

Gitterschwingungen

Genti Saliu
Gruppe 106

Versuchstag: 12. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuchs	1
2	Theoretische Grundlagen	1
2.1	Kristallstruktur	1
2.2	Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, Wellendispersion	2
2.3	Stehende Wellen	3
2.3.1	Kontinuierliche Massenverteilung	3
2.3.2	Diskontinuierliche, diskrete Massenverteilung	4
2.4	Gitterschwingungen: eindimensionales Modell für ein Gitter realer Atome .	5
2.4.1	Einatomige Kette	6
2.4.2	Zweiatomige Kette	8
3	Experimenteller Aufbau	11
4	Durchführung des Versuchs	12
4.1	Eigenfrequenzen der einatomigen und zweiatomigen Kette	12
4.2	Amplitudenverhältnis	13
4.3	Gesamtlänge der Kette	17
5	Auswertung	17
5.1	Dispersionsrelation	17
5.1.1	Einatomige Kette	17
5.1.2	Zweiatomige Kette	19
5.2	Schallgeschwindigkeit	20
5.3	Massenverhältnis	22
5.4	Federkonstante der einatomigen Kette	22
5.4.1	Aus der Dispersionsrelation	22
5.4.2	Aus der Schallgeschwindigkeit	23
5.5	Federkonstante der zweiatomigen Kette	24
5.6	Amplitudenverhältnisse	26
6	Diskussion der Ergebnisse	28

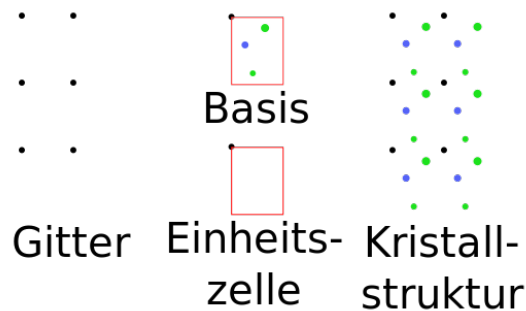
1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch sollen die longitudinalen Schwingungen des Kristallgitters (Phononen) durch eine Kette aus mit Federn gekoppelten Gleitern auf einer Luftkissenbahn modelliert und die Dispersionsrelation der einatomigen und zweiatomigen Kette bestimmt werden.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Kristallstruktur

Kristalline Festkörper zeichnen sich durch eine räumlich periodische Anordnung der Atomgruppen aus, die durch die Begriffe *Basis* und *Gitter* beschrieben wird.



Quelle: Wikipedia [3]

Abbildung 1: Kristallstruktur

Die *Basis* einer Kristallstruktur besteht aus Atomen, Ionen oder Molekülen und stellt die kleinste Gruppe dar, die sich periodisch im dreidimensionalen Raum wiederholt. Sie besteht aus mindestens einem Atom, kann jedoch auch einige tausend Atome umfassen.

Jeder Basis wird ein Bezugspunkt zugewiesen. Betrachtet man nur diese Punkte, so bilden sie das Kristallgitter. Sie spannen die Basisvektoren auf, die von einem Gitterpunkt zu seinen Nachbarn weisen. Das von diesen Basisvektoren \vec{a}_i aufgespannte Parallelepiped heißt Einheits- oder Elementarzelle. Diese Zelle hat an ihren Ecken je einen Gitterpunkt, muss jedoch nicht zwischen direkt benachbarten Punkten gezogen werden, sondern kann beliebig groß gewählt werden. [3] Die Seitenlänge a der Elementarzelle nennt man *Gitterkonstante*.

Die Elementarzelle mit dem kleinstmöglichen Volumen nennt man *primitive Elementarzelle*. Die *Wigner-Seitz-Zelle* ist eine spezielle primitive Zelle, die nur einen Gitterpunkt in ihrem Zentrum enthält und alle ihre Orte diesem Gitterpunkt näher als den benachbarten Gitterpunkten liegen. Die Wigner-Seitz-Zelle ist Ausgangspunkt zur Beschreibung vieler mechanischen und elektrischen Eigenschaften von Festkörpern. [5]

Ein Kristall kann in sich selbst durch folgende Translation überführt werden:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^3 n_i \vec{a}_i \quad \text{mit} \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Das Kristallgitter, auch Punktgitter genannt, ist eine dreidimensionale Anordnung von Punkten, dessen Untereinheit die Elementarzelle ist. Diese Elementarzellen werden durch Translationssymmetrie zu einem dreidimensionalen Netz erweitert. Anhand dieser Translationssymmetrie werden Kristalle einem von 14 möglichen Bravais-Gittern eingeteilt: kubisch-primitiv, kubisch raumzentriert, kubisch flächenzentriert, tetragonal-primitiv, tetragonal-raumzentriert, orthorhombisch-primitiv, orthorhombisch-basiszentriert, orthorhombisch-raumzentriert, orthorhombisch-flächenzentriert und hexagonal-primitiv.

Neben dem oben vorgestellten Punktgitter im Ortsraum definiert man ein Punktgitter im *reziproken Raum*, auch genannt *reziprokes Gitter*, das durch die Vektoren \vec{b}_i aufgespannt wird:

$$b_i = \frac{2\pi}{V_{EZ}} a_j \times a_k$$

mit V_{EZ} das Volumen der Einheitszelle. Der Translationsvektor im reziproken Gitter sieht dann wie folgt aus:

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^3 h_i b_i \quad \text{mit} \quad h_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Im reziproken Gitter definiert man symmetrische Polyeder, die sogenannten Brioullin-Zonen (BZ). Die 1. BZ besteht aus allen Punkten im reziproken Raum, die dem Ursprung näher liegen als allen anderen Punkten \vec{G} . Die 1. BZ einer einfachen kubischen Kristallstruktur erstreckt sich in allen drei Richtungen des reziproken Raumes:

$$-\frac{\pi}{a} \leq k_i \leq \frac{\pi}{a} \quad \text{mit} \quad i = x, y, z$$

Die Wigner-Seitz-Zelle entspricht im reziproken Gitter der 1. Brioullin-Zone.

2.2 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, Wellendispersion

Eine Welle ist durch die Kreisfrequenz ω und Wellenvektor \vec{k} bzw. Frequenz ν und Wellenlänge λ charakterisiert. Der Wellenvektor steht senkrecht auf der Wellenfront der Welle und hat einen Betrag $\frac{2\pi}{\lambda}$.

Die Phasengeschwindigkeit v_{ph} der Welle, d.h. die Geschwindigkeit mit der sich eine Phase ausbreitet, beträgt:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu$$

Ein Wellenpaket besitzt die Gruppengeschwindigkeit:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

Ein Wellenpaket ist eine Welle, deren Amplitudenverlauf nur in einem begrenzten Raumgebiet ungleich Null ist. Der Amplitudenverlauf wird Hüllkurve des Wellenpakets genannt. Das Wellenpaket kann als Überlagerung von Einzelwellen mit verschiedenen Frequenzen vorgestellt werden, die sich mit einer bestimmten Phasengeschwindigkeit ausbreiten, die frequenzabhängig sein kann. Die Hüllkurve bewegt sich jedoch mit Gruppengeschwindigkeit. [2]

Im einfachen Fall der elektromagnetischen Welle im Vakuum mit $w = ck$ fallen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zusammen und sind gleich der Proportionalitätskonstante c .

Propagiert die Welle jedoch durch Materie, so hebt sich die Linearität zwischen ω und \mathbf{k} auf. Die Folge ist das Auftreten von Dispersion: Phasen- und Gruppengeschwindigkeit werden abhängig von der Frequenz bzw. von der Wellenlänge und fallen nicht mehr zusammen. Dispersion bezeichnet man die Abhängigkeit einer Größe von der Frequenz. In der Regel ist die Phasengeschwindigkeit größer als die Gruppengeschwindigkeit ($v_{ph} > v_{gr}$).

Die Funktion $w = f(k)$ nennt man Dispersionsrelation oder Dispersionsbeziehung. Aus deren Steigung lässt sich die Gruppengeschwindigkeit bestimmen.

2.3 Stehende Wellen

Eine stehende Welle ist eine Welle, deren Auslenkung an bestimmten Stellen immer Null bleibt, ihre Gruppengeschwindigkeit ist $v_{gr} = 0$. Sie entsteht als Überlagerung zweier gegenläufig fortschreitender Wellen gleicher Frequenz und Amplitude, die aus verschiedenen Erregern stammen oder durch Reflexion einer Welle an einem Hindernis entstehen. [4]

Im Folgenden untersuchen wir die Wellen für Systeme mit kontinuierlichen und diskontinuierlichen, diskreten Massenverteilungen.

2.3.1 Kontinuierliche Massenverteilung

Betrachtet man einen zwischen festen Enden im Abstand L eingespannten, eindimensionalen Strang mit kontinuierlichen, homogenen Massenverteilung, so führt diese Randbedingung zur Ausbildung stehenden Wellen:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Damit sind nur Wellenlängen $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ möglich. Die entsprechenden Wellenvektoren sind:

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L}$$

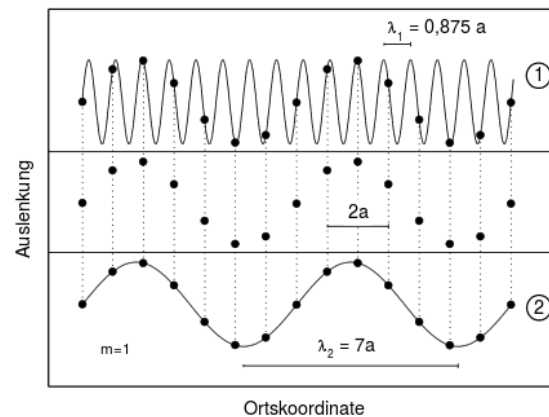
Die zugehörige Frequenz ω_n heißt Eigenfrequenz, n heißt Modenzahl und man spricht von der n . Eigenschwingung, Mode oder Eigenmode.

Im Fall eines unendlich dünnen Strangs ist die Zahl der Eigenfrequenzen unbegrenzt.

2.3.2 Diskontinuierliche, diskrete Massenverteilung

Wir nehmen die Masse des eindimensionalen Strangs als diskrete gleiche Punktmassen mit einem zunächst festen Abstand a voneinander an. Die Punktmassen sind jeweils über Federn mit ihren Nachbarn gekoppelt. Sei Abstand a der sich von selbst einstellende Gleichgewichtsabstand. Die Massen können aufgrund der Kopplung um diese Gleichgewichtspositionen schwingen. Diese Miteinanderkopplung von Massenpunkten nennt man *lineare Kette*.

Bei festen Enden sind wieder nur stehende Wellen möglich. Die Auslenkung ist jedoch nur an den Stellen der Massenpunkte definiert, denn dazwischen existiert keine Materie. Die Wellenlänge ist somit nicht eindeutig bestimmbar, denn zu jeder möglichen Welle mit $\lambda < 2a$ eine langwellige Welle mit $\lambda > 2a$ existiert, die ein identisches Auslenkungsmuster der Punktmassen besitzt (s. Abbildung 2).



Quelle: Vorbereitungsmappe [1]

Abbildung 2: Auslenkungsmuster des eindimensionalen Punktmassegitters

Die unterschiedlichen Wellen mit gleicher Auslenkung sind also physikalisch nicht unterscheidbar. Um diesen Zustand zu beschreiben, genügt es vollständig, sich auf eine Welle zu beschränken. Wir wählen diejenige mit $\lambda > 2a$, da hier nur eine passende Welle für ein bestimmtes Auslenkungsmuster existiert, während es im kurzwelligen Bereich $\lambda < 2a$ unendlich viele sind. Somit gilt:

$$\lambda_{min} = 2a$$

$$\lambda_{max} = 2L$$

Aus 2.1 folgt die maximale Modenzahl n_{max} :

$$n_{max} = \frac{2L}{\lambda_{min}} = \frac{L}{a}$$

Der maximale Wellenvektor ergibt sich zu:

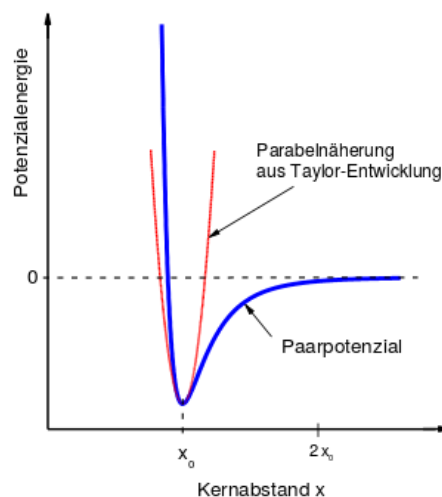
$$k_{max} = \frac{2\pi}{\lambda_{min}} = \frac{\pi}{a}$$

2.4 Gitterschwingungen: eindimensionales Modell für ein Gitter realer Atome

Damit ein reales Atomgitter auf eine lineare Kette von Punktmassen abgebildet werden kann, muss, zum Einen, die Wechselwirkung zwischen den Atomen des Gitters bekannt sein, zum Anderen muss geklärt werden, ob Atome als Punktmassen behandelt werden können.

In einem Atomgitter können die Atome als Punktmassen behandelt werden, denn die Masse des Atoms ist überwiegend im Kern konzentriert und der Kernradius ist viel kleiner als der Gitterabstand.

Die Wechselwirkung zwischen Atomen findet durch den Überlapp der Wellenfunktionen der Elektronen der äußeren Schale statt. Die inneren Schalen und den Kern bezeichnet man als Atomrumpf. Die Gesamtenergie des Systems aus Valenzelektronen und positiven Atomrümpfen besitzt ein Minimum bei einem bestimmten Atomkernabstand x_0 . Das ist der Gleichgewichtsabstand und entspricht der Bindungslänge. Wird der Atom aus der Minimumlage ausgelenkt, so erhöht sich die Energie der Valenzelektronen. Da diese Energieerhöhung zu klein ist, um höhere Zustände anzuregen, wird diese Energie beim Rückgang der Auslenkung wieder zurückgewonnen. Der Atomrumpf schwingt daher reibungsfrei im Potenzial der Valenzelektronen. Der Verlauf dieses Potenzials ist in Abbildung 3 dargestellt.



Quelle: Vorbereitungsmappe [1]

Abbildung 3: Paarpotenzial zwischen 2 Atomen als Funktion des Kernabstands

Für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage (s. Abbildung 3) kann dieses Potenzial durch eine Taylorentwicklung bis zur 2. Ordnung genähert (harmonische Näherung) werden:

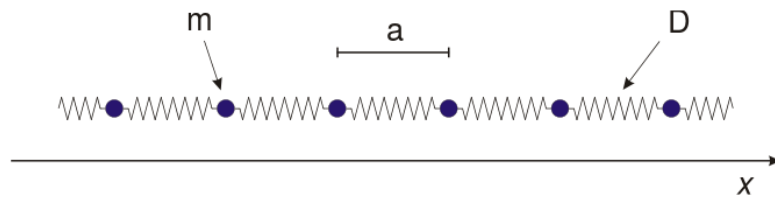
$$\Phi(x) = \Phi_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \bigg|_{x_0} (x - x_0)^2$$

Desweiteren führen wir noch die Näherung der sogenannten Nächste-Nachbar-Wechselwirkung, wo nur die Wechselwirkung mit direkten Nachbarn berücksichtigt wird und die mit entfernten Atomen vernachlässigt wird. Es wirken also auf ein Atom nur Kräfte der jeweils rechten und linken Nachbarn.

Mit diesen Näherungen reduzieren sich die Kräfte auf die Punktmasse aufgrund der harmonischen Kopplung auf zwei Hookesche Federkräfte. Der Term $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \bigg|_{x_0}$ entspricht der Federkonstante D der Hookeschen Kraft $F = -Dx$.

2.4.1 Einatomige Kette

Die lineare einatomige Kette repräsentiert ein eindimensionales Atomgitter mit Gitterabstand a und einem Atom der Masse m in der Basis. Sie besteht aus Punktemassen der Masse m mit Ruheabstand a , verbunden durch masselose Hookesche Federn mit Federkonstante D (s. Abbildung 4).



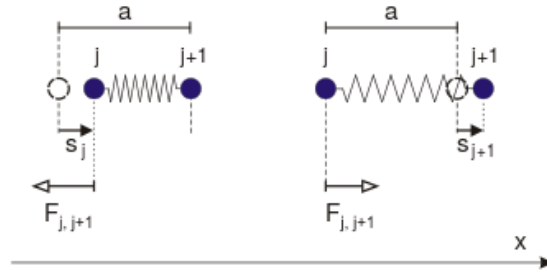
Quelle: Vorbereitungsmappe [1]

Abbildung 4: Lineare einatomige Kette

Wir wollen nun die Dispersionsrelation der einatomigen Kette bestimmen. Dazu betrachten wir die Newtonsche Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt:

$$m\ddot{s}_j(t) = F_{j,j+1} + F_{j,j-1}$$

Dabei ist $F_{j,j+1}$ die Kraft auf den Massenpunkt j durch die rechte Feder und $F_{j,j-1}$ die Kraft auf den Massenpunkt j durch die linke Feder.



Quelle: Vorbereitungsmappe [1]

Abbildung 5: Änderung der Federlänge

Wie man der Abbildung 5 entnehmen kann, lassen sich die Kräfte $F_{j,j+1}$ und $F_{j,j-1}$ bestimmen zu:

$$\begin{aligned} F_{j,j+1} &= -D \cdot s_j + D \cdot s_{j+1} = -D \cdot (s_j + s_{j+1}) \\ F_{j,j-1} &= -D \cdot s_j + D \cdot s_{j-1} = -D \cdot (s_j - s_{j-1}) \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Kräfte schreibt sich die Newtonsche Bewegungsgleichung zu:

$$m\ddot{s}_j(t) = D(s_{j+1} + s_{j-1} - 2s_j)$$

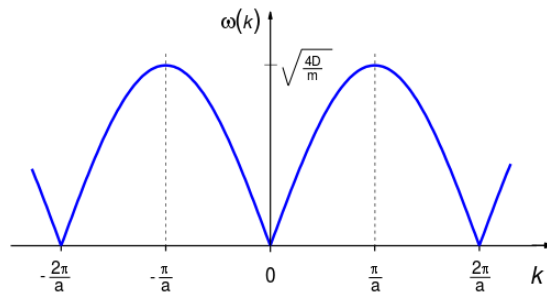
Die obige DGL lässt sich mit dem Ansatz $s_j = s_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ lösen. Da die Auslenkungen x nur an den diskreten Gitterpunkten $x_{0,j}$ definiert sind, lässt sich x als Vielfaches des Gitterabstands a schreiben mit $x_{0,j} = a \cdot j$. Wir erhalten:

$$m\omega^2 = D(2 - (e^{ika} + e^{-ika})) = D(2 - 2 \cdot \cos(ka))$$

Durch Umformen und Einsetzen der trigonometrischen Identität $1 - \cos(x) = 2 \sin^2(\frac{x}{2})$ erhalten wir die Dispersionsrelation der linearen einatomigen Kette:

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4D}{m}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right| \quad (2.2)$$

Abbildung 6 veranschaulicht die Dispersionsrelation.



Quelle: Vorbereitungsmappe [1]

Abbildung 6: Dispersionsrelation der linearen einatomigen Kette

Die k -Werte können aus den Bedingungen der stehenden Welle bestimmt werden. Da bei einem Kristall die Zahl der Atome sehr groß ist, zeigt die Dispersionskurve einen kontinuierlichen Verlauf. Der Modellkristall unseres Versuchs besitzt nur 12 Massen, sodass die Kurve in diesem Fall auch nur aus 12 Punkten besteht.

Grenzfälle für kleine und große k

$k \rightarrow 0$ (**Zonenzentrum**) Für kleine k oder lange Wellen (große λ) können wir die Kleinwinkelnäherung der Sinusfunktion ($\sin(x) \approx x$) anwenden. Die Dispersionsrelation beträgt:

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4D}{m}} \cdot \left| \frac{ka}{2} \right| = \sqrt{\frac{Da^2}{m}} |k| \quad (2.3)$$

Die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten fallen zusammen, die Wellenausbreitung wird dispersionsfrei:

$$v_{gr} = v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{Da^2}{m}} \quad (2.4)$$

Diese Geschwindigkeit entspricht der Schallgeschwindigkeit der linearen Kette und ist die größte in einem Kristall auftretende Wellenausbreitungsgeschwindigkeit.

$k \rightarrow \frac{\pi}{a}$ (**Zonenrand**) Die Steigung der Dispersionskurve geht gegen Null, für $k = \frac{\pi}{a}$ gilt $v_{gr} = 0$. Die Wellenlänge wird mit $\lambda = 2a$ minimal.

Schwingungsmoden des Modellkristalls

Die stehende Welle in unserem Modellkristall entsteht aus einer einlaufenden und einer zurücklaufenden Welle mit Phasenverschiebung π :

$$s_j = 2s_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(k_n a_1 \cdot j)$$

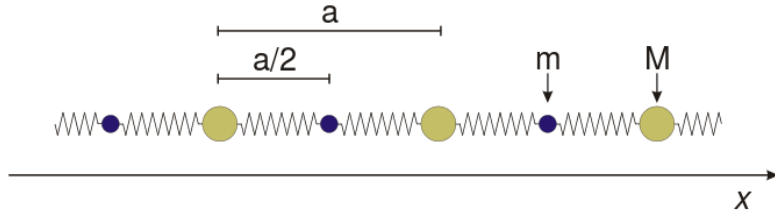
wobei a_1 für die Gitterkonstante der einatomigen Kette steht. Im Modellkristall mit 12 Massen ist die Länge L durch $12 + 1$ Federlängen bzw. Gitterkonstanten gegeben. