ECOLE POLYTECHNIQUE
PROMOTION 2008
LUNGENSTRASS Tomás

RAPPORT DE STAGE DE RECHERCHE

Titre du Rapport

Super-cohérence et Réalisabilité

NON CONFIDENTIEL

PUBLICATION

Option : INFORMATIQUE
Champ de l'option : LOGIQUE
Directeur de l'option : M. BOURNEZ Olivier
Directeur de stage : M. DOWEK Gilles
Dates du stage : 10/04/11 - 11/07/11
Nom et adresse de l'organisme :

INRIA Saclay - Île de France
Parc Orsay Université
4, rue Jaques Monod
91893 Orsay cedex

Résumé

Le travail exposé dans ce mémoire vise à relier les notions de *super-cohérence* et *réalisabilité*.

La normalisation des preuves est une propriété importante des théorie, particulièrement en déduction modulo. Un critère fondamental pour établir la normalisation des preuves d'une théorie est la super-cohérence, une notion qui distille les outils essentiels de l'algèbre des Candidats de Réductibilité qui nous permettent de construire un modèle valué dans cette algèbre. Ce critère se révèle utile en pratique : pour presque toutes les théories dont nous savons montrer la normalisation nous savons montrer la super-cohérence, la théorie des ensembles, cependant, en est un contre-exemple. Cela est dû au fait que la preuve de normalisation de la théorie des ensembles procède différemment des autres théories et utilise une construction par réalisabilité. En effet, la normalisation des preuves impliquant la cohérence de la théorie, elle ne peut pas être prouvée à l'intérieur de la théorie elle-même, en conséquence la normalisation a besoin d'être relativisée par rapport à une théorie environnante.

La question que nous posons dans ce mémoire est la suivante : peut-on montrer la super-cohérence de la théorie des ensembles ? Et sinon, comment affaiblir la notion de super-cohérence pour pouvoir le faire ? Nous développons une notion de pré-algèbre de Heyting exprimable dans une théorie environnante, sur laquelle nous construisons une interprétation de réalisabilité qui joue le rôle de «modèle interne». Étant donné un modèle standard de la théorie environnante, le modèle interne peut être sorti de la théorie résultant en un vrai modèle. Nous montrons que l'algèbre des Candidats de Réductibilité est exprimable dans toutes les théories qui sont des extensions de l'arithmétique et ainsi nous réconcilions les notions de super-cohérence relative et normalisation des preuves.

The work presented herafter attempts to relate the concepts of *super-consistency* and *realizability*.

Proof normalization is an important property for theories modulo to have. A fundamental criterion to establish the normalization of proofs in a theory is super-consistency, a notion that distills the essential tools that the algebra of Reducibility Candidates provides us with to build a model. This notion proves to be useful in practice : for most of the theories for which we know how to prove proof normalization we know how to prove equally that

they are super-consistent, set theory is, however, an exception to this rule. This is a direct consequence of the fact that the normalization property is proved by means of a procedure that differs from the one used for other theories in that it employs a realizability construction. Indeed, since proof normalization implies the consistency of a theory, it cannot be proved within the theory itself, as a result some sort of normalization relative to a theory is called for.

The question we address in this document is the following : Is it possible to prove that set theory is super-consistent ? If not, how should we weaken the notion of super-consistency to be able to do it ? We develop a notion of pseudo-Heyting algebra expressible within an environing theory, into which we then build a realizability interpretation that will act as the ≪internal model ≪. Given that the environing theory has a standard model, this internal model can then be extracted from the environing theory into an actual model. We prove that the algebra of Reducibility Candidates is expressible in all theories that extend Peano Arithmetic and so we reconcile the notions of relative super-consistency and proof normalization.

Table des matières

1 Introduction **4**
1.1 Normalisation des preuves et Candidats de Réductibilité . . . 4
1.1.1 Déduction modulo 4
1.1.2 Modèles et pré-algèbres de Heyting 5
1.2 Super-cohérence et la question de la théorie des ensembles . . 8

2 Modèles par Réalisabilité **11**
2.1 Les ensembles définissables dans une théorie 11
2.1.1 Ensembles appropriés pour y définir une PHA et traductions de termes 13
2.1.2 Les opérations définissables dans une théorie 15
2.1.3 Les PHA exprimables dans une théorie 17
2.2 Interprétation de Réalisabilité 18
2.2.1 La construction du modèle $\mathcal{B}$-valué 19

3 Définissabilité de l'algèbre des candidats **23**
3.1 Les Candidats de Réductibilité 23
3.2 Représentation des Candidats 25
3.2.1 Représentation dans $\wp(\mathbb{N})$ 25
3.2.2 Constructions syntaxiques et candidats de réductibilité 26
3.2.3 Représentation dans $\mathcal{U}$ des candidats de réductibilité . 28
3.3 La définissabilité des candidats 30
3.3.1 Algèbres intrinsèques 32

4 Vers la super-cohérence de Z **35**
4.1 Un $\mathcal{C}$-modèle 35
4.2 Une nouvelle définition de la super-cohérence 35

5 Conclusions et remarques finales **38**
5.1 Une nouvelle super-cohérence 38
5.1.1 Questions méthodologiques 38
5.2 Questions ouvertes 39

Chapitre 1

Introduction

1.1 Normalisation des preuves et Candidats de Réductibilité

1.1.1 Déduction modulo

La normalisation des preuves est une propriété de certaines théories qui nous permet d'en déduire, dans des contextes déterminés, une série de propriétés de cette théorie. Elle implique, par exemple, la cohérence, la propriété du témoin (qui exprime le fait que toute proposition démontrable de la forme $\exists x\ P(x)$ admet un terme t tel que $P(t)$ est démontrable dans la théorie) et la propriété de disjonction (exprimant le fait que toute proposition démontrable de la forme $A \vee B$ est telle que soit A est démontrable, soit B l'est). Cela devient particulièrement important quand on parle de théories en déduction modulo.

La déduction modulo est une formulation de la logique de premier ordre qui rend compte formellement de la différence entre déduction et calcul dans les preuves mathématiques [6]. Une théorie en déduction modulo est constituée d'un ensemble d'axiomes et d'une relation d'équivalence entre les expressions du langage de la théorie, généralement définie par des règles de réécriture. Ainsi, par exemple, l'arithmétique est une théorie qui décrit les entiers (représentés par les symboles 0 et S) munis de l'addition, de la multiplication, de l'égalité et de l'appartenance à des ensembles d'entiers avec l'axiome de récurrence [1]. En déduction modulo, les axiomes des opérations $+$ et $\times$ peuvent être remplacés par les règles de réécriture

$$\begin{array}{lcl} 0 + y & \longrightarrow & y \\ S(x) + y & \longrightarrow & S(x + y) \\ 0 \times y & \longrightarrow & 0 \\ S(x) \times y & \longrightarrow & x \times y + y \end{array}$$

en sorte que les termes $S(S(S(S(0))))$ et $S(S(0)) + S(S(0))$ sont équivalents.

1. Pour une présentation axiomatique de l'arithmétique, voir [3], pg.33

Les règles de déduction sont alors adaptées pour prendre compte de ces équivalences. Ainsi, la règle d'élimination de l'implication est exprimée par

$$\frac{\Gamma \vdash_{\equiv} C \quad \Gamma \vdash_{\equiv} A}{\Gamma \vdash_{\equiv} B} \Rightarrow\text{-élim si } C \equiv (A \Rightarrow B).$$

Il en résulte qu'une preuve qui montre une certaine propriété de $S(S(S(S(0))))$ peut être utilisée aussi pour $S(S(0)) + S(S(0))$, il nous suffit de remplacer toute occurrence d'un terme par l'autre. Ces termes sont donc effectivement indistinguables d'un point de vue de la déduction, effaçant la partie calculatoire de la preuve pour prioriser ce qui est purement déductif.

En poussant à l'extrême cette méthodologie, nous pouvons définir des théories par une relation d'équivalence uniquement, sans axiomes, afin que ce qui est considéré comme déductif ne soient que les règles associées aux opérateurs logiques et non pas les axiomes de chaque théorie. L'arithmétique admet une telle représentation, dite purement calculatoire, le lecteur peut se référer à [7] et à [1] pour une telle représentation. De nombreuses autres théories admettent également de telles représentations. Cela est particulièrement intéressant pour la normalisation des preuves, dès qu'une théorie peut être exprimée de manière purement algorithmique (sans axiomes), la normalisation des preuves implique la cohérence, la propriété du témoin et celle de la disjonction, ce qui n'est pas le cas pour les théories axiomatiques. À la lumière de la déduction modulo la normalisation des preuves acquiert une nouvelle importance et signification.

1.1.2 Modèles et pré-algèbres de Heyting

Un modèle est une structure qui donne une interprétation à une structure syntactique. Ainsi, les entiers, les ensembles d'entiers et les opérations $+, \times, =, \epsilon$ représentent et donnent un certain sens, une sémantique, aux objets auxquels l'arithmétique fait référence. Étant donné un langage, un modèle de ce langage est donc la donnée d'un ensemble d'objets pour chaque sorte du langage et de fonctions qui associent les objets les uns aux autres et les propositions à des valeurs de vérité. Pour ce qui concerne ce mémoire, nous donnons la définition suivante de ce qu'est un modèle :

Définition 1.1. *(Pré-algèbre de Heyting triviale)*

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble ; $\mathcal{A}, \mathcal{E} \subseteq \wp(\mathcal{B})$; $\tilde{\top}, \tilde{\bot} \in \mathcal{B}$, $\tilde{\Rightarrow}$, $\tilde{\wedge}$ et $\tilde{\vee}$ fonctions de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$, $\tilde{\forall}$ une fonction de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, et $\tilde{\exists}$ une fonction de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{B}$.

On dit de $\langle \mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{E}, \tilde{\top}, \tilde{\bot}, \tilde{\Rightarrow}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\forall}, \tilde{\exists} \rangle$ qu'elle est une pré-algèbre de Heyting triviale.

Le fait que nous travaillerons sur des théories sans axiomes nous permet d'oublier la notion de valeurs de vérité positives et de travailler sur la notion (la) plus simple d'algèbre de valeurs de vérité, celle de pré-algèbre de Heyting triviale, que dans la suite nous référons plus simplement comme PHA, pré-algèbre de Heyting ou algèbre de valeurs de vérité. Par la suite nous nous intéresserons à deux propriétés qu'ont certaines PHA, liées à la notion de super-cohérence :

Définition 1.2. *(PHA pleine).*

Soit $\mathcal{B} = \langle \mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{E}, \tilde{\top}, \tilde{\bot}, \tilde{\Rightarrow}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\forall}, \tilde{\exists} \rangle$ une pré-algèbre de Heyting triviale telle que $\mathcal{A} = \mathcal{E} = \wp(\mathcal{B})$.

De $\mathcal{B}$ on dit que c'est une pré-algèbre de Heyting pleine.

Définition 1.3. *(PHA complète).*

Soit $\mathcal{B} = \langle \mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{E}, \tilde{\top}, \tilde{\bot}, \tilde{\Rightarrow}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\forall}, \tilde{\exists} \rangle$ une pré-algèbre de Heyting triviale telle qu'il existe une relation d'ordre $\sqsubseteq$ sur $\mathcal{B}$ fortement complète vérifiant :

- *$\tilde{\top}$ est un élément maximal*
- *$\tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\forall}$ et $\tilde{\exists}$ sont croissantes pour $\sqsubseteq$*
- *$\tilde{\Rightarrow}$ est décroissante à gauche et croissante à droite pour $\sqsubseteq$.*

De $\mathcal{B}$ on dit que c'est une pré-algèbre de Heyting complète.

Étant donnée une PHA $\mathcal{B}$, un modèle $\mathcal{B}$-valué est défini comme suit :

Définition 1.4. *(Structure $\mathcal{B}$-valuée, structure de termes).*

Soit $\mathcal{L}$ un langage en logique des prédicats et $\mathcal{B}$ une pré-algèbre de Heyting triviale.

Soit :

- *Pour chaque sorte s, un ensemble $\mathcal{M}_s$*
- *Pour tout symbole de fonction f_i d'arité $\langle s_1, ..., s_n, s \rangle$, une fonction $\hat{f}_i : \mathcal{M}_{s_1} \times ... \times \mathcal{M}_{s_n} \to \mathcal{M}_s$*
- *Pour tout symbole de prédicat P_j d'arité $\langle s_1, ..., s_n \rangle$, une fonction $\hat{P}_j : \mathcal{M}_{s_1} \times ... \times \mathcal{M}_{s_n} \to \mathcal{B}$.*

La structure $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}_s, \mathcal{B}, \hat{f}_i, P_j \rangle$ est dite une structure $\mathcal{B}$-valuée.

La structure $\mathcal{M}_T = \langle \mathcal{M}_s, \hat{f}_i \rangle$ est dite une structure de termes du langage $\mathcal{L}$.

La notion de structure $\mathcal{B}$-valuée est à la base de celle de modèle. Nous allons prendre une proposition A, associer des éléments de $\mathcal{M}_s$ à chaque variable libre x de sorte s par une fonction ϕ appelée une valuation et interpréter A par réflexion sur la structure $\mathcal{B}$-valuée comme suit :

Définition 1.5. *(Dénotation d'une structure $\mathcal{B}$-valuée).*

Soit $\mathcal{M}$ une structure $\mathcal{B}$-valuée, ϕ une valuation. La dénotation $|A|_\phi$ d'une formule A dans $\mathcal{M}$ est définie par récurrence sur la structure de A :

- $|x|_\phi = \phi(x)$
- $|f(t_1, ..., t_n)|_\phi = \hat{f}(|t_1|_\phi, ..., |t_n|_\phi)$
- $|\top|_\phi = \tilde{\top}$
- $|\bot|_\phi = \tilde{\bot}$
- $|A \Rightarrow B|_\phi = |A|_\phi \mathrel{\tilde{\Rightarrow}} |B|_\phi$

- $| A \wedge B|_\phi = | A|_\phi \ \tilde{\wedge} \ | B|_\phi$
- $| A \vee B|_\phi = | A|_\phi \ \tilde{\vee} \ | B|_\phi$
- $| \forall x A|_\phi = \tilde{\forall} \ \{| A|_{\phi+\langle x,e\rangle} \,|\, e \in \mathcal{M}\}$
- $| \exists x A|_\phi = \tilde{\exists} \ \{| A|_{\phi+\langle x,e\rangle} \,|\, e \in \mathcal{M}\}$

Nous nous intéressons aux théories en déduction modulo. La structure de la dénotation étant rigide et n'assurant pas en soi que les dénotations de propositions congruentes soient égales, il est nécessaire de demander davantage à un modèle pour qu'il soit fidèle à la relation d'équivalence définissant la théorie.

Définition 1.6. *(Modèle en déduction modulo).*
Soit $\mathcal{T}, \equiv$ une théorie en déduction modulo. Une structure $\mathcal{B}$-valuée $\mathcal{M}$ est un modèle *de la théorie $\mathcal{T}, \equiv$ si à chaque fois que $A \equiv B$, on a $| A|_\phi = | B|_\phi$ pour toute valuation ϕ.*

Nous verrons dans la suite l'intérêt de cette notion de modèle, quand nous aborderons les candidats de réductibilité et la super-cohérence.

Les modèles standards et les programmes

Comme cela a été dit précédemment, $\mathbb{N}$ est un modèle de l'arithmétique, à savoir un modèle très important. En voici la définition précise :

Définition 1.7. *($\mathbb{N}$-modèle).*
La structure $\mathbb{N}$ est le modèle de l'arithmétique à valeurs dans l'algèbre de Bool, $\{0,1\}$, défini par
- $\mathcal{M}_\iota = \mathbb{N}$
- $\mathcal{M}_\kappa = \wp(\mathbb{N})$
- $\hat{S} : n \mapsto n+1$
- $\hat{0} \mapsto 0$
- $\hat{+} : (p,q) \mapsto p+q$
- $\hat{\times} : (p,q) \mapsto p \times q$
- $\hat{=} : (p,q) \mapsto \ \chi_{\{p\}}(q)$
- $\hat{\epsilon} : (n,E) \mapsto \chi_E(n)$.

Nous remarquons que toute proposition close démontrable dans une théorie est dénotée par la valeur 1 dans un $\{0,1\}$-modèle (d'où la nomenclature d'algèbre de valeurs de vérité).

Il est possible que l'arithmétique puisse être définie ou représentée *dans* une autre théorie $\mathcal{U}$, par exemple, dans la théorie des ensembles. Cela veut dire qu'il existent des prédicats de la théorie des ensembles qui imitent ceux de l'arithmétique et que de plus il est possible de montrer les axiomes de l'arithmétique pour ces prédicats. Si cette théorie a un modèle dans, par exemple, l'algèbre $\{0,1\}$, alors une sous-partie de ce modèle correspond bien à un modèle de l'arithmétique. Dans la suite nous nous intéresserons à de telles théories $\mathcal{U}$, en particulier à celles dont la partie du modèle associée à l'arithmétique est isomorphe à $\mathbb{N}$, que nous appelons des *modèles standard*[2].

L'importance de $\mathbb{N}$ comme modèle et plus généralement des modèles standard vient du fait qu'il nous permet de sortir une certaine famille de relations définies dans l'arithmétique vers l'extérieur. Ces relations sont celles dites semi-décidables et sont définies par rapport à la notion de fonction calculable.

Nous pouvons définir une proposition $A(x_1, ..., x_n)$ dans l'arithmétique qui représente une relation semi-décidable R, de sorte que $R(p_1, ..., p_n)$ est vrai si et seulement si la proposition $A(x_1, ..., x_n)$ est interprétée par la valeur 1 dans le modèle standard en évaluant les variables libres $x_1, ..., x_n$ par $p_1, ..., p_n$ respectivement.

1.2 Super-cohérence et la question de la théorie des ensembles

Dans [6] on montre qu'en fait une condition suffisante pour avoir la normalisation forte des preuves pour une théorie $\mathcal{T}$ est que cette théorie admette un modèle à valeurs dans une pré-algèbre de Heyting particulière, appelée l'algèbre des candidats de réalisabilité, que l'on note $\mathcal{C}$. Partant de ce résultat, le problème de la normalisation des preuves se réduit à un problème de construction d'un modèle. Nous pouvons poursuivre cette abstraction en allant encore plus loin, dans l'effort de débarrasser ce critère des concepts spécifiques liés à l'algèbre des candidats, pour qu'il devienne entièrement indépendant des aspect techniques de sa preuve et pour qu'il soit plus dans l'esprit du théorème de correction, qu'il cherche à transposer.

Il résulte que l'algèbre des candidats de réductibilité est une algèbre pleine et complète et que ce sont ces deux propriétés-là les outils fondamentaux que cette algèbre nous donne pour pouvoir construire des modèles. Dans ce sens, ce n'est ni plus facile ni plus difficile de définir un modèle d'une théorie donnée dans l'algèbre des candidats que dans une algèbre pleine et complète quelconque. Cette caractérisation nous permet donc bien de nous abstraire des candidats de réductibilité et aboutir à un critère purement issu de la théorie des modèles pour la normalisation des preuves.

Définition 1.8. *(Super-cohérence).*

Une théorie $\mathcal{T}, \equiv$ est dite super-cohérente si elle admet un $\mathcal{B}$-modèle pour toute pré-algèbre de Heyting $\mathcal{B}$ pleine et complète.

---

2. Nous optons par ne pas rentrer dans les définitions et dans les détails techniques pour expliciter ce que cela veut dire que l'arithmétique soit contenue dans une théorie. L'image intuitive est largement suffisante pour les besoins de ce travail. Pour plus de détails le lecteur peut consulter, par exemple, [3]

Proposition 1.9. *Une théorie super-cohérente vérifie la normalisation forte de ses preuves.*

Est-ce que la théorie Z est super-cohérente ?

Bien de théories importantes sont super-cohérentes, parmi elles nous pouvons nommer l'arithmétique, la logique d'ordre supérieur, les théories pour lesquelles le système de réécriture termine et dans lequel les propositions atomiques apparaissent en des occurrences positives, la logique propositionnelle avec des systèmes de réécriture qui terminent et les systèmes de réécriture déterministes dans lequel les propositions atomiques apparaissent en des occurrences positives. Toutes ces théories vérifient la propriété de normalisation forte. Une question importante est de savoir si, inversement, il existent des théories qui vérifient bien cette propriété et qui ne sont pourtant pas super-cohérentes. La notion de super-cohérence est née ayant en tête un critère aussi universal et efficace que possible pour déterminer la normalisation des preuves des théories, nous voudrions bien qu'au moins les théories pour lesquelles la preuve de normalisation est associée à l'algèbre des candidats soient toutes super-cohérentes.

Il s'avère cependant que ce n'est pas tout à fait le cas, la théorie des ensembles de Zermelo, Z, peut être exprimée de façon purement calculatoire et elle vérifie bien un résultat de normalisation forte des preuves [4]. Nous ne savons pas, néanmoins, prouver sa super-cohérence. La situation est encore plus délicate : toutes les notions que nous avons défini jusqu'alors peuvent être formalisées dans cette théorie, si nous prouvions prouver la super-cohérence de Z, nous serions en mesure de construire dans Z une preuve de la cohérence de Z. Or, le célèbre résultat du second théorème de Gödel nous indique que, si la théorie Z est cohérente, alors il est impossible d'y prouver sa propre cohérence.

Tout cela nous fait penser que dès que la question de si Z est ou non super-cohérente est interprétée littéralement elle porte un problème intrinsèque et n'est pas bien posée. Pourtant elle est une question tout à fait légitime d'un point de vue méthodologique, dès le moment où la super-cohérence est vue non pas comme une définition donnée mais comme un concept défini par des critères méthodologiques dont il faut trouver la bonne définition, d'autant plus que la preuve de la normalisation des preuves dans Z utilise bien la notion de candidats de réductibilité [4].

Ne pouvant pas montrer directement la normalisation de ses preuves, il est possible de relativiser ce fait en ajoutant davantage d'hypothèses. En particulier, comme c'est fait dans les preuves de cohérence relative, nous pouvons interpréter une théorie $\mathcal{T}$ dans une théorie environnante $\mathcal{U}$ par une méthode dite de *réalisabilité*. Ainsi, dans [5] on construit par réalisabilité une sorte de modèle $\mathcal{C}$-valué de la théorie $\mathcal{T}$ *dans la théorie* $\mathcal{U}$, on y prouve la normalisation des preuves (qui est une relation semi-décidable) et on déduit le fait que les preuves de $\mathcal{T}, \equiv$ normalisent fortement en supposant que $\mathcal{U}$ admet un modèle standard comme cela a été décrit précédemment. Ainsi, il a été montré que la formulation purement calculatoire de Z, IZ^{mod}, vérifie la normalisation forte des preuves sous l'hypothèse de qu'une théorie appelée IZ^{skol2} admette un modèle standard.

Cela nous mène à nous demander si effectivement il est possible encore cette fois de s'abstraire de la notion de candidat de réductibilité pour retrouver une nouvelle forme de super-cohérence dans le contexte de la réalisabilité. Les pages qui suivent apportent une réponse à cette question, nous verrons qu'il est effectivement possible de généraliser la notion d'interprétation de réalisabilité d'une théorie $\mathcal{T}$ à une famille d'algèbres $\mathcal{B}$ dites *exprimables* dans la théorie environnante $\mathcal{U}$, d'où, un modèle standard de $\mathcal{U}$ moyennant, on déduira un $\mathcal{B}$-modèle de $\mathcal{T}$. Ce processus d'abstraction motive une redéfinition de la notion de super-cohérence, pour incorporer une troisième propriété importante de l'algèbre des candidats, celle d'être exprimable dans la théorie environnante $\mathcal{U}$.

Chapitre 2

Modèles par Réalisabilité

Nous nous intéressons à la notion des modèles d'une théorie ≪dans≫ une autre, cela nous amènera à des résultats de super-cohérence et d'existence de modèles *relativement* à une théorie environnante. Nous voulons définir une notion que nous voulons interpréter comme $\mathcal{U} \vdash$ ≪$\mathcal{T}$ *admet un modèle* $\mathcal{B}$-*valué*≫. Nous proposons des théories $\mathcal{U}$ qui sont des extensions de l'arithmétique et qui admettent un modèle standard comme les théories dans lesquelles le modèle relatif va être bâti. Elles nous donneront d'une part les outils dont nous aurons besoin pour avoir une structure commune transversale sur laquelle nous construirons les modèles et d'une autre part, elles nous donne les moyens pour faire sortir les structures construites dans une théorie (pourvu que les relations impliquées sont définissables dans l'arithmétique et semi-décidables), par l'intermédiaire du modèle standard, qui va relier les relations à leurs représentations dans la théorie $\mathcal{U}$. Dans toute la suite nous supposons alors que $\mathcal{U}$ admet un modèle standard $\mathcal{M}$.

2.1 Les ensembles définissables dans une théorie

Toute pré-algèbre de Heyting n'est pas représentable dans une théorie donnée, le début de cette section est donc consacré à la caractérisation des pré-algèbres de Heyting qui sont compatibles avec une telle représentation et à la formalisation de cette notion.

Nous nous restreignons dans un premier temps aux pré-algèbres de Heyting dont le cardinal est inférieur ou égal à $2^{\aleph_0}$, et dont les éléments peuvent être représentés comme des parties de $\mathbb{N}$. Ayant choisi des théories $\mathcal{U}$ contenant l'arithmétique, nous avons un cadre de représentation pour ces algèbres de valeurs de vérité commun et transversal à toutes ces théories. Nous allons représenter les éléments d'une pré-algèbre de Heyting par des ensembles d'entiers ≪définissables ≪. Cela nous amène donc à traduire chaque proposition A dans $\mathcal{T}$ par une proposition $p \Vdash A$ dans la théorie $\mathcal{U}$ que nous interprétons comme disant que l'entier p appartient à la dénotation de A.

Les deux considérations précédentes nous conduisent à définir les ensembles d'entiers définissables dans une théorie.

Pour motiver cette définition, commençons par un exemple issu de l'arithmétique. Le schéma de compréhension nous assure l'existence d'un ensemble dont les éléments sont ceux (et uniquement ceux) qui satisfont à une certaine propriété, cela définit naturellement un ensemble d'entiers le représentant. On considère le modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{U}$ contenant un modèle standard de l'arithmétique et une proposition A ne contenant pas le symbole ϵ et dont la seule variable libre est p. Le schéma de compréhension pour cette proposition donnée a la forme

$$\exists c \forall p \ (p \,\epsilon c \Leftrightarrow A).$$

Étant un axiome de l'arithmétique, cette proposition est valide dans $\mathcal{M}$,

$$|\,\exists c \forall p \ (p \,\epsilon c \Leftrightarrow A)| = 1,$$

il en découle qu'il existe un élément D de $\mathcal{M}_\kappa = \wp(\mathbb{N})$ qui vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\,p \,\epsilon c \Leftrightarrow A|_{\langle c,D\rangle + \langle p,n\rangle} = 1.$$

On en déduit que n est un élément de D si et seulement si

$$|\,A|_{\langle p,n\rangle} = 1,$$

l'ensemble D est alors l'unique ensemble vérifiant cette propriété et est caractérisé de la manière suivante :

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid |\,A|_{\langle p,n\rangle} = 1\}.$$

En abstrayant cette procédure nous proposons la définition d'un ensemble définissable dans une théorie $\mathcal{U}$:

Définition 2.1. *(Ensemble d'entiers définissable dans une théorie).*

Soit $D \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble tel qu'il existe une proposition A dans $\mathcal{U}$, dont les variables libres sont parmi $x_1, ..., x_n, p$ (avec p entier, dont la sorte on note $\lfloor \mathcal{PA} \rfloor$) et une valuation ϕ dont le support est $x_1, ..., x_n$, pour lesquelles, dans le modèle $\mathcal{M}$, D vérifie :

$$D = \{n \in \mathbb{N} \ : \ |\,A|^{\mathcal{M}}_{\phi + \langle p,n\rangle} = 1\}$$

De D on dit que c'est un ensemble définissable dans la théorie *$\mathcal{U}$.*
On note $\langle A\rangle_\phi$ l'ensemble D défini par la paire (A, ϕ).
On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des ensembles définissables dans la théorie $\mathcal{U}$.

Proposition 2.2. *Si le modèle $\mathcal{M}$ est dénombrable, alors l'ensemble $\mathcal{D}$ est dénombrable.*

Démonstration. Les ensembles définissables dans l'arithmétique sont évidemment au moins une infinité et ils admettent une injection naturelle vers les couples (A, ϕ), dénombrables car le modèle $\mathcal{M}$ est dénombrable. $\square$

À ce stade nous sommes en mesure de comprendre grosso modo comment nous allons construire un modèle de $\mathcal{T}$ à partir de celui défini dans $\mathcal{U}$. Le «modèle» de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{U}$ (que nous appelons une *interprétation de réalisabilité*) nous donnera l'ensemble des propositions $p \Vdash A$ qui vont, à leur tour, définir les ensembles qui seront les dénotations de chaque proposition A. L'étape suivante est donc d'établir ce qu'est qu'une pré-algèbre de Heyting définissable dans la théorie $\mathcal{U}$, pour cela nous procédons en deux étapes. Dans un premier temps nous serons contraints à considérer des sous-ensembles de $\mathcal{D}$ dits *complets*. Deuxièmement, nous aurons besoin d'étendre cette notion de définissabilité aux *opérations* sur les ensembles définissables d'une théorie.

