Weave による文書作成のテスト

黒木玄

2019-03-13

目次

ノートブック `Convert ipynb to html, tex, pdf` を実行すると, このファイルから jmd, html, tex, pdf ファイルが作成される. jmd ファイルは Julia 言語のコードを含む markdown ファイルである.

```
using Plots
gr()
#ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
using SpecialFunctions
using Distributions
using SymPy
```

1　ガンマ函数とベータ函数

ガンマ函数とベータ函数は次のように定義される: $\mathrm{Re}\, s, \mathrm{Re}\, p, \mathrm{Re}\, q > 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx, \\
B(p,q) &= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx
\end{aligned}
$$

と定義される.

注意：複数行の数式は二重のドルマークで囲んだ aligned モードを使うことにした. `weave()` 函数で作成した tex ファイルを訂正を施す必要がある.

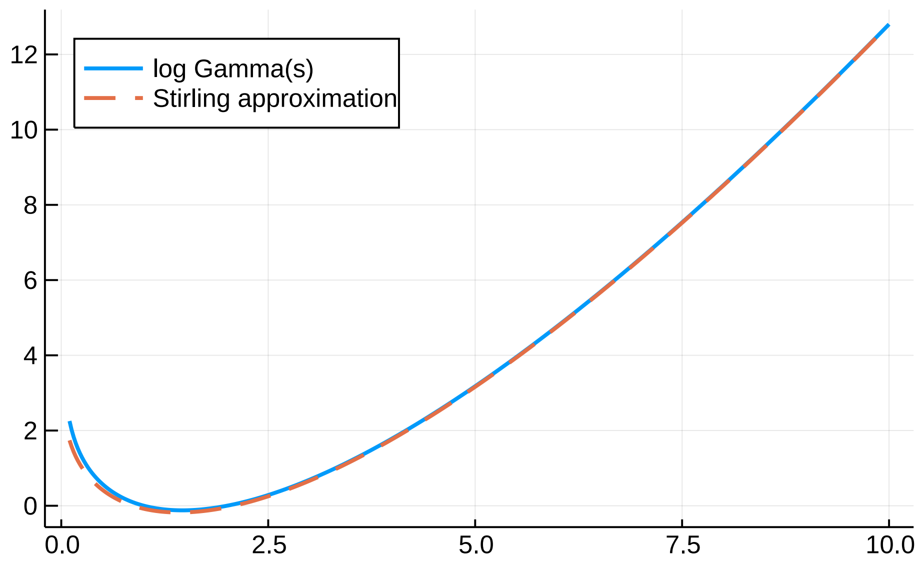
1.1　ガンマ函数のグラフ

ガンマ函数は階乗の連続的補間になっており, 急激に増大する函数になる. だから, グラフを描き易いように対数を取ったガンマ函数のグラフを描いてみよう. せっかくなので, グラフの中で Stirling の近似公式

$$
\log\Gamma(s) \approx s\log s - s - \frac{1}{2}\log s + \log\sqrt{2\pi} \quad \text{as } s \to \infty
$$

の右辺と比較してみよう. 以下のプロットを見ればわかるようにほぼぴったり一致している.

```
lstirling(s) = s*log(s) - s - log(s)/2 + log(√(2π))
s = range(0.1, 10, length=400)
plot(size=(500, 300), legend=:topleft)
plot!(s, lgamma.(s), label="log Gamma(s)", lw=2)
plot!(s, lstirling.(s), label="Stirling approximation", ls=:dash, lw=2)
```



1.2　ガンマ分布とベータ分布の密度函数のグラフ

$$\theta, k, a, b > 0$$

に対して, ガンマ分布とベータ分布の確率密度函数がそれぞれ次のように定義される:

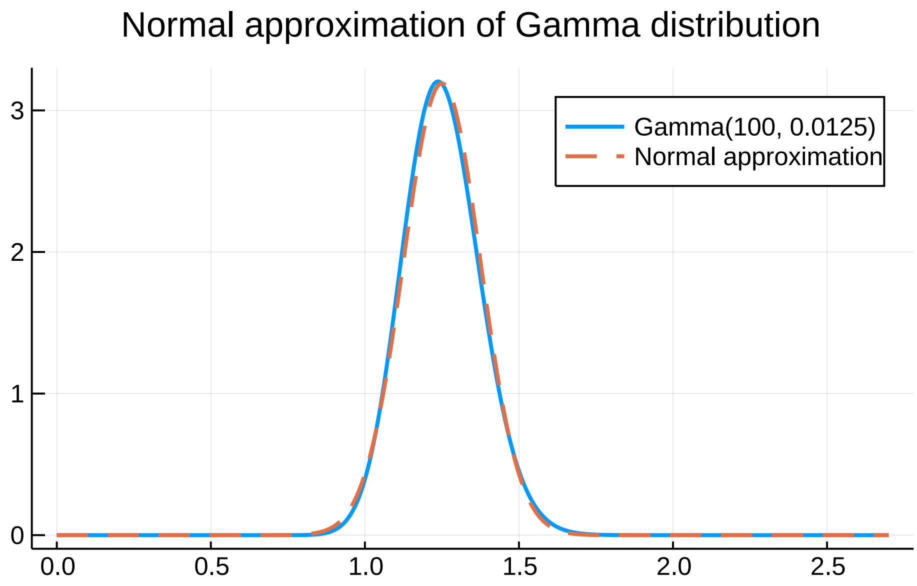
$$p(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} e^{-x/\theta} x^{k-1} \quad (x > 0),$$
$$q(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \quad (0 < x < 1).$$

これらは k, q, b が大きなとき, それぞれ正規分布の確率密度函数

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

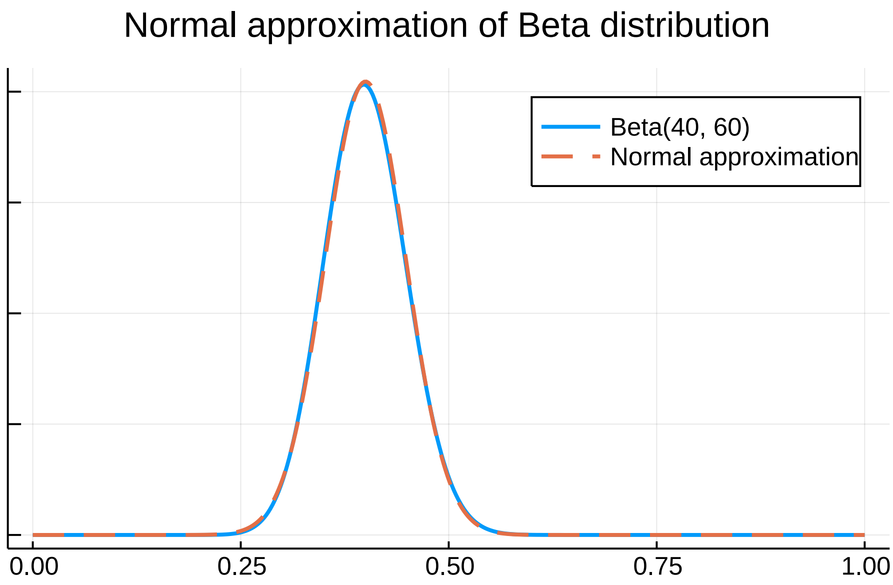
の $(\mu, \sigma^2) = (k\theta, k\theta^2), (a/(a+b), ab/((a+b)^2(a+b+1)))$ の場合でよく近似されるようになる (中心極限定理の特別な場合). そのことをグラフを描いて確認しよう.

```
k, θ = 100, 1/80
gdist = Gamma(k, θ)
ndist = Normal(k*θ, √k*θ)
x = range(0, 2.7, length=400)
plot(size=(500, 300))
title!("Normal approximation of Gamma distribution", titlefontsize=12)
plot!(legend=:topright)
plot!(x, pdf.(gdist, x), label="Gamma($k, $θ)", lw=2)
plot!(x, pdf.(ndist, x), label="Normal approximation", ls=:dash, lw=2)
```




```
a, b = 40, 60
bdist = Beta(a, b)
ndist = Normal(a/(a+b), √(a*b/((a+b)^2*(a+b+1))))
x = range(0, 1, length=400)
```

```
plot(size=(500, 300))
title!("Normal approximation of Beta distribution", titlefontsize=12)
plot!(legend=:topright)
plot!(x, pdf.(bdist, x), label="Beta($a, $b)", lw=2)
plot!(x, pdf.(ndist, x), label="Normal approximation", ls=:dash, lw=2)
```



