

Weave による文書作成のテスト

黒木玄

2019-03-13

目次

1	ガンマ函数とベータ函数	2
1.1	ガンマ函数のグラフ	2
1.2	ガンマ分布とベータ分布の密度函数のグラフ	3
2	Riemann のゼータ函数	5
2.1	Riemann のゼータ函数の絶対値の対数の heatmap	5
2.2	Riemann のゼータ函数の絶対値の $\text{Re } s = 1/2$ 上の様子	5
3	手書きのノート	7
3.1	ガンマ函数とベータ函数入門 (1)	7
3.2	ガンマ函数とベータ函数入門 (2)	8
3.3	Hurwitz のゼータ函数とガンマ函数の関係	9

ノートブック Convert ipynb to html, tex, pdf を実行すると, このファイルから jmd, html, tex, pdf ファイルが作成される. jmd ファイルは Julia 言語のコードを含む markdown ファイルである.

```
using Plots
gr()
ENV["PLOTS_TEST"] = "true"
using SpecialFunctions
using Distributions
```

1 ガンマ函数とベータ函数

ガンマ函数とベータ函数は次のように定義される: $\operatorname{Re} s, \operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0$ のとき

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx,$$
$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

と定義される.

注意: 複数行の数式は二重のドルマークで囲んだ aligned モードを使うことにした. `weave()` 函数で作成した tex ファイルを訂正を施す必要がある.

1.1 ガンマ函数のグラフ

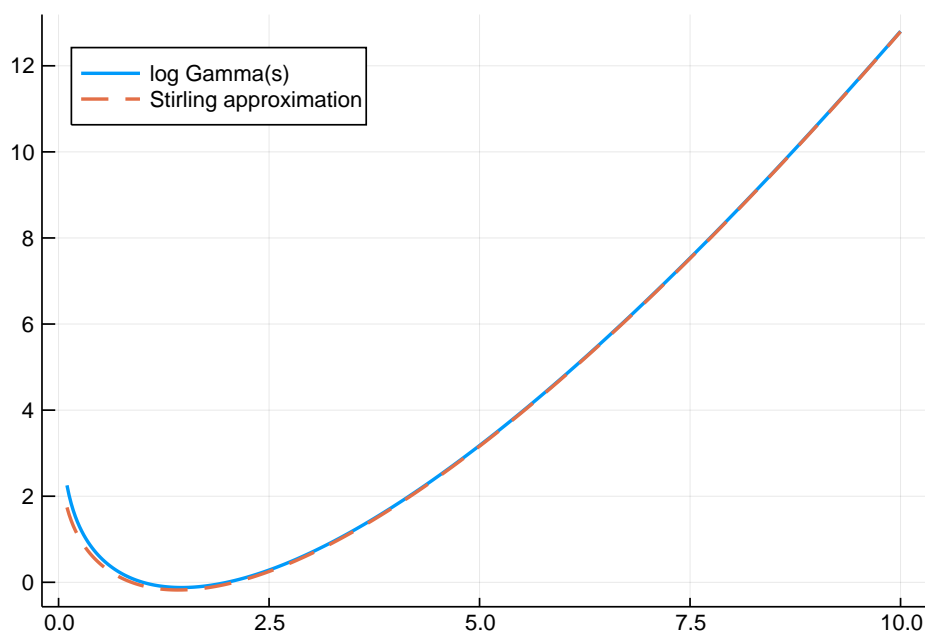
ガンマ函数は階乗の連続的補間になっており, 急激に増大する函数になる. だから, グラフを描き易いように対数を取ったガンマ函数のグラフを描いてみよう. せっかくなので, グラフの中で Stirling の近似公式

$$\log \Gamma(s) \approx s \log s - s - \frac{1}{2} \log s + \log \sqrt{2\pi} \quad \text{as } s \rightarrow \infty$$

の右辺と比較してみよう. 以下のプロットを見ればわかるようにほぼぴったり一致している.

対数ガンマ函数のスターリング近似

```
lstirling(s) = s*log(s) - s - log(s)/2 + log(sqrt(2*pi))
s = range(0.1, 10, length=400)
plot(legend=:topleft)
plot!(s, lgamma.(s), label="log Gamma(s)", lw=2)
plot!(s, lstirling.(s), label="Stirling approximation", ls=:dash, lw=2)
```



1.2 ガンマ分布とベータ分布の密度関数のグラフ

$$\theta, k, a, b > 0$$

に対して、ガンマ分布とベータ分布の確率密度関数がそれぞれ次のように定義される:

$$p(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} e^{-x/\theta} x^{k-1} \quad (x > 0),$$

$$q(x) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \quad (0 < x < 1).$$

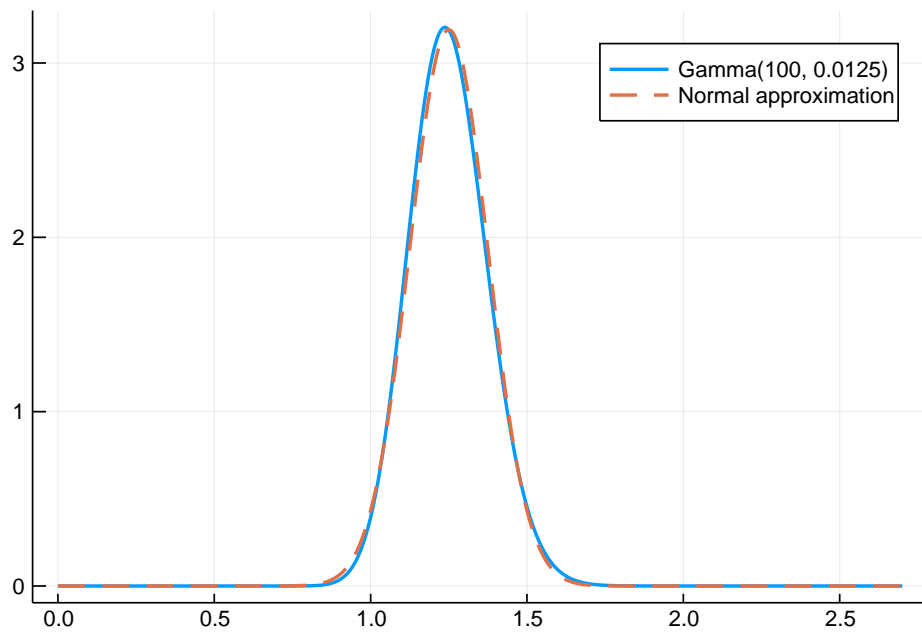
これらは k, a, b が大きくなると、それぞれ正規分布の確率密度関数

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

の $(\mu, \sigma^2) = (k\theta, k\theta^2), (a/(a+b), ab/((a+b)^2(a+b+1)))$ の場合によく近似されるようになる (中心極限定理の特別な場合). そのことをグラフを描いて確認しよう.

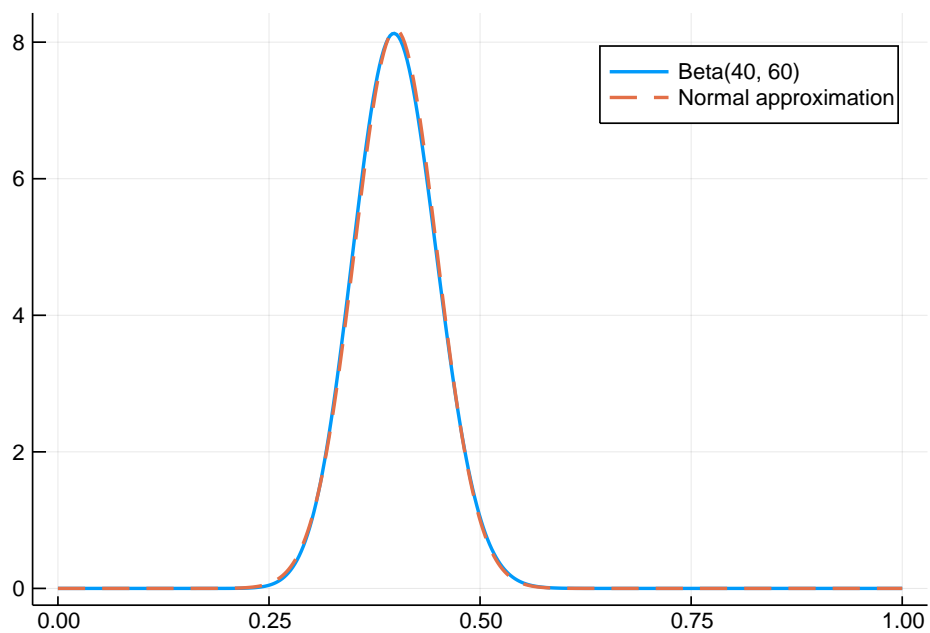
ガンマ分布の場合

```
k, theta = 100, 1/80
gdist = Gamma(k, theta)
ndist = Normal(k*theta, sqrt(k*theta))
x = range(0, 2.7, length=400)
plot(title="Normal approximation of Gamma distribution")
plot(legend=:topright)
plot!(x, pdf.(gdist, x), label="Gamma($k, \theta$", lw=2)
plot!(x, pdf.(ndist, x), label="Normal approximation", ls=:dash, lw=2)
```