2.1.1 Ensembles appropriés pour y définir une PHA et traductions de termes

Nous avons besoin de définir des sous-ensembles $\mathcal{B}$ de $\mathcal{D}$ qui seront appropriés pour représenter des algèbres de valeur de vérité. Comme nous voulons réaliser des traductions de la théorie $\mathcal{T}, \equiv$ vers la théorie $\mathcal{U}$ qui encodent la structure du modèle $\mathcal{B}$-valué que nous allons construire, nous aurons besoin de demander à l'ensemble $\mathcal{B}$ d'être clos par substitution. De plus, pour construire un modèle de la théorie $\mathcal{T}$ nous aurons également besoin d'assigner une valeur à la dénotation de A pour toute valuation ϕ du modèle. Suivant les lignes de la définition que nous venons de proposer, il est donc nécessaire de demander aussi que toutes les paires $\langle \sigma A \rangle_\phi$ pour σ une substitution et ϕ une valuation définissent des éléments de l'algèbre de valeurs de vérité, afin que la dénotation de A soit naturellement déduite du modèle $\mathcal{M}$. D'après le fait qu'interpréter une proposition où une variable x a été substituée par un terme t est équivalent à l'interpréter en assignant à x la valeur de la dénotation de t, il est en fait suffisant de demander la clôture par des valuations.

Les traductions de termes

Il nous faut aussi savoir de quelles valuations on parle, ce qui revient à savoir sur quelle structure de termes sera défini le $\mathcal{B}$-modèle de $\mathcal{T}, \equiv$. On dispose d'une interprétation de réalisabilité envoyant un terme du langage de $\mathcal{T}$ vers un terme du langage de $\mathcal{U}$ tout en conservant la structure des sortes, cette fonction s'appelle une traduction de termes, dont voici la définition :

Définition 2.3. *(Traduction de termes d'un langage vers un autre).*

Soit $\mathcal{T}, \equiv_1$ et $\mathcal{U}, \equiv_2$ deux théories définies respectivement dans les langages $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$. Une traduction de termes $(\ )^*$ de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{L}'$ est la donnée de :

- *Une fonction qui à chaque sorte s de $\mathcal{L}$ associe une sorte s_* de $\mathcal{L}'$, munie d'un prédicat de relativisation $s^*(x)$ dans $\mathcal{L}'$ (avec x de sorte s_*) ;*
- *Une fonction qui à chaque variable x de sorte s en $\mathcal{L}$ associe une variable x^* de sorte s_* dans $\mathcal{L}'$;*
- *Une fonction qui pour chaque symbole de fonction f dans $\mathcal{L}$ d'arité $s_1, ..., s_n, s'$ associe à $f(x_1, ..., x_n)$ un terme $f^*(z_1, ..., z_n)$ de $\mathcal{L}'$ de sorte s'_* dont les variables libres sont (possiblement) parmi $z_1, ..., z_n$, de sortes $s_{1*}, ..., s_{n*}$ respectivement ;*

Cette traduction s'étend à tout terme de $\mathcal{L}$ comme suit :

$$\begin{array}{lcl} (x)^* & \equiv & x^* \\ f(t_1, ..., t_n)^* & \equiv & f^*(z_1, ..., z_n)\{z_1^* := t_1, ..., z_n := t_n^*\} \end{array}$$

Un traduction de termes doit en outre vérifier les conditions suivantes :

1. *Pour toute sorte s de $\mathcal{T}$, le séquent $\mathcal{U} \vdash \exists x\ s^*(x)$ est démontrable ;*
2. *Pour tout symbole de fonction f d'arité $\langle s_1, ..., s_n, s\rangle$ de $\mathcal{T}$, le séquent*

$$\mathcal{U} \vdash \forall z_1 ... \forall z_n\ (\, s_1^*(z_1) \wedge ... \wedge s_n^*(z_n)\,)\ \Rightarrow\ s^*(f^*(z_1, ..., z_n))$$

est démontrable ;

On remarque que la construction d'une traduction de termes d'un langage vers l'autre est toujours possible et n'a pas forcement beaucoup de signification en soi. Il nous suffit, par exemple, de choisir une sorte quelconque pour chaque sorte s dans $\mathcal{L}$ et $s^*(x) = \top$ comme prédicat de relativisation pour avoir une traduction de termes.

Une traduction de termes de $\mathcal{T}$ vers $\mathcal{U}$ définit quels sont les termes et variables de $\mathcal{U}$ (et donc aussi les éléments de $\mathcal{M}$) qui représentent effectivement des termes et éléments de $\mathcal{T}$ En définissant, pour chaque sorte s du langage $\mathcal{L}$ l'ensemble

$$\mathcal{M}^*_{s_*} = \{e \in \mathcal{M}_{s_*} \mid\ | s^*(x)|_{\langle x,e\rangle} = 1\}$$

et pour chaque symbole de fonction de $\mathcal{L}$ la fonction

$$\hat{f}(e_1, ..., e_n) = |\, f^*(z_1, ..., z_n)|_{\langle z_1,e_1\rangle,...,\langle z_n,e_n\rangle}$$

nous construisons une structure induite $\mathcal{M}^*$ qui est bien une structure de termes. En effet, les ensembles $\mathcal{M}^*_{s_*}$ sont non vides, car la première condition vérifiée par $(\ )^*$ assure que $\mathcal{U}$ montre $\exists x\ s^*(x)$. La fonction $\hat{f}$ est également bien définie, car $\hat{f}(e_1, ..., e_n)$ est bien un élément de $\mathcal{M}^*_{s_*}$ pour tout n-tuple $e_1, ..., e_n$, d'après la deuxième condition.

En anticipant la suite, ce sera cette structure qui nous permettra de représenter fidèlement le modèle défini dans $\mathcal{U}$ par la traduction de $\mathcal{T}$. Une pré-algèbre de Heyting exprimable dans une théorie sera donc intrinsèquement dépendante d'une traduction de termes. Dans la suite nous supposons outre que la donnée d'un modèle standard de l'arithmétique, celle d'une traduction de termes $(\ )^*$.

Ayant clarifié l'ensemble sur lequel sont définies les valuations de notre modèle (ainsi que les substitutions que nous allons considérer, à savoir, celles pour lesquelles le terme t qui substitue vérifie $\mathcal{U} \vdash \forall z_1 ... \forall z_n\ (s_1^*(z_1)\ \wedge\ ...\ \wedge\ s_n^*(z_n)\ \Rightarrow\ s^*(t))$), nous procédons à définir la notion de famille complète d'ensembles définissables. Par commodité nous introduisons la notation suivante :

Définition 2.4. *Soit $(\ )^*$ une traduction de termes de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{L}'$.*

On note $\mathcal{D}^*$ l'ensemble des propositions dont les variables libres sont parmi $x_1, ..., x_n, p$ de sortes $s_{1*}, ..., s_{n*}, \lfloor \mathcal{PA} \rfloor$.

On note $\mathcal{D}_x^*$ l'ensemble des propositions dont les variables libres sont parmi $x, x_1, ..., x_n, p$ de sortes $s_*, s_{1*}, ..., s_{n*}, \lfloor \mathcal{PA} \rfloor$.

Définition 2.5. *(Famille complète d'ensembles définissables dans une théorie).*

Soit $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$ un couple formé d'un ensemble d'ensembles définissables $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$ et d'une famille de propositions dans $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}^*$, tel que :

$$\mathcal{B} = \{\langle A \rangle_\phi \mid A \in \mathcal{B}^*,\ \phi \text{ valuation dans } \mathcal{M}^* \text{ de support } x_1, ..., x_n\}$$

De $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$ on dit que c'est une famille complète d'ensembles définissables.

2.1.2 Les opérations définissables dans une théorie

Nous attaquons ensuite les opérations définissables dans une théorie. Nous demandons aux opérations d'établir une sorte de morphisme entre les ensembles définissables et les propositions les définissant dans la théorie $\mathcal{U}$.

Définition 2.6. *(Opérations définissables dans une théorie et fonction interne).*

Soit $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$ une famille complète d'ensembles définissables. Soit o une opération de $\mathcal{B}^n$ dans $\mathcal{B}$ telle qu'il existe une fonction qui associe à des propositions $A_1, ..., A_n \in \mathcal{B}^*$ dont les variables libres sont respectivement parmi $x_1^i, ..., x_{m_i}^i, p$ une proposition $\Phi_o(A_1, ..., A_n) \in \mathcal{B}^*$ dont les variables libres sont éventuellement parmi $x_1^1, ..., x_{m_1}^1, ..., x_1^n, ..., x_{m_n}^n, p$ telle que :

(i) Si σ est une substitution par des termes t_j^i vérifiant

$$\mathcal{U} \vdash \forall z_1 ... \forall z_n\ (s_1^*(z_1)\ \wedge\ ...\ \wedge\ s_n^*(z_n)\ \Rightarrow\ s^*(t_j^i))$$

et dont le support est dans $x_1^1, ..., x_{m_1}^1, ..., x_1^n, ..., x_{m_n}^n$, alors

$$\sigma\Phi_o(A_1, ..., A_n) = \Phi_o(\sigma A_1, ..., \sigma A_n);$$

(ii) Pour tous $A_1, ..., A_n \in \mathcal{B}^*$ et pour tous $\phi_1, ..., \phi_n$,

$$o(\langle A_1 \rangle_{\phi_1}, ..., \langle A_n \rangle_{\phi_n}) = \langle \Phi_o(A_1, ..., A_n) \rangle_{\phi_1 + ... + \phi_n}$$

(où $\phi_1 + ... + \phi_n$ est la concaténation, après éventuel renommage des variables, des valuations $\phi_1, ..., \phi_n$).

De o on dit qu'elle est définissable dans la théorie $\mathcal{U}$.
La fonction $\Phi_o(A_1, ..., A_n)$ est appelée la fonction interne *de o.*

Nous remarquons à nouveau que si A est une proposition de $\mathcal{B}^*$, alors, pour toute substitution σ, on a que la proposition σA est bien dans $\mathcal{B}^*$ car $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$ est une famille complète d'ensembles définissables dans $\mathcal{U}$.

Le cas de quantificateurs

Il nous reste à définir cette notion pour $\tilde{\forall}$ et $\tilde{\exists}$ dont l'ensemble de définition est un sous-ensemble de $\wp(\mathcal{B})$. Pour cela, nous sommes amenés à établir une notion de définissabilité pour les ensembles d'ensembles et à demander à nouveau la clôture par des substitutions et par des valuations.

Afin de conserver la structure définie par les propositions de $\mathcal{B}^*$ quand nous en extrairons un modèle, il nous faudra relativiser cette construction à la façon particulière dont les termes seront traduits de la théorie $\mathcal{T}$ dans la théorie $\mathcal{U}$. La définition qui suit prend compte de cette considération en indexant les éléments d'un ensemble d'ensembles par $e \in \mathcal{M}^*_{s_*}$.

Définition 2.7. *(Partie définissable de $\mathcal{D}$).*

Soit $E \subseteq \mathcal{D}$ un ensemble d'ensembles définissables tel qu'il existe une proposition B dans $\mathcal{D}^*_x$, et une valuation ϕ dans $\mathcal{M}^*$ dont le support est $x_1, ..., x_n$, pour lesquelles, dans le modèle $\mathcal{M}$, E vérifie :

$$E = \{\langle B \rangle_{\phi + \langle x, e \rangle}\}_{e \in \mathcal{M}^*_{s_*}}.$$

De E on dit que c'est un partie définissable dans la théorie *$\mathcal{U}$.*
On note $\langle\langle B \rangle\rangle_\phi$ l'ensemble E défini par (B, ϕ).

Définition 2.8. *(Famille complète de parties de $\mathcal{D}$ définissables dans une théorie).*

Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ un couple formé d'une partie définissable $\mathcal{A} \subseteq \wp(\mathcal{B})$ et d'une famille de propositions dans $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{B}^*$, tel que :

$$\mathcal{A} = \{\langle\langle B \rangle\rangle_\phi \mid B \in \mathcal{A}^*,\ \phi \text{ valuation dans } \mathcal{M}^* \text{ de support } x_1, ..., x_n\}$$

De $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ on dit que c'est une famille complète de parties de $\mathcal{B}$ définissables dans *$\mathcal{U}$.*

Nous pouvons ensuite spécifier ce qu'est qu'une opération définissable dans une théorie pour les quantificateurs :

Définition 2.9. *(Définissabilité des quantificateurs).*

Soit $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$ *complète et* $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ *une famille complète de parties définissables de* $\mathcal{B}$*. Soit* $\tilde{\forall}$ *une opération de* $\mathcal{A} \subseteq \wp(\mathcal{B})$ *dans* $\mathcal{B}$ *telle qu'il existe une fonction qui associe à une proposition* $B \in \mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{B}^*$ *dont les variables libres sont parmi* $x, x_1, ..., x_n, p$ *(de sortes* $s_*, s_{1*}, ..., s_{n*}, \lfloor \mathcal{PA} \rfloor$*), une proposition* $\Phi_\forall(B) \in \mathcal{A}^*$ *dont les variables libres sont éventuellement parmi* $x_1, ..., x_n, p$ *telle que :*

(i) Si σ *est une substitution par des termes* t_i *vérifiant*

$$\mathcal{U} \vdash \forall z_1 ... \forall z_n \ (s_1^*(z_1) \wedge \ldots \wedge s_n^*(z_n) \ \Rightarrow \ s^*(t_i))$$

et dont le support est dans $x_1, ..., x_n$*, alors*

$$\sigma \, \Phi_\forall(B) = \Phi_\forall(\sigma B)$$

(après éventuel renommage pour éviter les captures) ;

(ii) Pour tout $B \in \mathcal{A}^*$ *et pour toute valuation* ϕ *dans* $\mathcal{M}^*$*,*

$$\tilde{\forall}(\, \langle\langle B \rangle\rangle_\phi \,) = \langle \Phi_\forall(B) \rangle_\phi.$$

On dit de $\tilde{\forall}$ *qu'elle est définissable dans la théorie* $\mathcal{U}$*.*
La fonction $\Phi_\forall(B)$ *est appelée la* fonction interne *de* $\tilde{\forall}$*.*

Une définition tout à fait semblable peut être aussi donnée pour le quantificateur existentiel.

2.1.3 Les PHA exprimables dans une théorie

À ce stade nous sommes en mesure d'établir ce qu'est qu'une pré-algèbre de Heyting exprimable dans une théorie $\mathcal{U}$.

Définition 2.10. *(Pré-algèbre de Heyting exprimable dans une théorie).*

Soit $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$ *complet ;* $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*), (\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)$ *des familles complètes de parties définissables de* $\mathcal{B}$ *;* $\tilde{\top}, \tilde{\bot} \in \mathcal{B}$ *définis par des propositions* $\Phi_\top$ *et* $\Phi_\bot$ *dans* $\mathcal{B}^*$*, dont la seule variable libre est* p *de sorte* $\lfloor \mathcal{PA} \rfloor$ *;* $\tilde{\Rightarrow}$*,* $\tilde{\wedge}$ *et* $\tilde{\vee}$ *des opérations de* $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ *dans* $\mathcal{B}$ *définissables dans la théorie* $\mathcal{U}$ *;* $\tilde{\forall}$ *une fonction de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{B}$*, et* $\tilde{\exists}$ *une fonction de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{B}$*, définissables dans la théorie* $\mathcal{U}$*.*

On dit de $\langle \mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{E}, \tilde{\top}, \tilde{\bot}, \tilde{\Rightarrow}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\forall}, \tilde{\exists} \rangle$ *qu'elle est une* pré-algèbre de Heyting exprimable dans la théorie $\mathcal{U}$.

Cette notion est la notion appropriée pour, d'une part, nous permettre de bien définir ce qu'est qu'une interprétation de réalisabilité et un «modèle interne» dans l'algèbre interne et, d'une autre part, pour en extraire un modèle à valeurs dans l'algèbre principale, ce qui nous permettra de sortir de la théorie environnante $\mathcal{U}$.

2.2 Interprétation de Réalisabilité

Sachant déjà traduire la structure d'une pré-algèbre de Heyting $\mathcal{B}$ vers une théorie donnée, nous pouvons définir ce qu'est qu'un modèle $\mathcal{B}$-valué dans la théorie $\mathcal{U}$.

Définition 2.11. *(Traduction de Réalisabilité).*

Soit $(\ )^*$ une traduction de termes et $\mathcal{B}$ une pré-algèbre de Heyting exprimable dans la théorie $\mathcal{U}$ pour cette traduction. Une traduction de realisabilité *d'une théorie $\mathcal{T}, \equiv_1$ vers une théorie $\mathcal{U}, \equiv_2$ est donnée par :*

- *Une fonction que pour chaque symbole de prédicat P dans $\mathcal{T}$ d'arité $s_1, ..., s_n$ associe à $P(x_1, ..., x_n)$ une proposition $p \Vdash P(z_1, ..., z_n) \in \mathcal{B}^*$ dont les variables libres sont (possiblement) parmi $z_1, ..., z_n, p$, de sortes $s_{1*}, ..., s_{n*}, \lfloor \mathcal{PA} \rfloor$, respectivement.*

Cette traduction s'étend à toute proposition A de $\mathcal{T}$ comme suit :

$$\begin{array}{lcl}
p \Vdash P(t_1, ..., t_n) & \equiv & (p \Vdash P(z_1, ..., z_n))\{z_1 := t_1^*, ..., z_n := t_n^*\} \\
p \Vdash \top & \equiv & \Phi_\top \\
p \Vdash \bot & \equiv & \Phi_\bot \\
p \Vdash A \Rightarrow B & \equiv & \Phi_\Rightarrow((p \Vdash A), (p \Vdash B)) \\
p \Vdash A \wedge B & \equiv & \Phi_\wedge((p \Vdash A), (p \Vdash B)) \\
p \Vdash A \vee B & \equiv & \Phi_\vee((p \Vdash A), (p \Vdash B)) \\
p \Vdash \forall x\, A & \equiv & \Phi_\forall^x\ (p \Vdash A) \\
p \Vdash \exists x\, A & \equiv & \Phi_\exists^x\ (p \Vdash A)
\end{array}$$

On remarque que cette construction est bien définie grâce au fait que $\mathcal{B}$ est définissable dans la théorie $\mathcal{U}$ et que, si $p \Vdash A$ et $p \Vdash B$ définissent des ensembles dans $\mathcal{B}$, alors, les substitutions appliquées à elles ainsi que leurs images par les fonction internes en définissent aussi. D'après le fait que nous imposons aux traductions des propositions atomiques d'être dans $\mathcal{B}^*$, il en est de même pour toute proposition dans $\mathcal{T}$.

Proposition 2.12. *Soit A une proposition de $\mathcal{T}$ dont les variables libres sont parmi $x_1, ..., x_n$. Alors, les variables libres de la propositions $p \Vdash A$ sont $x_1^*, ..., x_n^*, p$.*

Démonstration. Étant vrai pour les termes et propositions atomiques, on vérifie par récurrence sur la structure de la proposition qu'il en est de même pour $p \Vdash A$. □

Nous aboutissons finalement à la notion de modèle *dans* la théorie $\mathcal{U}$:

Définition 2.13. *(Interprétation de Réalisabilité).*

Une traduction de réalisabilité pour $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{U}$ est une interprétation de réalisabilité *si la condition suivante est aussi vérifiée :*

– *Pour toute paire de propositions congruentes $A \equiv_1 A'$ dans $\mathcal{T}, \equiv_1$, le séquent :*

$$\mathcal{U} \vdash \forall p \ (p \Vdash A \Leftrightarrow p \Vdash A')$$

est démontrable.

Si $\mathcal{U}$ admet une interprétation de réalisabilité pour $\mathcal{B}$ on dit que

$$\mathcal{U} \vdash \ \ll \mathcal{T} \text{ admet un } \mathcal{B}\text{-modèle} \gg$$

est démontrable.

Nous voyons alors que bien que la donnée d'une traduction de termes pourrait paraître quelque chose d'assez immédiat, pour construire une interprétation de réalisabilité, il faudra que ce choix soit judicieux pour que la condition ci-dessus soit vérifiée. En fait, pour pouvoir construire un modèle, il est aussi important bien choisir la structure de termes sur laquelle le modèle est construit que le choix des valeurs des symboles de prédicat. Cela nous amènera à une notion de familles d'algèbres qui nous permettra de restituer l'indépendance d'une pré-algèbre de Heyting d'une traduction particulière de termes. Cela sera le sujet des sections suivantes, quand nous nous adresserons au problème de la définissabilité des candidats.

2.2.1 La construction du modèle $\mathcal{B}$-valué

Il ne nous reste ensuite que montrer que l'existence d'une interprétation de réalisabilité est effectivement une condition suffisante pour que $\mathcal{T}, \equiv_1$ admette un $\mathcal{B}$-modèle. Ceci est le résultat central de ce mémoire :

Théorème 2.14. *Soit $\mathcal{T}, \equiv_1$ une théorie ; $\mathcal{U}, \equiv_2$ une théorie contenant l'arithmétique et qui admet un modèle standard $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{B}$ une pré-algèbre de Heyting exprimable dans la théorie $\mathcal{U}$. Alors, on a l'affirmation suivante :*

Si $\mathcal{U} \vdash \ll \mathcal{T}, \equiv_1$ admet un $\mathcal{B}$-modèle$\gg$ est démontrable, alors $\mathcal{T}, \equiv_1$ admet un $\mathcal{B}$-modèle.

Démonstration. Nous procédons en construisant explicitement un modèle $\mathcal{N}$ de $\mathcal{T}, \equiv$. Comme cela avait déjà été anticipé, nous utiliserons $\mathcal{M}^*$ comme structure de termes :

– Pour toute sorte s de $\mathcal{T}$, nous définissons

$$\mathcal{N}_s = \mathcal{M}^*_{s_*} \quad \big(= \{e \in \mathcal{M}_{s_*} \mid |\, s^*(x)|_{\langle x,e\rangle} = 1\}\big)$$

(l'ensemble $\mathcal{N}_s$ est non vide, car $\mathcal{U} \vdash \exists x \ s^*(x)$ est démontrable),

– Pour chaque symbole de fonction f du langage de $\mathcal{T}$ nous posons $\hat{f}(e_1, ..., e_n) = |\, f(x_1, ..., x_n)^*|^{\mathcal{M}}_{\langle x_1^*, e_1\rangle, ..., \langle x_n^*, e_n\rangle}$.

L'objet $\hat{f}(e_1, ..., e_n)$ est bien un élément de $\mathcal{N}_s$, car la proposition

$$\mathcal{U} \vdash \forall z_1 ... \forall z_n \ (\, s_1^*(z_1) \wedge ... \wedge s_n^*(z_n)\,) \ \Rightarrow \ s^*(f^*(z_1, ..., z_n))$$

est démontrable d'après le fait qu'il s'agit d'une interprétation de réalisabilité.

– Pour chaque proposition atomique P, nous définissons

$$\hat{P}(e_1, ..., e_n) = \{n \in \mathbb{N} \ : \ | p \Vdash P(x_1^*, ..., x_n^*)|^{\mathcal{M}}_{\langle x_1^*, e_1 \rangle + ... + \langle x_n^*, e_n \rangle + \langle p, n \rangle} = 1\}.$$

L'ensemble $\hat{P}$ est bien définissable, il est de plus un élément de $\mathcal{B}$ car il est défini par $p \Vdash P$, qui est bien dans $\mathcal{B}^*$ d'après le fait que c'est une interprétation de réalisabilité de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{U}$.

Pour toute valuation ϕ qui associe les valeurs $e_1, ..., e_n$ aux variables $x_1, ..., x_n$ dans $\mathcal{N}$, nous définissons une valuation ϕ_* dans $\mathcal{M}$ qu'associe les valeurs $e_1, ..., e_n$ aux variables $x_1^*, ..., x_n^*$. Nous montrons que pour toute proposition A, la dénotation de A est

$$| A|^{\mathcal{N}}_{\phi} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ | p \Vdash A|^{\mathcal{M}}_{\phi_* + \langle p, n \rangle} = 1\} = \langle p \Vdash A \rangle_{\phi_*}.$$

On remarque que cette expression a du sens car, comme la proposition 2.12 nous indique, les variables libres de $p \Vdash A$ sont bien parmi $x_1^*, ..., x_n^*, p$. On procède par récurrence sur la structure de A :

– $P(t_1, ..., t_n)$: Pour les propositions atomiques on fait une récurrence sur la structure des termes $t_1, ..., t_n$:

• x : Vu que x appartient à l'ensemble de définition de ϕ, alors x^* appartient à celui de ϕ_*, leurs dénotations vérifient :

$$| x|^{\mathcal{N}}_{\phi} = e = | x^*|^{\mathcal{M}}_{\phi_*}.$$

• $f(t_1, ..., t_n)$: Par hypothèse de récurrence, on a, pour tout i,

$$| t_i|^{\mathcal{N}}_{\phi} = e_i = | t_i^*|^{\mathcal{M}}_{\phi_*},$$

on en déduit les dénotations de $f(t_1, ..., t_n)$ et $f(t_1, ..., t_n)^*$:

$$\begin{aligned} | f(t_1, ..., t_n)|^{\mathcal{N}}_{\phi} &= \hat{f}(e_1, ..., e_n) \\ &= | f(x_1, ..., x_n)^*|^{\mathcal{M}}_{\langle x_1^*, e_1 \rangle, ..., \langle x_n^*, e_n \rangle} \\ &= | f(x_1, ..., x_n)^*\{x_1^* := t_1^*, ..., x_n^* := t_n^*\}|^{\mathcal{M}}_{\phi_*} \\ &= | f(t_1, ..., t_n)^*|^{\mathcal{M}}_{\phi_*}. \end{aligned}$$

D'après le fait que pour tout terme t_i dans $\mathcal{T}$, on a

$$| t_i|^{\mathcal{N}}_{\phi} = e_i = | t_i^*|^{\mathcal{M}}_{\phi_*},$$

on déduit la dénotation de $P(t_1, ..., t_n)$:

$$\begin{aligned} | P(t_1, ..., t_n)|^{\mathcal{N}}_{\phi} &= \hat{P}(e_1, ..., e_n) \\ &= \{n \in \mathbb{N} \ : \ | p \Vdash P(x_1^*, ..., x_n^*)|^{\mathcal{M}}_{\langle x_1^*, e_1 \rangle + ... + \langle x_n^*, e_n \rangle + \langle p, n \rangle} = 1\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \ : \ | p \Vdash P(x_1^*, ..., x_n^*)\{x_1^* := t_1^*, ..., x_n^* := t_n^*\}|^{\mathcal{M}}_{\phi_* + \langle p, n \rangle} = 1\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \ : \ | p \Vdash P(t_1^*, ..., t_n^*)|^{\mathcal{M}}_{\phi_* + \langle p, n \rangle} = 1\}. \end{aligned}$$

– $B \Rightarrow C$: Par hypothèse de récurrence, B et C sont deux propositions dont les dénotations sont des ensembles définis par les propositions $p \Vdash B$ et $p \Vdash C$ respectivement. L'opération $\tilde{\Rightarrow}$ étant définissable dans la théorie $\mathcal{U}$, si $|\,B|_\phi^\mathcal{N}$ est l'ensemble $\langle p \Vdash B\rangle_{\phi_*}$ et $|\,C|_\phi^\mathcal{N}$ est l'ensemble $\langle p \Vdash C\rangle_{\phi_*}$, alors l'ensemble $|\,B|_\phi^\mathcal{N} \tilde{\Rightarrow} |\,C|_\phi^\mathcal{N}$ est bien $\langle \Phi_\Rightarrow(p \Vdash B, p \Vdash C)\rangle_{\phi_*}$. On a donc, pour $|\,B \Rightarrow C|_\phi^\mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} |\,B \Rightarrow C|_\phi^\mathcal{N} &= |\,B|_\phi^\mathcal{N} \tilde{\Rightarrow} |\,C|_\phi^\mathcal{N} \\ &= \langle\, \Phi_\Rightarrow(p \Vdash B, p \Vdash C)\,\rangle_{\phi_*} \\ &= \langle\, p \Vdash B \Rightarrow C\,\rangle_{\phi_*}. \end{aligned}$$

Les cas de $\wedge$ et $\vee$ sont tout à fait analogues.

