「数理物理学特選」　集中講義
「表現論特論（修士）」
「代数学特殊講義ＧＩ（博士）」

谷崎　俊之　講師
（大阪市立大学　准教授）

＊　期間：
１０月２８日（火）～１０月３１日（金）

＊　時間：
１５：００～１７：００

＊　講義題目：
「量子旗多様体」

＊　内容：　半単純リー群に対して旗多様体と呼ばれる多様体が定まり，表現論などで重要な役割を果たす．量子群を用いてその類似物を構成しようとすると，非可換な関数環をもつ非可換空間（量子旗多様体）が自然に現れる．この講義では，非可換代数幾何の立場から，量子旗多様体の構成・性質等について解説する．

＊　必要な予備知識：　特にありませんが，代数幾何のごく初歩の事項（射影多様体と次数付き環の対応など）を知っていたほうがわかりやすいと思います．

＊　場所：　川　井　ホ　ー　ル

2008.10.29

1日目は出席できず

東北大学集中講義 2日目 (2008.10.29 (水), 15:00 ~ 17:00)

谷崎俊之 (大阪市立大学)

① 黒木玄記

参考文献

谷崎:『リー代数と量子群』 ⟶ 前半の内容はここにある.

T. Tanisaki: Math. Z. 250, 299-361 ⟶ 後半の内容

$U_q(\mathfrak{g})$: $\mathbb{C}(q)$ 上の Hopf 代数 (これは昨日定義した)

$\parallel$

$\langle k_i, k_i^{-1}, e_i, f_i \mid i \in I \rangle$

$U_q(\mathfrak{h}) := \langle k_i^{\pm 1} \mid i \in I \rangle$, $U_q(\mathfrak{n}^+) := \langle e_i \mid i \in I \rangle$, $U_q(\mathfrak{n}^-) := \langle f_i \mid i \in I \rangle$,

$U_q(\mathfrak{b}) = U_q(\mathfrak{b}^+) := \langle k_i^{\pm 1}, e_i \mid i \in I \rangle$, $U(\mathfrak{b}^-) := \langle k_i^{\pm 1}, f_i \mid i \in I \rangle$ とおく.

<u>Fact</u>

- $U_q(\mathfrak{g}) \cong U_q(\mathfrak{n}^-) \otimes U_q(\mathfrak{h}) \otimes U_q(\mathfrak{n}^+)$ ⟵ 順番を変えてもよい

  $abc \longleftrightarrow a \otimes b \otimes c$ ($abc \in U_q(\mathfrak{g})$, $a \otimes b \otimes c \in U_q(\mathfrak{n}^-) \otimes U_q(\mathfrak{h}) \otimes U_q(\mathfrak{n}^+)$)

- $U_q(\mathfrak{b}^\pm) \cong U_q(\mathfrak{h}) \otimes U_q(\mathfrak{n}^\pm) \cong U_q(\mathfrak{n}^\pm) \otimes U_q(\mathfrak{h})$

<u>remark</u>

- $U_q(\mathfrak{n}^\pm)$ は Hopf subalgebra ではない. Δ で閉じていない.
- $U_q(\mathfrak{h})$, $U_q(\mathfrak{b}^\pm)$ は Hopf subalgebra である

$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C} h_i$, $\mathfrak{h}^* = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C} \alpha_i$, $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$, $[a_{ij}]$: Cartan 行列.

$Q := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i \subset \mathfrak{h}^*$, $Q \ni \gamma = \sum_{i \in I} m_i \alpha_i$ に対して $k_\gamma := \prod_{i \in I} k_i^{m_i}$ とおく. ↗

$Q^+ := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ とおく. $P := \{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z} \ \forall i \in I \}$ とおく.

$P^+ := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \forall i \in I\}$ とおく　　$P \supset Q$ である　　2008.10.29

㋐ このとき $U_q(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{\gamma \in Q} \mathbb{C}(q) k_\gamma$ （＝結合代数として Q の群環）　　

$k_\gamma k_{\gamma'} = k_{\gamma+\gamma'}$.

ルート系と Weyl 群

$i \in I$ に対して，$s_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ を　$s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$　$(\lambda \in \mathfrak{h}^*)$ と定める．

$s_i^2 = 1$ となることがすぐわかるので，$s_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ であることがわかる．

Weyl群 W を　$W = \langle s_i \mid i \in I \rangle \subset GL(\mathfrak{h}^*)$ と定める．（W は有限群になる．）

$\Delta := \bigcup_{i \in I} W \cdot \alpha_i$ を ルート系と呼ぶ．　　（$\mathfrak{g}$：有限次元単純 Lie 代数）

$\Delta^+ := \Delta \cap Q^+$ を 正ルートの集合と呼ぶ．　このとき，$\Delta = \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$．

$w \in W$ に対して，その長さ $\ell(w)$ を次のように定める：

$$\ell(w) := \min\left\{ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists i_1, \dots, i_r \in I \\ \text{s.t. } w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \end{array} \right\}.$$

§2. 有限次元表現論

duality

M: left $U_q(\mathfrak{g})$-module $\Rightarrow$ M^*: 自然に right $U_q(\mathfrak{g})$-module　　$(M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}(q)}(M, \mathbb{C}(q)))$

$$(\langle m, m^* u \rangle := \langle um, m^* \rangle, \quad m \in M,\ m^* \in M^*,\ u \in U_q(\mathfrak{g}))$$

有限次元の表現に限れば，left module と right module は $M \leftrightarrow M^*$ で一対一に対応している．

M^* を left module としてあつかうには S もしくは S^{-1} を使えばよい．

しかし canonical に話をすすめるためには right module のままあつかった方がよい．

tensor product

M, N : left $U_q(\mathfrak{g})$-module $\Longrightarrow$ $M\otimes N$: left $U_q(\mathfrak{g})$-module.

$$\left(\begin{array}{ll} u\cdot(m\otimes n) = \Delta(u)(m\otimes n) & m\in M,\ n\in N,\ u\in U_q(\mathfrak{g}) \\ \Delta(u) = \sum_k u_k\otimes u'_k \text{ のとき}, & u\cdot(m\otimes n) = \sum_k u_k m\otimes u'_k n \end{array}\right)$$

単位表現

$\mathbb{C}(q)$ は ε によって自然に (left) $U_q(\mathfrak{g})$-module である.

$$\left(u\cdot a = \varepsilon(u)a, \qquad u\in U_q(\mathfrak{g}),\ a\in\mathbb{C}(q)\right)$$

定理 すべての ($\mathbb{C}(q)$上) 有限次元の $U_q(\mathfrak{g})$-module は完全可約である.

すなわち, 有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$-module は既約 $U_q(\mathfrak{g})$-modules の直和になる. □

M : $U_q(\mathfrak{g})$-module に対して, $\lambda\in P$ のとき, ($\langle P, Q\rangle\in\mathbb{Z}$ に注意)

$$M_\lambda := \{m\in M \mid k_\gamma m = q^{(\lambda,\gamma)} m \quad (\forall\gamma\in Q)\}$$

$$= \{m\in M \mid k_i m = \underbrace{q^{(\lambda,\alpha_i)}}_{= q_i^{\lambda(h_i)}} m \quad (\forall i\in I)\}$$

とおく.