ベータ分布の場合

```
a, b = 40, 60
bdist = Beta(a, b)
ndist = Normal(a/(a+b),  $\sqrt{(a*b/((a+b)^2*(a+b+1)))}$ )
x = range(0, 1, length=400)
plot(title="Normal approximation of Beta distribution")
plot(legend=:topright)
plot!(x, pdf.(bdist, x), label="Beta($a, $b)", lw=2)
plot!(x, pdf.(ndist, x), label="Normal approximation", ls=:dash, lw=2)
```



2 Riemann のゼータ函数

Riemann のゼータ函数は $\operatorname{Re} s > 1$ において

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

と定義され, 唯一の極 $s = 1$ を除いた複素平面全体に解析接続される.

Riemann のゼータ函数の $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ (critical strip) における零点を非自明な零点と呼ぶ.

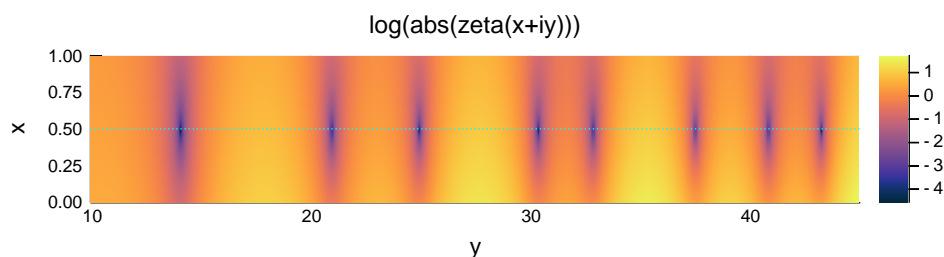
Riemann 予想: Riemann のゼータ函数の非自明な零点はすべて直線 $\operatorname{Re} s = 1/2$ 上に乗っている.

Riemann のゼータ函数の非自明な零点は素数の分布の精密な評価と関係している.

Riemann 予想の成立を (数学的な証明にはならないが) 数値的な計算で確認してみよう

2.1 Riemann のゼータ函数の絶対値の対数の heatmap

```
f(s) = max(min(log(abs(zeta(s))), 3), -5)
x = range(0, 1, length=100)
y = range(10, 45, length=400)
s = @. x + im*y'
plot(size=(720, 180))
title!("log(abs(zeta(x+iy)))", titlefontsize=12)
heatmap!(y, x, f.(s), color=:thermal)
xlabel!("y")
ylabel!("x")
hline!([0.5], ls=:dot, color=:cyan, label="")
```



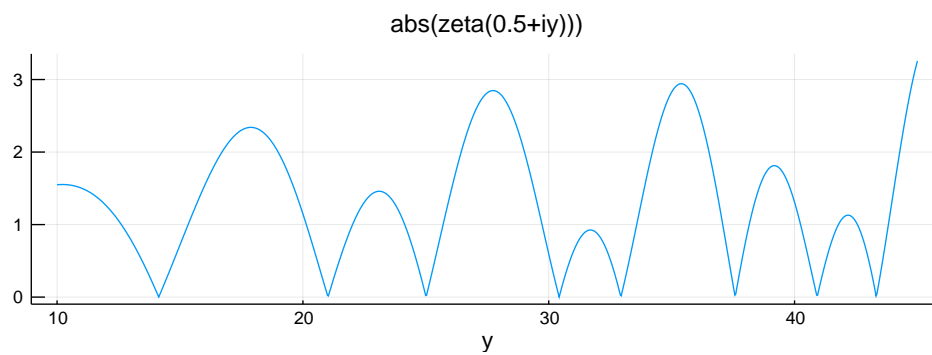
2.2 Riemann のゼータ函数の絶対値の $\operatorname{Re} s = 1/2$ 上の様子

```
f(s) = abs(zeta(s))
x = 1/2
y = range(10, 45, length=1000)
s = @. x + im*y
```

```

plot(size=(720, 250))
title!("abs(zeta(0.5+iy))", titlefontsize=12)
plot!(y, f.(s), label="")
xlabel!("y")

```



3 手書きのノート

3.1 ガンマ函数とベータ函数入門 (1)

(仮)の定義 $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$, $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (p, q > 0)$,
ガンマ ベータ

ベータ函数の色々な表示

(1) $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \xrightarrow{\text{仮の定義}} \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u^{1/p})^{p+q}} \quad \left(\frac{dt}{t} = \frac{1}{p} \frac{du}{u} \right)$ ベータ函数のこれらの表示はどれもよく出て来る。

