

Hurwitzのゼータ函数の話

黒木玄

2019-04-01

Hurwitzのゼータ函数とは $\operatorname{Re} s > 1$, $x \neq 0, -1, -2, \dots$ で定義された

$$\zeta(s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^s} = \frac{1}{x^s} + \frac{1}{(x+1)^s} + \frac{1}{(x+2)^s} + \dots$$

を解析接続して得られる函数のことである。

このノートブックでは, Hurwitzのゼータ函数の $s = 1 - r$ ($r = 1, 2, 3, \dots$) における特殊値 $\zeta(1 - r, x)$ と偏微分係数 $\zeta_s(1 - r, x)$ に関するよく知られている結果を数値的に確認し, 関連の話を色々する. 特に伝えたいことはHurwitzのゼータ函数が色々な意味で非常に教育的な例になっていることである.

ツイッターでの以下のスレッドも参照せよ:

- <https://twitter.com/genkuroki/status/1111938896844095488> (<https://twitter.com/genkuroki/status/1111938896844095488>)

Julia言語環境の整備の仕方については次のリンク先を参照せよ:

- <https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/install.ipynb>
(<https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/msfd28/blob/master/install.ipynb>)

目次

- [1 Bernoulli多項式との関係](#)
- [2 対数ガンマ函数との関係](#)
- [3 対数正弦函数との関係](#)
- [4 周期的Bernoulli多項式のFourier展開](#)
- [5 Milnor型対数多重正弦函数のFourier展開](#)
- [6 以上で扱ったFourier級数に関する解説](#)
 - [6.1 概略](#)
 - [6.2 Milnor型対数多重正弦函数のFourier展開公式の証明](#)
- [7 カノニカル分布との関係](#)
 - [7.1 カノニカル分布の定義](#)
 - [7.2 カノニカル分布とBernoulli多項式の一般化の関係](#)
 - [7.3 Hurwitzのゼータ函数の移動平均](#)
 - [7.4 多重Hurwitzゼータ函数の移動平均](#)
 - [7.5 移動平均に関する結果の一般の確率分布への自明な一般化](#)
 - [7.6 一般化された1重のHurwitz型ゼータ函数の0以下の整数での特殊値](#)

```
In [1]: 1 using Plots
2 gr(); ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
3 gr(bglegend=RGBA(1.0, 1.0, 1.0, 0.5))
4 using LaTeXStrings
5 using SpecialFunctions
6 using SymPy: SymPy, sympy, @vars, oo
7 using QuadGK
```

```
In [2]: 1 ?SpecialFunctions.zeta
```

```
Out[2]: zeta(s, z)
```

Generalized zeta function $\zeta(s, z)$, defined by the sum $\sum_{k=0}^{\infty} ((k+z)^2)^{-s/2}$, where any term with $k+z=0$ is excluded. For $\Re z > 0$, this definition is equivalent to the Hurwitz zeta function $\sum_{k=0}^{\infty} (k+z)^{-s}$. For $z=1$, it yields the Riemann zeta function $\zeta(s)$.

zeta(s)

Riemann zeta function $\zeta(s)$.

注意: Hurwitzのゼータ関数の計算では `SpecialFunctions.zeta(s,z)` を $\Re z > 0$ の場合にのみ利用すること.

1 Bernoulli多項式との関係

Bernoulli多項式を $B_r(x)$ と書くと,

$$\frac{ze^{zx}}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{z^k}{k!}, \quad -r\zeta(1-r, x) = B_r(x) \quad (r=1, 2, \dots).$$

左側の公式を $B_k(x)$ の定義だと考えてよい.

```
In [3]: 1 B(r, x) = -r*zeta(1-r, x)
2 Bernoulli(r, x) = sympy.bernoulli(r, x)
3 fBernoulli(r, x) = float(Bernoulli(r,x))
4 @vars x
5 [Bernoulli(r, x) for r in 0:4]
```

Out[3]:

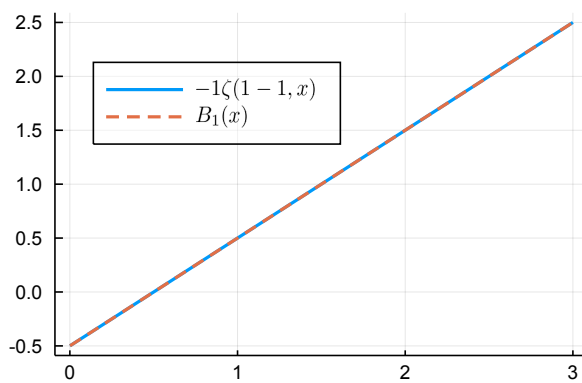
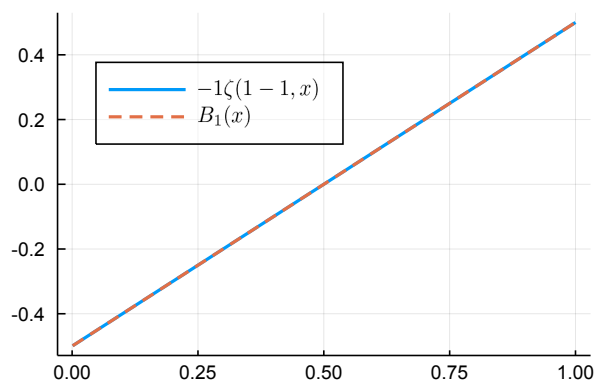
$$\begin{bmatrix} 1 \\ x - \frac{1}{2} \\ x^2 - x + \frac{1}{6} \\ x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} \\ x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

```
In [4]: 1 function plot_Bernoulli(r ;
2     x1=range(0.001, 1, length=400), l1=:topleft,
3     x2=range(0.001, 3, length=400), l2=:topleft,
4     figsize=(800, 250))
5
6     x = x1
7     P1 = plot(legend=l1, legendfontsize=9)
8     plot!(x, B.(r,x), label="\$-\$r\\zeta(1-\$r,x)\$", lw=2)
9     plot!(x, fBernoulli.(r,x), label="\$B_{\$r}(x)\$", lw=2, ls=:dash)
10
11     x = x2
12     P2 = plot(legend=l2, legendfontsize=9)
13     plot!(x, B.(r,x), label="\$-\$r\\zeta(1-\$r,x)\$", lw=2)
14     plot!(x, fBernoulli.(r,x), label="\$B_{\$r}(x)\$", lw=2, ls=:dash)
15
16     plot(P1, P2; size=figsize)
17 end
```

```
Out[4]: plot_Bernoulli (generic function with 1 method)
```

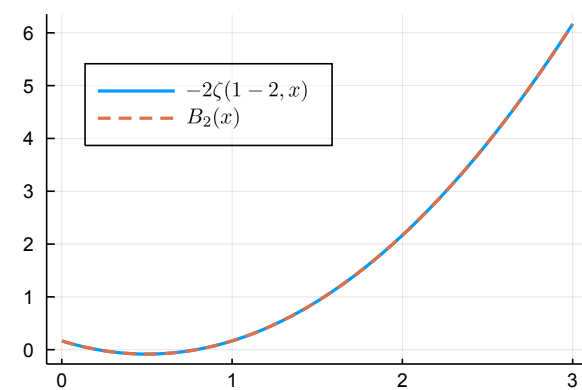
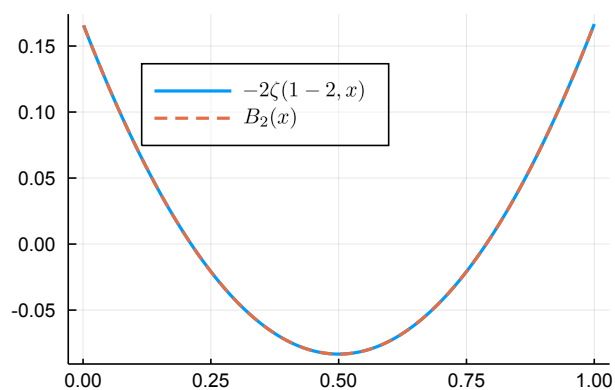
```
In [5]: 1 plot_Bernoulli(1)
```

Out[5]:



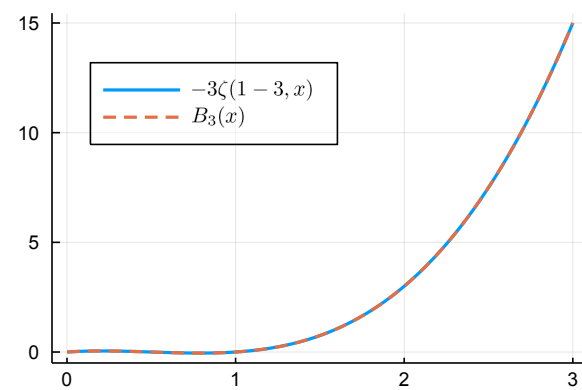
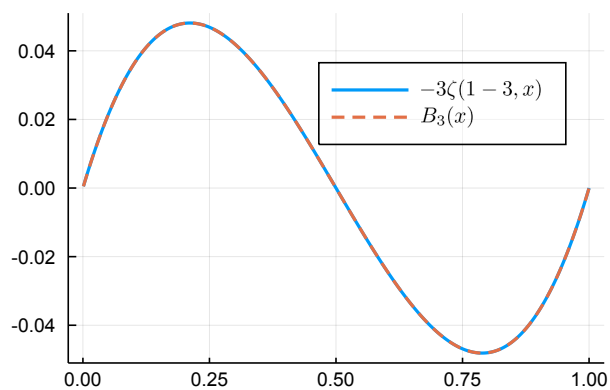
```
In [6]: 1 plot_Bernoulli(2; l1=:top)
```

Out[6]:



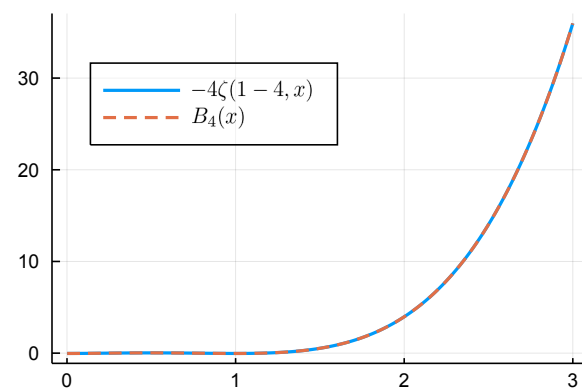
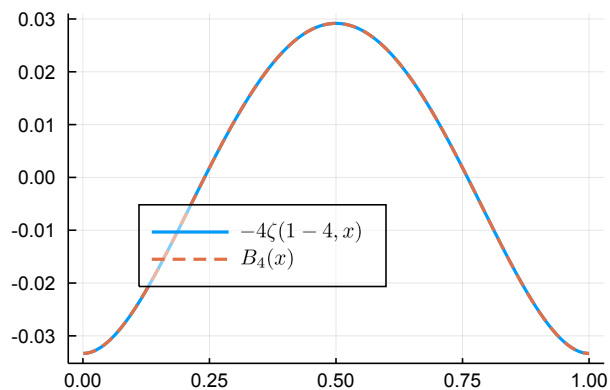
```
In [7]: 1 plot_Bernoulli(3; l1=:topright)
```

Out[7]:

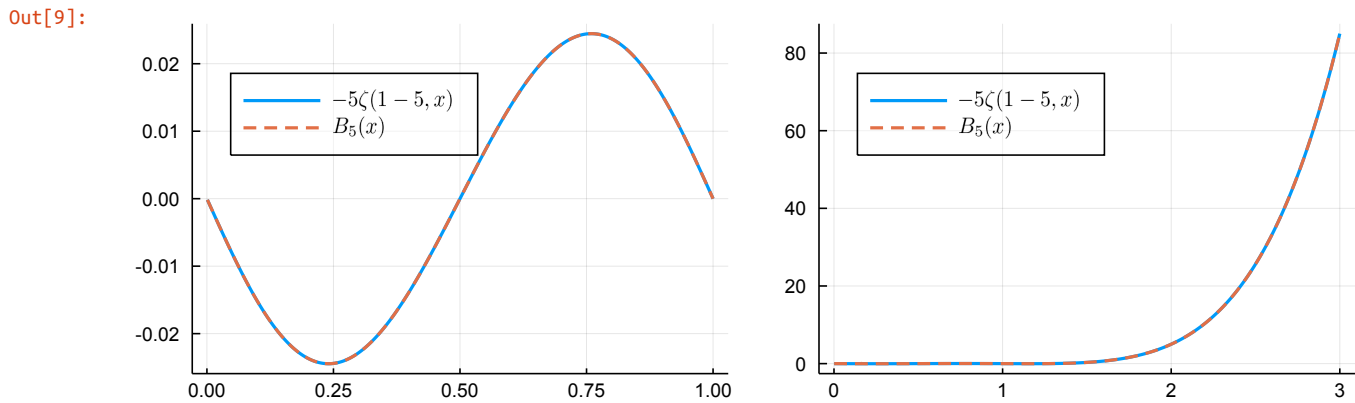


```
In [8]: 1 plot_Bernoulli(4; l1=:bottom)
```

Out[8]:



In [9]: 1 plot_Bernoulli(5)



ぴったり一致している。

2 対数ガンマ函数との関係

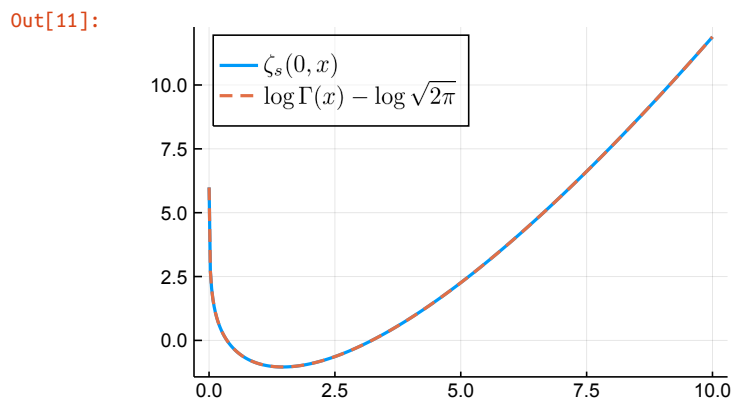
Hurwitzのゼータ函数の s に関する偏導函数を $\zeta_s(s, x)$ と書くことにする. このとき

$$\zeta_s(0, x) = \log \Gamma(x) - \log \sqrt{2\pi} \quad (x > 0)$$

In [10]: 1 logGamma(r, x; h=√eps()) = (zeta(1-r+h, x) - zeta(1-r-h, x))/(2h)
2 exp(logGamma(1, 10))*√(2π), gamma(10)

Out[10]: (362879.9877628901, 362880.0)

In [11]: 1 function plot_logGamma1; x=range(0.001, 10, length=400), l=:topleft, figsize=(400,250))
2 plot(size=figsize)
3 plot!(legend=l, legendfontsize=10)
4 plot!(x, logGamma.(1,x), label=L"\zeta_s(0,x)", lw=2)
5 plot!(x, lgamma.(x) .- log(√(2π)), label=L"\log\Gamma(x) - \log\sqrt{2\pi}", lw=2, ls=:dash)
6 end
7
8 plot_logGamma1()



ぴったり一致している。

3 対数正弦函数との関係

Hurwitzのゼータ函数とガンマ函数と \sin の関係より,

$$\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}} = \exp(\zeta_s(0, x)), \quad 2 \sin(\pi x) = \frac{2\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} \quad (0 < x < 1)$$

前者の公式はLerchの公式と呼ばれ, 後者の公式はガンマ函数の相反公式と呼ばれている. それらの公式の証明については

- <https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/10%20Gauss%2C%20Gamma%2C%20Beta.ipynb>
(<https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/10%20Gauss%2C%20Gamma%2C%20Beta.ipynb>)

- <https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/10%20Gauss%2C%20Gamma%2C%20Beta.pdf>
(<https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/10%20Gauss%2C%20Gamma%2C%20Beta.pdf>)

の第2.10.1節, 第2.6.2節を参照せよ.

ゆえに,

$$\log(2 \sin \pi x) = -(\zeta_s(0, x) + \zeta_s(0, 1 - x)) \quad (0 < x < 1).$$

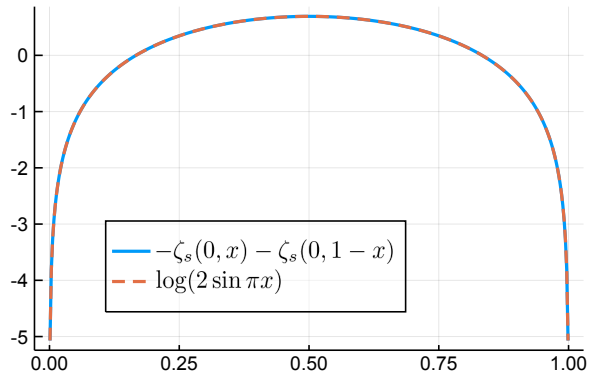
この成立を数値計算で確認してみよう.

```
In [12]: 1 logsine(r,x) = -logGamma(r,x) + (-1)^r*logGamma(r,1-x)
2         logsine(1, 0.3), log(2sin(0.3π))
```

Out[12]: (0.481211774982512, 0.48121182505960347)

```
In [13]: 1 function plot_logsine1(; x=range(0.001, 0.999, length=400), l=:bottom, figsize=(400,250))
2         plot(size=figsize)
3         plot!(legend=l, legendfontsize=10)
4         plot!(x, logsine.(1,x), label=L"\zeta_s(0,x)-\zeta_s(0,1-x)", lw=2)
5         plot!(x, 0.(log(2sin(π*x))), label=L"\log(2\sin\pi x)", lw=2, ls=:dash)
6     end
7
8     plot_logsine1()
```

Out[13]:



ぴったり一致している.