定義 有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$-module M で $M = \bigoplus_{\lambda\in P} M_\lambda$ をみたすものを integrable $U_q(\mathfrak{g})$-module と呼ぶ. □

(注) 一般の有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$-module は $U_q(\mathfrak{g})$ の automorphism でひねれば integrable になる. □

定理

$$\{\text{既約 integrable } U_q(\mathfrak{g})\text{-modules (の同型類)}\} \overset{1:1}{\underset{\sim}{\longleftrightarrow}} P^+$$
$$V(\lambda) \longleftrightarrow \lambda$$

ここで $V(\lambda)$ は $V(\lambda)_\lambda \neq 0$; $V(\lambda)_\mu \neq 0 \Rightarrow \mu \in \lambda - Q^+$ という条件で特徴付けられる既約 integrable $U_q(\mathfrak{g})$-module である.

- $\dim V(\lambda)_\lambda = 1$ となるので $V(\lambda)_\lambda = \mathbb{C}(q)\, l_\lambda$ によって定数倍を除いて一意に $l_\lambda \in V(\lambda)_\lambda$ が定まる.
- $\lambda \in P$ に対して, $w\lambda \in P^+$ となる $w \in W$ が存在する. $\dim V(w\lambda)_\lambda = 1$ なので $V(w\lambda)_\lambda = \mathbb{C}(q)\, l_\lambda$ によって定数倍を除いて一意に $l_\lambda \in V(w\lambda)_\lambda$ が定まる. □

§3. braid 群の作用

M : integrable $U_q(\mathfrak{g})$-module, $i \in I$ に対して $T_i : M \to M$ を次で定める:

$$T_i v = \sum_{\substack{a,b,c \geq 0 \\ -a+b-c = \lambda(h_i)}} (-1)^b q_i^{b-ac} e_i^{(a)} f_i^{(b)} e_i^{(c)} v, \qquad v \in M_\lambda,\ \lambda \in P.$$

ここで, $e_i^{(a)} = \dfrac{e_i^a}{[a]_{q_i}!}$, $f_i^{(a)} = \dfrac{f_i^a}{[a]_{q_i}!}$.

(注) Lie 環の場合の $\exp(e_i)\exp(-f_i)\exp(e_i)$ を展開したものの q-analogue が上の式になってる. exp の q-analogue を使っても書ける □

定理 $w \in W$ に対して, $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$, $r = l(w)$ と表わすとき, $T_w = T_{i_1} \cdots T_{i_r}$ は w の表示によらずに定まる.

(すなわち, T_i たちは braid relations をみたしてる.) □

Lemma ・T_w は可逆.
・$T_w(M_\lambda) = M_{w(\lambda)}$. □

(このLemmaの証明はむずかしくない)

定義 $i \in I$ に対して, $U_q(\mathfrak{g})$ の algebra automorphism T_i が次で定まる:

$$T_i(e_i) = -f_i k_i,$$

$$T_i(e_j) = \sum_{k=0}^{-a_{ij}} (-q_i)^k e_i^{(-a_{ij}-k)} e_j e_i^{(k)} \quad (i \neq j),$$

$$T_i(f_i) = -k_i^{-1} e_i,$$

$$T_i(f_j) = \sum_{k=0}^{-a_{ij}} (-q_i)^k f_i^{(k)} f_j f_i^{(-a_{ij}-k)} \quad (i \neq j),$$

$$T_i(k_\gamma) = k_{s_i(\gamma)}.$$

□

上と同様にして, $U_q(\mathfrak{g})$ の alg. autom T_w $(w \in W)$ が定まる

(Mは integrable $U_q(\mathfrak{g})$-module)

定理 $T_w(um) = T_w(u)\, T_w(m)$ $(w \in W,\ u \in U_q(\mathfrak{g}),\ m \in M)$. □

Lemma $\lambda \in P^+$, $v \in M$, M: integrable $U_q(\mathfrak{g})$-module のとき,

$$\begin{cases} T_w(l_\lambda \otimes v) = T_w(l_\lambda) \otimes T_w(v), \\ T_w^{-1}(v \otimes l_\lambda) = T_w^{-1}(v) \otimes T_w^{-1}(l_\lambda). \end{cases}$$

□

帰納法でやればそんなにむずかしくはない

(l_λ は $V(\lambda)$ の h.w. vector)

§4. 量子座標環

考え方 $\mathfrak{g}$: Lie alg., G: 対応する (affine) 代数群.

$A(G)$: G の座標環. ⟵ これの q-analogue を考えたい.

$U(\mathfrak{g}) \longleftrightarrow A(G)$ という duality がある

(Hopf algebra を自己双対概念. (有限次元 Hopf 代数はその dual と一対一に対応している))

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g}) \times A(G) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (u, f) & \longmapsto & (uf)(1) \end{array}$$

（$U(\mathfrak{g})$の元は G 上の微分作用素とみなせる。）

によって，$A(G) \hookrightarrow U(\mathfrak{g})^*$ と埋め込める。

$$\begin{array}{ccc} A(G) & \hookrightarrow & U(\mathfrak{g})^* \\ \| & & \cup \\ A(G) & \cong & \{\text{有限次元表現の行列成分で生成}\} \end{array}$$

これのマネをしよう。 □

一般論

H : Hopf 代数$/k$.

$H^* = \mathrm{Hom}_k(H, k)$ とおく。（H^*は一般には大き過ぎる。）

◎ H^* は (H,H)-bimodule である。（left H-module かつ right H-module で left action と right action が可換）

すなわち

$f \in H^*$，$u_1, u_2, u \in H$ に対して，

$$\langle u_1 f u_2, u \rangle = \langle f, u_2 u u_1 \rangle$$

によって，H^*は (H,H)-bimodule になる。 □

Hの multiplication の dual ${}^t m_H$ は ${}^t m_H : H^* \to (H\otimes H)^*$ という写像になる。

単元元 の dual ${}^t \eta_H$ は ${}^t \eta_H : H^* \to k$

comultiplication の dual ${}^t \Delta_H$ は ${}^t \Delta_H : (H\otimes H)^* \to H^*$

counit の dual ${}^t \varepsilon_H$ は ${}^t \varepsilon_H : k \to H^*$

antipode の dual ${}^t S_H$ は ${}^t S_H : H^* \to H^*$

$(H\otimes H)^* \supset H^* \otimes H^*$ なので $\Delta_{H^*} = {}^t m_H$ と定めようとすると，

$$\begin{array}{ccc} {}^t m_H : H^* & \longrightarrow & (H\otimes H)^* \\ & \overset{???}{\searrow} & \cup \\ & & H^* \otimes H^* \end{array}$$

が問題になる。

2008.10.29

⑦

T : H の Hopf subalgebra で k-algebra として可換，k-coalgebra として余可換

であるものとする．　　$\left(\Delta(x) = \sum_i x_i \otimes x_i' \Rightarrow \Delta(x) = \sum_i x_i' \otimes x_i\right)$

（$\boxed{例}$　$H = U_q(\mathfrak{g})$,　$k = \mathbb{C}(q)$,　$T = U_q(\mathfrak{h})$.　□）

$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(T, k)$ には　$(\chi\chi')(t) = (\chi \otimes \chi')(\Delta(t))$　$(\chi, \chi' \in \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(T, k),\ t \in T)$

によって群構造が入る．（可換群になる）

$\Lambda \subset \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(T, k)$, subgroup をとる

$$\left(\boxed{例}\quad \begin{array}{ccc} \Lambda = P & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}(q)\text{-alg}}(U_q(\mathfrak{h}), \mathbb{C}(q)) \\ \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ \lambda & \longmapsto & (k_\gamma \mapsto q^{(\lambda, \gamma)}). \quad \square \end{array}\right)$$

$\mathcal{M}_{T,\Lambda} := \left\{ 有限次元\ T\text{-module}\ M \;\middle|\; M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \right\}$,

ここで　$M_\lambda := \{ m \in M \mid tm = \lambda(t)m \quad (\forall t \in T) \}$.

