac-Kazhdan conj. の証明の一般化として証明できるはず.) $\mathfrak{h}^*$ の分が critical level における Wakimoto module の highest weight を決定し, 残りの部分がその quotient の取り方を指定するパラメーターになります. $\mathfrak{h}[[z]]^*$ の元は上記の center Z の 1 次元表現を決めるパラメーターになっています. (これも大雑把な言い方. 実際には微妙な問題が色々ある.) 有限次元の場合における Harish-Chandra isom. に似た状況になっているのです.

この辺の事情は “automorphic side over $\mathbb{C}$” において非常に大事なことなので, もっと詳しく説明するべきことかもしれませんが, 結構しんどい話なので, 今回はここまでということにします. ($\mathfrak{g} = sl(2)$ の場合に詳しい式と計算を提示してみれば納得できることです.)

ついでに述べておくと, affine Lie algebra の表現論を他の表現論の類似で理解するときには次のことに注意しなければいけません. まず, $\mathbb{C}((z))$ を p 進体の類似物と見たときには,

p 進代数群の表現論との類似であると思うことができます. しかし, Lie algebra を扱うことは, むしろ $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ 上の代数群の表現論における Harich-Chandra module の話との類似と見なければいけません. 上の方で center Z や Harish-Chandra isom. の類似が出てくるところなどは, p 進代数群の言葉では理解できません.

> でも不思議なんだよなあ.
>
> $$\text{Wakimoto module} \,/\, \text{affine Lie algebra}$$
> $$\longleftrightarrow \text{主系列表現} \,/\, p\text{-adic group}$$
>
> と黒木教授の辞書 (Oct 20)[a]の 5 節にあります.
>
> [a] * 第 13 節 (p. 22).

この辺の言葉遣いについて最近意見を少し変えつつあります. 誘導表現という感じでは Wakimoto module の方が感じが出ているのですが, 主系列既約表現の類似としては critical level における Verma module の irreducible quotients (複数形) の方が適切な感じがしています.

> 我々のすべき作業は
>
> Hecke eigen な保型函数 (表現) に対して各素点で Hecke 環の固有値を集めて L 函数を作る. それを Galois side で作られた L 函数と比較する.
>
> ということでした.

$\mathbb{C}$ 上の理論では L 函数を定義できないので, sheaf theoretic な formulation にする必要があり色々面倒なのですが, 心は L 函数を保つような対応を見付けたいということなのだと理解しています.

> p-adic の時の主系列表現の役割はいろいろあるでしょうが, その文脈で見ると,
>
> 保型表現はほとんどの素点で (不分岐) 主系列表現である. そういう表現に対しては Hecke 環の作用の固有値は佐武同型で与えることができる.
>
> といっていいでしょう.

Feigin-Frenkel による結果 (私はまだこれを「厳密な数学」としては理解していない)

$$Z_{-h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}}) \simeq A_{\mathfrak{g}^L}(\operatorname{Spec} \mathbb{C}((z))) \qquad \text{(Poisson isom.)}$$

は佐武同型とは似ても似つかないものなのでしょうか? (右辺は punctured disk 上の $\mathfrak{g}^L$-oper の moduli space 上の函数環.)

> そうすると p-adic の時に比べて affine Lie algebra の時は不分岐な素点で local に異常にたくさんの情報を持っているように見えるのです. どっちか (例えば automorphic side) のみが異常にたくさんの情報を抱えていることは許されないでしょうから何か僕の理解できないことが起こっているらしい.

Galois side の object を connection だと思うと, local には (*i.e.*, open disk $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[[z]]$ 上では) connection の同型類の集合は d/dz の同型類の 1 点になってしまうので全くその通りだと思います. 一体何が起こっているのか?

Beilinson-Drinfeld の program では connection ではなく oper を考えているので, local に見ても同型類の集合は無限次元の多様体をなします. その辺にトリックが隠れているはずなので, もっと真面目に観察する必要がありそうですね.

注意. connectin ではなく Higgs 場 (= 0-connection) を考えると, その moduli space は local に考えても non-trivial になります. (local に考えると Higgs 場の moduli space は無限次元.) この違いは, connection の gauge 変換は,

$$\frac{d}{dz} + A \quad \mapsto \quad \frac{d}{dz} + g^{-1}g' + g^{-1}Ag$$

の形になるのですが, Higgs 場の guage 変換は,

$$A \quad \mapsto \quad g^{-1}Ag$$

の形になるからです. connection の方は g を適当に取れば, gauge 変換の結果を local に d/dz にできますが, Higgs 場の方はそのようにはできません. (この辺の事情はヒントになってないでしょうか?)

114. kuroki: L-group の定義が書いてある文献

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: L-group (Re: from Dr. Ochiai)
Date: 28 Dec 1995 05:31:51 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec28053151@take.math.tohoku.ac.jp>

In article <TAKEBE.95Dec22093348@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi) writes:
```

> | そしてここに L 群が登場します.
>
> ??? L ? 群???

reductuve group の Langlands dual や L-group の定義を誰も説明してませんね. ひとまず, 文献だけでも挙げておきましょう.

Springer による redutive group の構造論 (root data の理論) の解説が [Spr] にあります.

Tate による Weil group などの数論的な背景の解説が [Ta] にあります.

Borel による [Bo] では, 上記の 2 つの文献を引用し, L-group を定義しています.

体 F 上定義された reductive group G の L-group とは一言で言って, G の Langlands dual group over $\mathbb{C}$ と F の絶対 Galois 群 (もしくは Weil 群) の半直積のことです. (Galois 群は G の Langlands dual に外部自己同型として作用します.)

さらに [Vo] の Section 3 に L-group に関する結構詳しい解説があります. 細かいことも かなり詳しく解説されています. その Section 8 には local field ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, p-adic of char. 0) に対する Kazhdan-Lusztig type conjecture の話も書いてあります.

115. nakajima: On a notation $A_{\mathfrak{g}}(X)$ in oper2 vs oper3 (5)

第 110 節 (p. 159) へのフォロー

```
From: nakajima@math.tohoku.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: On a notation A_g(X) in oper2 vs oper3
Date: 28 Dec 1995 14:39:40 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec28143940@take.math.tohoku.ac.jp>

In article <KUROKI.95Dec26001533@tsuru.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
```

> G に対する Hitchin's fibration π の base space を
>
> $$\mathrm{Hitch}_G(X) = \bigoplus_{j=1}^{\mathrm{rank}\, G} H^0(X, \Omega^{m_j+1}).$$
>
> と書くことにします. 大事な点は Langlands dual に移っても exponents $m_1, \dots, m_r$ は変化しないので, 次の等式が成立するということでした:
>
> $$\mathrm{Hitch}_{G^L}(X) = \mathrm{Hitch}_G(X) \tag{$**$}$$
>
> fibration は違っていても base space の方は同じものになるのです.

というわけで, Hitchin's fibration の base space は, automorphic side と Galois side の両方にあるということだと思います. 0-oper が automorphic side にあることは納得しました.

> **質問 1.** Hitchin's fibration は群 G が simply connected であるとか, adjoint type であるとか, そういうことには関係無しに完全可積分になるのですよね? 証明はどの文献を見れば書いてあるのでしょうか?

Hitchin の証明は, $SL(2)$ のときは, Self-duality ...[97] 古典群のとき (含む $GL(n)$) は, Stable bundles and integrable systems にのってます. Faltings の論文では証明してないのですか? 私は, 見てないので知りません.

Hitchin の論文では, fibration を与える関数が Hamiltonian commute していることは容易に分るのですが, fiber の次元が丁度半分であることを証明するために, spectral curve を使って fiber が Jacobian, etc であることを示しています. 例外群のときは, どうやったら

97* 文献 [Hit1].

いいのかは考えていません. ただ, 0 の inverse image が半分の次元であることは, 前に紹介したやりかたで示せるので, これはいつでも成り立ちます.

おそらくは, 一般の群の場合でも証明はできるのでしょう.

> **定理 1.** $\mathfrak{g}^L$-oper の moduli space を $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}^L}(X)$ と書くと, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}^L}(X)$ は non-singular affine variety になり, ある vector space の主等質空間としての記述を持つ. そこで, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}^L}(X)$ 上の函数環を $A_{\mathfrak{g}^L}(X)$ と書くことにする. このとき, $A_{\mathfrak{g}^L}(X)$ には自然な $\mathbb{Z}$-gradation が入り, 次の自然な同型が存在する:
>
> $$\mathrm{Spec}\left(\mathrm{gr}\, A_{\mathfrak{g}^L}(X)\right) \simeq \mathrm{Hitch}_{G^L}(X).$$

この定理の local version (*i.e.*, punctured disk 上) は, どうなっているのでしょうか? 無限次元的面倒はあるかもしれませんが....

> **質問 2.** $T^* \mathrm{Bun}_G(X) \subset \mathrm{Higgs}_G(X)$ となっているのだと思いましたが, $\mathrm{Higgs}_G(X) - T^* \mathrm{Bun}_G(X)$ の codimension は 2 以上であるというようなことは証明されているのでしょうか?

正確には, $\mathrm{Higgs}_G(X)$ は, semistable bundles のモジュライ空間の cotangent bundle を含んでいます. (unstable なものは, Hitchin は全く考えていません.)

また, $G = SL(2)$ のとき, codimension が少くとも $g = \mathrm{genus}(X)$ であることが示されている (Stable bundles ...[98], Prop. 6.1) のですが, その証明が一般のときにも成り立つかどうかはよく検討していません.

それから, 前に述べた 0-oper の特徴付け