1.3 上で使ったガンマ函数の公式

上で使ったガンマ分布の確率密度函数 $p(x) = e^{-x/\theta} x^{k-1}/(\theta^k \Gamma(k))$ $(x > 0)$ が確率密度函数であることを示すためには, それの 0 から ∞ までの積分が 1 になること, すなわち,

$$\int_0^\infty e^{-x/\theta} x^{k-1}\,dx = \theta^k \Gamma(k) \quad (\theta, k > 0)$$

が成立することを示さなければいけない. この公式は左辺を $x = \theta y$ で置換することによって得られる.

そのことは SymPy を使っても確かめられる. (注意: 以下の計算は θ を SymPy の変数として使用しているので Python 2.7 では不可能. Python 3.x を使いましょう.)

```
k, θ, x = symbols("k θ x", positive=true)
sol = simplify(integrate(exp(-x/θ)*x^(k-1), (x, 0, oo)))
solstr = replace(sympy.latex(sol), "θ"=>"\\theta")
display("text/html", raw"$$\int_0^\infty e^{-x/\theta} x^{k-1}\,dx =
    " * solstr * raw"$$");
```

$$\int_0^\infty e^{-x/\theta} x^{k-1}\,dx = \theta^k \Gamma\left(k\right)$$

注意: LaTeXStrings.jl の `latexstring()` を使用して同じ数式を表示させると, `weave(〜, doctype="md2html")` でうまく数式が表示されなくなる. 上のように mimetype `text/html` で `display` を使用し, 行末に ; を付ければうまく表示されるようになる.

2 Riemann のゼータ函数

Riemann のゼータ函数は $\operatorname{Re} s > 1$ において

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

と定義され, 唯一の極 $s = 1$ を除いた複素平面全体に解析接続される.

Riemann のゼータ函数の $0 \leqq \operatorname{Re} s \leqq 1$ (critical strip) における零点を**非自明な零点**と呼ぶ.

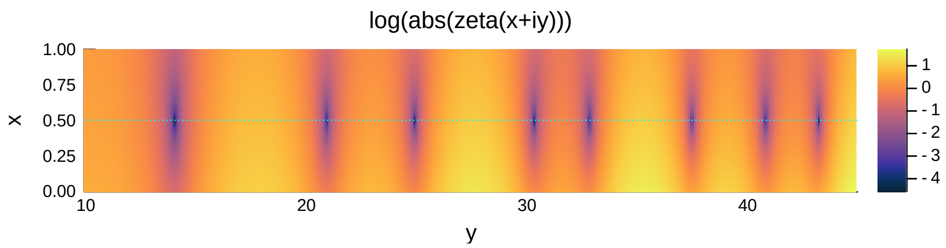
Riemann 予想: Riemann のゼータ函数の非自明な零点はすべて直線 $\operatorname{Re} s = 1/2$ 上に乗っている.

Riemann のゼータ函数の非自明な零点は素数の分布の精密な評価と関係している.

Riemann 予想の成立を (数学的な証明にはならないが) 数値的な計算で確認してみよう

2.1 Riemann のゼータ函数の絶対値の対数の heatmap

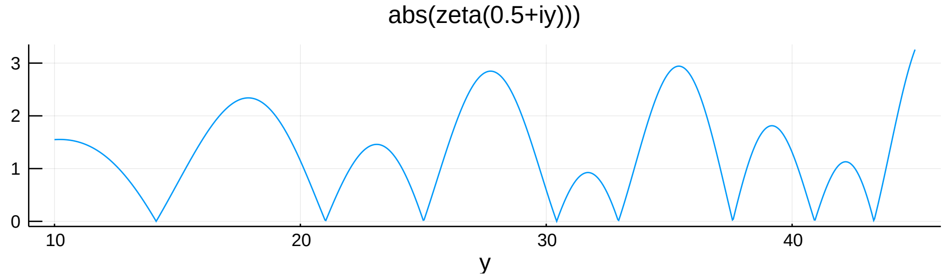
```
f(s) = max(min(log(abs(zeta(s))), 3), -5)
x = range(0, 1, length=100)
y = range(10, 45, length=400)
s = @. x + im*y'
plot(size=(750, 180))
title!("log(abs(zeta(x+iy)))", titlefontsize=12)
heatmap!(y, x, f.(s), color=:thermal)
xlabel!("y")
ylabel!("x")
hline!([0.5], ls=:dot, color=:cyan, label="")
```



2.2 Riemann のゼータ函数の絶対値の Re s = 1/2 上の様子

```
f(s) = abs(zeta(s))
x = 1/2
y = range(10, 45, length=1000)
s = @. x + im*y
plot(size=(720, 200))
title!("abs(zeta(0.5+iy)))", titlefontsize=12)
```

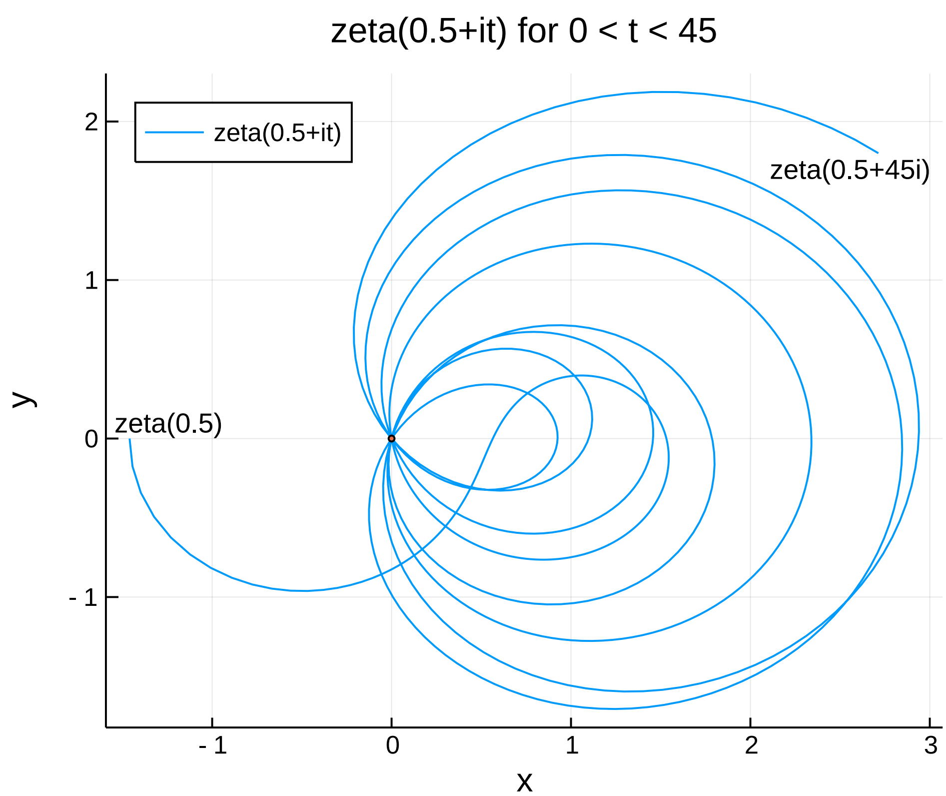
```
plot!(y, f.(s), label="")
xlabel!("y")
```



2.3 Riemann のゼータ函数の Re s = 1/2 上での複素数値

直線 $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ での $\zeta(s)$ の値は何度も繰り返し複素平面の原点 0 を通る.