$\mathcal{M}^2_{T,\Lambda} := \left\{ 有限次元\ T \otimes T\text{-module}\ M \;\middle|\; M = \bigoplus_{\lambda, \mu \in \Lambda} M_{(\lambda,\mu)} \right\}$,

ここで　$M_{(\lambda,\mu)} = \{ m \in M \mid (t \otimes t')m = \lambda(t)\mu(t')m \quad \forall t, t' \in T \}$.

$\boxed{\text{Lemma}}$ $f \in H^*$に関して以下は同値:

(a) $Hf \in \mathcal{M}_{T,\Lambda}$,

(b) $fH \in \mathcal{M}_{T,\Lambda}$. ($fH$を right T-module $\overset{T\text{は可換}}{=}$ left T-module とみなす.)

(c) $HfH \in \mathcal{M}^2_{T,\Lambda}$.

(d) $\exists I$: Hの両側イデアル s.t. $\langle f, I \rangle = 0$, $H/I \in \mathcal{M}^2_{T,\Lambda}$.

$\boxed{\text{証明の方針}}$

(c) $\Rightarrow$ (a), (b) は明らか.

(a) $\Rightarrow$ (d): $I = \mathrm{Ker}(H \to \mathrm{End}(Hf))$ とおけばよい.

(d) $\Rightarrow$ (c): $f \in (H/I)^*$ とみなせるので $HfH \subset (H/I)^* \subset H^*$. □

$\boxed{\text{定義}}$ $H^*_{T,\Lambda} := \{ f \in H^* \mid f$は上のLemmaの条件(a)~(d)をみたす.$\}$. □

$\boxed{\text{定理}}$ $H^*_{T,\Lambda}$は ${}^\star m_H$, ${}^\star \eta_H$, ${}^\star \Delta_H$, ${}^\star \varepsilon_H$, ${}^\star S_H$ を $H^*_{T,\Lambda}$ 上の制限することによって自然に Hopf algebra になる

$\boxed{\text{証明}}$

$H^*_{T,\Lambda}$はH^*の vector subspace になる. (カンタン)

${}^\star m_H (H^*_{T,\Lambda}) \subset H^*_{T,\Lambda} \otimes H^*_{T,\Lambda}$,

${}^\star \Delta_H (H^*_{T,\Lambda} \otimes H^*_{T,\Lambda}) \subset H^*_{T,\Lambda}$,

${}^\star \varepsilon_H (k) \subset H^*_{T,\Lambda}$,

${}^\star S_H (H^*_{T,\Lambda}) \subset H^*_{T,\Lambda}$ を示さなければいけない.

論文にも証明を書いてないが, けっこうめんどうなので省略する. □

$\boxed{\text{問題}}$ 証明を完成させよ. □

定義

$\mathrm{Mod}_{T,\Lambda}(H) := \{$H-moduleであり, T-moduleとして $\mathcal{M}_{T,\Lambda}$ に含まれるもの$\}$.

$\mathrm{Mod}^{\mathrm{irred}}_{T,\Lambda}(H) := \{ M \in \mathrm{Mod}_{T,\Lambda}(H) \mid M$ は H-moduleとして既約$\}$. □

定義 $M \in \mathrm{Mod}_{T,\Lambda}(H)$ のとき, linear map $\Phi_M : M^* \otimes M \to H^*$ を次で定める:

$$\langle \Phi_M(m^* \otimes m), u \rangle := \langle m^*, um \rangle \qquad \left(u \in H,\ m \in M,\ m^* \in M^* \right).$$

Φ_M を H の M への作用の<u>行列成分</u>と呼ぶ. □

Proposition

(i) $$H^*_{T,\Lambda} = \sum_{M \in \mathrm{Mod}_{T,\Lambda}(H)} \mathrm{Image}(\Phi_M).$$

(ii) $\mathrm{Mod}_{T,\Lambda}(H)$ が完全可約で $\mathrm{Mod}^{\mathrm{irred}}_{T,\Lambda}(H)$ に属する H-module が絶対既約 (代数閉体にもちあげても既約) であると仮定すると,

$$H^*_{T,\Lambda} \cong \sum_{[M] \in \mathrm{Mod}^{\mathrm{irred}}_{T,\Lambda}(H)/\cong} M^* \otimes M \qquad ((H,H)\text{-bimodule として同型}).$$ □

定義
- $A_q(G) := U_q(\mathfrak{g})^*_{U_q(\mathfrak{h}), P}$
- $A_q(B^\pm) := U_q(\mathfrak{b}^\pm)^*_{U_q(\mathfrak{h}), P}$
- $A_q(H) := U_q(\mathfrak{h})^*_{U_q(\mathfrak{h}), P}$

によって Hopf algebras $A_q(G)$, $A_q(B^\pm)$, $A_q(H)$ を定める □

上の Proposition (ii) の条件は $A_q(G)$, $A_q(H)$ では成立するが, $A_q(B^\pm)$ はそうではない.

上の Proposition より

$$A_q(G) \cong \bigoplus_{\lambda \in P^+} V(\lambda)^* \otimes V(\lambda) \qquad (\text{Peter-Weylの定理}),$$

$$A_q(H) = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathbb{C}(q) \chi_\lambda, \qquad \chi_\lambda(k_\gamma) = q^{(\lambda,\gamma)}.$$

黒木玄記

東北大学集中講義 3日目 (2008.10.30(木), 15:00〜17:00)

谷崎俊之 (大阪市立大学)

昨日のつづき

例 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $G = SL_n(\mathbb{C})$, $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{n-1}(\mathbb{Z})$.

この場合の $A_q(SL_n)$ の具体的記述. $I = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

<u>$U_q(\mathfrak{sl}_n)$ の自然表現</u>

$V = \mathbb{C}(q)^n = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{C}(q) v_i$ に $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-module の構造 $\rho : U_q(\mathfrak{sl}_n) \to \mathrm{End}(V)$

を次のように定めることができる:

$$\rho(k_i^{\pm 1}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & q^{\pm 1} & & & \\ & & & & q^{\mp 1} & & \\ & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad i\text{番目}$$

$$\begin{array}{cc} & i+1 \\ \rho(e_i) = & \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \ i \end{array}, \quad \rho(f_i) = {}^t\rho(e_i).$$

(<u>問題</u> これで $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ の表現が定まることを示せ.)

$1 \leqq i, j \leqq n$ に対して $\rho_{ij} \in A_q(SL_n) \subset U_q(\mathfrak{sl}_n)^*$ を $\rho(u) = [\rho_{ij}(u)]$ $(u \in U_q(\mathfrak{sl}_n))$

で定める. (ρ_{ij} は ρ の (i, j) 成分)

定理 (Drinfeld, ...)