```
In article <NAKAJIMA.95Dec25115046@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:
```

> **例.** Higgs 束の重要な例:
>
> > Higgs 束の重要な例として, 次のものがあります. (Hitchin: の p. 66 Example (1.5) を見てください)
> >
> > $$E = K^{1/2} \oplus K^{-1/2}, \qquad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
> >
> > ここで, $\mathrm{Hom}(K^{1/2}, K^{-1/2}) \otimes K = \text{trivial bundle}$ は, canonical な section 1 を持つことに注意してください.
>
> **命題.** (E, Φ) が 0-oper の underlying な Higgs bundle である為の必要十分条件は, $(E, t\Phi)$ の gauge 同値類が $t \to 0$ のとき上の例に収束することである.

これにより, 0-oper は, この complement の方に属します. 実際 $K^{1/2}$ が, stability に反するような subbundle として E に入っています.

[98]* 文献 [Hit1].

定理 2. $\mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X))$ は可換環になり, 次の自然な同型が存在する:

$$\mathrm{Spec}\left(\mathrm{gr}\,\mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X))\right) \simeq \mathrm{Hitch}_G(X).$$

定理 3. G は simply connected であると仮定する. (定義より $\mathfrak{g}^L$-oper $= G^L$-oper となる.) このとき, 等式 $(**)$ および定理 1, 定理 2 における同型と compatible な次の同型写像が存在する:

$$\phi : A_{\mathfrak{g}^L}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X)).$$

これらの定理の証明は, classical limit のときの証明 (それほど難しくない) とはどれほど違うのでしょうか?

116. nakajima: h-connection and hyper-Kähler structure

```
From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: h-connection and hyper-Kaehler structure
Date: 28 Dec 1995 18:19:45 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.95Dec28181945@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>
```

Simpson の ICM-90 のプロシーディングにしたがって, h-connection についてまとめておきます. 但し, h-connection の自然さを hyper-Kähler 構造の立場から説明するだけのことで, それ以上の深い意味についてはよく理解していません. h-oper で, 0-oper の構造環の量子化が行われたことを hyper-Kähler 構造の立場から再構成することが出来れば面白いことになってくると思います.

表現論で出てくる特殊多様体は何故か hyper-Kähler 構造を持つものが多いですが, その理由はまだ明らかになっていません. また, hyper-Kähler 構造が表現論に応用された例を, Kostant-関口対応の説明以外に知りません.

定義. リーマン多様体 (X, g) 上の hyper-Kähler 構造とは, tangent bundle の endomorphism の作る bundle $\mathrm{End}(TX)$ の section I, J, K で, 次を満すもののことです.

(a) $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$,

(b) $\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$ (但し, ∇ は Levi-Civita connection).

単に, hyper-Kähler 多様体といえば, リーマン多様体とその上の hyper-Kähler 構造の組のことであるとします.

命題. I, J, K に対応する Kaehler form を ω_I, ω_J, ω_K とします. (すなわち, $\omega_I(v, w) = g(Iv, w)$, etc. であたえられる 2-form のこと.) このとき, $\omega_C = \omega_J + i\omega_K$ は, 複素構造 I に関して holomorphic symplectic form になります. (*i.e.*, closed な $(2, 0)$-form で non-degenerate.)

証明. 容易. □

逆に Kaehler 多様体上に holomorphic symplectic form があって, 多様体が complact であれば, canonical bundle は trivial であって Yau の定理により Ricci-flat 計量が存在するが, その計量に関して symplectic form は平行であり, hyperKähler 構造から来る.

例.

1. $X = \mathbb{R}^4$.
2. K3 曲面上の Ricci-flat 計量 (上の remark による).
3. 箙多様体 (次に述べる hyper-Kähler quotient construction による).
4. cotangent bundle of flag variety (Kronheimer による).
5. nilpotent orbit, semisimple orbit (Kronheimer).
6. moduli space of monopoles.

定義. X が hyper-Kähler 多様体で Lie 群 G が hyper-Kähler 構造と計量を保って作用しているとき, ω_I, ω_J, ω_K に対応する moment map μ_I, μ_J, μ_K をまとめて μ で表わし, hyper-Kähler moment map という. μ は $\{\text{imaginary quaternions}\} \otimes \mathrm{Lie}(G)$ に値を持つ.

定理. $\mu^{-1}(0)$ への G の作用が free で transversal slice が取れるとき $\mu^{-1}(0)/G$ は再び hyper-Kähler 多様体となる.

証明. Marsden-Weinstein の symplectic quotient の証明をそっくり真似ればよい. □

定義 (hyperKähler 多様体の twistor 空間). $Z = X \times S^2$ に次の仕方で complex structure を入れたものを, hyper-Kähler manifold X の twistor 空間という:

$S^2 = \mathbb{C}\mathrm{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の非同次座標を h として

$$\underline{I} = \frac{1}{1+|h|^2}\Big((1-|h|^2)I + 2\,\mathrm{Re}(h)J + 2\,\mathrm{Im}(h)iK\Big)$$

という概複素構造を考える. $\underline{I}^2 = -1$ が成り立つ. そこで, $X \times \{h\}$ には $\underline{I}$ で概複素構造をいれ, $S^2 = \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ には標準的な概複素構造を入れる. これが積分可能であることが証明出来る.

命題 (twistor 空間から hyperKähler 多様体の逆構成). $2n+1$ 次元の複素多様体 Z で次の (1)–(4) を満たすものがあるとする.

(1) holomorphic fiber bundle $p : Z \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ の構造を持つ.

(2) normal bundle が trivial bundle になる holomorphic section の family を持つ.

(3) $\bigwedge^2 T_F^*(2)$ の holomorphic section ω で各 fiber ごとに holomorphic symplectic form になるものがある．ここで, T_F^* は Z 上の cotangent bundle along the fibers であり, $\bigwedge^2 T_F^*$ は T_F^* の 2 次の外積であり, $\bigwedge^2 T_F^*(2)$ はそれに $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上の $\mathcal{O}(2)$ の Z 上への pull-back を tensor したものを表わす[99].

(4) real structure τ で (1), (2), (3) と compatible であり, $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ の anti-podal map を誘導するものがある．

このとき, real structure と compatible な section 達の parameter space が hyperKähler 多様体 X になって, Z は X の twistor 空間になる．

定理 (Hitchin). X をリーマン面とし, その上の stable Higgs bundle のモジュライ空間は, hyper-Kähler 多様体である．

証明. nonabelian Hodge theory のときに説明した Hitchin, Simpson の定理により, stable Higgs bundle のモジュライ空間は, connection A と Higgs 場 Φ の組みで

(1) $[\overline{\partial}_A, \Phi] = 0$,

(2) $F_A + [\Phi, \Phi^*] = 0$

を満たすものを unitary gauge 変換の成す群で割った空間と同じである．コンパクト群に対応する主束をいつもと記号が違うが P で表わす．このとき,

$$\{\text{connections on } P\} \times \Omega^{1,0}(\mathrm{Ad}\, P \otimes \mathbb{C})$$

は無限次元の hyper-Kähler 多様体．実際 tangent space は

$$\Omega^1(\mathrm{Ad}\, P) \oplus \Omega^{1,0}(\mathrm{Ad}\, P \otimes \mathbb{C}) = \Omega^{0,1}(\mathrm{Ad}\, P \otimes \mathbb{C}) \oplus \Omega^{1,0}(\mathrm{Ad}\, P \otimes \mathbb{C})$$

であり, L^2 内積がリーマン計量を定める．I は, それぞれの成分を i 倍することで定義し,

$$J(a, \phi) = (-\phi^*, a^*)$$

で J を定める．(connection の成分と Higgs 場の成分を入れ替えていることに注意.)
このとき, gauge 群の作用に関する hyper-Kähler moment map は, (1),(2) の左辺で与えられる．よって hyper-Kähler quotient の理論によって Higgs 場のモジュライは hyper-Kähler 多様体である． □

注意. polystable だが stable でない点, すなわち stable Higgs bundle の幾つかの直和になっている点は, モジュライの特異点である．

ここまで準備してやっと h-connection が説明できます．

[99]* sheaf として $\bigwedge^2 T_F^*(2) = \Omega^2_{Z/\mathbb{C}\mathrm{P}^1} \otimes_{\mathcal{O}_Z} p^*\mathcal{O}(2)$.

定義. リーマン面 X 上の h-connection ∇ on a holomorphic vector bundle E とは, bundle E の holomorphic section の germ の sheaf $\mathcal{O}(E)$ に働く opeartor で

$$\nabla(ae) = h\,da \otimes e + a\nabla e \qquad (e \in \mathcal{O}(E), a \in \mathcal{O}_X)$$

を満たすもののこと.

命題. このとき Higgs bundle のモジュライ空間に対して twistor 空間を作ると, その $h \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1 - \{\infty\} = \mathbb{C}$ の上の fiber が holomorphic vector bundle とその上の h-connection のモジュライ空間と同一視される.

証明. (1), (2) を満たす Higgs bundle (E, Φ) に対して,

$$\text{holomorphic structure} = \overline{\partial}_A + h\overline{\Phi}, \qquad h\text{-connection } \nabla = h\partial_A + \Phi$$

とせよ. これは holomorphic bundle 上の h-connection を定める. (holomorphic structure が 元のものとは違うことに注意.) このとき, holomorphic vector bundle とその上の h-connection のモジュライ空間の tangent space の上の自然な概複素構造は, $\underline{I}$ の h におけるものと等しい. $\square$

正月の宿題として,

問. h-oper の空間は nonabelian Hodge theory を使って Higgs bundle の空間に埋め込むと, 0-oper の空間に移るのか??

117. takebe: X と Y の記号の混乱　(oper 11)

第 115 節 (p. 168) へのフォロー.

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: On a notation A_g(X) in oper2 vs oper3
Date: 29 Dec 1995 04:49:23 JST
Message-ID: <TAKEBE.95Dec29044923@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <NAKAJIMA.95Dec28143940@take.math.tohoku.ac.jp>
nakajima@math.tohoku.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:
```

> In article <KUROKI.95Dec26001533@tsuru.math.tohoku.ac.jp>
> kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
>
> > **定理 1.** $\mathfrak{g}^L$-oper の moduli space を $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}^L}(X)$ と書くと, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}^L}(X)$ は non-singular affine variety になり, ある vector space の主等質空間としての記述を持つ. そこで, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}^L}(X)$ 上の函数環を $A_{\mathfrak{g}^L}(X)$ と書くことにする. このとき, $A_{\mathfrak{g}^L}(X)$ には自然な $\mathbb{Z}$-gradation が入り, 次の自然な同型が存在する:
> >
> > $$\mathrm{Spec}\left(\mathrm{gr}\, A_{\mathfrak{g}^L}(X)\right) \simeq \mathrm{Hitch}_{G^L}(X).$$
>
> この定理の local version (*i.e.*, punctured disk 上) は, どうなっているのでしょうか? 無限次元的面倒はあるかもしれませんが....

何か Be and Dr に書いてあったかな, と思って見直して見て, 大事な見落としに気がつきました. 前に, shitan.math article 157,

`Oper No.10, Message-ID: <TAKEBE.95Dec15040445@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>`

で[100]「曲線を表す X と Y が混用されている」と言ってしまいましたが, 実は, X は滑らかな射影曲線, Y は滑らかな曲線, と使い分けられていました. 私が書いた紹介の中では, そこを見落としていたために, 本当にゴッチャになっています. 申し訳ありません. 射影曲線がでて来るのは, $A_{\mathfrak{g},D}$ がでてくる 5.1, 5.3, 5.4 節だけです.

また, 同じ記事の中で

> $$\begin{array}{rcl} \mathrm{Op}^0_{g,D}(X) & \to & \mathrm{Mor}\left(\mathrm{Inv}(\mathfrak{g}^{L*}), \bigoplus_n H^0(X, \Omega^n(nD))\right) \\ (F,\omega) & \mapsto & (f \mapsto f(\omega)) \end{array}$$
>
> 左辺は, $\mathrm{Hitch}_{\mathfrak{g},D}(X) =$ Hitchin's fibration の base space[a]. そして, この論文の main result は
>
> **Proposition:** 上の写像は $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ 同変な代数多様体の同型である.
>
> 証明は Remark に押し込められています.
>
> [a]* 第 81 節 (p. 116) に Mor の定義が書いてある: 次数付き代数の準同型全体です. n 次の多項式の移った先が $H^0(X, \Omega^n(nD))$ に入ります.

といっていますが, これも Remark に書いてあるのは,

$$V^{\mathfrak{g}}_D(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hitch}_{\mathfrak{g}^L,D}(X)$$

という同型の構成で, 上の Proposition 自身は,

「$\mathrm{Op}^0_{\mathfrak{g},D}(X)$ の点 (F,ω) は X 上の B-bundle F と $\mathfrak{g}_F^{-1} \otimes \Omega(D)$ の section ω で $\mathfrak{g}_F^{-\alpha} \otimes \Omega(D)$ に落として見ると零点を持たないものからなっている」

[100]* 第 75 節 (p. 106).

事と, Kostant の定理から直接でます. 混乱された方がいたら申し訳ありません.

```
# 混乱しているのは私だけ，という気もする．(^^);;
```

というところで, 中島さんの話に戻ると, local version でも, Lie 環に関係のある部分はやはり Kostant の定理で変わりませんから,「そんなに変わらないのでは」というのが素人考えですが, いかがでしょう.

> > **定理 3.** G は simply connected であると仮定する. (定義より $\mathfrak{g}^L$-oper $= G^L$-oper となる.) このとき, 等式 $(**)$ および定理 1, 定理 2 における同型と compatible な次の同型写像が存在する:
> >
> > $$\phi : A_{\mathfrak{g}^L}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X)).$$
>
> これらの定理の証明は, classical limit のときの証明 (それほど難しくない) とはどれほど違うのでしょうか?

数論とかの場合には, "classical limit" に相当するものは何なのですか. 全然無い?

118. kuroki: On a notation $A_{\mathfrak{g}}(X)$ in oper2 vs oper3 (6)

第 115 節 (p. 168) へのフォロー.

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: On a notation A_g(X) in oper2 vs oper3
Date: 30 Dec 1995 01:01:13 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec30010113@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

黒木@××な人 (少なくとも 3 人いることがわかった) です.

```
In article <NAKAJIMA.95Dec28143940@take.math.tohoku.ac.jp>
nakajima@math.tohoku.ac.jp (Nakajima Hiraku) writes:
```

> ```
> In article <KUROKI.95Dec26001533@tsuru.math.tohoku.ac.jp>
> kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:
> ```
>
> > **質問 1.** Hitchin's fibration は群 G が simply connected であるとか, adjoint type であるとか, そういうことには関係無しに完全可積分になるのですよね? 証明はどの文献を見れば書いてあるのでしょうか?
>
> Hitchin の証明は, $SL(2)$ のときは, Self-duality ...[a] 古典群のとき (含む $GL(n)$) は, Stable bundles and integrable systems にのってます. Faltings の論文では証明してないのですか? 私は, 見てないので知りません.
>
> [a] * 文献 [Hit1].

確かに, Faltings の論文 [Fal] の Theorem II.5 に非常に一般的な statement があります. しかし, それを読んで私が理解できるかは別問題. (^_^;) Faltings の論文は読み難い!!