(2) $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \xrightarrow{\text{仮の定義}} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta$
 $x = \cos^2 \theta \quad y = z - x \quad (x, z) \text{ は } 0 < x < z < \infty \text{ を動く}$

(3) $\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1} dy \right) dx = \int_0^{\infty} \left(\int_x^{\infty} e^{-z} x^{p-1} (z-x)^{q-1} dz \right) dx$
 $\xrightarrow{\text{積分順序の交換}} \int_0^{\infty} \left(\int_0^z e^{-z} x^{p-1} (z-x)^{q-1} dx \right) dz = \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 e^{-z} z^{p-1} z^{q-1} (1-t)^{q-1} z dt \right) dz$
 $\xrightarrow{z=zt} = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{p+q-1} dz \cdot \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \Gamma(p+q) B(p, q)$
 $\therefore B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \leftarrow B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} \quad (p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$

(注意)

(4) $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$, (5) $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$, $\therefore \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,
 (6) $\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} (-e^{-x})' x^s dx = \int_0^{\infty} e^{-x} (x^s)' dx = s \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = s \Gamma(s)$.
 $s! = \Gamma(s+1)$ と書く
 $(-\frac{1}{2})! = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(7) $n=0, 1, 2, \dots$ に對して, $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = \dots = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!$

(8) $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-1+\frac{1}{2}) \Gamma(n-1+\frac{1}{2}) = (n-1+\frac{1}{2})(n-2+\frac{1}{2}) \Gamma(n-2+\frac{1}{2}) = \dots = (n-1+\frac{1}{2}) \dots (1+\frac{1}{2}) \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2n-1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{2 \cdot 4 \dots (2n)}{2^n n!} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$

(9) $\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2n+1} d\theta = \frac{1}{2} B(\frac{1}{2}, n+1) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} n!}{\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}} = \frac{2 \cdot 4 \dots (2n)}{1 \cdot 3 \dots (2n-1) (2n+1)}$

$\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2n} d\theta = \frac{1}{2} B(\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \frac{\pi}{2}$

(10) $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = B(s, 1-s) \xrightarrow{0 < s < 1} \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{1+t} dt = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^{1/s}} = \frac{1}{s} \frac{\pi s}{\sin(\pi s)} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$
(検索) $\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^a} \quad (a > 1)$ の形の積分も本質的にベータ函数.

(11) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \xrightarrow{x=y^2} \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{-\frac{1}{2}} dy = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. ← Gauss 積分は $\Gamma(\frac{1}{2})$ に等しい.
(注意) $\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^a} \quad (a > 1)$ の形の積分も本質的にベータ函数. ところが、

(12) $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \xrightarrow{x=y^2} 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2s-1} dy$ ← Γ 函数は Gauss 積分の一般化.

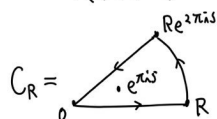
3.2 ガンマ函数とベータ函数入門 (2)

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (p, q > 0 \text{ に対するベータ函数の定義}) \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt \quad \left(x = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}, \quad dx = \frac{dt}{(1+t)^2}\right) \\ &= \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^{1/p})^{p+q}} \quad \left(t = u^{1/p}, \quad \frac{dt}{t} = \frac{1}{p} \frac{du}{u}\right) \end{aligned}$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (\text{よく知られた公式})$$

以上により、特に $0 < s < 1$ のとき、

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = B(s, 1-s) = \frac{1}{s} \int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}}.$$



と $s < 1$, $\frac{1}{1+z^{1/s}}$ の $z = e^{\pi i s} \tau$ の留数は $-s e^{\pi i s}$ なのを

$$-2\pi i s e^{\pi i s} = \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^{1/s}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^{1/s}} = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}} - e^{2\pi i s} \int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}},$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}} = \frac{-2\pi i s e^{\pi i s}}{1 - e^{2\pi i s}} = \frac{2\pi i s}{e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}} = \frac{\pi s}{\sin(\pi s)}.$$

$$\therefore \Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{1}{s} \int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

一方、

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{s-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s \int_0^1 y^{s-1} (1-y)^n dy$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^s B(s, n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s \Gamma(s) n!}{\Gamma(s+n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n!}{s(s+1) \cdots (s+n)}.$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \left(\begin{aligned} \Gamma(s+n+1) &= (s+n) \Gamma(s+n) \\ &= \cdots = (s+1) \cdots (s+1) s \Gamma(s) \end{aligned} \right)$$