$A_q(\mathfrak{sl}_n)$ は結合代数として, $\{\rho_{ij} \mid 1 \leqq i, j \leqq n\}$ で生成される.

また次の基本関係式をみたしている:

ア

(ア)
$$\rho_{ir}\rho_{is} = q\,\rho_{is}\rho_{ir} \quad (r<s) \quad \cdots ①$$
$$\rho_{ir}\rho_{jr} = q\,\rho_{jr}\rho_{ir} \quad (i<j) \quad \cdots ②$$
$$\rho_{ir}\rho_{js} = \rho_{js}\rho_{ir} \quad (i<j,\ r>s) \quad \cdots ③$$
$$\rho_{ir}\rho_{js} = \rho_{js}\rho_{ir} + (q-q^{-1})\rho_{is}\rho_{jr} \quad (i<j,\ r<s) \quad \cdots ④$$
$$\sum_{\sigma\in S_n}(-q)^{\ell(\sigma)}\rho_{\sigma(1),1}\rho_{\sigma(2),2}\cdots\rho_{\sigma(n),n} = 1. \quad \cdots\cdots ⑤$$

ここで $\ell(\sigma) = \#\{(i,j)\mid 1\leqq i<j\leqq n,\ \sigma(i)>\sigma(j)\}$. □

$\boxed{\text{証明について}}$

- $A_q(sl_n)$ が ρ_{ij} たちで生成されること $\left(A_q(SL_n) = \langle\rho_{ij}\rangle_{\mathbb{C}(q)\text{-algebra}}\right)$.

  Lie 環の場合では，一般の有限次元表現は $\underbrace{(V,\rho)\text{の}}_{\text{テンソル積の}}$分解で現われる. (次元: 既約)

  同じことが $U_q(sl_n)$ でも成立している.
  このことから $A_q(SL_n) = \langle\rho_{ij}\rangle_{\mathbb{C}(q)\text{-algebra}}$ が証明される.

- 関係式が ①, …, ⑤ でつきていること.

  $\tilde{A} := \underset{\text{free alg.}}{\mathbb{C}(q)\langle x_{ij}\rangle} \xrightarrow[\text{alg. hom.}]{\pi} A_q(SL_n)$ を $\pi(x_{ij}) = \rho_{ij}$ で定める

  $I :=$ (関係式 ①〜⑤ に対応する $\tilde{A}$ の両側イデアル)

  $I = \operatorname{Ker}\pi$ を示したい.

  ◦ $I \subset \operatorname{Ker}\pi$ の示し方.

  $\langle\pi(I), u\rangle = 0 \quad (\forall u\in U_q(sl_n))$ を示せばよい

  u が生成元の場合は check できる.

  $\langle\pi(I), u_1\rangle = \langle\pi(I), u_2\rangle = 0$ のとき $\langle\pi(I), u_1u_2\rangle = 0$ となることを示せばよい.

  $\langle\pi(I), u_1u_2\rangle = \langle\Delta(\pi(I)), u_1\otimes u_2\rangle$ なので

  $\Delta(\pi(I)) \subset \pi(I)\otimes A_q(SL_n) + A_q(SL_n)\otimes\pi(I)$ を示せばよい.

(ア)

㋐ $\Delta(\rho_{ij}) = \sum_r \rho_{ir} \otimes \rho_{rj}$ から出る。

- $\tilde{A}/I \longrightarrow A_q(sl_n)$ が単射の示し方：

$\tilde{A}/I$ から出発して $\tilde{A}/I$ について Peter-Weyl 型定理が成立することを示せる (野海・山田・三町)

その結果から単射性が出る。(実際には同型性が出る) $\square$

$\boxed{\text{Remark}}$ ①〜④ は R 行列を用いて書ける。 $\square$

$\boxed{A_q(sl_n) \text{ の Hopf 代数構造}}$

$$\Delta(\rho_{ij}) = \sum_{r=1}^{n} \rho_{ir} \otimes \rho_{rj}, \quad \varepsilon(\rho_{ij}) = \delta_{ij}, \quad [S(\rho_{ij})] = [\rho_{ij}]^{-1}. \quad \square$$

逆行列を余因子を使って書く公式の q-analogue が出てくる。(野海・山田・三町)

$\boxed{\text{例終}}$

$\boxed{A_q(G) \subset U_q(\mathfrak{g})^*, \quad A_q(B^{\pm}) \subset U_q(\mathfrak{b}^{\pm})^*, \quad A_q(H) \subset U_q(\mathfrak{h})^* \text{ の関係}}$

$$\begin{tikzcd} & U_q(\mathfrak{b}^+) \arrow[dr, hook] & \\ U_q(\mathfrak{h}) \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & U_q(\mathfrak{g}) \\ & U_q(\mathfrak{b}^-) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

より

$$\begin{tikzcd} & A_q(B^+) \arrow[dl, "r^{B^+}_H"'] & \\ A_q(H) & & A_q(G) \arrow[ul, "r^G_{B^+}"'] \arrow[ll, "r^G_H"'] \arrow[dl, "r^G_{B^-}"] \\ & A_q(B^-) \arrow[ul, "r^{B^-}_H"] & \end{tikzcd}$$

という写像ができる

(r は restriction (制限) の略)

restriction たちが全射であるかどうかは明らかではない。

restriction たちは Hopf 代数の準同型である。

③
$$\begin{tikzcd} U_q(\mathfrak{h}) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & U_q(\mathfrak{b}^{\pm}) \arrow[r, two heads, "\varphi"] & U_q(\mathfrak{h}) \end{tikzcd}$$
(Hopf alg. の準同型の列)

$$\begin{array}{ccc} U_q(\mathfrak{b}^{\pm}) & & U_q(\mathfrak{h}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ k_i^{\pm 1} & \longmapsto & k_i^{\pm 1} \\ e_i & \longmapsto & 0 \\ f_i & \longmapsto & 0 \end{array}$$

i と φ の合成は identity になる。

これより、

$$\begin{tikzcd} A_q(H) & A_q(B^{\pm}) \arrow[l, "r_H^{B^{\pm}}"'] & A_q(H) \arrow[l, "\varphi^*"'] \arrow[ll, bend left, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

よって $r_H^{B^{\pm}}$ は全射になる。

以下、B^+, $\mathfrak{b}^+$ を B, $\mathfrak{b}$ と書くことにする。

$\boxed{A_q(B) \text{について}}$

$$\begin{aligned} A_q^l(N^+) &:= \{ f \in A_q(B) \mid (1 \otimes r_H^B)\Delta(f) = f \otimes 1 \} \\ &= \left\{ f \in A_q(B) \,\middle|\, \langle f, ux \rangle = \varepsilon(x)\langle f, u \rangle \ \begin{pmatrix} u \in U_q(\mathfrak{b}) \\ x \in U_q(\mathfrak{h}) \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{ f \in A_q(B) \mid x \cdot f = \varepsilon(x) f \ \ (x \in U_q(\mathfrak{h})) \} \end{aligned}$$

は $A_q(B)$ の subalg. になる (Hopf subalg. にはならない。)

$\boxed{\text{Proposition}}$

$\left(A_q(B) \overset{\varphi^*}{\hookleftarrow} A_q(H)\right)$

(i) $A_q^l(N^+) \otimes A_q(H) \xrightarrow{\sim} A_q(B)$, $\quad f \otimes f' \longleftrightarrow f\,\varphi^*(f')$.