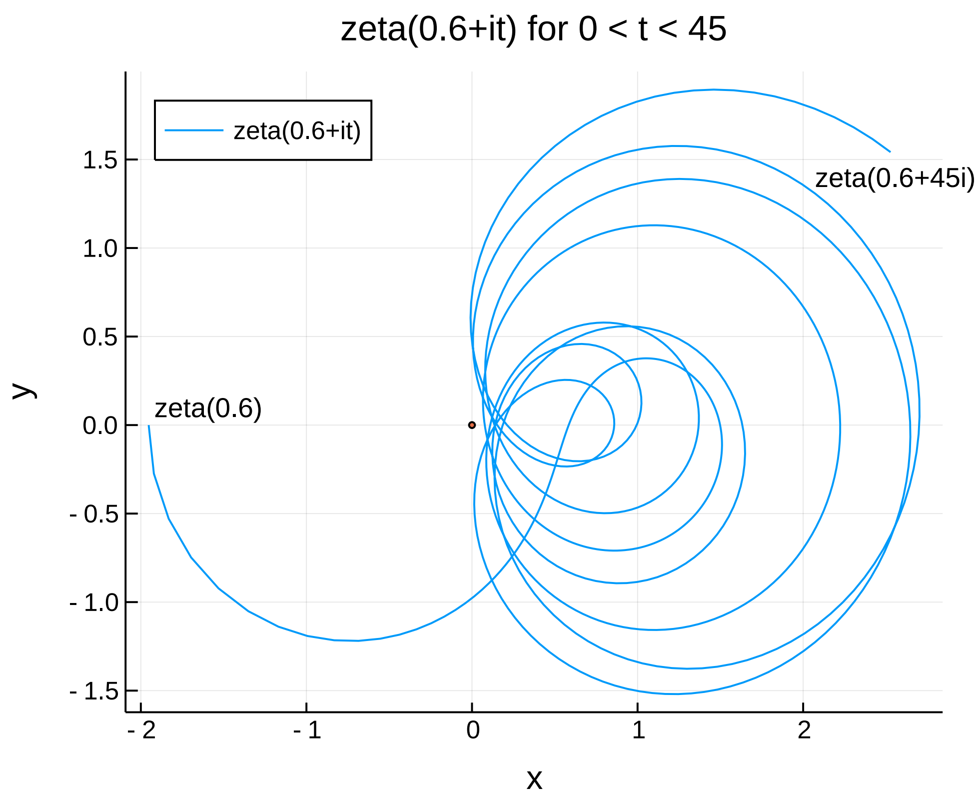
```
x = 1/2
y = range(0, 45, length=1000)
s = @. x + im*y
w = zeta.(s)
plot(size=(500,400), legend=:topleft)
title!("zeta(0.5+it) for 0 < t < 45", titlefontsize=12)
plot!(real(w), imag(w), label="zeta(0.5+it)")
scatter!([0], [0], markersize=2, label="")
xlabel!("x")
ylabel!("y")
annotate!([(-1.25, 0.1, "zeta(0.5)", 9)])
annotate!([(2.55, 1.7, "zeta(0.5+45i)", 9)])
```