引用の順番は前後しますが,

> これらの定理の証明は, classical limit のときの証明 (それほど難しくない) とはどれほど違うのでしょうか?

についてもコメントしておきます. Beilinson-Drinfeld の考えている方針がどのようなものかはまだ想像するしかないのですが….

> > **定理 2.** $\mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X))$ は可換環になり, 次の自然な同型が存在する:
> >
> > $$\mathrm{Spec}\left(\mathrm{gr}\,\mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X))\right) \simeq \mathrm{Hitch}_G(X).$$

これは automorphic side のみに関係する結果です. どうやって証明するんでしょうね.

私が考えた方針は以下のようなものです. $\mathrm{Hitch}_G(X)$ の上の函数環を $B_G(X)$ と書くことにしましょう ($\mathrm{Spec}\,B_G(X) = \mathrm{Hitch}_G(X)$). Hitchin's fibration は proper だから,

$$H^0(\mathrm{Higgs}_G(X), \mathcal{O}_{\mathrm{Higgs}_G(X)}) \simeq B_G(X).$$

さらに, $\mathrm{Higgs}_G(X) - T^*\mathrm{Bun}_G(X)$ の codimension が 2 以上であるという結果を使うことが許されるならば,

$$H^0(T^*\mathrm{Bun}_G(X), \mathcal{O}_{T^*\mathrm{Bun}_G(X)}) \simeq H^0(\mathrm{Higgs}_G(X), \mathcal{O}_{\mathrm{Higgs}_G(X)})$$

よって, 定理 2 の後半は

$$H^0(\mathrm{Bun}_G(X), \mathrm{gr}\,\mathcal{D}') \simeq H^0(T^*\mathrm{Bun}_G(X), \mathcal{O}_{T^*\mathrm{Bun}_G(X)})$$

なる同型より導かれる. (以上の同型は全て Poisson algebra の同型なので, $H^0(\mathrm{Bun}_G(X), \mathrm{gr}\,\mathcal{D}')$ が Poisson commutative であることが, Hitchin's fibration の性質から導かれる.)

問題は定理 2 の前半の証明である. $\mathcal{D}'$ は $\mathrm{Bun}_G(X)$ 上の canonical line bundle の平方根に作用する tdo の sheaf であった. $\mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X))$ の元は critical level における affine Lie algebra の enveloping algebra の completion の center からたくさん作れるはず. 実際, $\mathcal{D}'$ は critical level の affine Lie algebra を利用して構成できる. (Beilinson-Bernstein による flag の上の tdo の構成の類似. Beilinson-Schechtman [BS] や私の論説 [Kur2] を参照せよ.) その構成を詳細に調べ, criticcal level における center から来る tdo で $\mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X))$ が尽くされることを, 定理 2 の後半を利用して示すことができれば, 定理 2 の前半も証明できるであろう.

質問. この方法では critical level における center の詳細な構造論が必要になる点が不満足である. $H^0(\mathrm{Bun}_G(X), \mathrm{gr}\,\mathcal{D}')$ の Poisson commutativity + α から, $\mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X))$ の commutativity を出すというような論法で証明できることが望ましい. そのような目的に使える “+ α” にはどのようなものが考えられますか?

結局のところ細かいところは真面目に考えてません. でも, 次の定理 3 に比べれば証明は難しくなさそうです.

> **定理 3.** G は simply connected であると仮定する. (定義より $\mathfrak{g}^L$-oper $= G^L$-oper となる.) このとき, 等式 (∗∗) および定理 1, 定理 2 における同型と compatible な次の同型写像が存在する:
>
> $$\phi : A_{\mathfrak{g}^L}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X)).$$

この定理が Galois side の oper を automorphisc side に結び付けています. この定理の証明には Feigin-Frenkel の結果が使われます. Feigin-Frenkel の結果の証明をちゃんと証明込みでフォローできた人がどれ位いるか知りませんが, 現在のところ, 私にとっては簡単に説明できる状況ではありません.

定理 3 の証明の方針はおそらく以下のようなものです.

Feigin-Frenkel の結果は定理 3 の local version です. だから, X 上に点 x を一つ取ると, Feigin-Frenkel の結果によって, ϕ の local version ϕ_x ができたことになります. つまり, punctured disk $U_x^* = \operatorname{Spec}\mathbb{C}((z))$ 上の結果が得られるわけです. (式を見易くするために x における local coordinate z を取った.)

X 上の $\mathfrak{g}^L$-oper の moduli $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}^L}(X)$ は punctured disk U_x^* 上の $\mathfrak{g}^L$-oper の moduli $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}^L}(U_x^*)$ の中に制限写像によって埋め込まれます. 一方, X 上の principal G-bundle の moduli $\mathrm{Bun}_G(X)$ は $G\big(\mathbb{C}((z))\big)$ の quotient で書けます. (もちろん non-trivial である. Moduli stack を直接扱う類似の論法が必要があると思う.) この辺の事情を詳しく見てやると, global な結果である定理 2 が得られるであろう. (点 x の取り方によらないことも示さなければいけない.)

ここでは, Feigin-Frenkel の結果を black box として扱いましたが, その中身を説明せよと言われても簡単にはできません. 正直言って, 私も「厳密な数学」として Feigin-Frenkel の結果を理解していません. そこでは, キーになる部分で Wakimoto module に関する詳細な結果がフルに使われています.

そこで面白いのは, Langlands dual が互いに連続的なパラメーターで繋がっていることです. パラメーターは affine Lie algebra の level です.

simple Lie algebra $\mathfrak{g}$ と generic な level k に対して, W-algebra $W(\mathfrak{g}, k)$ というのが対応しています. $W(\mathfrak{g}, k)$ は quantum Drinfeld-Sokolov reduction を経由して定義される vertex operator algebra です.

有限次元の場合の W-algebra の類似は, Kostant の結果を経由して (後述), $U(\mathfrak{g})$ の center $Z(\mathfrak{g})$ であると言うことができます. その場合は Harish-Chandra 同型と Chevalley の定理によって, $Z(\mathfrak{g}) \simeq Z(\mathfrak{g}^L)$ なる同型が存在することは明らかであると思います. ($\mathfrak{g}^L$ は $\mathfrak{g}$ の Langlands dual.)

Feigin-Frenkel の見つけた W-algebra の duality とは,

$$W(\mathfrak{g}, k) \simeq W(\mathfrak{g}^L, k^L) \tag{$*$}$$

という同型です. ただし, k と k^L は互いに次のような関係式で結ばれているとします:

$$r^\vee(k+h^\vee(\mathfrak{g}))(k^L+h^\vee(\mathfrak{g}^L))=1.$$

ここで, $r^\vee$ は $\mathfrak{g}$ から決まるある定数であり, $h^\vee(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の dual Coxeter number を表わしています.

この結果の証明には Virasoro algebra の Fock space representation の理論が巧妙に使われているので, 結構 non-trivial です. しかし, ちゃんとフォローしたわけではないのですが, Feigin-Frenkel の結果は, W-algebra の duality のレベルでは「厳密な数学」としてフォローすることはそれほど難しくなさそうです.

注意. ここに現われるパラメーター k, k^L の意味は不明です. 何か幾何的でわかりやすい解釈があれば素晴しいことです.

妄想. k は $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ の上に住んでいますから, (私がまだよく理解してない) twistor space のようなもので理解できればうまいと思うのですが$\cdots$. affine Lie algebra の dual vector space は k-connection の空間と同一視できることですし$\cdots$. でも, 注意しなければいけないことは, W-algebra の方では $k=0$ が特別な点になっているのではなく, $k=-h^\vee$ (critical level) が特別な点になっていることです. これは, Harish-Chandra 同型における ρ によるずらしの話 (量子補正?) とも似ているような感じもするので, もしかしたら quantum twistor のようなものがあって$\cdots$.

質問. これはやはり妄想でしょうか? > 特に幾何の方

質問. Harish-Chandra 同型に現われる $\mathfrak{h}$ への W の作用の ρ によるずらしのわかり易い解釈があれば教えてください.

E. Frenkel の Thesis [Fr1] では以下が主張されています:

(1) $W(\mathfrak{g},k)$ の $k\to\infty$ における極限をうまく定義できて, その極限 $W(\mathfrak{g},\infty)$ は $\mathfrak{g}$ に対する Gelfand-Dikii algebra $GD(\mathfrak{g})$ に同型になる:

$$W(\mathfrak{g},\infty)\simeq GD(\mathfrak{g}).$$

(2) $k=-h^\vee(\mathfrak{g})$ なる k (critical level) は "generic point" であり, $W(\mathfrak{g},k)$ の $k\to h^\vee(\mathfrak{g})$ の極限で $W(\mathfrak{g},k)$ は良い振舞いをし, さらに, $W(\mathfrak{g},-h^\vee(\mathfrak{g}))$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の critical level における "completion" の center $Z_{-h^\vee(\mathfrak{g})}(\hat{\mathfrak{g}})$ に同型である:

$$W(\mathfrak{g},-h^\vee(\mathfrak{g}))\simeq Z_{-h^\vee(\mathfrak{g})}(\hat{\mathfrak{g}}).$$

注意. Gelfand-Dikii algebra は "大体" punctured disk 上の $\mathfrak{g}$-oper の moduli の函数環に等しいのですが, "大体" の意味を明確にすることは状況が無限次元なので non-trivial です.

注意. 証明の難しさという点では, 後者の (2) の方がかなり non-trivial です. そこで, Wakimoto module に関するかなり詳細な理論が必要になります. 私がまだ「厳密な数学」として理解してないと言ったのは, 主に (2) の証明に関する部分です.

注意. (2) の有限次元の場合における類似は, "classical" Kostant's theorem

$$(f + \mathfrak{b})//N \simeq \mathfrak{g}//G$$

の "quantum" version であり, "quantum" version も Kosatant によって示されている ([Kos2]). (($\mathfrak{g}//G$ の量子化) = ($U(\mathfrak{g})$ の center) と思う.) Feigin-Frenkel が考えた Drinfeld-Sokolov reduction の量子化はこの quantum Kostant's theorem の類似になっている. 実際, Feigin-Frenkel は [Kos2] を refer しています.

上の (1), (2) と W-algebra の duality $(*)$ を合わせると, $k^L \to \infty$ の極限として,

$$GD(\mathfrak{g}^L) \simeq Z_{-h^\vee(\mathfrak{g})}(\hat{\mathfrak{g}})$$

なる同型が得られます. この左辺が $A_{\mathfrak{g}^L}(X)$ の local での類似物で, 右辺が $\mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G(X))$ の local での類似物です.

119. kuroki: 基本図式

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Fundamental diagram
Date: 29 Dec 1995 04:41:52 JST
Message-ID: <KUROKI.95Dec29044152@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

任意に固定された complete smooth curve over $\mathbb{C}$ に関する話である.

基本図式:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Op}_{G^L} & \subset & \mathrm{OP}_{G^L} & & & & & & \\
 & & \cup & & & & & & \\
 & & \mathrm{Op}^0_{G^L} & \subset & \mathrm{Higgs}_{G^L} & & \mathrm{Higgs}_G & \supset & T^*\mathrm{Bun}_G \\
 & & & & \pi_{G^L}\downarrow & & \pi_G\downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \mathrm{Hitch}_{G^L} & = & \mathrm{Hitch}_G & & \mathrm{Bun}_G \\
 & & & \text{Galois side} & \leftarrow & \Big| & \rightarrow & \text{automorphic side} &
\end{array}$$

`# TeX に直すのは大変だな.` [101]

[101]* 実際にはそれほど大変ではありませんでした.

記号の説明:

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{Op}_{G^L} & = & G^L \text{ に対する oper (= 1-oper) の moduli}, \\
\mathrm{OP}_{G^L} & = & G^L \text{ に対する } h\text{-oper の moduli (}h\text{ も動かす)}, \\
\mathrm{Op}^0_{G^L} & = & G^L \text{ に対する 0-oper の moduli}, \\
\mathrm{Higgs}_G & = & G \text{ に対する Higgs bundle の moduli}, \\
\mathrm{Hitch}_G & = & G \text{ に対する Hitchin's fibration の base space}, \\
\pi_G & = & G \text{ に対する Hitchin's fibration}, \\
T^*\mathrm{Bun}_G & = & \text{principal } G\text{-bundle の moduli の contangent bundle}, \\
\mathrm{Bun}_G & = & \text{principal } G\text{-bundle の moduli}.
\end{array}$$

0-oper の moduli $\mathrm{Op}^0_{G^L}$ はやはり Galois side なのだ.

Beilinson-Drinfeld のプログラム: 左上の Op_{G^L} の元 G^L-oper に対して, 右下の Bun_G 上の $\mathcal{D}$-module で Hecke eigenvalue property を満たすものを構成せよ.

Beilinson-Drinfeld の "定理": Op_{G^L} 上の函数環を A_{G^L} と書き, Bun_G の canonical line bundle の平方根に作用する tdo の sheaf を $\mathcal{D}'$ と書くとき,

$$A_{G^L} \simeq \mathcal{D}'(\mathrm{Bun}_G).$$

120. ochiai: On a notation $A_{\mathfrak{g}}(X)$ in oper2 vs oper3 (7)

```
From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
Newsgroups: shitan.chat
Subject: Hitchin appears in both sides
Date: 31 Dec 1995 08:04:06 -0000
Message-ID: <9512310755.AA06575@rkmath.rikkyo.ac.jp>
```

ニュースグループ初心者です. 質問に丁寧に答えて下すってありがとうございます. やっぱり, 自分の書いた記事に反応があると嬉しいです. ただし, この快感が忘れられなくて, ニュースグループにはまる, ということのないように重々注意したいと思います.

Oper 10 の[102]「あいまいもこ」の付近を見てみました. 確かに, そのあたりには Langlands dual というせりふがでてきます. でも, 今回, 黒木さんと中島さんのやりとりを見た後でここを見ると, Langlands dual がここにでてくるのは, 唐突で奇妙な印象を受けました. 黒木教授 (の Dec 25-171347 の[103]第 2 段落) の $\mathrm{gr}\, A_{\mathfrak{g}}(X) = B_{\mathfrak{g}}(X)$ 自身の証明に Feigin-Frenkel の結果を使う必要はないというくだりと, それに対する Dec 26-001533 の補足[104](oper3 の復習) を見るとここは Langlands dual と関係ないところですよね.

[102]* 第 75 節 (p. 106).
[103]* 第 109 節 (p. 157).
[104]* 第 110 節 (p. 159).

ちなみに $\mathfrak{g}^{L*}$ というのは, 黒木さんの記号で $\mathfrak{g}^L$ というものですよね. ($*$ は線型空間としての双対の意味に使うこともあるので.) ここの「Inv($\mathfrak{g}$) と Inv($\mathfrak{g}^{L*}$) は標準的に同型」というのは (ここで使うかどうかはおいておいて) どういう意味なのだろうか.

「Oper 3 の復習[105]」を読んで, 僕にとって衝撃だったのは

> $$(**) \qquad \mathrm{Hitch}_{G^L}(X) = \mathrm{Hitch}_G(X)$$
>
> の量子化を構成するのが問題,

とは全然気がついていなかったことです. Oper 3 は[106]読んだのですが, そうとは気がつきませんでした. 大体, Hitchin の base space は automorphic side に関与しているだけだと思いこんでいて, Galois side に Hitchin の base space が関係してくるとは夢にも思っていませんでした.

また, 黒木教授 Dec 25-171347[107]

> "Opers" の方は Galois side の object である opers の一般論の展開をまじめに行ったものであり,...

武部氏 Dec 26-050423[108]

> おそらく, Quantization of.. の方がより深いことを....

などと言いきって下さったおかげで, 両者の位置つけがわかりました. 僕は Opers の方が長いし新しいので, 重要かと思い込んでいたのでお間抜けでした (より重要でないとは誰も言っていないが).

自分で混乱しておいて, いいわけがましいのですが Oper3 の[109]記号「$\mathfrak{g}^L$-oper 全体を $\mathrm{Op}_{\mathfrak{g}}(X)$ と書く」のは, ちょっとなじめません.

それから, 個人的なことですが, 中島さんの指摘も今日初めて気がつきました. ありがとうございます. (いままで誰も twistor のつづり間違いを指摘してくれなかった.) スクリーンで読んでいると読み落としが多くて後で驚きます.

で, ちょっと質問ですが, この記事に参加されている方は, 点付きでない場合は (証明はともかくとして) ストーリーはほぼ追えているのでしょうか?

僕は前記の様に混乱に陥った (要するに誤解していた) ので点付きでない場合でもストーリーを追えているとは言えません. (登場人物が, 第何幕にでてくるかすら誤解していた.)

105* 第 110 節 (p. 159).
106* 第 3 節 (p. 9).
107* 第 109 節 (p. 157).
108* このノートには収録されてない.
109* 第 3 節 (p. 9).

議論の方向が, 点付きの場合に Oper の定義やなにやらを, rigid にしたい, ということであれば, 少し自分で考えてみて, また大きく困ったら助けを借ります.

僕の困っているの (のうち今いちばん大きいの) は

どうしてこれで (この Galois side で) geometric Langlands なの?

ということです.

121. ochiai: ρ shift in Harish-Chandra isomorphism (1)

第 118 節 (p. 175) へのフォロー.

```
From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
Newsgroups: shitan.math
Subject: rho shift in Harish-Chandra isomorphism
Date: 31 Dec 1995 08:37:31 -0000
Message-ID: <9512310828.AA06592@rkmath.rikkyo.ac.jp>
```

黒木教授の記事 Dec 30-010113[110] に対する反応なのでそれに張り付けたいのだが, 技術がなくて, できそうにないのでメールで出します.

Harish-Chandra 同形のような同形は, ただ考えている algebra の構造が分かるだけではない, ご利益がなくてはいけません. (実際 Schur の補題があるので, 既約表現には scalar で作用することはあらかじめ分かっているわけであり, その scalar が具体的に Satake パラメータで表せるということが有用性の一つとおもいます.)
つまり, どういう表現の上にはどういう作用である, という

プロトタイプとなる表現

と

その上では $Z(\mathfrak{g})$ の作用はどうなっているかという記述

が合わさって有効性を発揮します. 今の場合, プロトタイプとなる表現は, Verma module (不分岐主系列表現) であり, その上の作用は「ρ shift を evaluate」することでかけます (ということは教授の指摘の通りです).

```
Verma module
 \h^* でパラメトライズされていることが,
う，文字化けし始めた，やばい．
```

[110]* 第 118 節 (p. 175).

Verma module が $\mathfrak{h}^*$ でパラメトライズされているのですから, center の 1 次元表現は, ある Verma module への作用と書けることになります.

$\mathfrak{h}^*/W$ ということは, $M(\lambda)$ と $M(w(\lambda+\rho)-\rho)$ へは, center の作用が同じということになります. (ということを意味しています.) (ということから従います.)

これは今の 2 つの Verma module の間に自明でない (0 でない) 絡作用素が存在することから従います.

まとめると, どの Verma module とどの Verma module の間に自明でない絡作用素が, あるかということが, どことどこのパラメータを同一視するかという時の, 関係を導くのです.

いま, ρ の分だけずれているのは, 絡作用素の構成から従います. もっとも自然な解釈は, 教授の Wakimoto module の説明のときのように群の表現として実現しておいて, 絡作用素を N^- (負のルート空間の和を Lie algebra にもつ部分群) 上の積分作用素として実現すると, いいのですが,

ごめんなさい, ここのエディタ, すんごく使いつらいので, また, 帰省から帰った後で書きます. (でも, みんな知っている話のように思えてきた.)

とにかく, 同じ話は, p-adic のときのシフトでも, 通用します. 有限体のときは左 Haar 測度と右 Haar 測度が同じだからシフトはなし. (Weyl の指標公式に分母がないのと同じ理由です.)

前に, 要求したのは, Feigin-Frenkel の center に対して, プロトタイプの表現となるのは, Wakimoto なのでしょうか? だとすると, そこへの作用は, ちゃんと書けるの? ということだったのです.

122. kuroki: 点付きの Hitchin's fibration (6)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Hitchin's fibration for parabolic Higgs bundles
Date: 2 Jan 1996 01:17:20 JST
Message-ID: <KUROKI.96Jan2011721@ume.math.tohoku.ac.jp>

In article <9512310755.AA06575@rkmath.rikkyo.ac.jp>
ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai) writes:
```

> 議論の方向が, 点付きの場合に Oper の定義やなにやらを, rigid にしたい, ということであれば,

点付きの場合の opers の定義はすでにはっきりしたと思います. まだ, shitan.math で言及されてないのは, 点付き opers の定義に適合する Hitchin's fibration の定義とその complete integrability に関することです.

点付きの場合は, Higgs 場を parabolic な pole を持つものまで拡張し, Hitchin's fibration は点無しの場合と同様に $\mathfrak{g}^*$ 上の invariant polynomial を使って定義します. この定義を

採用すると,

$$\mathrm{Hitch}_{G,D} = \bigoplus_k H^0(X, \Omega^k(kD)) \qquad (k \text{ は } m_j + 1 \text{ を走る})$$

であり,

$$\dim \mathrm{Hitch}_{G,D}(X) = \dim G\,(g-1) + \dim B\ \deg D,$$
$$\dim \mathrm{Higgs}_{G,D}(X) = 2 \dim \mathrm{Hitch}_{G,D}(X)$$

が成立し, 少なくとも次元に関しては辻褄が合っているようです. $\mathrm{Hitch}_{G,D}(X)$ の次元の計算は, Riemann-Roch の定理と exponents m_j に関する公式

$$\dim G = \sum_{j=1}^{\operatorname{rank} G} (2m_j + 1)$$

から,

$$\dim B = \sum_{j=1}^{\operatorname{rank} G} (m_j + 1)$$

が出ることを使えば簡単に導けます.

以前は, nilpotent な pole を持つ Higgs 場の話と, parabolic な pole を持つ Higgs 場に関する Hitchin's fibration の話を比べていたので, 失敗したのでした.

> 少し自分で考えてみて, また大きく困ったら助けを借ります.

というわけで, 定義の方はこれで何とかなったと思われるので, おそらく, 点付きの opers に関する細いことを詰めるという方向に議論は進まないと思われます.

Automorphic side = 表現論サイド については, まだほとんど触れられていません···.

123. kuroki: Galois side はやっぱり connection である.

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Connections and opers
Date: 2 Jan 1996 01:56:41 JST
Message-ID: <KUROKI.96Jan2015641@ume.math.tohoku.ac.jp>
```

黒木@××な人 (少なくとも 4 人いることを確認できた!) です.

```
In article <9512310755.AA06575@rkmath.rikkyo.ac.jp>
ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai) writes:
```

> ```
> Newsgroups: shitan.chat
> Date: 31 Dec 1995 08:04:06 -0000
> ```
>
> 僕の困っているの（のうち今いちばん大きいの）は
>
> どうしてこれで（この Galois side で）geometric Langlands なの?
>
> ということです.

今, 以下の Beilinson による手書きの 5 ページほどの原稿 [Bei] を見直してみたところです. 落合さんの疑問は以下のような点にあるのだと思います:

(A) Galois side として, G^L-connection ではなく, G^L-oper を考えるのはなぜか? G^L-connection で議論を進めることはできないのか?

(B) G^L-oper で話しを進めることを認めたとしても, Beilinson-Drinfeld によるあの構成で Hecke eigenvalue property を持つ D-module を構成できると予想できるのはなぜか?

後者の (B) については [Bei] にも書いていません. しかし, (A) については明解な解答が書いていたので, それを紹介します.

(A) への解答: 任意の G^L-connection には oper の構造を入れることができる. しかし, oper として点付きのものまで含めて考える必要がある. これによって, Galois side として任意の G^L-connection を扱うことが可能になる. ただし, oper の構造の入れ方は一意的ではないので, その点には注意しなければいけない.

つまり, 図式的に書くと,

$$\begin{array}{c}
\{G^L\text{-connections}\} \\
\Big\uparrow{\scriptstyle (1)} \\
\{G^L\text{-opers with singularities}\} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (2)} \\
\{\text{twisted } \mathcal{D}\text{-modules on moduli space of } G\text{-bundles}\} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (3)} \\
\{\mathcal{D}\text{-modules on moduli space of } G\text{-bundles}\}
\end{array}$$

という方針で Galois side の object である G^L-connection を automorphic side に繋げようとしているようです. (1) は oper の構造を忘れて connection の構造のみを残すという写像です. (2) は Beilinson-Drinfeld の program において最も重要な部分です. (3) は line bundle を tensor して twisted $\mathcal{D}$-module を non-twisted にするという写像です. (細かいところはよくわからないので曖昧にしておいた.)

疑問. line bundle を tensor して non-twisted にできない twisted $\mathcal{D}$-module も出て来そうな感じがするが, どうするのであろうか? 不分岐理論では, そういう場合は出て来ないようだが⋯.

[Bei] の最初のページにある example も紹介しておきます.

> **Example.** If $G = SL_n$, then a Drinfeld sheaf is essentially an ordinary differential equation $\partial^n + a_1\partial^{n-2} + a_2\partial^{n-3} + \cdots + a_{n-1}$ at generic point of C such that it has regular singularities and its solutions have trivial monodromy round singular points of the equation.

ここで, Drinfeld sheaf とは, connection (without singularities) に oper (with singularities) の構造を入れたものと本質的に一致しているはずのものです. (真面目にチェックはしてない.) また, connection に入る oper の構造のことを [Bei] では Drinfeld structure と呼んでいます. (現在なら oper structure と呼ぶであろう.) そして, 上の example の直後で次を主張しています.

> **Proposition.** Any G^L-connection admits a Drinfeld structure. □
>
> (Of course, this is trivial when $G = SL_n$.)

以上の事情があるので, 不分岐理論の場合でも, 点付き opers の話が必要になるようです!!

124. nakajima: Classical limit of Hecke eigenvalue property (1)

From: nakajima@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp (Nakajima Hiraku)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: Connections and opers
Date: 4 Jan 1996 18:21:51 JST
Message-ID: <NAKAJIMA.96Jan4182151@ebira.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <KUROKI.96Jan2015641@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen) writes:

> (B) G^L-oper で話しを進めることを認めたとしても, Beilinson-Drinfeld によるあの構成で Hecke eigenvalue property を持つ D-module を構成できると予想できるのはなぜか?

正月に, この statement の classical version を確かめようと思ったのだけど, ついついサボってしまいました. どなたかチェックした人はいますか?

Classical version of Hecke eigenvalue property:

$$\mathrm{Higgs}_G(X) \xleftarrow{p_1} \mathrm{Higgs}_G(X) \times T^*X \times \mathrm{Higgs}_G(X) \xrightarrow{p_2} T^*X \times \mathrm{Higgs}_G(X)$$

としたとき, Hitchin's Hamiltonian の 0 の逆像の既約成分 L について,

$$(p_2)_*(p_1^*[L] \cap [\text{conormal bundle of } H_\lambda]) = [T_X^* X] \times [L]$$

が成り立つ.

表現の情報もいれようと思ったら, どう formulate すればいいのでしょうか?

125. ochiai: $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^L$ と $\mathfrak{g}^{L*}$ (1)

```
From: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: On a notation A_g(X) in oper2 vs oper3
Date: 5 Jan 1996 04:22:57 -0000
Message-ID: <9601050414.AA07379@rkmath.rikkyo.ac.jp>
```

武部さんの記事

```
In Article <TAKEBE.95Dec15040445@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>
takebe@ms.u-tokyo.ac.jp writes:
```

の「最期に」の少し後のあたりで

| Inv($\mathfrak{g}$) と ... Inv($\mathfrak{g}^{L*}$) とは標準的に同型

というくだりがあります.
また, 黒木教授の記事

```
In Article  <KUROKI.95Dec30010113@ume.math.tohoku.ac.jp>
kuroki@math.tohoku.ac.jp writes:
```

の真ん中辺で

| ... $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g}^L)$ なる同型が存在する...

というくだりがあります.
これ等の同型はいずれも Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ をその双対 $\mathfrak{h}^*$ と (例えば, $\mathfrak{h}$ 上の適当な非退化 2 次形式を使って) 同一視しての話でしょうか? もしそうであるとすると, 定数倍の不定性を決めるのはかなり恣意的に見えるのです.
W 代数の時も事情は同じなのでしょうか.

126. takebe: $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^L$ と $\mathfrak{g}^{L*}$ (2)

```
From: takebe@ms.u-tokyo.ac.jp (TAKEBE Takashi)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: On a notation A_g(X) in oper2 vs oper3
Date: 8 Jan 1996 06:19:19 JST
Message-ID: <TAKEBE.96Jan8061919@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>

In article <9601050414.AA07379@rkmath.rikkyo.ac.jp>
ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai) writes:
```

> `In Article <TAKEBE.95Dec15040445@mssv01.ms.u-tokyo.ac.jp>`
> `takebe@ms.u-tokyo.ac.jp writes:`
>
> の「最期に」の少し後のあたりで
>
> > Inv($\mathfrak{g}$) と ... Inv($\mathfrak{g}^{L*}$) とは標準的に同型

答えにはならないと思いますが, 英語の問題で誤解していた可能性が大なので, 定義を (原文をそのままこの network news に載せない, という原則を破って) 写します.

> Denote by Inv($\mathfrak{g}$) the algebra of G-invariant polynomials on $\mathfrak{g}$. ... where Inv($\mathfrak{g}^{L*}$) is the algebra of invariant polynomials of the Langlands dual $\mathfrak{g}^L$. ... Inv($\mathfrak{g}$) and Inv($\mathfrak{g}^{L*}$) are canonically isomorphic to the algebra of polynomials on h invariant with respect to the Weyl group.

"of" と "on" が微妙に違うので, 混乱しています. Inv($\mathfrak{g}^{L*}$) は $\mathfrak{g}^L$ の対称代数, ということなのでしょうか.

127. kuroki: $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^L$ と $\mathfrak{g}^{L*}$ (3)

```
From: kuroki@math.tohoku.ac.jp (Kuroki Gen)
Newsgroups: shitan.math
Subject: Re: On a notation A_g(X) in oper2 vs oper3
Date: 8 Jan 1996 07:05:43 JST
Message-ID: <KUROKI.96Jan8070543@ume.math.tohoku.ac.jp>

In article <9601050414.AA07379@rkmath.rikkyo.ac.jp>
ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp (Hiroyuki Ochiai) writes:
```

> これ等の同型はいずれも Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ をその双対 $\mathfrak{h}^*$ と (例えば, $\mathfrak{h}$ 上の適当な非退化 2 次形式を使って) 同一視しての話でしょうか? もしそうであるとすると, 定数倍の不定性を決めるのはかなり恣意的に見えるのです.
> W 代数の時も事情は同じなのでしょうか.

W-algebra の話の場合では, もう一つのパラメーター "level" が入っているおかげで, 内積の取り方の不定性が level の定義の不定性の中に全て吸収されてしまいます. なんともうまくできているものです!!

その説明.

有限次元複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対する affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ の定義を復習しましょう. $\hat{\mathfrak{g}}$ はベクトル空間としては,

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z)) \oplus \mathbb{C}K$$

と定義されます. $\hat{\mathfrak{g}}$ の Lie algebra str. を定義するためには, $\mathfrak{g}$ の内積を固定する必要があります. $\mathfrak{g}$ の内積を $(\ |\ )$ と書くことにしましょう. 通常の normalization では long root の長さの 2 乗が 2 になるような内積を取ることになっています. $\hat{\mathfrak{g}}$ の Lie alg. str. は次のように定義されます:

$$K \in \text{center of } \hat{\mathfrak{g}},$$
$$[x \otimes f(z), y \otimes g(z)] = [x, y] \otimes f(z)g(z) + (x|y)\ \mathrm{Res}(f'(z)g(z)\,dz)\,K.$$

ここで, Res は z^{-1} の係数を拾ってくるいつもの留数です.

Affine Lie algebra の level とは central element K の表現空間における固有値のことです. よって, 内積 $(\ |\ )$ の normalization を変えると, level の定義の方も定数倍だけ変化します.

通常の normalization にしたがうと, highest weight integrable representations (有限次元の $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の類似物) の level が非負の整数になるという利点があります.

これは余談ですが, 内積を Cartan-Killing form に取った場合は, critival "level" は $-1/2$ に等しくなります. 実は, このとき, -1 は stable principal G-bundle の moduli 上の canonical line bundle ω に対応し, よって, $-1/2$ (critical level) は square root $\omega^{1/2}$ に対応するという仕組になっています. この意味で, 通常の normalization にしたがわずに Cartan-Killing form を使った方が, critical level を説明するときに dual Coxeter number のような面倒なものを持ち出す必要がなくなり, 幾何との対応が見易くなります.