(ii)
$$\begin{array}{ccccc} A_q^l(N^+) & \xrightarrow{\sim} & \displaystyle\bigoplus_{\gamma \in Q^+} U_q(\mathfrak{n}^+)_\gamma^* \subset U_q(\mathfrak{n}^+)^* \twoheadleftarrow U_q(\mathfrak{b})^* \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & f|_{U_q(\mathfrak{n}^+)}. \end{array}$$

ここで、$U_q(\mathfrak{n}^+) = \displaystyle\bigoplus_{\gamma \in Q^+} U_q(\mathfrak{n}^+)_\gamma$, $\ U_q(\mathfrak{n}^+)_\gamma = \{ x \in U_q(\mathfrak{n}^+) \mid k_i x k_i^{-1} = q^{\langle \gamma, \alpha_i \rangle} x \ \ (i \in I) \}$.

(証明は論文にあるはず。) $\square$

$\boxed{\text{Remark}}$ (専門家向け)

Drinfeld pairing を使うと、$A_q^l(N^+) \simeq U_q(\mathfrak{n}^+)$ と思える。 $\square$

Cor. $r^G_B : A_q(G) \to A_q(B)$ も全射である。 $\square$

特に $A_q(B) = \{ f|_{U_q(b)} \mid f \in A_q(G) \}$ である。

§5. 通常の旗多様体 (flag manifold)

G : $\mathbb{C}$ 上の半単純代数群
$\cup$
B : Borel 部分群

$X = G/B$ を旗多様体と呼ぶ。

これの q-analogue を直接考えようとするとむずかしくなる

プリュッカー埋め込みの準備

$P^+ := \{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ (i \in I) \}$.

$\omega_i \in P^+$ を $\omega_i(h_j) = \delta_{ij}$ と定める。 基本ウェイト (fundamental weights)

$P^+ = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \omega_i$

h.w. ω_i の既約表現を $V(\omega_i) = V_i$ と書く。

$V(\omega_i) = V$ の h.w. vector を $l_i = l_{\omega_i}$ と書く。

$G \to GL(V_i)$, 群の表現 $(i \in I)$ を通して,

G は $\prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i)$ に作用する。 $x_0 := ([l_i])_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i)$ とおく。

projective space

このとき $B = \{ g \in G \mid g x_0 = x_0 \}$ となるので,

$$X = G/B \simeq G x_0 \subset \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i). \qquad \Big(X = G/B \underset{\text{closed embedding}}{\hookrightarrow} \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_i) \Big).$$

これを Plücker embedding と呼ぶ。

Segre embedding $\prod_{\lambda\in I}\mathbb{P}(V_\lambda)\hookrightarrow\mathbb{P}(\bigotimes_{\lambda\in I}V_\lambda)$ を使えば

$G/B = \mathrm{Proj}(▨)$ と書ける。 (Segre embedding を使うと表現の情報が失われる)

これを使わずに "Proj for $\mathbb{Z}^l$-graded ring" を用いる。 ここで $\begin{cases} l = \# I. \\ \mathbb{Z}^l = P \end{cases}$

直積 $\prod_{\lambda\in I}\mathbb{P}(V_\lambda)$ の中の多様体の記述

$X = G/B = \mathrm{Proj}_P(A)$. ここで A は P-graded ring.

A をどのように書くか? (A を群の言葉で書き、その q-analogue を考えれば X の量子化ができたと考えてよいだろう。)

$\boxed{A\text{の記述}}$

$\prod_{\lambda\in I}\mathbb{P}(V_\lambda)$ 上の射影座標環は $\bigotimes_{\lambda\in I}S(V_\lambda^*)$.

$$A = \Big(\bigotimes_{\lambda\in I}S(V_\lambda^*)\Big)\Big/I_X,\quad I_X = \Big\{f\in\bigotimes_{\lambda\in I}S(V_\lambda^*)\ \Big|\ f|_X = 0\Big\}.$$

$\bigotimes_{\lambda\in I}S(V_\lambda^*)$ は P-graded ring になる:

$$\Big(\bigotimes_{\lambda\in I}S(V_\lambda^*)\Big)\Big(\sum_{\lambda\in I}m_\lambda w_\lambda\Big) = \bigotimes_{\lambda\in I}S^{m_\lambda}(V_\lambda^*).$$

I_X は homogeneous ideal なので A も P-graded ring になる

A を $A(G)$ に埋め込んで考える:

$$\bigotimes_{\lambda\in I}S(V_\lambda^*)\xrightarrow{\ \varphi\ }A(G),\quad f\longmapsto\big(g\mapsto f((gl_\lambda)_{\lambda\in I})\big).$$

(G の V_λ たちの作用と h.w. vector l_λ たちから定まる自然な写像)

$\mathrm{Ker}\,\varphi = I_X$ なので $A\hookrightarrow A(G)$ (A は $A(G)$ の部分環になる).

$\boxed{\text{Fact}}$ $A = \bigoplus_{\lambda\in P^+}A(\lambda)$,

$\lambda\in P^+$ は B のキャラクターとみなせる

$$A(\lambda) = \big\{f\in A(G)\ \big|\ f(gb) = f(g)b^\lambda\quad(g\in G,\ b\in B)\big\}.\quad\square$$

よって,
$$\begin{cases} X = G/B = \mathrm{Proj}_P(A), \quad A = \bigoplus_{\lambda \in P^+} A(\lambda) \subset A(G), \\ A(\lambda) = \{ f \in A(G) \mid f(gb) = f(g) b^\lambda \quad (g \in G,\ b \in B) \} \end{cases}$$
から出発すればよい.

$\boxed{\text{Remark}}$ (1) $A = \{ f \in A(G) \mid f(gn) = f(g) \quad (g \in G,\ n \in N^+) \}$

$= \{ G/N^+$ 上の "正則" 函数 $\}$.

ただし, G/N^+ が affine にならないことに注意せよ.

Spec A は G/N^+ を含む多様体になる.

(2)
$$\begin{array}{ccccc} A(G) & \simeq & \bigoplus_{\lambda \in P^+} V(\lambda)^* \otimes V(\lambda) & & (\text{Peter-Weyl の定理}). \\ \cup & & \cup & & \\ A & \simeq & \bigoplus_{\lambda \in P^+} V(\lambda)^* \otimes l_\lambda & & \\ \cup & & \cup & & \\ A(\lambda) & \simeq & V(\lambda)^* \otimes l_\lambda & \simeq & V(\lambda)^*. \end{array}$$
□

$\boxed{X \text{ の affine open covering}}$ (U_w の complement は divison)

$$X = G/B = \bigcup_{w \in W} U_w, \quad U_w = wN^-B/B \simeq N^-.$$
$$wgB/B \longleftrightarrow g \quad (wgB/B \in wN^-B/B,\ g \in N^-)$$

affine open covering

これを座標環の言葉で言い直したい.