2.4 Riemann のゼータ函数の Re s = 0.6 上での複素数値

直線 $\operatorname{Re} s = 0.6$ での $\zeta(s)$ の値を計算すると複素平面の原点を避けて通っていることがわかる.

```
x = 0.6
y = range(0, 45, length=1000)
s = @. x + im*y
w = zeta.(s)
plot(size=(500,400), legend=:topleft)
title!("zeta(0.6+it) for 0 < t < 45", titlefontsize=12)
plot!(real(w), imag(w), label="zeta(0.6+it)")
scatter!([0], [0], markersize=2, label="")
xlabel!("x")
ylabel!("y")
annotate!([(-1.6, 0.1, "zeta(0.6)", 9)])
annotate!([(2.55, 1.4, "zeta(0.6+45i)", 9)])
```



3　手書きのノート

3.1　ガンマ函数とベータ函数入門 (1)

$\boxed{\text{(仮の) 定義}}$　$\underset{\text{ガンマ}}{\Gamma(s)} = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx \quad (s>0)$,　$\underset{\text{ベータ}}{B(p,q)} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p,q>0)$.

$\boxed{\text{ベータ函数の色々な表示}}$

(1) $$B(p,q) \underset{\text{仮の定義}}{=} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \underset{x=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t}}{=} \int_0^\infty \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} \underset{t=u^{1/p}\ \left(\frac{dt}{t}=\frac{1}{p}\frac{du}{u}\right)}{=} \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^{1/p})^{p+q}}$$

ベータ函数のこれらの表示はどれもよく出て来る.

(2) $$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \underset{x=\cos^2\theta}{=} 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta$$

(3) $$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1}\,dy\right)dx \overset{y=z-x}{=} \int_0^\infty\left(\int_x^\infty e^{-z} x^{p-1}(z-x)^{q-1}\,dz\right)dx$$

(x,z) は $0<x<z<\infty$ を動く

$$\underset{\text{積分順序の交換}}{=} \int_0^\infty\left(\int_0^z e^{-z} x^{p-1}(z-x)^{q-1}\,dx\right)dz \underset{x=zt}{=} \int_0^\infty\left(\int_0^1 e^{-z} z^{p-1} t^{p-1} z^{q-1}(1-t)^{q-1} z\,dt\right)dz$$

$$= \int_0^\infty e^{-z} z^{p+q-1}\,dz \cdot \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \Gamma(p+q)B(p,q).$$

$$\therefore B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad \leftarrow \quad B(p,q) = \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!} \quad (p,q\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$$

$\boxed{\text{性質}}$

(4) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$,　(5) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$,　$\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

(6) $\Gamma(s+1) = \int_0^\infty (-e^{-x})' x^s\,dx \underset{\text{部分積分}}{=} \int_0^\infty e^{-x}(x^s)'\,dx = s\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx = s\,\Gamma(s)$.

$s! = \Gamma(s+1)$ と書くと $\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

(7) $n=0,1,2,\dots$ に対して, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = n!$

(8) $$\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right) = \left(n-1+\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-1+\tfrac{1}{2}\right) = \left(n-1+\tfrac{1}{2}\right)\left(n-2+\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-2+\tfrac{1}{2}\right) = \cdots = \left(n-1+\tfrac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{2^n\,n!}\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}.$$

(9) $$\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2n+1}\,d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},n+1\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}\;n!}{\frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}} = \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)}.$$

$$\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2n}\,d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}}{n!} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,\frac{\pi}{2}.$$

(10) $$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = B(s,1-s) \underset{0<s<1}{=} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{1+t} = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}} \underset{\text{複素解析}}{=} \frac{1}{s}\,\frac{\pi s}{\sin(\pi s)} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

$\int_0^\infty \frac{du}{1+u^a}$ $(a>1)$ の形の積分も本質的にベータ函数.
けっこう役に立つ.

(11) $$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \overset{x=\sqrt{y}}{=} \int_0^\infty e^{-y} y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$ $\leftarrow$ Gauss 積分は $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ に等しい.

(12) $$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx \overset{x=y^2}{=} 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2s-1}\,dy$$ $\leftarrow$ Γ 函数は Gauss 積分の一般化.