– $\forall x\, A$: Par hypothèse de récurrence, pour toute valuation ψ, on a

$$|\,A|_\psi^\mathcal{N} = \langle p \Vdash A\rangle_{\psi_*}.$$

Soit ϕ une valuation dont le support est dans $x_1, ..., x_n$, l'affirmation précédente est vraie particulièrement pour $\phi + \langle x, e\rangle$. On a alors, pour tout e dans $\mathcal{N}_s = \mathcal{M}^*_{s_*}$,

$$\begin{aligned} |\,A|_{\phi+\langle x,e\rangle}^\mathcal{N} &= \langle p \Vdash A\rangle_{(\phi+\langle x,e\rangle)_*} \\ &= \langle p \Vdash A\rangle_{(\phi_*+\langle x^*,e\rangle)}. \end{aligned}$$

Les ensembles $\{|\,A|_{\phi+\langle x,e\rangle}^\mathcal{N} \mid e \in \mathcal{N}_s\}$ et $\langle\langle p \Vdash A\rangle\rangle_{\phi_*} = \{\langle p \Vdash A\rangle_{(\phi_*+\langle x^*,e\rangle)} \mid e \in \mathcal{M}^*_{s_*}\}$ sont donc identiques. On a de plus que, si $\langle\langle p \Vdash A\rangle\rangle_{\phi_*} \in \mathcal{A}$, alors $\tilde{\forall}\ \langle\langle p \Vdash A\rangle\rangle_{\phi_*} = \langle \Phi^*_\forall(p \Vdash A)\rangle_{\phi_*}$. On en déduit la dénotation de $\forall x\, A$:

$$\begin{aligned} |\,\forall x\, A|_\phi^\mathcal{N} &= \tilde{\forall}\ \{|\,A|_{\phi+\langle x,e\rangle}^\mathcal{N} \mid e \in \mathcal{N}_s\} \\ &= \tilde{\forall}\ \{\langle p \Vdash A\rangle_{(\phi_*+\langle x^*,e\rangle)} \mid e \in \mathcal{M}^*_{s_*}\} \\ &= \tilde{\forall}\ \langle\langle p \Vdash A\rangle\rangle_{\phi_*} \\ &= \langle \Phi^*_\forall(p \Vdash A)\rangle_{\phi_*} = \langle p \Vdash \forall x\ A\rangle_{\phi_*}. \end{aligned}$$

Le cas du quantificateur existentiel est tout à fait analogue.

Nous en déduisons que la dénotation de toute proposition A de $\mathcal{T}$ est définie par la proposition $p \Vdash A$.

Soit maintenant deux propositions congruentes $A \equiv_1 A'$ dans $\mathcal{T}$. La formule suivante étant démontrable dans $\mathcal{U}$, le modèle $\mathcal{M}$ la valide :

$$\forall p\ (p \Vdash A \Leftrightarrow p \Vdash A'),$$

il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\,(p \Vdash A \Leftrightarrow p \Vdash A')|_{\langle p,n\rangle}^\mathcal{M} = 1.$$

Nous en déduisons que les dénotations de $p \Vdash A$ et $p \Vdash A'$ coïncident pour toute valeur assignée à p. L'égalité des dénotations de A et A' en est une conséquence :

$$
\begin{aligned}
|\,A|_{\phi}^{\mathcal{N}} &= \{n \in \mathbb{N} \ : \ |\,p \Vdash A|_{\phi_* + \langle p,n\rangle}^{\mathcal{M}} = 1\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} \ : \ |\,p \Vdash A'|_{\phi_* + \langle p,n\rangle}^{\mathcal{M}} = 1\} \quad = |\,A'|_{\phi}^{\mathcal{N}}
\end{aligned}
$$

Nous avons construit un $\mathcal{B}$-modèle $\mathcal{N}$ de la théorie $\mathcal{T}, \equiv_1$, ce qui nous permet de conclure. □

Dans les sections qui suivent on abordera la définissabilité de l'algèbre des candidats pour montrer que cette procédure nous permet de construire des $\mathcal{C}$-modèles, un point de départ important pour établir la bonne définition de super-cohérence.

Chapitre 3

Définissabilité de l'algèbre des candidats

3.1 Les Candidats de Réductibilité

Dans cette section nous introduisons une PHA très importante par son lien avec la normalisation des preuves, il s'agit de l'algèbre des candidats de réductibilité. En guise d'introduction, nous abordons une présentation schématique de la preuve qui relie la normalisation des preuves aux modèles à valeurs dans les candidats de réductibilité [1].

L'algorithme de normalisation

En déduction modulo intuitionniste, l'élimination des coupures consiste en ce que pour toute proposition démontrable il existe une preuve qui n'a pas d'introductions et éliminations redondantes. Par exemple, aucune partie d'une preuve ne doit avoir la forme

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash A} \quad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge\text{-intro}}{\Gamma \vdash A}\,\wedge\text{-élim}$$

Une manière de montrer l'élimination des coupures c'est de commencer d'une preuve quelconque et de la modifier pour en avoir une sans coupures. Dans le cas précédant, au lieu d'utiliser cette preuve de A, nous ne gardons que π_1. Pour chaque opérateur logique nous réduisons ainsi les redondances, définissant ainsi un algorithme d'élimination des coupures. Nous modélisons cet algorithme par une variante de λ-calcul typé, dont les constructeurs correspondent aux règles de déduction (axiomes et introduction et élimination

1. Cette preuve est le sujet de l'article ≪Proof Normalisation Modulo≫ [6].

des opérateurs logiques), la réduction correspond bien à l'élimination des redondances et les termes typés dans un contexte Γ correspondent à des preuves intuitionnistes dans la théorie Γ. La normalisation des preuves d'une théorie fait référence au fait que tout terme bien typé normalise, ce qui correspond à la terminaison de l'algorithme d'élimination des coupures pour toute preuve associée à la théorie Γ.

$$
\begin{array}{lll}
\pi := & \alpha & \textit{(axiome)} \\
& |\lambda\alpha\ \pi \mid (\pi\ \pi') & \textit{(flèche : intro et élim)} \\
& |\langle \pi, \pi' \rangle \mid fst(\pi) \mid snd(\pi) & \textit{(et : intro et élim)} \\
& \mid i(\pi) \mid j(\pi) \mid (\delta\ \pi_1\ \alpha\pi_2\ \beta\pi_3) & \textit{(ou : intro et élim)} \\
& |(\delta_\perp\ \pi) & \textit{(contradiction : élim)} \\
& |\lambda x\ \pi \mid (\pi\ t) & \textit{(quelque soit : intro et élim)} \\
& |\langle t, \pi \rangle \mid (\delta_\exists\ \pi\ x\alpha\pi') & \textit{(il existe : intro et élim)}
\end{array}
$$

FIGURE 3.1 – Termes preuve : constructeurs

Les candidats

Pour montrer que les termes preuve d'une théorie normalisent fortement, nous procédons par récurrence sur le type du terme. Il s'avère qu'il est nécessaire de renforcer systématiquement l'hypothèse de récurrence, dans un premier temps en disant que les preuves d'une proposition A sont dans un sous-ensemble $|A|$ de $\mathcal{SN}$ (l'ensemble des termes preuve qui normalisent fortement) en sorte que l'application d'un terme de $|A|$ à un dans $|A \Rightarrow B|$ donne bien un élément de $|B|$ (qui normalise fortement). Cela fixe la relation entre les ensembles associés à chaque proposition, l'ensemble $|A \Rightarrow B|$ devra être l'ensemble qui ne contient pas des preuves π de $A \Rightarrow B$ telles qu'il existe une preuve dans $|A|$ qui appliquée à π ne rende pas un élément de $|B|$.

Dans un deuxième temps nous avons besoin de que les ensembles $|A|$ prennent en charge les variables libres et qu'ils soient donc indexés aussi par des valuations sur une structure de termes du langage de la théorie. Le renforcement des hypothèses nous mène bien alors à la construction d'un modèle.

Finalement, la preuve nécessite aussi que les ensembles $|A|_\phi$ vérifient bien certaines propriétés, définissant ainsi les candidats de réductibilité :

Définition 3.1. *Un terme preuve π est dit* neutre *si c'est un axiome ou une élimination.*

Définition 3.2. *(Candidat de Réductibilité)*

Soit R un ensemble de termes preuve qui satisfait aux conditions suivantes :

– (CR 1) *: Tout élément de R est fortement normalisable.*

– (CR 2) *: Si* π *est un élément de* R*, alors tous ses réduits le sont.*
– (CR 3) *: Si* π *est un terme neutre tel qu'à chaque fois que* $\pi \rhd^1 \pi'$*,* $\pi' \in R$*, alors* π *est un élément de* R*.*

De R *on dit que c'est un candidat de réductibilité. On note l'ensemble des candidats de réductibilité* $\mathcal{C}$*.*

Définition 3.3. *(Opérations sur les candidats de réductibilité).*
Soit $A, B \in \mathcal{C}$*,* $S \subset \mathcal{C}$*.*
Soit $\tilde{\top}, \tilde{\bot} \in \mathcal{C}$ *et les opérations* $\tilde{\Rightarrow}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\forall}, \tilde{\exists}$ *définies sur* $\mathcal{C}$ *par :*

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{\top} & \equiv & \mathcal{SN} \\
\tilde{\bot} & \equiv & \mathcal{SN} \\
A \mathrel{\tilde{\Rightarrow}} B & := & \{\pi \in \mathcal{SN} \mid \textit{si } \pi \rhd^* \lambda\alpha\ \rho,\ \textit{alors } \forall \pi_1 \in A, [\pi_1/\alpha]\rho \in B\} \\
A \mathrel{\tilde{\wedge}} B & := & \{\pi \in \mathcal{SN} \mid \textit{si } \pi \rhd^* \langle \pi_1, \pi_2 \rangle,\ \textit{alors } \pi_1 \in A,\ \pi_2 \in B\} \\
A \mathrel{\tilde{\wedge}} B & := & \{\pi \in \mathcal{SN} \mid \textit{si } \pi \rhd^* i(\pi_1)\ \textit{(resp. } j(\pi_2)\textit{)},\ \textit{alors } \pi_1 \in A\ \textit{(resp. } \pi_2 \in B\textit{)}\} \\
\tilde{\forall}\ S & := & \{\pi \in \mathcal{SN} \mid \textit{si } \pi \rhd^* \lambda x\ \pi_1,\ \textit{alors } \forall t \in T(x), [t/x]\pi_1 \in \bigcap S\} \\
\tilde{\exists}\ S & := & \{\pi \in \mathcal{SN} \mid \textit{si } \pi \rhd^* \langle t, \pi_1 \rangle,\ \textit{alors } \pi_1 \in \bigcup S\}
\end{array}$$

Proposition 3.4. *Les candidats de réductibilité munis de* $\tilde{\top}, \tilde{\bot}, \tilde{\Rightarrow}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\forall}, \tilde{\exists}$ *sont une pré-algèbre de Heyting triviale full et complète.*

Suite à cette présentation des candidats de réductibilité, nous procédons à montrer le résultat central de cette section, à savoir, le fait qu'ils sont exprimables dans toute théorie $\mathcal{U}$ qui admet un modèle standard.

3.2 Représentation des Candidats

3.2.1 Représentation dans $\wp(\mathbb{N})$

Dans cette section on montre que l'algèbre des candidats est définissable dans toute théorie $\mathcal{U}$ admettant un modèle standard et pour toute traduction de termes $(\ )^*$. Étant définie par des relations semi-décidables, nous verrons que l'algèbre des candidats admet une définition qui est effectivement indépendante du modèle $\mathcal{M}$ sur lequel elle est construite. Elle est aussi assez faiblement dépendante de la traduction de termes, dans le sens qu'elle est définie pour toute traduction de termes, prenant comme paramètre les prédicats de relativisation. Cela nous amènera vers une nouvelle notion d'algèbre exprimable dans une théorie, plus restrictive mais plus robuste et flexible.

Nous commençons par construire un morphisme d'algèbres entre les candidats et les parties de $\mathbb{N}$.

Définition 3.5. *(Numérotation de Gödel).*
Soit $\mathcal{L}$ *un langage. Soit* π *un terme preuve de* $\mathcal{L}$*.*

On note $\ulcorner \pi \urcorner$ *l'unique entier associé à l'arbre* π *par la numérotation de Gödel.*

La numérotation de Gödel induit une injection naturelle, que nous continuons à noter $\ulcorner\ \urcorner$, des ensembles de termes preuve dans les parties de $\mathbb{N}$. En utilisant cette injection nous pouvons établir un morphisme d'algèbres entre les candidats et leurs images par la fonction $\ulcorner\ \urcorner$. Nous définissons les opérations sur $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$ comme suit :

Définition 3.6. *(Représentation dans* $\wp(\mathbb{N})$ *de l'algèbre des candidats).*
Soit $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}, \tilde{\top}, \tilde{\bot}, \tilde{\Rightarrow}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\forall}, \tilde{\exists} \rangle$ *l'algèbre des candidats de réductibilité associée au langage* $\mathcal{L}$.
Soit $\tilde{\top}_{\mathbb{N}}, \tilde{\bot}_{\mathbb{N}}$ *et les opérations* $\tilde{\Rightarrow}_{\mathbb{N}}, \tilde{\wedge}_{\mathbb{N}}, \tilde{\vee}_{\mathbb{N}}, \tilde{\forall}_{\mathbb{N}}, \tilde{\exists}_{\mathbb{N}}$, *définis par :*

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\top}_{\mathbb{N}} & := & \ulcorner \tilde{\top} \urcorner \\
\tilde{\bot}_{\mathbb{N}} & := & \ulcorner \tilde{\bot} \urcorner \\
\ulcorner A \urcorner \tilde{\Rightarrow}_{\mathbb{N}} \ulcorner B \urcorner & := & \ulcorner (A \tilde{\Rightarrow} B) \urcorner \\
\ulcorner A \urcorner \tilde{\wedge}_{\mathbb{N}} \ulcorner B \urcorner & := & \ulcorner (A \tilde{\wedge} B) \urcorner \\
\ulcorner A \urcorner \tilde{\vee}_{\mathbb{N}} \ulcorner B \urcorner & := & \ulcorner (A \tilde{\vee} B) \urcorner \\
\tilde{\forall}_{\mathbb{N}} \ulcorner E \urcorner & := & \ulcorner (\tilde{\forall}\ E) \urcorner \\
\tilde{\exists}_{\mathbb{N}} \ulcorner E \urcorner & := & \ulcorner (\tilde{\exists}\ E) \urcorner.
\end{array}$$

La structure $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner = \langle \ulcorner \mathcal{C} \urcorner, \tilde{\top}_{\mathbb{N}}, \tilde{\bot}_{\mathbb{N}}, \tilde{\Rightarrow}_{\mathbb{N}}, \tilde{\wedge}_{\mathbb{N}}, \tilde{\vee}_{\mathbb{N}}, \tilde{\forall}_{\mathbb{N}}, \tilde{\exists}_{\mathbb{N}} \rangle$ *est une pré-algèbre de Heyting triviale.*

Proposition 3.7. *Les algèbres* $\mathcal{C}$ *et* $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$ *sont isomorphes.*

Démonstration. C'est immédiat du fait que $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$ a ainsi été définie. □

Nous remarquons que le fait que ces deux algèbres soient isomorphes nous indique que la donnée d'un $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$-modèle et celle d'un $\mathcal{C}$-modèle sont équivalentes.

Nous voulons établir donc des conditions sur une théorie $\mathcal{U}$ de manière que $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$ y soit exprimable afin de pouvoir construire un $\mathcal{C}$-modèle d'une théorie $\mathcal{T}, \equiv$ à partir d'une interprétation de réalisabilité. Nous affirmons qu'il suffit qu'il existe une traduction des termes du langage $\mathcal{L}$ (dans lequel la théorie $\mathcal{T}$ est définie) vers $\mathcal{U}$ pour assurer la définissabilité de $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$, ce qui est trivialement vrai.

3.2.2 Constructions syntaxiques et candidats de réductibilité

Dans cette section nous reprenons brièvement l'article ≪Relative normalization ≪[5] pour établir des bases qui nous serviront dans las suite pour prouver la définissabilité de $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$ dans la théorie $\mathcal{U}$.

La théorie $\mathcal{U}$ contenant l'arithmétique, il nous est possible de définir des constructions syntaxiques. En particulier, nous pouvons traduire les termes du langage $\mathcal{L}$, construire les termes preuve et la réduction des termes par l'intermédiaire de la représentation dans l'arithmétique des prédicats suivants :

$Nat(x)$	x est un entier
$Le(x, y)$	x est plus petit ou égal à y
$Sort(x)$	x est une sorte
$TermVar(x, y)$	x est une variable de sorte y
$Term(x, y)$	x est un terme de sorte y
$ProofVar(x)$	x est une variable de preuve
$Proof(x)$	x est un terme preuve
$Elim(x)$	x est une élimination
$Red(x, y)$	x se réduit en un pas en y
$Redn(x, n, y)$	x se réduit en n pas en y
$Red^*(x, y)$	x se réduit en y
$SN(x)$	x est un terme preuve qui normalise fortement.

Les constructeurs des termes preuve sont respectivement : *Axiom*, *Imp_I*, *Imp_E*, *And_I*, *And_E*$_1$, *And_E*$_2$, *Or_I*$_1$, *Or_I*$_2$, *Or_E*, *Top_I*, *Bot_E*, *Forall_I*, *Forall_E*, *Exists_I*, *Exists_E*. On note les substitutions de termes et de preuves *TSubst* et *PSubst* respectivement.

Sans perte de généralité, nous supposons que les termes preuve sont représentés par leur numérotation de Gödel dans cette construction. Nous notons $\lfloor\mathcal{PA}\rfloor$ la sorte associée à ι pour l'arithmétique contenue dans $\mathcal{U}$.

Relations semi-décidables et modèles standard

On remarque que tous les prédicats ci-dessus sont bien des relations décidables ou semi-décidables, il en découle qu'ils peuvent être représentés dans l'arithmétique de manière que, pour $\mathcal{M}$ un modèle standard de l'arithmétique, les relations seront vraies si et seulement si $\mathcal{M}$ valide les prédicats correspondants. Pour la preuve de cela et pour plus de détails, le lecteur peut consulter [3], nous énonçons le résultat qui nous intéresse pour la suite :

Proposition 3.8. *Soit P l'un des prédicats ci-dessus, d'arité n, $\lceil P\rceil$ sa représentation dans l'arithmétique et $(p_i)_{i=1}^n \in \mathbb{N}^n$. Alors, on a*

$$P(p_i) \textit{ est vrai} \quad \Leftrightarrow \quad |\lceil P\rceil|^{\mathcal{M}}_{\langle x_i, p_i\rangle_{i=1}^n} = 1.$$

Cela nous permettra de déduire des conclusions à partir des valeurs rendues par l'interprétation de $\mathcal{U}$, ce qui rendra possible relier la structure des candidats que nous définirons dans $\mathcal{U}$ avec celle de l'algèbre des candidats.

Ce résultat étant vrai pour n'importe quelle relation semi-décidable, toute pré-algèbre de Heyting exprimable dans $\mathcal{U}$ dont l'algèbre interne est définie uniquement par de telles relations, par des opérateurs logiques et par des prédicats de relativisation (dans un sens informel que nous cherchons à exemplifier par l'algèbre des candidats) peut être définie indépendamment du modèle standard $\mathcal{M}$ particulier.

3.2.3 Représentation dans $\mathcal{U}$ des candidats de réductibilité

Une pré-algèbre de Heyting exprimable dans une théorie est la donnée de structures $\langle \mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{E}, \tilde{\top}, \tilde{\bot}, \tilde{\Rightarrow}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\forall}, \tilde{\exists} \rangle$ qui y sont respectivement définissables, par rapport à une traduction de termes. En utilisant la représentation des termes preuve dans l'arithmétique, nous nous donnons une traduction $(\ )^*$ des termes de $\mathcal{L}$ (le langage de la théorie $\mathcal{T}$) dans $\mathcal{U}$ et nous définissons une algèbre exprimable dans $\mathcal{U}$. Pour cela, nous définissons, dans $\mathcal{U}$, la notion de candidat de réductibilité :

Définition 3.9. *Pour toute proposition $A(\pi)$ dans $\mathcal{U}$ dépendant possiblement de variables $z_1, .., z_n$ et d'une variable π de sorte $\lfloor \mathcal{PA} \rfloor$, nous définissons la proposition*

$$
\begin{array}{lcll}
CR_\pi(A(\pi)) & \equiv & \forall \pi\ (A(\pi)\ \Rightarrow\ Proof(\pi) \wedge SN(\pi)) & \wedge \\
& & \forall \alpha\ (ProofVar(\alpha)\ \Rightarrow\ A(Axiom(\alpha))) & \wedge \\
& & \forall \pi\ \forall \pi'\ (A(\pi) \wedge Red(\pi, \pi')\ \Rightarrow\ A(\pi')) & \wedge \\
& & \forall \pi (Elim(\pi) \wedge \forall \pi' (Red(\pi, \pi')\ \Rightarrow\ A(\pi'))\ \Rightarrow\ A(\pi)) &
\end{array}
$$

Dans toute cette section nous dénoterons la variable p par l'intermédiaire de laquelle nous définissons les ensembles définissables par la variable π, afin de renforcer le fait que nous définissons des ensembles de termes preuve, que nous associerons dans la suite à des candidats de réductibilité.

Définition 3.10. *(Candidats de réductibilité).*

Soit $(\ )^*$ une traduction de termes d'un langage $\mathcal{L}$ dans une théorie $\mathcal{U}$. Nous définissons l'ensemble de propositions dans $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}^*$, comme étant les propositions qui correspondent informellement à des ≪candidats de réductibilité dans $\mathcal{U}$ ≪ :

$$\mathcal{B}^* = \{\ A(\pi)\ |\quad \mathcal{U} \vdash \forall z_1 ... \forall z_n \big(s_1^*(z_1) \wedge ... \wedge s_n^*(z_n)\ \Rightarrow\ CR_\pi(A(\pi))\big)\},$$

Soit également $\mathcal{A}^*$ et $\mathcal{E}^*$ définis par les ≪candidats≫ qui ont des variables libres à part π :

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{E}^* = \{A \in \mathcal{B}^*\ |\ FV(A) \setminus \{\pi\} \neq \emptyset\}.$$

Nous définissons les opérations $\Phi_\top, \Phi_\bot, \Phi_\Rightarrow, \Phi_\wedge, \Phi_\vee, \Phi_\forall^*, \Phi_\exists$, sur $\mathcal{B}^*$ comme suit :

$$
\begin{array}{rcl}
\Phi_\top & \equiv & SN(\pi) \\
\Phi_\bot & \equiv & SN(\pi) \\
\Phi_\Rightarrow(A(\pi), B(\pi)) & \equiv & SN(\pi) \wedge \\
& & \forall\alpha\,\forall\pi'\ (ProofVar(\alpha)\ \Rightarrow\ Red^*(\pi, Imp\_I(\alpha,\pi'))\ \Rightarrow \\
& & \quad \forall\phi\ (A(\phi)\ \Rightarrow\ B(PSubst(\pi',\alpha,\phi))) \\
\Phi_\wedge(A(\pi), B(\pi)) & \equiv & SN(\pi) \wedge \\
& & \quad \forall\pi_1\,\forall\pi_2\ (Red^*(\pi, And\_I(\pi_1,\pi_2))\ \Rightarrow\ (A(\pi_1)\ \wedge\ B(\pi_2)) \\
\Phi_\vee(A(\pi), B(\pi)) & \equiv & SN(\pi) \wedge \\
& & \quad \forall\pi_1\ (Red^*(\pi, Or\_I_1(\pi_1))\ \Rightarrow A(\pi_1) \\
& & \quad \forall\pi_2\ (Red^*(\pi, Or\_I_2(\pi_2))\ \Rightarrow B(\pi_2) \\
\Phi^*_{\forall,x}(B(\pi,x)) & \equiv & SN(\pi) \wedge \\
& & \forall v\,\forall\pi'\ (TermVar(v,s)\ \Rightarrow\ Red^*(\pi, Forall\_I(v,\pi'))\ \Rightarrow \\
& & \quad \forall x\,\forall t\ (s^*(x)\ \wedge\ Term(t,s) \Rightarrow \\
& & \quad B(\,TSubst(\pi',v,t), x\,)) \\
\Phi^*_{\exists,x}(B(\pi,x)) & \equiv & SN(\pi) \wedge \\
& & \forall\pi'\,\forall t\ (Red^*(\pi, Exists\_I(t,\pi'))\ \Rightarrow \\
& & \quad \exists x\ (s^*(x)\ \wedge\ B(\pi',x)).
\end{array}
$$

Lemme 3.11. *L'ensemble $\mathcal{B}^*$ est clos par les opérations définies ci-dessus.*

Démonstration. Par récurrence sur les structures des preuves de la clôture de $\mathcal{C}$ par les opérations $\tilde{\top}, \tilde{\bot}, \tilde{\Rightarrow}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\forall}, \tilde{\exists}$ et de l'appartenance de $\mathcal{SN}$ à $\mathcal{C}$, l'ensemble des candidats de réductibilité. $\square$

Algèbres induites par une structure interne

La donnée d'une structure $\langle \mathcal{B}^*, \mathcal{A}^*, \mathcal{E}^*, \Phi_\top, \Phi_\bot, \Phi_\Rightarrow, \Phi_\wedge, \Phi_\vee, \Phi_\forall, \Phi_\exists \rangle$ induit naturellement une pré-algèbre de Heyting exprimable dans $\mathcal{U}$:

Définition 3.12. *(Opération intrinsèque).*
Soit $\mathcal{B}^*, \mathcal{A}^*, \mathcal{E}^*$ des ensembles de propositions. Soit Φ_o une opération à valeurs dans $\mathcal{B}^*$ telle qu'il existe une méta-proposition C_o dans $\mathcal{U}$, avec une variable libre p de sorte $\lfloor \mathcal{PA} \rfloor$ et avec des méta-variables de proposition $X_1, ..., X_n$ qui sont supposées d'avoir respectivement une variable libre p_i, de manière que, pour tout $A_1, ..., A_n$,

$$\Phi_o(A_1, ..., A_n) = [A_1/X_1, ..., A_n/X_n]C_o.$$

De Φ_o on dit que c'est une opération intrinsèque.

Proposition 3.13. *Soit $\mathcal{B}^*$ un ensemble de propositions. Soit $\mathcal{A}^*, \mathcal{E}^*$ des sous-ensembles de $\mathcal{B}^*$ et $\Phi_\top, \Phi_\bot, \Phi_\Rightarrow, \Phi_\wedge, \Phi_\vee, \Phi_\forall, \Phi_\exists$ des opérations intrinsèques dans $\mathcal{U}$. Alors, la structure définie par les ensembles :*

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{B} & \equiv & \{\langle A\rangle_\phi \mid A \in \mathcal{B}^*,\ \phi \textit{ valuation dans } \mathcal{M}^* \textit{ de support } x_1, ..., x_n\} \\
\mathcal{A} & \equiv & \{\langle\langle B\rangle\rangle_\phi \mid B \in \mathcal{A}^*,\ \phi \textit{ valuation dans } \mathcal{M}^* \textit{ de support } x_1, ..., x_n\} \\
\mathcal{E} & \equiv & \{\langle\langle B\rangle\rangle_\phi \mid B \in \mathcal{E}^*,\ \phi \textit{ valuation dans } \mathcal{M}^* \textit{ de support } x_1, ..., x_n\}
\end{array}
$$

et par les opérations :

$$
\begin{array}{lcl}
\tilde{\top} & \equiv & \langle \Phi_\top \rangle_\emptyset \\
\tilde{\bot} & \equiv & \langle \Phi_\bot \rangle_\emptyset \\
\langle A\rangle_\phi \ \tilde{\Rightarrow}\ \langle B\rangle_{\phi'} & \equiv & \langle \Phi_\Rightarrow(A, B)\rangle_{\phi+\phi'} \\
\langle A\rangle_\phi \ \tilde{\wedge}\ \langle B\rangle_{\phi'} & \equiv & \langle \Phi_\wedge(A, B)\rangle_{\phi+\phi'} \\
\langle A\rangle_\phi \ \tilde{\vee}\ \langle B\rangle_{\phi'} & \equiv & \langle \Phi_\vee(A, B)\rangle_{\phi+\phi'} \\
\tilde{\forall}\ \langle\langle B\rangle\rangle_\phi & \equiv & \langle \Phi^x_\forall(B)\rangle_\phi \\
\tilde{\exists}\ \langle\langle B\rangle\rangle_\phi & \equiv & \langle \Phi^x_\exists(B)\rangle_\phi
\end{array}
$$

est une pré-algèbre de Heyting exprimable dans $\mathcal{U}$*.*

Démonstration. Les propositions $\mathcal{C}_o$ n'ayant que p comme variable libre, elles vérifient trivialement la commutation avec les substitutions σ qui vérifient

$$\mathcal{U} \vdash \forall z_1 ... \forall z_n \ (s_1^*(z_1) \ \wedge \ ... \ \wedge \ s_n^*(z_n) \ \Rightarrow \ s^*(t_i))$$

pour tout terme t_i qui remplace une variable x_i dans σ. Les ensembles $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ sont respectivement complets par construction. Les opérations sur $\mathcal{B}$ sont bien définies, car si (A, ϕ) et (A', ϕ') définissent le même ensemble, par récurrence sur la structure de C_o nous montrons que $o(\langle A\rangle_\phi, ..., \langle A_n\rangle_{\phi_n} = o(\langle A'\rangle_{\phi'}, ..., \langle A_n\rangle_{\phi_n}$ (respectivement $o(\langle\langle A\rangle\rangle_\phi) = o(\langle\langle A'\rangle\rangle_{\phi'})$). Ces opérations vérifient par construction la condition qui relie l'algèbre interne à la principale : $o(\langle A_1\rangle_{\phi_1}, ..., \langle A_n\rangle_{\phi_n}) = \langle \Phi_o(A_1, ..., A_n)\rangle_{\phi_1+...+\phi_n}$ (respectivement pour les quantificateurs : $o(\ \langle\langle B\rangle\rangle_\phi\ ) = \langle \Phi_o(B)\rangle_\phi$). □

Nous voyons alors que la structure $\langle \mathcal{B}^*, \mathcal{A}^*, \mathcal{E}^*, \Phi_\top, \Phi_\bot, \Phi_\Rightarrow, \Phi_\wedge, \Phi_\vee, \Phi_\forall, \Phi_\exists\rangle$ comme elle a été définie pour les candidats induit bien une pré-algèbre de Heyting à l'extérieur de $\mathcal{U}$, définissable pour la théorie $\mathcal{U}$. Le but de la section qui suit est de montrer que cette algèbre induite est en effet une sous-algèbre de candidats.

3.3 La définissabilité des candidats

Théorème 3.14. *La structure* $\langle \mathcal{B}^*, \mathcal{A}^*, \mathcal{E}^*, \Phi_\top, \Phi_\bot, \Phi_\Rightarrow, \Phi_\wedge, \Phi_\vee, \Phi_\forall, \Phi_\exists\rangle$ *définissant les candidats dans* $\mathcal{U}$ *induit une pré-algèbre de Heyting (exprimable dans la théorie) qui est une sous-algèbre de* $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$*.*

Démonstration. Les hypothèses de la proposition précédente étant vérifiées par les candidats dans $\mathcal{U}$, on a bien qu'une pré-algèbre de Heyting en est naturellement induite, notons-la $\langle \mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{E}, \tilde{\top}, \tilde{\bot}, \tilde{\Rightarrow}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\forall}, \tilde{\exists}\rangle$. Dans un premier temps, nous montrons que tout élément de $\mathcal{B}$ est bien un élément de $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$.

Soit $A(\pi)$ une proposition dans $\mathcal{B}$. Le séquent

$$\mathcal{U} \vdash \forall z_1 ... \forall z_n \big(s_1^*(z_1) \wedge ... \wedge s_n^*(z_n) \ \Rightarrow \ CR_\pi(A(\pi))\big)$$

est démontrable. Il en découle que, pour une valuation ϕ à valeurs dans $\mathcal{M}^*$, le modèle $\mathcal{M}$ valide la proposition $CR_\pi(A(\pi))$. La proposition 3.8 nous permet de conclure que tout entier n vérifiant $|\,A(\pi)|_{\phi+\langle \pi,n\rangle} = 1$ est bien le numéro de Gödel d'une preuve qui normalise fortement. De plus, à chaque fois que n est associé à une preuve qui se réduit à une une autre preuve associée à n', alors n' vérifie $|\,A(\pi')|_{\phi+\langle \pi',n'\rangle} = 1$. Si n est associé à un terme preuve qui est une élimination tel qu'à chaque fois qu'il se réduit à une preuve associée à n', on a $|\,A(\pi')|_{\phi+\langle \pi',n'\rangle} = 1$, alors dans $\mathcal{M}$ on a $|\,A(\pi)|_{\phi+\langle \pi,n\rangle} = 1$. Finalement, comme toute variable de preuve est représentée dans la théorie $\mathcal{U}$, la validité de $CR_\pi(A(\pi))$ dans $\mathcal{M}$ nous permet de conclure que les numéros n associés à des termes preuves qui sont des axiomes vérifient tous $|\,A(\pi)|_{\phi+\langle \pi,n\rangle} = 1$. Il en résulte que

$$\langle A(\pi)\rangle_\phi = \{n \in \mathbb{N} \mid \ |\,A(\pi)|_{\phi+\langle \pi,n\rangle} = 1\}$$

est bien l'image par $\ulcorner\ \urcorner$ d'un candidat de réductibilité, d'où le fait que tout élément de $\mathcal{B}$ soit dans $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$.

La proposition 3.8 moyennant, il devient clair que $\tilde{\top} = \tilde{\top}_\mathbb{N} = \tilde{\bot} = \tilde{\bot}_\mathbb{N}$ et que les opérations $\tilde{\Rightarrow}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\forall}, \tilde{\exists}$ coïncident bien avec $\tilde{\Rightarrow}_\mathbb{N}, \tilde{\wedge}_\mathbb{N}, \tilde{\vee}_\mathbb{N}, \tilde{\forall}_\mathbb{N}, \tilde{\exists}_\mathbb{N}$ (dans leurs respectifs domaines de définition). On vérifie ce fait, en guise d'exemple, pour le quantificateur universel :

Soit $E \in \mathcal{A}$ défini par $B(\pi, x) \in \mathcal{A}^*$ et ϕ une valuation à valeurs dans $\mathcal{M}^*$, par définition, l'ensemble $\tilde{\forall}\ E$ est défini par $\Phi_\forall^x(B(\pi,x))$ et par ϕ. Soit $n \in \mathbb{N}$, n est un élément de $\tilde{\forall}\ E$ si et seulement si $|\,\Phi_\forall^x(B(\pi,x))|_{\phi+\langle \pi,n\rangle} = 1$, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{lll}
n \in \tilde{\forall} E & \Leftrightarrow & |\,SN(\pi) \wedge \\
& & \forall v\,\forall \pi'\ (TermVar(v,s) \ \Rightarrow \ Red^*(\pi, Forall_I(v,\pi')) \ \Rightarrow \\
& & \qquad \forall x\,\forall t\ (s^*(x) \ \wedge \ Term(t,s) \Rightarrow \\
& & \qquad B(\,TSubst(\pi',v,t), x\,))|_{\phi+\langle \pi,n\rangle} = 1 \\
& \Leftrightarrow & |\,SN(\pi)|_{\phi+\langle \pi,n\rangle} = 1 \ \wedge \\
& & \forall y \in \mathcal{M}_{\lfloor \mathcal{PA} \rfloor}, \forall n' \in \mathbb{N},\ |\,TermVar(v,s)|_{\langle v,y\rangle} = 1 \ \Rightarrow \\
& & \quad |\,Red^*(\pi, Forall_I(v,\pi')|_{\langle \pi,n\rangle+\langle v,y\rangle+\langle \pi',n'\rangle} = 1 \ \Rightarrow \\
& & \qquad \forall e \in \mathcal{M}_{s_*}^*\ \forall T \in M_{\lfloor \mathcal{PA} \rfloor}, |\,Term(t,s)|_{\langle t,T\rangle} = 1 \ \Rightarrow \\
& & \qquad |\,B(\,TSubst(\pi',v,t), x\,)|_{\phi+\langle v,y\rangle+\langle \pi',n'\rangle+\langle t,T\rangle+\langle x,e\rangle} = 1 \\
& \Leftrightarrow & n \text{ est associé à un terme } \rho \in \mathcal{SN}\,;\text{ si } \rho \text{ se réduit à un terme} \\
& & \text{de la forme } \lambda y\ \pi'\text{, alors, pour tout } e \in \mathcal{M}_{s_*}^* \text{ et pour tout} \\
& & \text{terme } T \text{ de sorte } s\text{, on a} \\
& & \quad |\,B(\,TSubst(\pi',v,t), x\,)|_{\phi+\langle x,e\rangle+\langle v,y\rangle+\langle \pi',n'\rangle+\langle t,T\rangle} = 1
\end{array}$$

D'après le fait que $|\,TSubst(\pi',v,t) = \pi''|_{\langle v,y\rangle+\langle \pi',n'\rangle+\langle t,T\rangle+\langle \pi'',n''\rangle} = 1$ si et seulement si n'' est le numéro associé au terme preuve $[T/y]\rho$ (où

$\ulcorner \rho \urcorner = n'$), on sait que $|\,TSubst(\pi', v, t)|_{\langle v,y\rangle + \langle \pi', n'\rangle + \langle t, T\rangle} = n''$. On en déduit la relation suivante :

$$\begin{aligned} & |\,B(\,TSubst(\pi', v, t), x\,)|_{\phi + \langle x,e\rangle + \langle v,y\rangle + \langle \pi', n'\rangle + \langle t, T\rangle} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & |\,B(\,\pi'', x\,)|_{\phi + \langle x,e\rangle + \langle \pi'', n''\rangle} = 1. \end{aligned}$$

En récapitulant, le nombre n est un élément de $\tilde{\forall}\ E$ si et seulement si il est associé à un terme preuve ρ qui est $\mathcal{SN}$ et qui est tel qu'à chaque fois qu'il se réduit en une introduction de la forme $\lambda y\ \pi'$, pour tout terme T de sorte s et pour tout ensemble définissable $D = \langle B(\pi, x)\rangle_{\phi + \langle x,e\rangle} \in E$, le nombre n'' associé à la substitution de y par T dans π' est dans l'ensemble D. Il en découle que n est dans $\tilde{\forall}\ E$ si et seulement si il est dans $\tilde{\forall}_{\mathbb{N}}\ E$, d'où le fait que les opérations coïncident et l'algèbre induite par $\langle \mathcal{B}^*, \mathcal{A}^*, \mathcal{E}^*, \Phi_\top, \Phi_\perp, \Phi_\Rightarrow, \Phi_\wedge, \Phi_\vee, \Phi_\forall, \Phi_\exists\rangle$ est bien une sous-algèbre de $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat fondamental de cette section et l'un des résultats les plus importants de ce mémoire, car il justifie la construction du chapitre précédent dans le cadre de la super-cohérence.

Définition 3.15. *($*$-Candidats).*

La sous-algèbre de Candidats de Réductibilité engendrée par la traduction de termes ($)^*$ est appelée l'algèbre de $*$-Candidats.

Corollaire 3.16. *(Définissabilité des Candidats de Réductibilité dans la théorie $\mathcal{U}$).*

Pour toute théorie $\mathcal{U}, \equiv_2$, pour tout modèle standard $\mathcal{M}$ de $\mathcal{U}$ et pour toute traduction des termes ($)^*$ du langage $\mathcal{L}$ vers ceux du langage de $\mathcal{U}$, l'algèbre des $*$-candidats est exprimable dans $\mathcal{U}$.

3.3.1 Algèbres intrinsèques

Dans les sections précédentes nous avons discuté le fait que pour pouvoir construire un modèle dans une certaine PHA, il est aussi important de bien choisir la structure de termes sur laquelle le modèle est construit que d'associer à chaque proposition atomique un élément de l'algèbre. Pour des modèles internes comme ceux que nous construisons par réalisabilité, cela est également vrai. Pour un modèle de réalisabilité, le rôle du choix de la structure de termes est joué par le choix particulier d'une traduction des termes d'un langage vers l'autre, nous voudrions alors disposer de cette liberté. Heureusement, c'est le cas pour les candidats, car ils sont définissables pour toute traduction de termes et de plus, la dépendance de la traduction de termes est exprimée par la présence des prédicats de relativisation dans les propositions définissant l'algèbre. Cela nous indique qu'il est possible d'abstraire davantage la définition pour qu'elle prenne comme paramètre la traduction de termes à utiliser. Pour cela, nous introduisons une nouvelle notion d'opération intrinsèque pour les quantificateurs.

Définition 3.17. *(Quantificateur intrinsèque).*
Soit $\{\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*\}_*$ *des famille d'ensembles indexées par les traductions de termes* $(\ )^*$ *telles que, pour toute traduction de termes,* $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{D}^*$.

Pour toute traduction de termes $(\ )^*$*, soit* $\Phi^*_\forall$ *une famille de fonctions de* $\mathcal{A}^*$ *dans* $\mathcal{B}^*$ *telle qu'il existe une méta-proposition* Q *avec une variable libre* p *de sorte* $\lfloor \mathcal{PA} \rfloor$*, une méta-variable de proposition* X *supposée d'avoir des variables libres* x, p *de sortes* $s_*, \lfloor \mathcal{PA} \rfloor$ *et avec une méta-variable* S *dont la seule variable libre est* x*, de manière que, pour tout* $B \in \mathcal{A}^*$ *et pour tout* $(\ )^*$,

$$\Phi^*_\forall(B(x,p)) = [B(x,p)/X, s^*(x)/S]Q.$$

L'opération $\Phi^*_\forall$ *est dite une* quantification intrinsèque.

Bien sûr, une définition analogue est faite pour le quantificateur existentiel.

Définition 3.18. *(Algèbre intrinsèque).*
Pour chaque traduction de termes $(\ )^*$*, soit* B_* *une fonction de* $\mathcal{D}^*$ *vers les propositions dans* $\mathcal{U}$*, définie par*

$$B_*(A) = \forall x_1 ... \forall x_n \ s^*_1(x_1) \wedge ... \wedge s^*_n(x_n) \ \Rightarrow \ [A/X]B$$

où B *est une méta-proposition dans* $\mathcal{U}$ *qui a une méta-variable de proposition* X *dont on suppose que les variables libres sont* $x_1, ..., x_n, p$ *de sortes* $s_{1*}, ..., s_{n*}, \lfloor \mathcal{PA} \rfloor$.

Soit similairement A_* *et* E_* *des fonctions de* $\mathcal{D}^*_x$ *vers les propositions dans* $\mathcal{U}$ *définies par des méta-propositions* $B_\mathcal{A}$ *et* $B_\mathcal{E}$ *respectivement.*

Pour chaque traduction de termes $(\ )^*$*, soit*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}^* & = & \{A \mid \ \mathcal{U} \vdash B_*(A)\} \\ \mathcal{A}^* & = & \{A \mid \ \mathcal{U} \vdash A_*(A)\} \\ \mathcal{E}^* & = & \{A \mid \ \mathcal{U} \vdash E_*(A)\}, \end{array}$$

$\Phi_\Rightarrow, \Phi_\wedge, \Phi_\vee$ *des opérations intrinsèques définies pour tout* $\mathcal{B}^*$ *et* $\Phi^*_\forall$ *et* $\Phi^*_\exists$ *des quantificateurs intrinsèques sur la famille des* $\mathcal{B}^*$.