$A(U_w) = (U_w \text{ の座標環}) = (S_w^{-1} A)(0)$ 　Aの局所化　degree-0 part

ここで $S_w = (X \setminus U_w \text{ の定義式のなす積閉集合}) = \bigcup_{\lambda \in P^+} \mathbb{C}^\times c_w^\lambda$,

$$c_w^\lambda (g) = \langle l^*_{w\lambda}, g l_\lambda \rangle.$$

ここで, $V(\lambda)_\lambda = \mathbb{C} l_\lambda$, $V(\lambda)^*_{w\lambda} = \mathbb{C} l^*_{w\lambda}$. 　$V(\lambda)^*$ を右 G 加群とみなす.

(一般に N が右 G 加群のとき, $N_\lambda = \{ n \in N \mid nt = t^\lambda n \quad (t \in H) \}$.)

§6. 旗多様体の量子化 (の斉(せい)次座標環)

$$A_q = A_q(G/N) := \bigoplus_{\lambda \in P^+} A_q(G/N, \lambda) \subset A_q(G),$$

$$A_q(G/N,\lambda) := \left\{ f \in A_q(G) \,\middle|\, (1 \otimes r^G_B)\Delta(f) = f \otimes \chi_\lambda \right\} = \left\{ f \in A_q(G) \,\middle|\, \begin{array}{l} x \cdot f = \chi_\lambda(x) f \\ (x \in U_q(\mathfrak{b})) \end{array} \right\}.$$

($\lambda \in P$ に対して $\chi_\lambda : U_q(\mathfrak{h}) \to \mathbb{C}(q)$, $\chi_\lambda(k_\gamma) = q^{\langle \lambda, \gamma \rangle}$, ④ページの φ との合成も χ_λ と書く.)

このとき,

$$\begin{array}{ccccc}
A_q(G) & \simeq & \bigoplus_{\lambda \in P^+} V(\lambda)^* \otimes V(\lambda) & & \\
\cup & & \cup & & \\
A_q(G/\;\;) & \simeq & \bigoplus_{\lambda \in P^+} V(\lambda)^* \otimes l_\lambda & & \\
\cup & & \cup & & \\
A_q(G/\;\;, \lambda) & \simeq & V(\lambda)^* \otimes l_\lambda & \simeq & V(\lambda)^*. \\
\Psi & & \Psi & & \\
c^\lambda_m & \longleftrightarrow & m \otimes l_\lambda & & \\
\parallel & & & & \\
\Phi_{V(\lambda)^*}(m \otimes l_\lambda) & & & &
\end{array}$$

$A_q(G)$ の元としては, $\langle c^\lambda_m, u \rangle = \langle m, u l_w \rangle \quad (u \in U_q(\mathfrak{g}))$

$\boxed{\text{Lemma}}$ $A_q(G/N)$ は $A_q(G)$ の右 $U_q(\mathfrak{g})$-submodule. □

$\boxed{\text{Lemma}}$ $A_q(G/N)$ は P-graded $\mathbb{C}(q)$-algebra.

$\left(A_q(G/N, 0) = \mathbb{C}(q)1, \quad A_q(G/N,\lambda)\, A_q(G/N,\mu) \subset A_q(G/N, \lambda+\mu) \right)$ □

$\boxed{\text{Lemma}}$

$$\begin{array}{ccc}
A_q(G) & \xrightarrow{\Delta} & A_q(G) \otimes A_q(G) \\
\cup & & \cup \\
A_q(G/N) & \xrightarrow{\overline{\Delta}} & A_q(G) \otimes A_q(G/N)
\end{array}$$

("G の G/N への作用"). □

2008.10.30

⑨

§7. affine open subset U_w の q 類似

$w \in W$ (fix).

$$S_w := \bigcup_{\lambda \in P^+} \mathbb{C}(q)^\times c^\lambda_{l^*_{w\lambda}} \qquad (\langle c^\lambda_{l^*_{w\lambda}}, u \rangle = \langle l^*_{w\lambda}, u l_\lambda \rangle).$$

$\boxed{\text{Lemma}}$ S_w は $A_q(G/N)$ の可換な積閉集合になる. □

局所化 $S_w^{-1} A_q(G/N)$ を考えたい。(非可換環の局所化)

S_w は Ore condition をみたしているか?

この辺の話から明日始める

東北大学集中講義 2008.10.31, 15:00〜17:00

谷崎俊之 (大阪市立大)

$A_q(G/N) \subset A_q(G)$

$w \in W$ (fix)

$$S_w = \bigcup_{\lambda \in P^+} \mathbb{C}(q)^\times c^\lambda_{\ell^*_{w\lambda}} \qquad \left(\langle c^\lambda_{\ell^*_{w\lambda}}, u \rangle = \langle \ell^*_{w\lambda}, u\ell_\lambda \rangle \quad (u \in U_q(\mathfrak{g})) \right)$$

Lemma　S_w は $A_q(G/N)$ の中の可換積閉集合. □

局所化 $S_w^{-1}A_q(G/N)$, $(S_w^{-1}A_q(G/N))(0)$ を考えたい.

非可換環の局所化

A : 非可換環, $S \subset A$, 積閉集合,

このとき"局所化" $S^{-1}A$ が定まる.

$$\left(\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & S^{-1}A \\ & \searrow^{\varphi} & \Big\downarrow {\scriptstyle \exists! \psi} \\ & & B \end{array} \qquad \varphi(s) \text{ は } B \text{ で可逆 } (s \in S)\right)$$

よい局所化

$$\left.\begin{array}{l} S^{-1}A = \{ i(s)^{-1} i(a) \mid s \in S,\ a \in A \} \\ \mathrm{Ker}\, i = \{ a \in A \mid Sa \ni 0 \} \end{array}\right\} \iff S \text{ は左Ore条件をみたす.}$$

左Ore条件

$$\begin{cases} (S1) & s \in S,\ a \in A \Rightarrow \exists t \in S\ \exists b \in A \text{ s.t. } ta = bs. \\ (S2) & s \in S,\ a \in A,\ as = 0 \Rightarrow \exists t \in S \text{ s.t. } ta = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Proposition}}$ S_w は $A_q(G/N)$ の中で左(右) Ore 条件をみたす。

さらに $A_q(G/N) \xrightarrow{\lambda} S_w^{-1}A_q(G/N)$ は単射になる。 □

証明は略す。

$\boxed{\text{Remark}}$ (より強い主張) S_w は $A_q(G)$ の中でも左 Ore 条件をみたす。
(Joseph の本に書いてある。) □

$\boxed{\text{定義}}$ $R_w := S_w^{-1}A_q(G/N)$. (これは P-graded ring.)

$$= \bigoplus_{\lambda \in P} R_w(\lambda) \qquad \left(\text{注}\ A_q(G/N) = \bigoplus_{\lambda \in P^+} A_q(G/N, \lambda) \right)$$

マイナス次数も必要になる　　　プラスパートだけではない □

$\boxed{\text{Remark}}$ $R_w(\lambda)$ は $\Gamma(U_w, \mathcal{O}_X(-\lambda))$ の q-analogue である □

$\boxed{\text{定義}}$ $A_q(U_w) := R_w(0)$. □

$\boxed{\text{Lemma}}$ $R_w(\lambda)$ は 左(右) $R_w(0)$-module として free of rank 1;

$$\begin{array}{ccc} R_w(\lambda) & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & R_w(0) \\ \Psi & & \Psi \\ f\cdot z & \longleftrightarrow & f \end{array}. \qquad \left(\begin{array}{ccc} R_w(\lambda) & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & R_w(0) \\ \Psi & & \Psi \\ z\cdot f & \longleftarrow & f \end{array} \right).$$

ここで $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in P^+$, $z = \left(C^{\lambda_2}_{\ell^* w\lambda_2}\right)^{-1} C^{\lambda_1}_{\ell^* w\lambda_1}$. □

$\boxed{\text{Cor.}}$ $R_w = \bigoplus_{\lambda \in P} R_w(\lambda)$ は 左(右) $R_w(0)$-module として free. □

$\boxed{\text{例}}$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. $P = \mathbb{Z}\rho$, $P^+ = \mathbb{Z}_{\geq 0}\rho$, $W = \{e, s\}$. $G = SL_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$.