3.2　ガンマ函数とベータ函数入門 (2)

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p,q>0 \text{ に対するベータ函数の定義})$$
$$= \int_0^\infty \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} \quad \left(x = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t},\ dx = \frac{dt}{(1+t)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^{1/p})^{p+q}} \quad \left(t = u^{1/p},\ \frac{dt}{t} = \frac{1}{p}\frac{du}{u}\right)$$

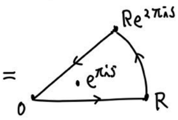
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (\text{よく知られた公式})$$

以上によって，特に $0<s<1$ のとき，

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = B(s,1-s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}}.$$

$z = e^{\pi i s} + w$ とおくと

$$\frac{1}{1+z^{1/s}} = \frac{1}{1+(e^{\pi i s}+w)^{1/s}}$$
$$= \frac{1}{1+\left(e^{\pi i s \frac{1}{s}} + \frac{1}{s}e^{\pi i s(\frac{1}{s}-1)}w + O(w^2)\right)}$$
$$= \frac{-se^{\pi i s}}{w} + O(1)$$

$C_R =$ 

とおくと，$\dfrac{1}{1+z^{1/s}}$ の $z = e^{\pi i s}$ での留数は $-se^{\pi i s}$ なので

$$-2\pi i s e^{\pi i s} = \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^{1/s}} = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^{1/s}} = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}} - e^{2\pi i s}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}},$$

$$\therefore\ \int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}} = \frac{-2\pi i s e^{\pi i s}}{1-e^{2\pi i s}} = \frac{2\pi i s}{e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}} = \frac{\pi s}{\sin(\pi s)}.$$

$$\therefore\ \boxed{\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.}$$

一方，

$$\Gamma(s) \underset{\Gamma(s)\text{の定義}}{=} \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n x^{s-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx \underset{x=ny,\ \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}}{=} \lim_{n\to\infty} n^s \int_0^1 y^{s-1}(1-y)^n\,dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^s B(s,n+1) \underset{B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ \Gamma(n+1)=n!}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{n^s\Gamma(s)\,n!}{\Gamma(s+n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^s\,n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

$$\Gamma(s+n+1) = (s+n)\Gamma(s+n) = \cdots = (s+n)\cdots(s+1)s\Gamma(s)$$

ゆえに，

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} = \frac{1}{s\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{1}{\Gamma(1+s)\Gamma(1-s)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+s)(2+s)\cdots(n+1+s)}{n^{1+s}\,n!}\,\frac{(1-s)(2-s)\cdots(n+1-s)}{n^{1-s}\,n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{(1+s)(2+s)\cdots(n+1+s)}{(n+1)!}\,\frac{(1-s)(2-s)\cdots(n+1-s)}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\left(1+\frac{s}{1}\right)\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{s}{n+1}\right)\left(1-\frac{s}{1}\right)\left(1-\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{s}{n+1}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^\infty\left(\left(1+\frac{s}{k}\right)\left(1-\frac{s}{k}\right)\right) = \prod_{k=1}^\infty\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right). \qquad \therefore\ \boxed{\sin(\pi s) = \pi s\prod_{k=1}^\infty\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)}$$

3.3 Hurwitz のゼータ函数とガンマ函数の関係

$$\begin{cases} \zeta(s,x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^s} \quad (s>1,\ x \in \mathbb{Z}_{<0}) \text{ --- Hurwitz のゼータ函数.} \\ \zeta(s,x+1) = \zeta(s,x) - \dfrac{1}{x^s}. \quad \therefore\ \zeta_s(s,x+1) = \zeta_s(s,x) + x^{-s}\log x. \ \leftarrow \textcircled{1} \\ \zeta_x(s,x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-s}{(x+k)^{s+1}} = -s\,\zeta(s+1,x). \quad \therefore\ \zeta_{xx}(s,x) = s(s+1)\zeta(s+2,x). \ \leftarrow \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad \text{(容易に示せる有名な公式)} \\ \psi(x) := \dfrac{d}{dx}\log\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx}\log\frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \lim_{n\to\infty}\left(\log n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right) \\ \psi'(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2} = \zeta(2,x) \ \leftarrow \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\zeta_{sxx}(0,x) \overset{\textcircled{2}}{=} \zeta(2,x) \overset{\textcircled{3}}{=} \psi'(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\Gamma(x). \ \leftarrow \textcircled{4}$$