$\log(2 \sin \pi x)$ については次が成立することも知られている:

$$\int_0^1 \log(2 \sin \pi x) dx = 0.$$

この公式は次と同値である:

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

```
In [14]: 1 value, error = quadgk(x -> log(2sin(π*x)), 0, 1)
2         @show value, error;
```

(value, error) = (1.4675760606763788e-15, 1.9614816116706072e-16)

数値積分によっても積分の値はほぼ 0 になっている.

4 周期的Bernoulli多項式のFourier展開

Bernoulli多項式 $B_r(x)$ の $0 < x < 1$ における値については以下が知られている.

r が偶数のとき

$$B_r(x) = -(-1)^{r/2} 2r! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

r が奇数のとき

$$B_r(x) = -(-1)^{(r-1)/2} 2r! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

これらの公式の証明については

- <https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb>
(<https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb>)
- <https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/12%20Fourier%20analysis.pdf>
(<https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/12%20Fourier%20analysis.pdf>)

の第6.3.3節または

- <http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/13%20Euler-Maclaurin%20summation%20formula.ipynb>
(<http://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/13%20Euler-Maclaurin%20summation%20formula.ipynb>)
- <https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/13%20Euler-Maclaurin%20summation%20formula.pdf>
(<https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/13%20Euler-Maclaurin%20summation%20formula.pdf>)

の第1.5節を参照せよ.

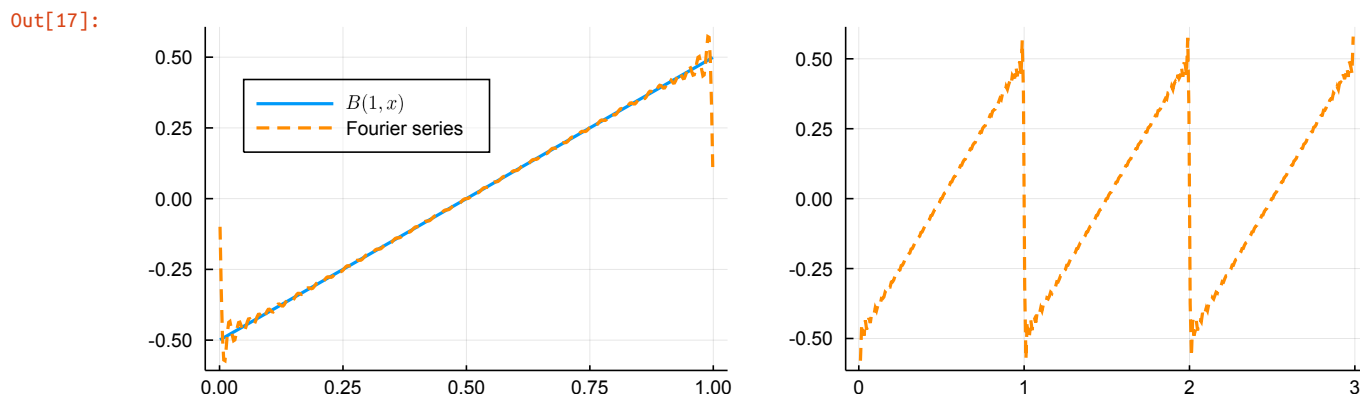
```
In [15]: 1 function FourierB(r, x; N=50)
2         if iseven(r)
3             -(-1)^(r÷2) * 2*gamma(r+1)*sum(cos(2π*n*x)/(2π*n)^r for n in 1:N)
4         else
5             -(-1)^((r-1)÷2) * 2*gamma(r+1)*sum(sin(2π*n*x)/(2π*n)^r for n in 1:N)
6         end
7     end
```

Out[15]: FourierB (generic function with 1 method)

```
In [16]: 1 function plot_FourierBernoulli(r;
2         N = 50,
3         x1 = range(0.001, 0.999, length=400), l1 = :topleft,
4         x2 = range(0.01, 2.99, length=400), l2 = :topleft,
5         figsize = (800, 250))
6
7     x = x1
8     P1 = plot(legend=l1, legendfontsize=8)
9     plot!(x, fBernoulli.(r,x), label="\$B(\$r,x)\$", lw=2)
10    plot!(x, FourierB.(r,x; N=N), label="Fourier series", lw=2, ls=:dash, lc=:darkorange)
11
12    x = x2
13    P2 = plot(legend=l2, legendfontsize=8)
14    plot!(x, FourierB.(r,x; N=N), label="", lw=2, ls=:dash, lc=:darkorange)
15
16    plot(P1, P2, size=figsize)
17 end
```

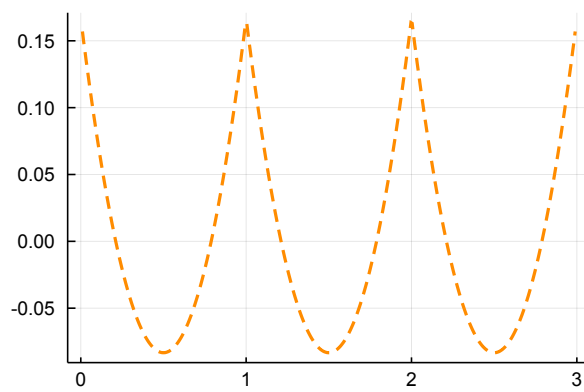
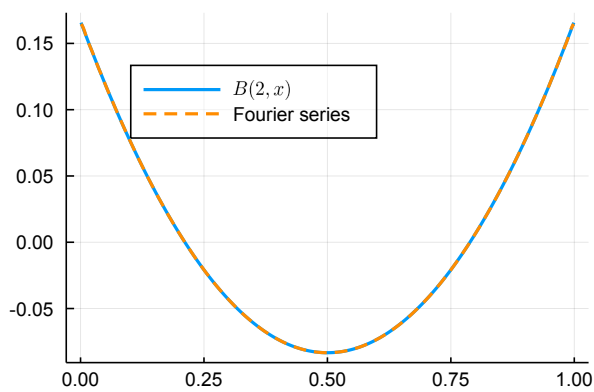
Out[16]: plot_FourierBernoulli (generic function with 1 method)

```
In [17]: 1 plot_FourierBernoulli(1)
```



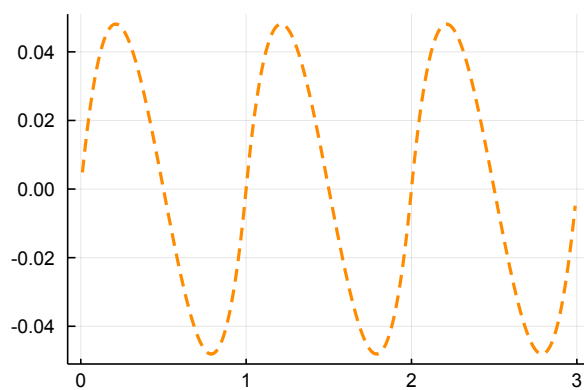
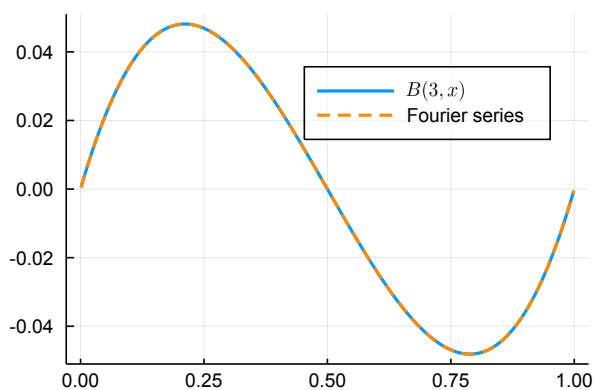
```
In [18]: 1 plot_FourierBernoulli(2; l1=:top)
```

Out[18]:



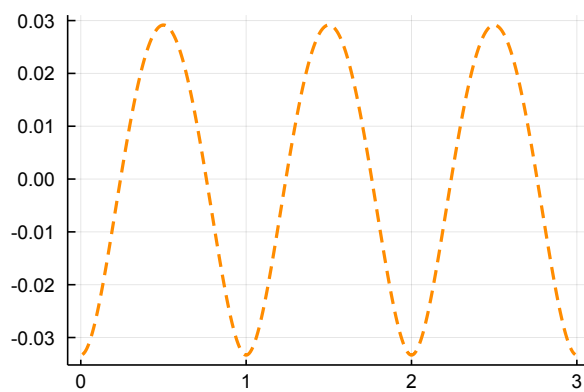
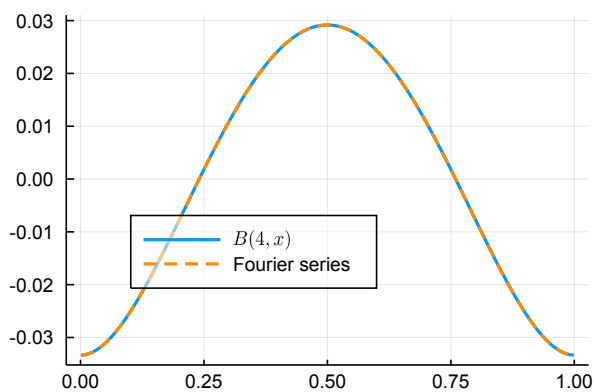
```
In [19]: 1 plot_FourierBernoulli(3; l1=:topright)
```

Out[19]:



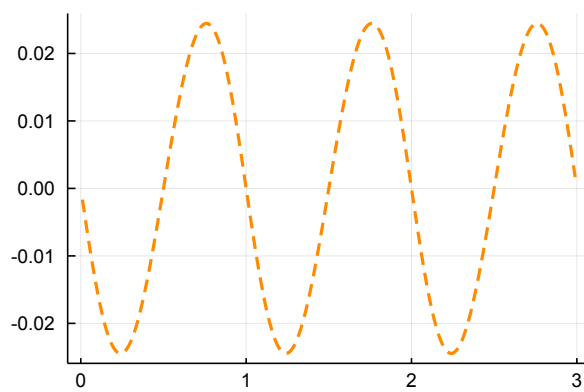
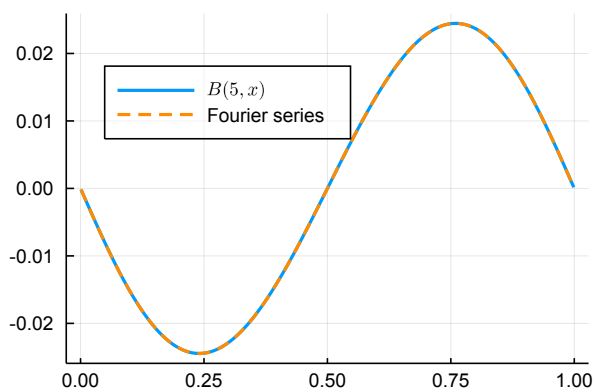
```
In [20]: 1 plot_FourierBernoulli(4; l1=:bottom)
```

Out[20]:



```
In [21]: 1 plot_FourierBernoulli(5)
```

Out[21]:



5 Milnor型対数多重正弦函数のFourier展開

Milnor型の対数多重正弦函数 $\log S_r^M(x)$ を

$$\log S_r^M(x) = -\zeta_s(1-r, x) + (-1)^r \zeta_s(1-r, 1-x)$$

と定義する. ここで $\zeta_s(s, x)$ はHurwitzのゼータ函数の s に関する偏導函数を表す.

$\log S_r^M(x)$ の $0 < x < 1$ における値については以下が知られている.

r が偶数のとき

$$\log S_r^M(x) = (-1)^{r/2} 2\pi(r-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

r が奇数のとき

$$\log S_r^M(x) = -(-1)^{(r-1)/2} 2\pi(r-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

以上の公式を数値的に確認しよう.

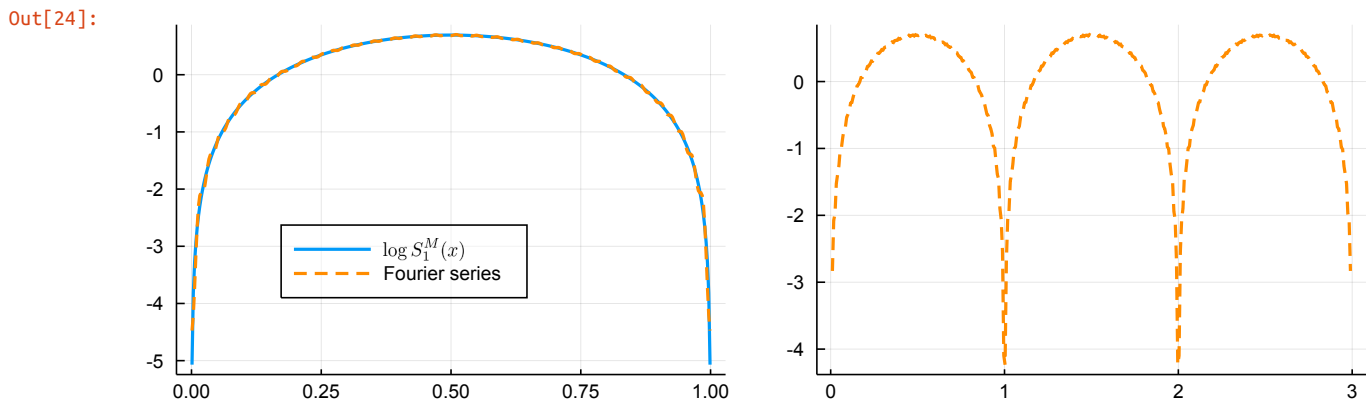
```
In [22]: 1 function Fourierlogsine(r, x; N=50)
2         if iseven(r)
3             (-1)^(r÷2) * 2π*gamma(r)*sum(sin(2π*n*x)/(2π*n)^r for n in 1:N)
4         else
5             -(-1)^((r-1)÷2)*2π*gamma(r)*sum(cos(2π*n*x)/(2π*n)^r for n in 1:N)
6         end
7     end
```

Out[22]: Fourierlogsine (generic function with 1 method)

```
In [23]: 1 function plot_Fourierlogsine(r;
2         N = 50,
3         x1 = range(0.001, 0.999, length=400), l1 = :topleft,
4         x2 = range(0.01, 2.99, length=400), l2 = :topleft,
5         figsize = (800, 250))
6
7     x = x1
8     P1 = plot(legend=l1, legendfontsize=8)
9     plot!(x, logsine.(r,x), label="\$\\log S^M_{\$r}(x)\$", lw=2)
10    plot!(x, Fourierlogsine.(r,x; N=N), label="Fourier series", lw=2, ls=:dash, lc=:darkorange)
11
12    x = x2
13    P2 = plot(legend=l2, legendfontsize=8)
14    plot!(x, Fourierlogsine.(r,x; N=N), label="", lw=2, ls=:dash, lc=:darkorange)
15
16    plot(P1, P2, size=figsize)
17 end
```

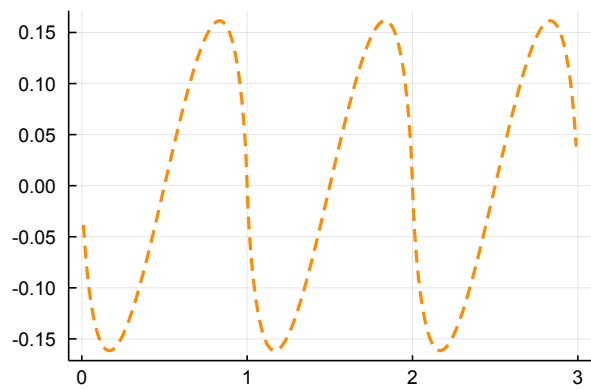
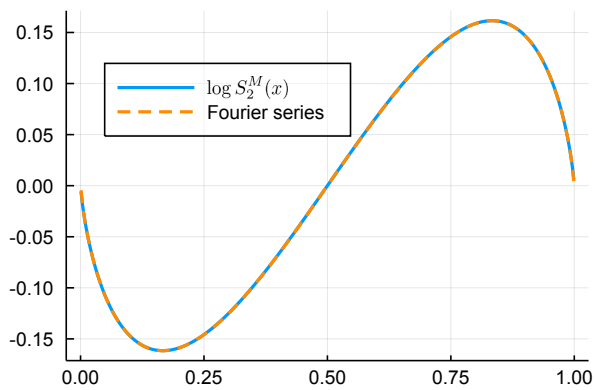
Out[23]: plot_Fourierlogsine (generic function with 1 method)

```
In [24]: 1 plot_Fourierlogsine(1; l1=:bottom)
```