De $\langle \mathcal{B}^*, \mathcal{A}^*, \mathcal{E}^*, \Phi_\Rightarrow, \Phi_\wedge, \Phi_\vee, \Phi^*_\forall, \Phi^*_\exists \rangle_*$ *on dit que c'est une algèbre intrinsèque à la théorie* $\mathcal{U}$.

D'après la proposition 3.13, la structure $\langle \mathcal{B}^*, \mathcal{A}^*, \mathcal{E}^*, \Phi_\Rightarrow, \Phi_\wedge, \Phi_\vee, \Phi^*_\forall, \Phi^*_\exists \rangle$ induit une pré-algèbre de Heyting pour chaque traduction de termes $(\ )^*$.

Les candidats définissent évidemment une algèbre intrinsèque pour toute théorie $\mathcal{U}$.

Sans vouloir nous restreindre uniquement à ce type d'algèbre, nous estimons cependant que c'est probablement cette méthode (en liaison avec l'utilisation de relations semi-décidables) celle qui nous rend les outils les plus efficaces pour construire des algèbres exprimables dans une théorie, en reliant une algèbre donnée à son expression interne à une théorie. Cela pourrait être donc, dans un certain sens, la bonne notion de PHA exprimable dans une théorie.

Chapitre 4

Vers la super-cohérence de Z

4.1 Un $\mathcal{C}$-modèle

Dans [4] on construit une interprétation de réalisabilité de IZ^{mod} (une formulation purement calculatoire de la théorie des ensembles de Zermelo) dans une formulation de second ordre de Z appelée IZ^{skol2}. Par l'intermédiaire du théorème 2.14, nous pouvons construire à partir de cette interprétation de réalisabilité un $\mathcal{C}$-modèle de la théorie des ensembles (sous l'hypothèse que IZ^{skol2} admet un modèle standard). Il s'agit du premier résultat de ce genre, jamais auparavant un $\mathcal{C}$-modèle de Z n'avait été construit. L'existence de ce modèle entraîne bien évidemment la normalisation forte de cette théorie et nous indique qu'il est fort possible de définir la super-cohérence comme nous le souhaitons, en nous abstrayant de l'algèbre des candidats. Dans ce mémoire nous n'irons pas jusqu'à la fin de ce chemin, il restent des points techniques à résoudre avant d'aboutir à une définition de la super-cohérence qui nous permettra de prouver que toutes les théories que nous avons mentionnées vérifient bien cette propriété.

4.2 Une nouvelle définition de la super-cohérence

Nous avons développé un ensemble d'outils pour pouvoir construire des modèles à partir d'une interprétation de réalisabilité, mais est-ce que construire une interprétation de réalisabilité est effectivement analogue à construire un modèle ? Nous avons déjà discuté le fait que le choix de la traduction de termes (la contrepartie par réalisabilité du choix de la structure de termes d'un modèle) est très important dans la construction d'une interprétation de réalisabilité, cela nous a mené à définir une sous-famille d'algèbres exprimables dans une théorie pour laquelle les algèbres ont bien une représentation interne pour toute traduction de termes, nous avons appelé ces pré-algèbres de Heyting *intrinsèques* et nous avons vu que les candidats en sont bien une.

Cependant, le choix de la structure de termes sur laquelle nous bâtirons le modèle n'est pas le seul outil dont on se sert pour construire des modèles. Nous avons mentionné que l'algèbre des candidats de réductibilité vérifie deux propriétés essentielles pour la construction de modèles (ce qui a motivé d'ailleurs l'abstraction à la base de l'idée de la super-cohérence), celle d'être pleine et celle d'être complète. Il paraît que construire une interprétation de réalisabilité est un problème qui se ressemble assez à celui de construire un modèle, cela nous amène à penser que nous aurons besoin de versions internes des propriétés d'être pleine et complète.

En regardant la construction de l'interprétation de réalisabilité de IZ^{mod} vers IZ^{skol2} nous trouvons des solutions partielles à nos questions. Dans un premier temps, il peut arriver qu'un élément d'une algèbre exprimable dans $\mathcal{U}$, soit défini, par exemple, par une proposition C. Toute proposition D dans $\mathcal{U}$ telle que le séquent

$$\mathcal{U} \vdash C \Leftrightarrow D$$

est démontrable définit les mêmes ensembles et est aussi légitime pour être utilisé dans une interprétation de réalisabilité que C. Cet argument est renforcé par le fait que la condition pour être une interprétation de réalisabilité :

$$\mathcal{U} \vdash \forall p\ (p \Vdash A \Leftrightarrow p \Vdash A')$$

pour $A \equiv_1 A'$ dans $\mathcal{T}, \equiv_1$, traduit aussi le fait que $p \Vdash A$ et $p \Vdash A'$ représentent bien les mêmes éléments de l'algèbre. Il résulte donc judicieux de demander que $\mathcal{B}^*$ soit clos par équivalence logique, pour laisser le choix de la proposition particulière selon les besoins de la construction d'une interprétation de réalisabilité. On remarque que cela est immédiatement le cas pour les algèbres intrinsèques, car $\mathcal{B}^*$ est défini de manière interne à la théorie $\mathcal{U}$.

Le problème des algèbres internes pleines et complètes ne se pose pas *a priori* dans le cadre de la théorie des ensembles. Considérons une traduction de termes $(\ )^*$ de $\mathcal{T}$ dans la théorie des ensembles et une algèbre $\mathcal{B} \in \wp(\mathbb{N})$ telle qu'il existent des méta-propositions $B_*, A_*, E_*, C_\Rightarrow, C_\wedge, C_\vee, C_\forall, C_\exists$ la définissant «intrinsèquement». Suivant l'idée que la proposition $p \Vdash A$ représente que p appartient à l'ensemble représenté par A, le schéma de séparation nous permet de montrer que

$$\exists b \forall y\ (y \in b\ \Leftrightarrow\ (y \in \wp(\mathbb{N})\ \wedge\ B_*(p \in y))$$

est démontrable. On dit que l'ensemble $\mathcal{B}$ «peut être construit» dans la théorie des ensembles, il est représenté par b, ses éléments sont les $y \in b$. Ayant construit les éléments de $\mathcal{B}$ *dans* la théorie des ensembles, il est simple de comprendre ce qu'une algèbre interne pleine et complète veut dire, cela se traduit directement du fait que ces notions sont définies dans la théorie des ensemble. Par le fait que nous avons relativisé cette notion à une théorie $\mathcal{U}$, nous dirons que c'est une algèbre $\mathcal{U}$-pleine et $\mathcal{U}$-complète. Étant définies internement, ces propriétés peuvent être utilisées pour construire des interprétations de réalisabilité.

Il ne reste qu'à formaliser cette discussion (ce qui nous paraît tout à fait possible, ayant même l'exemple des candidats de réductibilité développé dans [4]) et à se demander quelles algèbres peuvent être définies par des méta-propositions $B_*, A_*, E_*, C_\Rightarrow, C_\wedge, C_\vee, C_\forall, C_\exists$. Déjà nous savons que c'est le cas pour les candidats et pour toute algèbre intrinsèque définie par des relations semi-décidables. On peut entrevoir qu'il s'agit d'une grande famille, du fait que nous travaillons la plupart du temps dans le cadre de la théorie des ensembles. Nous proposons alors une nouvelle notion de super-cohérence dans le cadre des théories des ensembles $\mathcal{U}$, qui est l'un des résultats centraux de ce mémoire :

Définition 4.1. *(Super-cohérence).*

Une théorie $\mathcal{T}, \equiv$ est dite super-cohérente relativement à une théorie $\mathcal{U}$ *si elle admet un modèle $\mathcal{B}$-valué pour toute pré-algèbre de Heyting intrinsèque, $\mathcal{U}$-pleine et $\mathcal{U}$-complète.*

Bien que la définissabilité et la possibilité éventuelle de construire des modèles soit une notion plus générale, nous insistons sur la nécessité de ces trois propriétés (vérifiées par les candidats) pour assurer l'existence d'un modèle. Nous insistons également sur le fait qu'une partie très importante des algèbres auxquelles nous pourrions nous intéresser sont comprises dans cette caractérisation.

Il reste aussi à comprendre ce que la $\mathcal{U}$-plénitude et la $\mathcal{U}$-complétude peuvent vouloir dire dans le contexte d'autres théories moins expressives, ou bien si c'est effectivement utile et intéressant d'avoir de telles notions ou pas.

Chapitre 5

Conclusions et remarques finales

5.1 Une nouvelle super-cohérence

Dans de ce mémoire nous avons parcouru le chemin vers une nouvelle définition pour la super-cohérence. Partant d'une idée sur ce que la super-cohérence devait avoir comme rôle, nous avons tracé le chemin depuis l'état des affaires avant le début de ce travail jusqu'à la réconciliation de la super-coherence avec la réalisabilité.

5.1.1 Questions méthodologiques

Ce travail est un cadre excellent pour se poser certaines questions de nature méthodologique. Par exemple, nous pouvons nous interroger sur la question de ce qu'est qu'une bonne définition et de comment mener la tâche de définir et de redéfinir des concepts. Une bonne définition est une définition qui vient naturellement ? Une qui fait passer et marcher une certaine preuve ? Une qui essaie de représenter un méta-concept ? Tout au long de ce document nous avons adopté une approche assez pragmatique vis-à-vis de la super-cohérence. Une définition est intéressante et importante en fonction de son utilité et puissance pour résoudre des problèmes et questions, la définition telle qu'elle était avant ce travail était insuffisante dans des contextes importantes, de ce fait elle n'était pas le critère universel et transversale qui résout la question de la normalisation des preuves pour les théories en déduction modulo.

Pourquoi un seul critère universel et non pas, par exemple, deux outils différents ? Dans ce contexte, à mon avis, il est possible de dire *a posteriori* qu'avoir deux concepts séparés revient à créer une fausse distinction. En fait la question de savoir si Z est ou non super-cohérente s'adresse justement à cela, à savoir si cette séparation est ou non intrinsèque, si elle est ou non contournable, et il s'avère qu'effectivement un effort d'abstraction permet de rassembler et de réconcilier la réalisabilité et la super-cohérence. Un autre argument important dans cette même direction est le fait que, bien que l'idée générale de définir un «modèle» dans les candidats pour montrer la normalisation des preuves soit présente et dans la première version de super-cohérence et dans la preuve par réalisabilité donnée dans l'article «Relative Normalization» [5], les preuves sont essentiellement différentes. Cette nouvelle méthodologie nous permet de sortir de la théorie *avant* le moment où cela est fait dans [5], non pas que pour extraire la normalisation des preuves, mais pour extraire tout le modèle, à partir duquel la preuve de normalisation procède exactement de la même manière que pour la super-cohérence.

5.2 Questions ouvertes

Bien évidemment, le problème ouvert le plus important est celui de formaliser les notions de $\mathcal{U}$-plénitude et $\mathcal{U}$-complétude, en donnant une preuve plus développée du fait que $\mathcal{B}$ «puisse être construit» dans la théorie des ensembles pour ensuite reconstruire les preuves existantes de super-cohérence dans le cadre de cette nouvelle définition, ainsi que généraliser le $\mathcal{C}$-modèle de Z en un $\mathcal{B}$-modèle, pour $\mathcal{B}$ intrinsèque, $\mathcal{U}$-pleine et $\mathcal{U}$-complète. Cela semble tout à fait accessible d'après la discussion que nous avons présenté. Dans un deuxième temps il faudrait analyser la possibilité d'abstraire les notions de plénitude et complétude à des théories arbitraires qui ne sont pas des théories des ensembles.

Nous avons présenté une série de raisons pour lesquelles nous supposons que la théorie environnante $\mathcal{U}$ admet un modèle standard. En fait, elles peuvent être séparées en deux, nous avons d'une part le fait que cela nous permet de refléter dans la théorie $\mathcal{U}$ les relation semi-décidables, ce qui nous aide à construire des algèbres avec une signification et d'une autre part le fait qu'une algèbre exprimable dans une théorie est une famille d'ensembles d'entiers. Nous ne pouvons pas relâcher la condition d'être standard sur le modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{U}$ sans perdre au moins partiellement les relation semi-décidables, cependant nous pouvons nous demander si cela est strictement nécessaire pour définir la notion de PHA exprimable dans une théorie. Nous pourrions peut-être utiliser un modèle quelconque et nous limiter à ne considérer que les éléments standard pour construire les PHA, ou peut-être le fait que ce soit un modèle arbitraire sans contraintes pourrait entraîner des nouvelles incompatibilités avec le deuxième théorème de Gödel. Celle-ci est une question qui est apparue pendant le développement des idées qui constituent ce mémoire et reste ouverte à sa fin, nous proposant une possibilité de raffiner davantage le résultat que nous avons trouvé.

Une autre question importante soulevée par ce travail est celle de comprendre et caractériser les pré-algèbres de Heyting exprimables dans une théorie. *A priori* il semble que cette notion est assez flexible et générale, par une méthode analogue à celle que nous avons donnée en exemple par les candidats de réductibilité (relation semi-décidables, méta-propositions, etc...) nous pouvons définir une partie importante (voire la totalité ?) des pré-algèbres de Heyting qui pourraient avoir un intérêt particulier.

En définitive, ce travail n'a pas soulevé uniquement des questions théoriques, il a semé en moi des intérêts et des inquiétudes nouvelles, il m'a introduit au monde de la recherche, des mathématiques et de la logique, qui présentent bien des questions ouvertes qui attendent pour être attaquées.

Bibliographie

[1] L. Allali. Algorithmic equality in heyting arithmetic modulo. *Types for Proofs and Programs*, pages 1–17, 2008.

[2] G. Dowek. Truth values algebras and proof normalization. *Lecture Notes in Computer Science*, 4502 :110–124, 2007.

[3] G. Dowek. *Les Démonstrations et les Algorithmes*. Les Éditions de l'École Polytechnique, 2010.

[4] G. Dowek and A. Miquel. Cut elimination for zermelo set theory. *(manuscript)*, 2007.

[5] G. Dowek and A. Miquel. Relative normalization. *(manuscript)*, 2007.

[6] G. Dowek and B. Werner. Proof normalization modulo. *The Journal of Symbolic Logic*, (68) :1289–1316, 4 2003.

[7] G. Dowek and B. Werner. Arithmetic as a theory modulo. *Term rewriting and applications*, pages 423–437, 2005.