$F(x) := \zeta_s(0,x) - \log\Gamma(x)$ とおく。このとき, $F''(x) \overset{\textcircled{4}}{=} 0$ なので, $F(x) = a + bx$.

$$F(x+1) = \zeta_s(0,x+1) - \log\Gamma(x+1) \overset{\textcircled{1}}{=} \zeta_s(0,x) + \log x - \log(x\Gamma(x)) = \zeta_s(0,x) - \log\Gamma(x) = F(x). \quad \therefore\ F(x) = a$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi} \quad \text{(Gauss 積分)} \ \leftarrow \textcircled{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

$$\zeta\left(s,\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+k\right)^s} = 2^s\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^s} = 2^s\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^s}\right) = (2^s-1)\zeta(s).$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \zeta_s\left(s,\tfrac{1}{2}\right) = 2^s\zeta(s)\log 2 + (2^s-1)\zeta'(s). \quad \therefore\ \zeta_s\left(0,\tfrac{1}{2}\right) = \zeta(0)\log 2 = -\frac{1}{2}\log 2 = -\log\sqrt{2} \ \leftarrow \textcircled{6}$$

$$F\left(\tfrac{1}{2}\right) = \zeta_s\left(0,\tfrac{1}{2}\right) - \log\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) \underset{\textcircled{5}\textcircled{6}}{=} -\log\sqrt{2} - \log\sqrt{\pi} = -\log\sqrt{2\pi}. \quad \therefore\ F(x) = -\log\sqrt{2\pi}.$$

したがって, $\zeta_s(0,x) = \log\Gamma(x) - \log\sqrt{2\pi} = \log\dfrac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$. $\therefore\ \boxed{\log\Gamma(x) = \zeta_s(0,x) + \log\sqrt{2\pi}.}$

Lerchの公式

$$\zeta(s,x+1) \overset{s>1}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+1+k)^s} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} e^{-(x+1+k)t}\, t^{s-1}\,dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(x+1)t}\, t^{s-1}\,dt}{1-e^{-t}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}\, t^{s-1}\,dt}{e^t-1} = \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)e^{-xt}\, t^{s-1}\,dt + \int_0^{\infty} e^{-xt}\, t^{s-2}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-xt}\, t^{s-1}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)e^{-xt}\, t^{s-1}\,dt + \frac{\Gamma(s-1)}{x^{s-1}} - \frac{\Gamma(s)}{2x^s}\right) = \underbrace{\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)e^{-xt}\, t^{s-1}\,dt}_{=:\,F(s,x)} + \frac{1}{(s-1)x^{s-1}} - \frac{1}{2x^s}.$$

$$\begin{cases} F(0,x) = 0 \text{ より}, \quad F_s(0,x) = \displaystyle\lim_{s\to 0}\frac{F(s,x)}{s} = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)e^{-xt}\frac{dt}{t}. \\ \dfrac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\dfrac{1}{(s-1)x^{s-1}} = x\log x - x, \quad \dfrac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\left(-\dfrac{1}{2x^s}\right) = \dfrac{1}{2}\log x, \end{cases}$$

$$\therefore\ \boxed{\log\Gamma(x+1) = \zeta_s(0,x+1) + \log\sqrt{2\pi} = x\log x - x + \frac{1}{2}\log x + \log\sqrt{2\pi} + \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)e^{-xt}\frac{dt}{t}.}$$

Binet の公式