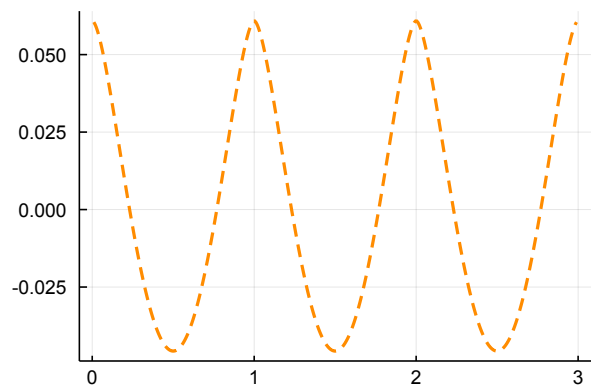
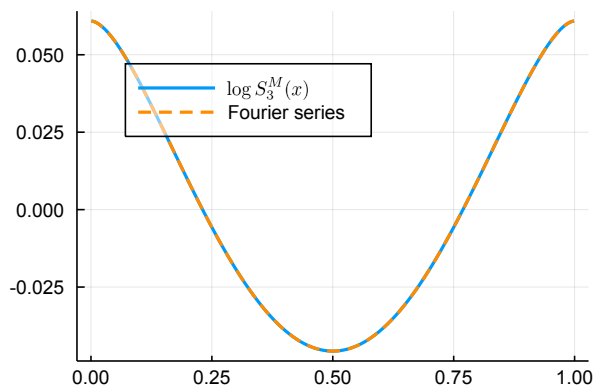
In [25]: 1 `plot_Fourierlogsine(2)`

Out[25]:



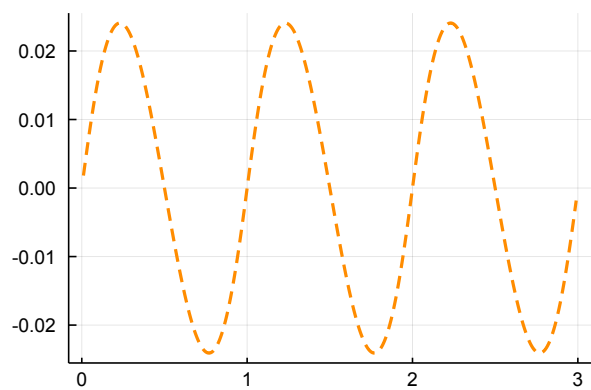
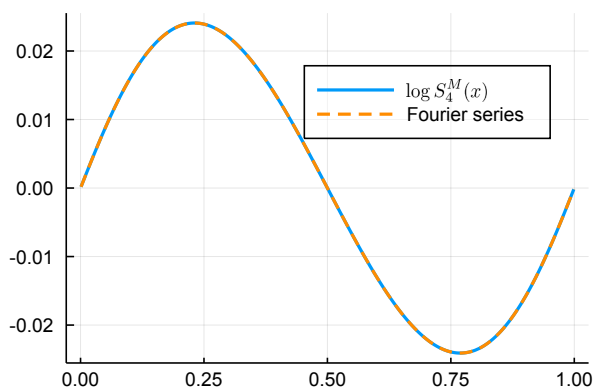
In [26]: 1 `plot_Fourierlogsine(3; l1=:top)`

Out[26]:



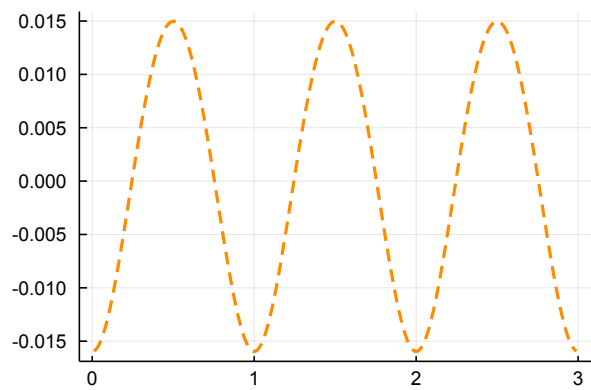
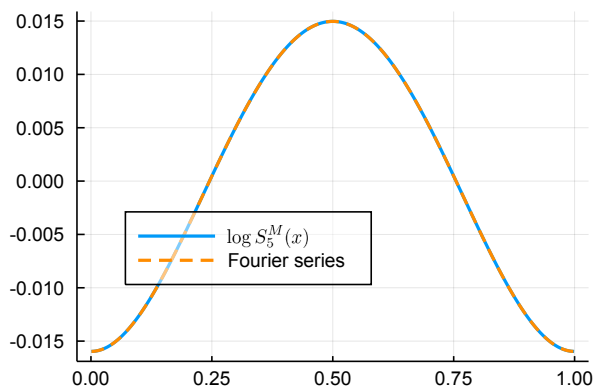
In [27]: 1 `plot_Fourierlogsine(4; l1=:topright)`

Out[27]:



In [28]: 1 `plot_Fourierlogsine(5; l1=:bottom)`

Out[28]:



6 以上で扱ったFourier級数に関する解説

6.1 概略

以上で扱ったFourier級数展開の公式は次のHurwitzの函数等式を用いて筆者自身が導出した公式である(widely known):

$$\zeta(1-s, x) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(e^{-\pi i s/2} \operatorname{Li}_s(e^{2\pi i x}) + e^{\pi i s/2} \operatorname{Li}_s(e^{-2\pi i x}) \right) \quad (\operatorname{Re} s > 0, 0 < x < 1).$$

ここで $\operatorname{Li}_s(z)$ は多重対数函数(polylogarithm)である:

$$\operatorname{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}.$$

上のような公式の導出では符号や係数の細かい部分をよく間違ふ。しかし、以下のように実際に数値計算してみても一致していることを確認できれば、自分で導出した公式の正しさに自信を持てるようになる。人間は証明をよく間違えるので、可能ならば、単に証明によって正しさを確認するだけではなく、数値計算によってもその「正しさ」を確認しておくべきだと思う。数値計算やその結果のプロットによって理解が深まることが多い。

Milnor型の多重対数正弦函数に関する公式を得るためには、Hurwitzの函数等式の両辺を s で偏微分して、 s に 0 以下の整数 $1-r$ を代入する必要がある。Milnor型の多重対数正弦函数に関する公式を得るために $-\zeta(1-r, x)$ と $(-1)^r \zeta(1-r, 1-x)$ の和を計算すると、符号 $(-1)^r$ をうまく働いて複雑な項がすべてキャンセルして消えて、上で言及したシンプルな公式が得られるという仕組みになっている。

上のHurwitzの函数等式の導出のラフな解説が

- <https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb>
(<https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/12%20Fourier%20analysis.ipynb>)
- <https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/12%20Fourier%20analysis.pdf>
(<https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/12%20Fourier%20analysis.pdf>)

の第6.3節にある。そこでは、Hurwitzのゼータ函数と多重対数函数の両方の一般化になっているLerchの超越函数(レルヒの超越函数)

$$L(\tau, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{(x+k)^s}$$

を扱っている。Hurwitzの函数等式ではHurwitzのゼータ函数以外に多重対数函数も必要になるが、Lerchの超越函数であればその範囲内で $s \leftrightarrow 1-s$ に関する函数等式を閉じた形で書ける。

6.2 Milnor型対数多重正弦函数のFourier展開公式の証明

Milnor型の対数多重正弦函数 $\log S_r^M(x)$ は

$$\log S_r^M(x) = -\zeta_s(1-r, x) + (-1)^r \zeta_s(1-r, 1-x)$$

と定義されたのであった。

定理: $0 < x < 1, r = 1, 2, 3, \dots$ のとき,

$$\log S_r^M(x) = -\pi i \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} \left(\operatorname{Li}_r(e^{2\pi i x}) - (-1)^r \operatorname{Li}_r(e^{-2\pi i x}) \right).$$

注意: 次の結果と比較せよ: $0 < x < 1, r = 1, 2, 3, \dots$ のとき,

$$\zeta(1-r, x) = \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} \left(\operatorname{Li}_r(e^{2\pi i x}) + (-1)^r \operatorname{Li}_r(e^{-2\pi i x}) \right) = (r-1)! \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i n x}}{(2\pi i)^r}.$$

真ん中の符号の違いに注目せよ。

上の定理の証明: このノートではHurwitzのゼータ函数の函数等式

$$\zeta(1-s, x) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(e^{-\pi i s/2} \operatorname{Li}_s(e^{2\pi i x}) + e^{\pi i s/2} \operatorname{Li}_s(e^{-2\pi i x}) \right) \quad (s > 0, 0 < x < 1).$$

を認めて使うことにする。この公式の両辺を s で偏微分すると、 $\Gamma'(s) = \Gamma(s)\psi(s)$ (digamma函数 $\psi(s)$ の定義)と $d(2\pi)^{-s}/ds = (2\pi)^{-s}(-\log(2\pi))$ より、 $f(s, z) = \partial \operatorname{Li}_s(z)/\partial s$ とおくと、 $0 < x < 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
-\zeta_s(1-s, x) &= \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} (\psi(s) - \log(2\pi)) (e^{-\pi i s/2} \text{Li}_s(e^{2\pi i x}) + e^{\pi i s/2} \text{Li}_s(e^{-2\pi i x})) \\
&+ \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} (e^{-\pi i s/2} f(s, e^{2\pi i x}) + e^{\pi i s/2} f(s, e^{-2\pi i x})) \\
&+ \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(-\frac{\pi i}{2} e^{-\pi i s/2} \text{Li}_s(e^{2\pi i x}) + \frac{\pi i}{2} e^{\pi i s/2} \text{Li}_s(e^{-2\pi i x}) \right).
\end{aligned}$$

ゆえに, $0 < x < 1, r = 1, 2, 3, \dots$ について,

$$\begin{aligned}
-\zeta_s(1-r, x) &= \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (\psi(r) - \log(2\pi)) (\text{Li}_r(e^{2\pi i x}) + (-1)^r \text{Li}_r(e^{-2\pi i x})) \\
&+ \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (f(r, e^{2\pi i x}) + (-1)^r f(r, e^{-2\pi i x})) \\
&- \frac{\pi i}{2} \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (\text{Li}_s(e^{2\pi i x}) - (-1)^r \text{Li}_s(e^{-2\pi i x})).
\end{aligned}$$

さらに, $0 < x < 1$ のとき, $0 < 1-x < 1$ でもあるので,

$$\begin{aligned}
-\zeta_s(1-r, x) &= \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (\psi(r) - \log(2\pi)) (\text{Li}_r(e^{-2\pi i x}) + (-1)^r \text{Li}_r(e^{2\pi i x})) \\
&+ \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (f(r, e^{-2\pi i x}) + (-1)^r f(r, e^{2\pi i x})) \\
&- \frac{\pi i}{2} \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (\text{Li}_s(e^{-2\pi i x}) - (-1)^r \text{Li}_s(e^{2\pi i x})).
\end{aligned}$$

後者に $(-1)^r$ をかけて前者から引くと, それぞれの1段目と2段目の項はキャンセルして消え, 前者の3段目の項の2倍が残る:

$$-\zeta(1-r, x) + (-1)^r \zeta(1-r, 1-x) = -\pi i \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (\text{Li}_s(e^{-2\pi i x}) - (-1)^r \text{Li}_s(e^{2\pi i x})).$$

この左辺は $\log S_r^N(x)$ の定義式なので示すべきことが示された. q.e.d.

系: r が正の偶数のとき

$$\log S_r^M(x) = (-1)^{r/2} 2\pi(r-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

r が正の奇数のとき

$$\log S_r^M(x) = -(-1)^{(r-1)/2} 2\pi(r-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

注意: 上の結果を以下の結果と比較せよ: r が正の偶数のとき

$$B_r(x) = -(-1)^{r/2} 2r! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

r が正の奇数のとき

$$B_r(x) = -(-1)^{(r-1)/2} 2r! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{(2\pi n)^r} \quad (0 < x < 1).$$

r が偶数のとき, 上では \sin だったが, こちらでは \cos になっており, r が奇数のとき, 上では \cos だったが, こちらでは \sin になっている. したがって, Bernoulli多項式の $0 < x < 1$ での値と Milnor型対数多重正弦函数の $0 < x < 1$ での値を合わせると, $r = 1, 2, 3, \dots$ に対する

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^r}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n^r}$$

の形のFourier級数のすべてが出て来ることがわかる. 要するにHurwitzのゼータ函数は s を0以下の整数の場合の値と偏微分係数の形でこれらのFourier級数をすべて含んでいるとみなされる. これらのFourier級数はFourier級数の例として基本的である. この意味でFourier級数論という観点から見ても, Hurwitzのゼータ函数は教育的な例になっていると考えられる.

上の系の証明: $0 < x < 1, r = 1, 2, 3, \dots$ と仮定する. 上の定理で

$$\log S_r^M(x) = -\pi i \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} (\text{Li}_r(e^{2\pi i x}) - (-1)^r \text{Li}_r(e^{-2\pi i x}))$$

を示した. 多重対数函数は $\text{Li}_r(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^r}$ と定義されたのであった.

r が偶数のとき,

$$\begin{aligned} \log S_r^M(x) &= -\pi i \frac{(r-1)!}{(2\pi)^r (-1)^{r/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i x} - e^{-2\pi i x}}{n^r} \\ &= -\pi i \frac{(r-1)!}{(2\pi)^r (-1)^{r/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i \sin(2\pi n x)}{n^r} \\ &= (-1)^{r/2} 2\pi (r-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{(2\pi n)^r}. \end{aligned}$$

r が奇数のとき,

$$\begin{aligned} \log S_r^M(x) &= -\pi \frac{(r-1)!}{(2\pi)^r (-1)^{(r-1)/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i x} + e^{-2\pi i x}}{n^r} \\ &= -\pi \frac{(r-1)!}{(2\pi)^r (-1)^{(r-1)/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos(2\pi n x)}{n^r} \\ &= -(-1)^{(r-1)/2} 2\pi (r-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{(2\pi n)^r}. \end{aligned}$$

これで示すべきことが示された. q.e.d.

7 カノニカル分布との関係

7.1 カノニカル分布の定義

$p(x)$ は \mathbb{R} 上の確率密度函数 (値が 0 以上で積分が 1 になる函数) であるとする. このノートでは確率密度函数 $p(x)$ を密度函数と呼んだり, 確率分布と呼んだり, 単に分布と呼んだりする.

確率分布 $p(x)$ に対して,

$$Z(\beta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta x} p(x) dx$$

を(統計力学における) **分配函数 (partition function)** と呼ぶ(右辺の積分が収束するような β のみを考える). 分配函数は確率密度函数で定まる確率分布に関する $e^{-\beta x}$ の平均値であり, 確率論では **モーメント母函数 (moment generating function)** と呼ばれる. さらに,

$$p(x|\beta) = \frac{e^{-\beta x} p(x)}{Z(\beta)}$$

で定義される \mathbb{R} 上の確率密度函数を確率分布 $p(x)$ に対する **カノニカル分布 (canonical distribution)** と呼ぶ. カノニカル分布は $e^{-\beta x} p(x)$ の定数分の1であるような確率密度函数のことであり, その定数分の1の規格化因子が分配函数である. パラメーター β は**逆温度**と呼ばれる. (逆温度は絶対温度の逆数だと解釈される.)

カノニカル分布 $p(x|\beta)$ は $\beta = 0$ (絶対温度無限大) でもとの分布 $p(x)$ に戻る. カノニカル分布はもとの分布の逆温度 β による変形になっている.

例: $\omega > 0$ であるとする. $0 \leq x \leq \omega$ のとき $p(x) = 1/\omega$ で, それ以外のとき $p(x) = 0$ のとき (すなわち $p(x)$ が区間 $[0, \omega]$ 上の一様分布のとき),

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\omega} \left[\frac{e^{-\beta x}}{-\beta} \right]_0^{\omega} = \frac{1 - e^{-\beta \omega}}{\beta \omega}, \\ p(x|\beta) &= \begin{cases} \frac{\beta \omega e^{-\beta x}}{1 - e^{-\beta \omega}} & (0 \leq x \leq \omega) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases} \end{aligned}$$

例: Diracの超函数を $\delta(x)$ と書く. そのとき $\delta(x) dx$ は確率測度になる. $p(x) = \frac{1}{2}(\delta(x) + \delta(x - \omega))$ のとき ($\{0, \omega\}$ への公平なコイン投げの分布の場合には),

$$Z(\beta) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta x} (\delta(x) + \delta(x - \omega)) dx = \frac{1 + e^{-\beta\omega}}{2},$$

$$\frac{e^{-\beta x}}{Z(\beta)} = \frac{2e^{-\beta x}}{1 + e^{-\beta\omega}},$$

$$p(x|\beta) = \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}} \delta(x) + \frac{e^{-\beta\omega}}{1 + e^{-\beta\omega}} \delta(x - \omega).$$

ここで $\varphi(x)\delta(x-a) = \varphi(a)\delta(x-a)$ を使った.

例: $\sigma > 0$ であるとする. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$ (平均0の正規分布)のとき,

$$Z(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/(2\sigma^2) - \beta x} dx = e^{\beta^2\sigma^2/2},$$

$$p(x|\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{e^{-x^2/(2\sigma^2) - \beta x}}{e^{\beta^2\sigma^2/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x+\beta\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}.$$

注意: 確率分布 $p(x)$ に従う独立試行で得られる乱数列 X_1, X_2, \dots, X_n (独立同分布確率変数列, i.i.d.) にサンプル平均 $(X_1 + \dots + X_n)/n$ が一定の値 a になるという制限を付けて, $n \rightarrow \infty$ としたとき自然に得られる確率分布が確率分布 $p(x)$ に対するカノニカル分布である. 逆温度 β は

$$\int_{\mathbb{R}} x p(x|\beta) dx = c$$

という条件すなわち「カノニカル分布の平均が a になる」という条件で決定される. カノニカル分布に関するより詳しい説明については

- <https://genkuroki.github.io/documents/20160616KullbackLeibler.pdf>
(<https://genkuroki.github.io/documents/20160616KullbackLeibler.pdf>)

を参照せよ.

7.2 カノニカル分布とBernoulli多項式の一般化の関係

$p(x)$ は \mathbb{R} 上の確率分布であり, $Z(\beta)$ はその分配関数であるとし, $p(x|\beta)$ はカノニカル分布であるとする:

$$Z(\beta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta x} p(x) dx, \quad p(x|\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta x} p(x).$$

カノニカル分布 $p(x|\beta)$ の $-\beta$ に関するべき級数展開

$$p(x|\beta) = p(x) \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) \frac{(-\beta)^k}{k!}, \quad \text{すなわち} \quad \frac{e^{-\beta x}}{Z(\beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) \frac{(-\beta)^k}{k!}.$$

で得られる x の多項式関数 $P_k(x)$ を一般化されたBernoulli多項式と呼ぶことにする.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\beta(x+t)}}{Z(\beta)} p(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} P_k(x+t) p(t) dt \right) \frac{(-\beta)^k}{k!},$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\beta(x+t)}}{Z(\beta)} p(t) dt = \frac{e^{-\beta x}}{Z(\beta)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta t} p(t) dt = e^{-\beta x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{(-\beta)^k}{k!}$$

より

$$\int_{\mathbb{R}} P_k(x+t) p(t) dt = x^k.$$

例: $p(x)$ が区間 $[0, 1]$ 上の一様分布のとき,

$$Z(\beta) = \frac{e^{-\beta} - 1}{-\beta}, \quad \frac{e^{-\beta x}}{Z(\beta)} = \frac{-\beta e^{-\beta x}}{e^{-\beta} - 1}$$

なので, $z = -\beta$ とおくと,

$$\frac{e^{zx}}{Z(-z)} = \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}.$$

これは有名なBernoulli多項式 $B_k(x)$ の母函数である:

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{z^k}{k!}.$$

以上の結果は区間 $[0, 1]$ 上の一様分布のカノニカル分布がちょうどBernoulli多項式の母函数になっていることを意味している. 上の一般論より,

$$\int_0^1 \frac{\beta e^{-\beta(x+t)}}{1 - e^{-\beta}} dt = e^{-\beta x},$$

$$\int_0^1 B_k(x+t) dt = x^k.$$

前者の公式は区間 $[0, \omega]$ 上の一様分布の場合に次のように一般化される:

$$\int_0^{\omega} \frac{\beta \omega e^{-\beta(x+t)}}{1 - e^{-\beta \omega}} dt = e^{-\beta x}.$$

これは次のようにも書ける:

$$\frac{1}{\omega} \int_0^1 \frac{\beta \omega e^{-\beta(x+\omega t)}}{1 - e^{-\beta \omega}} dt = e^{-\beta x}.$$

これらの公式は後で r 重のHurwitzのゼータ函数の l 重の移動平均で $r - l$ 重のHurwitzゼータ函数が得られるという結果を示すときの仕組みそのものである.

例: $p(x) = \frac{1}{2}(\delta(x) + \delta(x-1))$ のとき, その分配函数は

$$Z(\beta) = \frac{1 + e^{-\beta}}{2}$$

なので, 対応する一般化されたBernoulli多項式 $E_k(x)$ は

$$\frac{2e^{-\beta x}}{1 + e^{-\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(x) \frac{(-\beta)^k}{k!}$$

によって定義される. この $E_k(x)$ は **Euler多項式** と呼ばれており,

$$\frac{1}{2}(E_k(x) + E_k(x+1)) = \int_{\mathbb{R}} E_k(x+t)p(t) dt = x^k$$

を満たしている.

例: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ のとき, その分配函数は

$$Z(\beta) = e^{\beta^2/2}$$

なので, 対応する一般化されたBernoulli多項式 $He_k(x)$ は $z = -\beta$ とおくと,

$$\frac{e^{-\beta x}}{Z(\beta)} = e^{xz - z^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} He_k(x) \frac{z^k}{k!}$$

によって得られる. $He_k(x)$ は [probabilists' Hermite polynomials \(https://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials) と呼ばれている.

7.3 Hurwitzのゼータ函数の移動平均

$x > 0, s > 0$ ならば

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \beta^{s-1} d\beta = \frac{1}{x^s}$$

であった. これを0重のHurwitzのゼータ函数と呼ぶ.

$x > 0, s > 1$ ならば

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\beta e^{-\beta x}}{1 - e^{-\beta}} \beta^{s-2} d\beta = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-\beta(x+k)} \beta^{s-1} d\beta = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(x+k)^s}.$$

これは通常の(1重の)Hurwitzのゼータ函数 $\zeta(s, x)$ である. 左辺の積分に

$$\int_0^1 \frac{\beta e^{-\beta x}}{1 - e^{-\beta}} d\beta = e^{-\beta x}$$

を適用すると,

$$\int_0^1 \zeta(s, x+t) dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-\beta x} \beta^{s-2} d\beta = \frac{1}{x^{s-1}}.$$

以上の計算結果は1重のHurwitzのゼータ函数の移動平均が s を -1 シフトした0重のHurwitzのゼータ函数になることを意味している.

以上の計算は以下のように自明な一般化を持つ.

7.4 多重Hurwitzゼータ函数の移動平均

r 重のHurwitzのゼータ函数を

$$\begin{aligned} \zeta(s, x; \omega_1, \dots, \omega_r) &= \frac{1}{\Gamma(s) \prod_{j=1}^r \omega_j} \int_0^\infty \left(\prod_{j=1}^r \frac{\beta \omega_j}{1 - e^{-\beta \omega_j}} \right) e^{-\beta x} \beta^{s-r-1} d\beta \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left(\prod_{j=1}^r \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_j}} \right) e^{-\beta x} \beta^{s-1} d\beta \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_r=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-\beta(x+k_1\omega_1+\dots+k_r\omega_r)} \beta^{s-1} d\beta \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_r=0}^\infty \frac{1}{(x+k_1\omega_1+\dots+k_r\omega_r)^s} \end{aligned}$$

と定める. 正確には, まず定義式が収束場合を考え, 解析接続する. 最上段の右辺の積分に, $j = 1, \dots, l$ に関する

$$\frac{1}{\omega_j} \int_0^1 \frac{\beta \omega_j e^{-\beta(x+\omega_j t)}}{1 - e^{-\beta \omega_j}} dt = e^{-\beta x}$$

を適用すると,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \dots \int_0^1 \zeta(s, x + \omega_1 t_1 + \dots + \omega_l t_l; \omega_1, \dots, \omega_r) dt_1 \dots dt_l \\ &= \frac{1}{\Gamma(s) \prod_{j=1}^r \omega_j} \int_0^\infty \left(\prod_{j=l+1}^r \frac{\beta \omega_j}{1 - e^{-\beta \omega_j}} \right) e^{-\beta x} \beta^{s-r-1} d\beta \\ &= \frac{1}{\prod_{j=1}^l (s-j) \cdot \prod_{j=1}^l \omega_j} \frac{1}{\Gamma(s-l) \prod_{j=l+1}^r \omega_j} \int_0^\infty \left(\prod_{j=l+1}^r \frac{\beta \omega_j}{1 - e^{-\beta \omega_j}} \right) e^{-\beta x} \beta^{(s-l)-(r-l)-1} d\beta \\ &= \frac{1}{\prod_{j=1}^l (s-j) \cdot \prod_{j=1}^l \omega_j} \zeta(s-l, x; \omega_{l+1}, \dots, \omega_r). \end{aligned}$$

1つ目の等号で変化したのは被函数内の $j = 1, \dots, r$ に関する積が $j = l+1, \dots, r$ に関する積に縮まったことだけであり, 2つ目以降の等号ではそれに合わせて式の表示を調整しただけである. 要するに結論が予想可能であるような自明な計算を実行しただけである.

このように, r 重のHurwitzのゼータ函数の l 重の移動平均は本質的に $r-l$ 重のHurwitzのゼータ函数の s を $-l$ シフトしたものになる.

注意: 以上の計算は前節の計算の自明な一般化に過ぎないことに注意せよ. 計算が自明になった理由は, 分配函数

$$Z_j(\beta) = \int_0^1 e^{-\beta \omega_j t} dt = \frac{1 - e^{-\beta \omega_j}}{\beta \omega_j}$$

に対する

$$\frac{e^{-\beta x_j}}{Z_j(\beta)} = \frac{\beta \omega_j e^{-\beta x_j}}{1 - e^{-\beta \omega_j}}$$

の積のMellin変換で多重Hurwitzゼータ函数を表示して扱ったからである(ただし $x = x_1 + \dots + x_r$ とおく必要がある).

注意: 上の結果は

- Kurokawa, Nobushige and Wakayama, Masato. Period deformations and Raabe's formulas for generalized gamma and sine functions. Kyushu Journal of Mathematics 62(1), 2008, 171-187. [PDF](https://www.jstage.jst.go.jp/article/kyushujm/62/1/62_1_171/_pdf) (https://www.jstage.jst.go.jp/article/kyushujm/62/1/62_1_171/_pdf)

の第5節で「一般化Raabe公式」の多重Hurwitzゼータ函数版として、別の方法で証明されている。上のような公式は「Raabeの公式」と呼ばれているらしい。

7.5 移動平均に関する結果の一般の確率分布への自明な一般化

\mathbb{R} 上の確率分布 $p_j(x)$ の分配函数を

$$Z_j(\beta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta t_j} p_j(t_j) dt_j$$

と書き(分配函数は $\beta > 0$ で well-defined であり、以下の議論が成立するための適切な条件を満たしていると仮定する)、対応する多重 Hurwitz 型ゼータ函数を

$$\zeta(s, x; p_1, \dots, p_r) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left(\prod_{j=1}^r \frac{1}{Z_j(\beta)} \right) e^{-\beta x} \beta^{s-r-1} d\beta$$

と定める(積分が収束するような s をまず考え、解析接続する)。このとき、

$$\frac{1}{Z_j(\beta)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta t_j} p_j(t_j) dt_j = 1, \quad \Gamma(s) = (s-1) \cdots (s-l) \Gamma(s-l)$$

を使った自明な計算によって

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \zeta(s, x + t_1 + \cdots + t_r; p_1, \dots, p_r) p_1(t_1) \cdots p_l(t_l) dt_1 \cdots dt_l \\ = \frac{1}{(s-1) \cdots (s-l)} \zeta(s-l, x; p_{l+1}, \dots, p_r). \end{aligned}$$

が成立していることがわかる。前節の計算はこの自明な計算の特別な場合に過ぎない。

例: $p_1(t_1) = \frac{1}{2}(\delta(t_1) + \delta(t_1 - \omega_1))$ のとき、その分配函数は

$$Z_1(\beta) = \frac{1 + e^{-\beta\omega_1}}{2}.$$

そのとき、上の公式の $l = 1$ の場合は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\zeta(s, x; p_1, \dots, p_r) + \zeta(s, x + \omega_1; p_1, \dots, p_r)) \\ = \int_{\mathbb{R}} \zeta(s, x + t_1; p_1, \dots, p_r) p_1(t_1) dt_1 = \frac{1}{s-1} \zeta(s-1, x; p_2, \dots, p_r) \end{aligned}$$

となる。さらに、 $\omega_1 > 0, r = 1, s > 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \zeta(s, x; p_1) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{2}{1 + e^{-\beta\omega_1}} e^{-\beta x} \beta^{s-2} d\beta \\ &= \frac{2}{\Gamma(s)} \sum_{k_1=0}^\infty (-1)^{k_1} \int_0^\infty e^{-\beta(x+k_1\omega_1)} \beta^{s-2} d\beta \\ &= \frac{2}{s-1} \sum_{k_1=0}^\infty \frac{(-1)^{k_1}}{(x + k_1\omega_1)^{s-1}}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\zeta(s, x; p_1) + \zeta(s, x + \omega_1; p_1)) \\ = \frac{1}{s-1} \left(\sum_{k_1=0}^\infty \frac{(-1)^{k_1}}{(x + k_1\omega_1)^{s-1}} + \sum_{k_1=0}^\infty \frac{(-1)^{k_1}}{(x + (k_1+1)\omega_1)^{s-1}} \right) \\ = \frac{1}{s-1} \frac{1}{x^{s-1}}. \end{aligned}$$

1重のHurwitz型ゼータ関数の移動平均(この場合には単なる和の半分になる)は0重のHurwitz型ゼータ関数になっている.

例: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$ に対応する1重のHurwitz型ゼータ関数を計算してみよう. その分配関数は

$$Z(\beta) = e^{\beta^2\sigma^2/2}$$

なので, $s > 1$ のとき,

$$\zeta(s, x; p) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-\beta^2\sigma^2/2 - \beta x} \beta^{s-2} d\beta.$$

このとき,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \zeta(s, x+t; p) e^{-x^2/(2\sigma^2)} dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-\beta x} \beta^{s-2} d\beta = \frac{1}{s-1} \frac{1}{x^{s-1}}.$$

7.6 一般化された1重のHurwitz型ゼータ関数の0以下の整数での特殊値

Hurwitzのゼータ関数は区間 $[0, 1]$ 上の一様分布に対応する一般化された1重のHurwitz型ゼータ関数である:

$$\zeta(s, x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\beta}{1 - e^{-\beta}} e^{-\beta x} \beta^{s-2} d\beta = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(x+k)^s}.$$

右辺の積分は $\operatorname{Re} s > 1$ で収束している. 他の s における値は解析接続で定義しておく. このとき,

$$\zeta(1-r, x) = -\frac{B_r(x)}{r} \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

となることが知られている. すなわち, Hurwitzのゼータ関数の 0 以下での整数 $s = 1 - r$ での特殊値はBernoulli多項式の $-r$ 分の1に一致する.

この結果は以下のような計算によって, 一般の(適切な条件を満たす)確率分布 $p(x)$ が定める1重のHurwitz型ゼータ関数に拡張される. 以下そのことを説明しよう.

$p(x)$ は(適切な条件を満たす) \mathbb{R} 上の確率分布であるとし, $Z(\beta)$ はその分配関数であるとし, 対応する一般化されたBernoulli多項式を $P_k(x)$ と表す:

$$Z(\beta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta x} p(x) dx, \quad \frac{e^{-\beta x}}{Z(\beta)} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k P_k(x)}{k!} \beta^k.$$

このとき, $p(x)$ に対応する1重のHurwitz型ゼータ関数 $\zeta(s, x; p)$ が

$$\zeta(s, x; p) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}}{Z(\beta)} \beta^{s-2} d\beta$$

と定義されたのであった. 右辺の積分は $\operatorname{Re} s > 1$ で絶対収束していると仮定する(おそらく他にも細かい条件を仮定しておかなければいけない).

このとき, $\zeta(s, x; p)$ の定義式は, 積分範囲を区間 $[1, \infty)$ と区間 $(0, 1)$ に分割して, 区間 $(0, 1)$ 上での積分では $e^{-\beta x}/Z(\beta)$ の β について N 次より大きな部分と N 次以下の部分にわけて, N 次以下の部分の積分を計算すると, 以下のように変形できることがわかる:

$$\begin{aligned} \zeta(s, x; p) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty \frac{e^{-\beta x}}{Z(\beta)} \beta^{s-2} d\beta \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \left(\frac{e^{-\beta x}}{Z(\beta)} - \frac{(-1)^k P_k(x)}{k!} \beta^k \right) \beta^{s-2} d\beta \\ &\quad + \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k P_k(x)}{k!} \frac{1}{(s+k-1)\Gamma(s)}. \end{aligned}$$

この変形の結果は $\Re s > -N$ で意味を持ち, そこへの解析接続を与える. $N \geq r$ と仮定する. $\Gamma(s)$ はちょうど $s = 0, -1, -2, \dots$ で1位の極を持つので, $s \rightarrow 1-r$ のとき, 右辺で生き残る項は三段目の和の $k = r$ に対する項のみになる. そこで, $s \rightarrow 1-r$ のとき,

$$\frac{1}{(s+r-1)\Gamma(s)} = \frac{(s+r-2) \cdots (s+1)s}{\Gamma(s+r)} \rightarrow (-1)^{r-1} (r-1)!$$

を使うと,

$$\zeta(1-t, x; p) = \frac{(-1)^r P_r(x)}{r!} (-1)^{r-1} (r-1)! = -\frac{P_r(x)}{r} \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

となることがわかる.

例: $p(x) = \frac{1}{2}(\delta(x) + \delta(x-1))$ のとき, 対応する一般化されたBernoulli多項式 $E_k(x)$ はEuler多項式になる:

$$\frac{2e^{-\beta x}}{1+e^{-\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k E_k(x)}{k!} \beta^k.$$

そして, 対応する1重のHurwitz型ゼータ関数は

$$\zeta(s, x; p) = \frac{2}{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^{s-1}}$$

になる. この解析接続について

$$\zeta(1-r, x; p) = -\frac{E_r(x)}{r} \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

例: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$ (標準正規分布)のとき, 対応する一般化されたBernoulli多項式 $He_k(x)$ は [probabilists' Hermite polynomials](https://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials) (https://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials) になる:

$$e^{-\beta^2/2 - \beta x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k He_k(x)}{k!} \beta^k.$$

そして, 対応する1重のHurwitz型ゼータ関数は

$$\zeta(s, x; p) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2/2 - \beta x} \beta^{s-2} d\beta.$$

になる. この解析接続について

$$\zeta(1-r, x; p) = -\frac{He_r(x)}{r} \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$