$U(\hat{\mathfrak{g}})$ を $\hat{\mathfrak{g}}$ の universal enveloping algebra とするとき, パラメーター k に対して,

$$U_k(\hat{\mathfrak{g}}) = U(\hat{\mathfrak{g}})/(K - k)$$

と書くことがあります. ここで, $(K - k)$ は $K - k$ から生成される $U(\hat{\mathfrak{g}})$ の両側イデアルです. $U_k(\hat{\mathfrak{g}})$ の表現は level k を持つ $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現と一致しています.

Feigin-Frenkel の W-algebra $W(\mathfrak{g}, k)$ は $U_k(\hat{\mathfrak{g}})$ に対して定義される「あるもの」です. そして, W-algebra の duality とは, k が "generic" で k と k^L がある対応関係にあるとき, canonical な同型

$$W(\mathfrak{g}^L, k^L) \simeq W(\mathfrak{g}, k) \tag{$*$}$$

が存在するというものでした. k と k^L の対応のさせ方は $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^L$ の内積の取り方によって決まります. 逆に, 内積の取り方による同型写像 (*) の変化は本質的に k と k^L の対応の部分に全て吸収されてしまいます.

これ以上詳しく説明しようとすると, $W(\mathfrak{g},k)$ の中身に触れた上で, Virasoro algebra の Fock space representation の説明をしなければいけないので, 結構面倒なのだ….

参考文献

[A] M. Atiyah: *Complex analytic connections in fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. **85**, 181–207 (1957)

[Bei] A. A. Beilinson: *Geometric Langlands correspondence and representations of Kac-Moody algebras of critical level (after V. Drinfeld)*, hand-written manuscript, 1991, pp. 5

[BB] A. Beilinson and J. Bernstein: *A proof of Jantzen conjectures*, Adv. Sov. Math. **16** Part 1 (Gelfand Seminar), 1–50 (1993)

[BD1] A. Beilinson and V. G. Drinfeld: *Opers*, preprint, pp. 29 (未発表)

[BD2] A. Beilinson and V. G. Drinfeld: *Quantization of Hitchin's fibration and Langlands program*, preprint, pp. 3 (未発表)

[Bo] A. Borel: *Automorphic L-functions*, Proc. Symp. Pure Math. **33** (1979) Part 2, 27–61

[BS] A. A. Beilinson and V. V. Schechtman: *Determinant bundles and Virasoro algebras*, Commun. Math. Phys. **118**, 651–701 (1988)

[Ca] P. Cartier: *Representations of $\mathfrak{p}$-adic groups : a survey*, Proc. Symp. Pure Math. **33**, 111–155

[Ch] I. V. Cherednik: *Definition of τ-functions for generalized affine Lie algebras*, Funct. Anal. Appl. **17**, 243–245 (1983)

[Cor] K. Corlette: *Flat G-bundles with canonical metrics*, J. Diff. Geom. **28** (1988) 361–382

[Dona] Donaldson: *Twisted harmonic maps and the self-duality equations*, Proc. London Math. Soc. **55** (1987) 127–131

[CS] W. Casselman and J. Shalika: *The unramified principal series of p-adic group II — The Whittaker function*, Compositio Mathematica, **41**, Fasc. 2, 1980, 107–231

[DS1] V. G. Drinfeld and V. V. Sokolov: Sov. Math. Dokl. **23** (1981) 3, 457–462

[DS2] V. G. Drinfeld and V. V. Sokolov: *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type*, J. Sov. Math. **30** (1985), 1975–2035

[Fal] G. Faltings: *Stable G-bundles and projective connections*, J. Alg. Geom. **2** (1993) 507–568

[FFR] B. Feigin, E. Frenkel, and Reshetikhin: *Gaudin model, Bethe Ansatz and critical Level*, Commun. Math. Phys. **166** (1994) 27–62

[Fr1] E. Frenkel: *Affine Kac-Moody algebras at the critical level and quantum Drinfeld-Sokolov reduction*, Ph.D. Thesis, Harvard University, 1991.

[Fr2] E. Frenkel: *Affine algebras, Langlands duality and Bethe Ansatz*, `q-alg/9506003`, in Proc. of ICMP Paris 1994

[Gel] S. Gelbart: *An elementary introduction of the Langlands program*, Bull. of the AMS, **10** (1984), 177–219.

[Gin] V. Ginzburg: *Perverse sheaves on a loop group and Langlands' duality*, `alg-geom/9511007`

[Gun] R. C. Gunning: *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1966, pp. 256

[Hit1] N. J. Hitchin: *Stable bundles and integrable systems*, Duke Math. J. **54** (1987) 91–114

[Hit2] N. J. Hitchin: *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc. **55** (1987) 59–126

[HS] V. A. Hinich and V. V. Schechtman: *Deformation theory and Lie algebra homology*, `alg-geom/9405013`

[HT] 谷崎俊之 と 堀田良之: *D* 加群と代数群, シュプリンガー現代数学シリーズ, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995, pp. 308

[Kos1] B. Kostant: *Lie group representations on polynomial rings*, American J. Math., **85** (1963), 327–404,

[Kos2] B. Kostant: *On Whittaker vectors and representation theory*, Invent. math. **48**, 101–184 (1978)

[Kur1] G. Kuroki: *Fock space representations of affine Lie algebras and integral representations in the Wess-Zumino-Witten models*, Commun. Math. Phys. **141**, 511-542 (1991)

[Kur2] 黒木 玄: 共形場理論の定式化について, 数理研講究録 (1995 年 8 月 2 日にした話の拡張版)[111].

[111] `ftp://www.math.tohoku.ac.jp/ kuroki/TeX/cft.tar.gz` に私が数理研講究録に書いた原稿 (の修正版) が置いてあります.

[Mack] K. Mackenzie: *Lie groupides and Lie algebroids in differential geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series **124**, Cambridge University Press (1987)

[Mum] D. Mumford: *An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg–de Vries equation and related non-linear equations*, Proceedings Int. Symp. Algebraic Geometry, Kyoto (1977), 115–153, Kinokuniya Book Store, Tokyo 1978

[Nak] H. Nakajima: Inter. Math. Res. Notices 1994 (2)

[Nek] N. Nekrasov: *Holomorphic bundles and many-body systems*, `hep-th/9503157`

[Simp1] C. T. Simpson: *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization*, J. A. M. S. **1** (1988) 867–918

[Simp2] C. T. Simpson: *Nonabelian Hodge theory*, Proc. of Inter. Congress of Math. Kyoto, Japan, 1990, 747–756

[Sk1] E. K. Sklyanin: *Separation of variables in the Gaudin model*, Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI **164** (1988), J. Sov. Math. **47** (1989) 2473 –2488.

[Sk2] E. K. Sklaynin: *Functional Behte Ansatz, in Integrable and superintegrable systems*, ed. by B. A. Kupershmidt, World Scientific, (1990), 8–33.

[Sk3] E. K. Sklyanin: *Separation of variables — New Trends —*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995), 35–60. [112]

[Spr] T. A. Springer: *Reductive groups*, Proc. Symp. Pure Math. **33** (1979), part 1, 3–27

[Ta] J. Tate: *Number theoretic background*, Proc. Symp. Pure Math., **33** (1979), part 2, 3–26

[Te] C. Teleman: *Sur les structures homographiques d'une surface de Riemann*, Comment. Math. Helv. **33** (1959), 206–211

[TF] Takhtajan and Faddeev: *The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model*, Russian Math. Surveys **34**:5 (1979), 11–68.

[Tu] L. W. Tu: *Semistable bundles over elliptic curve*, Adv. Math. **98**, 1–26 (1993)

[TUY] A. Tsuchiya, K. Ueno, and Y. Yamada: *Conformal field theory on universal families of stable curves with gauge symmetries*, Adv. Stud. Pure. Math. **19**, 459–566 (1989)

[112]何かの proceedings. hep-th か q-alg に載ってた筈ですが今は調べがつかなかった. 東大 preprint, UTMS 95-?? です.

[Ty] A. N. Tyurin: *On periods of quadratic differentials*, Uspekhi Math. Nauk. **33**:6 (1978), 149–195 (Russian Math. Survey **33**:6 (1978), 169–221)

[Vo] D. A. Vogan, Jr.: *The local Langlands conjecture*, Contemporary Mathemarics, Volume **145**, 1993, 305–379

注意: この文献表は本文中に現われた文献をまとめたものである. しかし, 本文中に現われた全ての文献がまとめられているわけでもないし, 関連分野の主要な文献がまとめられているわけでもない.