ElegantBook：优美的 LaTeX 书籍模板

An Elegant Book Template

作者：ddswhu & Liam Huang

版本：3.06

组织：ElegantLaTeX Program

更新：February 12, 2019

ElegantLaTeX Program

Victory won't come to us unless we go to it. — M. Moore

目　　录

第 1 章　导论

第 2 章 群，环，域

在随后的四个章节里, 我们将回顾基本的代数结构（群，环，域，向量空间），向量空间是我们介绍的重点。一些基本的线性代数符号，诸如向量空间，子空间，线性组合，线性无关，基，商空间，线性映射，矩阵，基变换，内积，线性转化，对偶空间，超空间，线性映射的转化都将给予介绍。

2.1 群，子群，紧集

实数 R 有两个操作，$+ : R \times R \to R$(加法) 和 $* : R \times R \to R$(乘法)，满足以下性质: 使得实数集 R 在加法操作下是一个阿贝尔群，去除 0 元素的 $R - \{0\} = R^*$ 在乘法操作下是一个阿贝尔群。我们回顾群的定义:

定义 2.1: 一

集合 G 是一个群，如果它满足二元操作：对任意两个元素 $a, b \in G$ 都有相应的一个元素 $a \cdot b \in G$，其中操作是可结合的，且 G 有一个基本元 e，G 中每一个元素都可逆。显然，这意味着以下式子对任意 $a, b, c \in G$ 成立:

(G1) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *(结合律)*

(G2) $a \cdot e = e \cdot a = a$ *(基本元)*

(G3) 对于任意 $a \in G$，存在逆元 $a^{-1} \in G$，因此 $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ *(可逆性)* ♣

一个群如果是阿贝尔（或者说可交换）的：

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{for all } a, b \in G.$$

一个集合如果有二元运算 $M \times M \to M$ 并且有一个基本元 e 满足条件 (G1) 和 (G2)，那么我们称之为幺半群。例如，自然数 $N = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$，在加法操作下是一个幺半群。但是它并不是一个群。

一些群的例子如下：

示例 2.1:

1. 整数集 $Z = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ 在加法操作下是一个阿贝尔群，有基本元 0。但不包含 0 的整数集 $Z^* = Z - 0$ 在乘法操作下并不是一个群。

2. 有理数 $Q(p/q, p, q \in Z, q \neq 0)$ 在加法操作下是一个阿贝尔群，有基本元 0。不含 0 元素的 $Q^* = Q - 0$ 在乘法操作下也是一个阿贝尔群，有基本元 1.

3. 给定任意非空集合 S，集合 S 上的双射操作集合 $f : S \to S$(也称之为集合 S 的置换)，是在复合函数操作下的一个群（例如，函数 f, g 的乘法复合是 $g \cdot f$），有一个基本元, 即元素自身到自身映射。集合 S 如果有超过两个元素，那么 S 的置换操作集合不是一个阿贝尔群。集合 $S = \{1, \ldots, n\}$ 上的置换群称为 n 个元素的对称群，表示为 δ_n。

4. 对于任意正整数 $p \in N$, 定义一个在整数集 Z 上的关系，表示为 $m \equiv n \pmod p$, 如下

$$m \equiv n \pmod p \quad \text{iff} \quad m - n = kp \quad \text{for some } k \in Z$$

读者很容易验证这是一个等价关系，它兼容于加法和乘法操作，这意味着如果 $m_1 \equiv n_1 \pmod p$ 且 $m_2 \equiv n_2$, 那么 $m_1 + m_2 = n_1 + n_2 \pmod p$, $m_1 m_2 \equiv n_1 n_2 \pmod p$。所以，我们可以定义等价类 (mod ()$p$) 的集合上的加法和乘法操作:$[m] + [n] = [m + n], [m] \cdot [n] = [mn]$

读者很容易验证剩余类 (mod ()p) 上的加法操作揭示一个阿贝尔群结构，其中有 $[0]$ 作为 0 元素。这个群表示为 Z/pZ

5.$n \times n$ 的可逆实系数矩阵（或者复系数矩阵）集合，在矩阵乘法操作下是一个群，有单位元矩阵 I_n。也称之为一般线性群，表示为 $GL(n, R)(GL(n, C))$

6.$n \times n$ 且行列式 $det(A) = 1$ 的可逆实系数矩阵（或者复系数矩阵）的集合，在矩阵乘法操作下是一个群，有单位元矩阵 I_n。也称之为特殊线性群，表示为 $SL(n, R)(SL(n, C))$

7. 满足 $QQ^T = Q^T Q = I_N, Q^{-1} = Q^T$ 的 $n \times n$ 的实系数矩阵集合，在矩阵乘法操作下是一个群，有单位元 I_n。称之为正交群，表示为 $O(n)$

8. 满足 $QQ^T = Q^T Q = I_N, det(Q) = 1, Q^{-1} = Q^T$ 的 $n \times n$ 的实系数矩阵集合，在矩阵乘法操作下是一个群，有单位元 I_n。称之为特殊正交群，表示为 $SO(n)$

例子（5）-（8）中涉及的群除了 $SO(2)$ 是一个阿贝尔群之外其他当 $n \geq 2$ 时不是阿贝尔群 ($O(2)$ 不是阿贝尔的).

我们习惯于将阿贝尔群 G 加法操作下，$a \in G$ 的逆元 a^{-1} 表示为 a^{-1}

群的基本元是唯一的。事实上，我们可以证明一个更一般的情况如下：

命题 2.1: 如

一个二元运算：$M \times M \to M$ 是可结合的并且如果 $a' \in M$ 是一个左基本元 $e'' \in M$ 是一个右基本元，这意味着：

$$e' \cdot a = a \quad for\ all\ a \in M \qquad (G2l)$$

$$a \cdot e'' = a \quad for\ all\ a \in M \qquad (G2r)$$

$$e' = e''$$

♠

证明: 令 $a = e''$ 由（G2l）得到

$$e' \cdot e'' = e''$$

令 $a = e'$ 由（G2r）得到

$$e' \cdot e'' = e'$$

因此得证

$$e' = e' \cdot e'' = e'$$

定理表明幺半群的基本元是唯一的。因为每一个群同时也是幺半群，所以群的单位元也是唯一的。更进一步，群中的每一个元素都有一个唯一的逆元。这个结果可以从以下更一般的情况得出：

命题 2.2: 一

幺半群有基本元 e，如果一些元素 $a \in M$ 有左逆元 $a' \in M$ 并且有右逆元 $a'' \in M$，这表示为

$$a' \cdot a = e \qquad (G3l)$$

$$a \cdot a'' = e \qquad (G3r)$$

那么 $a' = a''$

证明: 基于（$G3l$）和 e 是基本元，我们有

$$(a' \cdot a) \cdot a'' = e \cdot a'' = a''$$

类似地，基于（$G3r$）和 e 是一个基本元，我们有

$$a' \cdot (a \cdot a'') = \cdot a' \cdot e = a'$$

然而，M 是一个幺半群，操作是可结合的，所以我们有

$$a' = a'(a \cdot a'') = (a' \cdot a) \cdot a'' = a''$$

得证

注意：公理（$G2$）和公理（$G3$）可以弱化为（$G2r$）和（$G3r$）（右基本元的存在性和元素的右逆元的存在性）。可以尝试证明一下从公理（$G2r$）和公理（$G3r$）推出（$G2$）和（$G3$）　♠

定义 2.2: 如

群 G 有 n 个元素，我们称之为 n 阶群。如果群 G 是无限的，那么我们说群 G 有无穷阶。群 G 的阶通常表示为 $|G|$(如果群是有限的) ♣

给定一个群 G，对其中任意两个子集 $R, S \in G$，我们令

$$RS = \{r \cdot s | r \in R, s \in S\}$$

更一般地，对于任意 $g \in G, R = \{g\}$，我们表示为

$$gS = \{g \cdot s | s \in S\}$$

相似地，如果 $S = \{g\}$，我们表示为

$$Rg = \{r \cdot g | g \in R\}$$

从现在开始，我们省略乘法符号，用 $g_1 g_2$ 表示 $g_1 \cdot g_2$。

定义 2.3: 给

G 群，对于任意 $g \in G$, 定义 L_g 为 g 的左平移：任意 $a \in G, L_g(a) = ga$，同理定义 g 的右平移 R_g：$R_g(a) = ag$，任意 $a \in G$ ♣

以下简单的定理经常被使用：

命题 2.3: 给

一个群 G，其平移变换 L_g, R_g 是双射 ♠

证明: 我们只证明 L_g,R_g 的证明是类似的。如果 $L_g(a) = L_g(b)$，那么 $ga = gb$，我们同时左乘以 g^{-1}，我们得到 $a = b$，所以 L_g 是一个单射函数。对任意 $b \in G$，我们有 $L_g(g^{-1}) = gg^{-1}b = b$，所以 L_g 是满射。因此 L_g 是一个双射。

定义 2.4: 给

一个群 G，其子集 H 称之为 G 的子群，当且仅当：

(1) 群 G 的基本元也包含在 H 里（$e \in H$）

(2) 任意 $h_1, h_2 \in H$，我们有 $h_1 h_2 \in H$

(3) 任意 $h \in H$，我们有 $h^{-1} \in H$ ♣

以下定理的证明留作练习

命题 2.4: 给

一个群 G，子集 $H \subseteq G$ 是 G 的子群，当且仅当 H 非空，并且任意 $h_1, h_2 \in H, h_1 h_2^{-1} \in H$ ♠

如果群 G 是有限的，那么下列的命题成立

命题 2.5: 给

一个有限群 G，子集 H 称为 G 的子群，当且仅当

(1) $e \in H$

(2) H 在乘法操作性是闭合的。 ♠

证明: 我们只需要证明定义的条件 3 成立。对任意 $a \in H$，因为其左平移 L_a 是双射，所以到 H 上的映射是单射。同时，H 是一个有限集，所以映射是一个双射。因为 $e \in H$，那么有唯一的 $b \in H$ 满足 $L_a(b) = ab = e$。如果 a^{-1} 是 $a \in G$ 中的逆，那么我们有 $L_a(a^{-1}) = aa^{-1} = e$，根据 L_a 的单射性，我们有 $a^{-1} = b \in H$。