$A_q(G) = \langle a, b, c, d \rangle_{\mathbb{C}(q)\text{-algebra}}$, 基本関係式は

$$\begin{cases} ab = qba, \quad cd = qdc, \quad ac = qca, \quad bd = qdb, \quad bc = cb, \\ ad = da + (q - q^{-1})bc, \\ ad - qbc = 1. \end{cases}$$

2008.10.31

② $\Delta\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, $\varepsilon\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $S\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&-q^{-1}b\\-qc&a\end{bmatrix}$. ③

このとき, $A_q(G/N)\subset A_q(G)$ は $A_q(G/N)=\langle a,c\rangle_{\mathbb{C}(q)\text{-subalg}}$, $ac=qca$ となる

さらに, $A_q(G/N,n\rho)=\bigoplus_{k=0}^{n}\mathbb{C}(q)\,a^kc^{n-k}$. $(\deg a=k\rho,\ \deg c=k\rho)$

$S_e=\coprod_{m=0}^{\infty}\mathbb{C}(q)^{\times}a^m$, $S_s=\coprod_{m=0}^{\infty}\mathbb{C}(q)^{\times}c^m$.

よって, $R_e=S_e^{-1}A_q(G/N)=\bigoplus_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}\\ l\geq 0}}\mathbb{C}(q)\ a^kc^l$,

$$A_q(U_e)=R_e(0)=\bigoplus_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geq 0}}\mathbb{C}(q)\,(a^{-1}c)^l=\mathbb{C}(q)[a^{-1}c].$$

同様に $A_q(U_s)=R_s(0)=\mathbb{C}(q)[c^{-1}a]$. □

$\boxed{\text{注意}}$ $A_q(SL_n)$ でも同様の計算ができる

その場合, $A_q(G/N)$ の生成元として小行列の q-analogue が出てくる.

(Taft-Towber, ..., 色々論文がある.) □

$\boxed{\text{例}}$ <u>SL_3 の場合</u>

$W=\langle s_1,s_2\rangle=\{e,s_1,s_2,s_1s_2,s_2s_1,s_1s_2s_1=s_2s_1s_2\}$.

$w=e,\ s_1s_2s_1$ のとき

$A_q(U_w)=\langle x,y,z\rangle_{\mathbb{C}(q)\text{-alg.}}$, 基本関係式は

$$xy=qyx,\quad yz=qzy,\quad zx=xz+(1-q^2)y,$$

w がそれ以外のとき

$A_q(U_w)=\langle x,y,z\rangle_{\mathbb{C}(q)\text{-alg.}}$, 基本関係式は

$$xy=qyx,\quad xz=qzx,\quad yz=qzy.$$ □

$\boxed{\text{Remark}}$ $A_q(U_w)$ たちは w を変えたとき互いに同型とは限らない. $\square$
(上の SL_3 の例を見よ)

$\boxed{\text{Remark}}$ <u>$w=e$ のときの記述</u>

$$
\begin{tikzcd}
A_q(G/N) \arrow[r, "\overline{\Delta}"] \arrow[rrr, bend right, "\tilde{\varphi}"'] & A_q(G)\otimes A_q(G/N) \arrow[r, "r^G_{B^-}\otimes\varepsilon"] & A_q(B^-)\otimes \mathbb{C}(q) \cong & A_q(B^-) \\
\end{tikzcd}
$$
$\circlearrowleft$

によって代数準同型 $\tilde{\varphi}$ が定まる. $\tilde{\varphi}$ は次の同型をみちびく:

$$A_q(U_e) = \left(S_e^{-1}A_q(G/N)\right)(0) \xrightarrow{\sim} A_q^{\ell}(N^-) \subset A_q(B^-).$$

<u>$w=w_0=$ (最長元) のとき</u>も同様で

$$A_q(U_{w_0}) \xrightarrow{\sim} A_q^{\ell}(N^+). \qquad \square$$

§8. 点 $wB/B \in U_w$, Schubert cell BwB/B の対応物

$U_w = wB^-B/B \supset BwB/B \ni wB/B.$ まず点 wB/B の対応物を作ろう.

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto] & \langle T_w^{-1}f, 1\rangle \\
A_q(G) \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \arrow[r] & \mathbb{C}(q) \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
A_q(G/N) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ur, "\tilde{\varepsilon}_w"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}
$$

で $\tilde{\varepsilon}_w : A_q(G/N) \to \mathbb{C}(q)$ を定める.

$\boxed{\text{Lemma}}$ $\tilde{\varepsilon}_w$ は結合代数の準同型で $\tilde{\varepsilon}_w(S_w) \subset \mathbb{C}(q)^\times$ となる. $\square$

よって,
$$
\begin{array}{ccc}
S_w^{-1}A_q(G/N) & \xrightarrow{\varepsilon_w} & \mathbb{C}(q) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
s^{-1}a & \longmapsto & \tilde{\varepsilon}_w(s)^{-1}\tilde{\varepsilon}_w(a)
\end{array}
$$
(代数準同型) が自然に定まる.

$\varepsilon_w|_{A_q(U_w)} : A_q(U_w) \to \mathbb{C}(q)$ は
$$
\begin{array}{ccc}
A(U_w) & \to & \mathbb{C} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
f & \longmapsto & f(wB/B)
\end{array}
$$
の q-analogue である.

2008. 10. 31

次に Schubert cell BwB/B の対応物を作ろう。

$$
\begin{tikzcd}
A_q(G/N) \arrow[r, "\overline{\Delta}"] \arrow[d, hook] & A_q(G)\otimes A_q(G/N) \arrow[r, "r^G_B\otimes\tilde{\varepsilon}_w"] & A_q(B) \\
S_w^{-1}A_q(G/N) \arrow[urr, dashed, "\exists!"] & & \\
R_w \arrow[u, phantom, "="] & & \\
R_w(0) \arrow[u, hook] & & \\
A_q(U_w) \arrow[u, phantom, "="] \arrow[uuuurr, "\varphi_w"] & &
\end{tikzcd}
$$

$\leftarrow$ (これの合成は S_w を可逆元にうつす) ⑤

で $\varphi_w : A_q(U_w) \to A_q(B)$ が定まる

$\boxed{\text{定義}}$ $A_q(BwB/B) = \mathrm{Image}(\varphi_w : A_q(U_w) \to A_q(B))$. □

§9. 非可換代数幾何 (by Rosenberg)

$\boxed{\text{可換な場合}}$ (普通の代数幾何)

$$X = \bigcup_i \underbrace{\mathrm{Spec}(A_i)}_{\text{affine open}}, \quad A_i \text{ は可換環}.$$

$$\begin{array}{l} A_i \hookrightarrow A_{ij} \\ A_j \hookrightarrow A_{ij} \end{array}$$

$\mathrm{Spec}(A_i)\cap\mathrm{Spec}(A_j) = \mathrm{Spec}(A_{ij})$, A_{ij} は A_i と A_j の局所化.

$\boxed{\text{非可換な場合}}$

非可換な設定で環の族 $\{A_i\}$ のはりあわせを考えればよさそうだ。
しかし、この考え方は typical situation でうまくいかない。
局所化が Ore 条件をみたさない。
$A_q(U_w)$ の構成では局所化がうまくいったが、
それらをはりあわせるための局所化では Ore 条件が成立していない。

どうするべきか?

2008.10.31

⑥

非可換環の族 $\{A_i\}$ のはりあわせではなく，
圏の族 $\{\mathrm{Mod}(A_i)\}$ のはりあわせを考える．

$\mathrm{Mod}(A_i) = \{$ 左 A_i-modules$\}$．　（A_i が可換なとき $\mathrm{Mod}(A_i) \cong \{\mathrm{Spec}\,A_i$ 上の準連接層$\}$）

（<u>remark</u>　普通の意味の(可換な)スキーム X は category $\{X$ 上の準連接層$\}$ から一意的に定まる．）

（注　森田同値があるので非可換環 A は $\mathrm{Mod}(A)$ から一意的に定まらない．）

History

- ◎ Manin：圏をはりあわせよ．
- ◎ 非可換射影代数多様体：Manin, Artin-Zhang, Vererkin（ロシア人 ?）
- ◎ 一般の非可換スキーム：Rosenberg

別の方向の理論

対応関係

	可換	非可換
スキーム	スキーム X に対する X の上の準連接層の圏 $M(X)$	ある種のアーベル圏
morphism	$X \xrightarrow{f} Y$ に対して $\downarrow$ $M(X) \xleftarrow{f^*} M(Y)$ right exact	ある種の右完全函手

terminology

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$ はアーベル圏であるとする。

- morphism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ とは

  right exact functor $f^* : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ の同型類 $[f^* : \mathcal{B} \to \mathcal{A}]$

  のことである。あたかも、morphism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して、inverse image functor $f^* : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ が定まるという風に考える。

- morphism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が continuous

  $\overset{\text{def}}{\iff}$ f^* は right adjoint $f_* : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を持つ。

  (f_* を direct image functor と呼ぶ)

  (right adjoint とは $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(f^*M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M, f_*N)$)

- morphism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が flat

  $\overset{\text{def}}{\iff}$ f は continuous でかつ f^* が exact.

- morphism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が flat localization

  $\overset{\text{def}}{\iff}$ f は flat で $f^* : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ は category の局所化である。

  derived category の定義のときに
  使われる局所化の理論
  Ore 条件を使った環の局所化の
  カテゴリー版の理論

- $f_\lambda : \mathcal{A}_\lambda \to \mathcal{B}$ が flat localization のとき、

  $\{f_\lambda\}$ が Zariski cover of $\mathcal{B}$

  $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\left\{ \begin{array}{l} s \text{ が } \mathcal{B} \text{ での morphism で } f_\lambda^*(s) \text{ が } \mathcal{A}_\lambda \text{ で同型 } (\forall \lambda \text{ に対して}) \\ \text{ならば } s \text{ 自身が同型} \end{array} \right.$

• morphism $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が affine

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f は continuous でかつ f_* is exact faithful. □

以下 $\mathcal{C}$ はアーベル圏であるとする.

$\boxed{\text{Def.}}$ $\mathcal{A}$：アーベル圏とする.

morphism $f: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ 上の (非可換) スキーム (quasi-scheme) であるとは,

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} \exists \{f_\lambda : \mathcal{A}_\lambda \to \mathcal{A}\}_{\lambda \in I} : \text{Zariski cover of } \mathcal{A} \\ \text{s.t.} \quad f_\lambda \text{ と } f \circ f_\lambda \text{ が affine になる } (\forall \lambda \in I). \end{cases}$ □

$\boxed{\text{remark}}$ $\mathcal{A}$ が enough injectives ならば derived functor $R^k f_* : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ が定義できて, "Čech cohomology" を用いて計算できる.
(スキームの定義はそのように作ってある.) □

§ 10. 非可換スキームとしての量子旗多様体

$A := A_q(G/N)$, P-graded ring.

可換の場合に graded ring に対応する射影多様体上の準連接層の圏がどのように構成されるかを考える.

$\mu \geq \lambda \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mu - \lambda \in P^+$ (注)

$\mathrm{Mod}_P(A) = \{\text{P-graded な左 } A \text{ 加群}\}$

$\cup$

$\mathrm{Tor}_P(A) = \{M \in \mathrm{Mod}_P(A) \mid \forall m \in M \; \exists \lambda \in P^+ \text{ s.t. } A(\geq \lambda) m = 0\}$

$A(\geq\lambda) = \bigoplus_{\mu \geq \lambda} A(\lambda)$

A が可換なとき $\mathrm{Tor}_P(A)$ の元に対応する準連接層は 0 になってしまう.

2008.10.31

9

$$\mathrm{Proj}_p(A) := \frac{\mathrm{Mod}_p(A)}{\mathrm{Tor}_p(A)} = S^{-1}\mathrm{Mod}_p(A).$$ ← アーベル圏の localization

ここで $S = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Mod}_p(A) \text{ の morphism でその Kernel, Cokernel} \in \mathrm{Tor}_p(A) \\ \text{となるもの全体} \end{array} \right\}.$

$A(0) = A_q(G/N, 0) = \mathbb{C}(q)$ である.

$\mathrm{Mod}(A(0)) = \{\mathbb{C}(q)\text{-modules}\} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}(q)) = (\text{一点})$ と考える.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Proj}_p(A) & \xleftarrow{\varphi^*} & \mathrm{Mod}_p(A) & \xleftarrow{w^*} & \mathrm{Mod}(A(0)) \\ \uparrow & & \Psi & & \Psi \\ \text{localization} & & A\otimes_{A(0)} N & \longleftarrow & N \end{array}$$

は次の morphism を定める:

$$\mathrm{Proj}_p(A) \xrightarrow{\pi := w\circ\varphi} \mathrm{Mod}(A(0)) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}(q)) = (\text{一点}).$$

$\boxed{\text{定理}}$ π によって $\mathrm{Proj}_p(A)$ は $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}(q))$ 上のスキームになる. □

$\boxed{\text{証明のポイント}}$

$\mathrm{Proj}_p(A)$ は $w \in W$ でパラメトライズされる Zariski cover を持つことを示すことになる. その証明に次を用いる.

$\boxed{\text{Proposition}}$ $\mu \in P^+$ に対して,

$$\sum_{w\in W} A(\lambda)\, c^{\mu}_{\ell^*_{w\mu}} = A(\lambda+\mu) \quad \text{for } \lambda \gg 0.$$ □

Joseph, Rosenberg-Lunts の論文に書いてある.

$q=1$ で OK $\Rightarrow$ q が generic でも OK.

(この証明だと q が generic でないとき OK かどうかわからない.
q が 1 のべキ根のとき $q=1$ と関係付けることによって証明できる.)

$\boxed{\text{終}}$