ゆえに、

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} = \frac{1}{s \Gamma(s) \Gamma(1-s)} = \frac{1}{\Gamma(1+s) \Gamma(1-s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+s)(2+s) \cdots (n+1+s)}{n^{1+s} n!} \frac{(1-s)(2-s) \cdots (n+1-s)}{n^{1-s} n!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{(1+s)(2+s) \cdots (n+1+s)}{(n+1)!} \frac{(1-s)(2-s) \cdots (n+1-s)}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{s}{1}\right) \left(1 + \frac{s}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{s}{n+1}\right) \left(1 - \frac{s}{n+1}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{s}{k}\right) \left(1 - \frac{s}{k}\right) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right), \quad \therefore \sin(\pi s) = \pi s \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right)$$

3.3 Hurwitz のゼータ函数とガンマ函数の関係

$$\begin{cases} \zeta(s, x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^s} \quad (s>1, x \in \mathbb{Z}_{>0}) \quad \text{--- Hurwitz のゼータ函数.} \\ \zeta(s, x+1) = \zeta(s, x) - \frac{1}{x^s}, \quad \therefore \zeta_s(s, x+1) = \zeta_s(s, x) + x^{-s} \log x, \quad \leftarrow (1) \\ \zeta_x(s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-s}{(x+k)^{s+1}} = -s \zeta(s+1, x), \quad \therefore \zeta_{xx}(s, x) = s(s+1) \zeta(s+2, x), \quad \leftarrow (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad (\text{容易に示せる有名な公式}) \\ \Psi(x) := \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \log \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k} \right) \\ \Psi'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = \zeta(2, x) \quad \leftarrow (3) \\ \zeta_{s,xx}(0, x) \stackrel{(2)}{=} \zeta(2, x) \stackrel{(3)}{=} \Psi'(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \Gamma(x), \quad \leftarrow (4) \end{cases}$$

$$F(x) := \zeta_s(0, x) - \log \Gamma(x) \text{ とおき, このとき, } F''(x) \stackrel{(4)}{=} 0 \text{ のより, } F(x) = a + bx.$$

$$F(x+1) = \zeta_s(0, x+1) - \log \Gamma(x+1) \stackrel{(1)}{=} \zeta_s(0, x) + \log x - \log \Gamma(x) = \zeta_s(0, x) - \log \Gamma(x) = F(x), \quad \therefore F(x) = a$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} d\gamma = \sqrt{\pi} \quad (\text{Gauss の積分}) \quad \leftarrow (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+k\right)^s} = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^s} = 2^s \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \right) = (2^s - 1) \zeta(s), \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \zeta_s\left(s, \frac{1}{2}\right) = 2^s \zeta(s) \log 2 + (2^s - 1) \zeta'(s), \quad \therefore \zeta_s\left(0, \frac{1}{2}\right) = \zeta(0) \log 2 = -\frac{1}{2} \log 2 = -\log \sqrt{2} \quad \leftarrow (6)$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \zeta_s\left(0, \frac{1}{2}\right) - \log \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \stackrel{(5)}{=} -\log \sqrt{2} - \log \sqrt{\pi} = -\log \sqrt{2\pi}, \quad \therefore F(x) = -\log \sqrt{2\pi}.$$

$$\text{したがって, } \zeta_s(0, x) = \log \Gamma(x) - \log \sqrt{2\pi} = \log \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}. \quad \therefore \log \Gamma(x) = \zeta_s(0, x) + \log \sqrt{2\pi}.$$

$$\begin{aligned} \zeta(s, x+1) &\stackrel{s>1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+1+k)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-(x+1+k)t} t^{s-1} dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(x+1)t} t^{s-1} dt}{1 - e^{-t}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} t^{s-1} dt}{e^t - 1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) e^{-xt} t^{s-1} dt + \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{s-2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{s-1} dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) e^{-xt} t^{s-1} dt + \frac{\Gamma(s-1)}{x^{s-1}} - \frac{\Gamma(s)}{2x^s} \right) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) e^{-xt} t^{s-1} dt + \frac{1}{(s-1)x^{s-1}} - \frac{1}{2x^s}. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} F(0, x) = 0 \text{ より, } F_s(0, x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s, x)}{s} = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) e^{-xt} \frac{dt}{t}, \quad \therefore F(s, x) \\ \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \frac{1}{(s-1)x^{s-1}} = x \log x - x, \quad \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \left(-\frac{1}{2x^s} \right) = \frac{1}{2} \log x, \end{cases}$$

$$\therefore \log \Gamma(x+1) = \zeta_s(0, x+1) + \log \sqrt{2\pi} = x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \log \sqrt{2\pi} + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) e^{-xt} \frac{dt}{t}.$$

Binet の公式