示例 2.2:

1. 任意整数 $n \in Z$，集合

$$nZ = \{nk | k \in Z\}$$

是群 Z 的一个子群。

2. 矩阵集合 $GL^{+}(n, R) = \{A \in GL(n, R) | det(A) > 0\}$ 是群 $GL(n, R)$ 的一个子群。

3. 群 $SL(n, R)$ 是群 $GL(n, R)$ 的子群

4. 群 $O(n)$ 是群 $GL(n, R)$ 的子群

5. 群 $SO(n)$ 是群 $O(n)$ 的子群，也是 $SL(n, R)$ 的子群

6. 不难证明每一个 2×2 的选择矩阵 $R \in SO(2)$ 可以写为

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

其中 $SO(2)$ 可以看作 $SO(3)$ 的子群，即矩阵形式为

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

视为

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. 上三角矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} a, b, c \in R, a, c \neq 0$ 是群 $GL(2, R)$ 的一个子群

8. 含有四个矩阵 $V = \begin{pmatrix} \pm & 0 \\ 0 & \pm \end{pmatrix}$ 的集合是群 $GL(2, R)$ 的一个子群，也称为克莱因四元群。

定义 2.5: 如

H 是 G 的一个子群，g 是 G 的任意元素，那么形如 gH 的集合称为 H 在 G 上的左陪集，形如 Hg 的集合成为 H 在 G 上的右陪集 (相似地，右陪集也一样)。H 的左陪集可以推出等价关系 ∼ 定义如下：对任意 $g_1, g_2 \in G$

$$g_1 \sim g_2 \quad textrm g_1 H = g_2 H$$

(类似地，$g_1 \sim g_2 \quad textrm H g_1 = H g_2$)。显然，∼ 是一个等价关系。♣

现在，我们介绍以下定理

第 3 章 向量空间，基，线性映射

3.1 向量空间

当 $n \geq 1$ 时，用 R^n 表示 n 元组 $x = (x_1, ..., x_n)$ 的集合，R^n 加法操作可以表示如下：

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

我们同时定义操作如下：$R \times R^n \to R^n$ 如下：

$$\lambda \cdot (x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

由向量空间引出的代数结构有一些有趣的性质。向量空间的定义如下：

定义 3.1: 给

一个域 *K(配备了加法和乘法操作)*。一个在 K 上的向量空间 *(K 维向量空间)*，是向量的集合，集合上满足两个操作: 向量加法[a]$(+ : E \times E \to E)$ 和标量乘法 $K \times E \to E$，满足

一下条件：任意 $\alpha, \beta \in K$, $u, v \in E$

(V0) E 是在加法操作下是一个阿贝尔群，有基本元 *0* [b]

(V1) $\alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$

(V2) $(\alpha + \beta) \cdot u = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u)$

(V3) $(\alpha * \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$

(V4) $1 \cdot u = u$

在 *(V3)* 中，$*$ 表示域 K 上的乘法操作。

[a] 加法符号 + 在这里被复用，同时表示域 K 上的加法和空间 E 上的向量加法。当 + 被使用时其功能可以从上下文得出

[b] 符号 0 在这里也被复用，同时表示 K 上的的零 (标量) 和 E 上的基本元 (零向量)。可能较少有疑惑，有时候偏向于使用 **0** 表示零向量

♣

给定 $\alpha \in K, v \in E$，元素 $\alpha \cdot v$ 时常表示为 αv。域 K 也常称为标量域

在接下来的章节里，除非特别指定或者谈及别的不同的域，我们假定所有的 K 维向量空间是定义在域 K 上的空间。因此，当我们谈及向量空间时，我们指代的是 K 维向量空间。大部分情况下，K 域指的是实数域

在 (V0) 里，一个向量空间总是包含空向量 0，所以这是一个非空集合。从 (V1)，我们知道 $\alpha \cdot 0 = 0$, $\alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$。从 (V2) 我们得到 $0 \cdot v = 0$, $(-\alpha) \cdot v = -(\alpha \cdot v)$

从公理我们可以得到另外一个重要的结论：对任意 $u \in E$, $\lambda \in K$ 如果 $\lambda \neq 0$, $\lambda \cdot u = 0$，那么 $u = 0$

事实上，因为 $\lambda \neq 0$，那么存在乘法逆元 λ^{-1}，从而根据 $\lambda \cdot u = 0$，我们可以得到

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot u) = \lambda^{-1} \cdot 0$$

然而，我们知道 $\lambda^{-1} \cdot 0 = 0$，从 (V3) 和 (V4), 我们有

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot u) = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot u = 1 \cdot u = u$$

因此我们推出 $u = 0$

注意: 有人质疑公理 (V4) 是否真的有必要，他能否从其他公理推出？答案是不可以。例如：我们定义 $E = R^n$, $R \times R^n \to R^n$

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$$

其中 $x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ ，$\lambda \in R$。公理 (V0)-(V3) 都满足，但公理 4 不成立。更一般的例子可以通过使用现在还未介绍的基的概念。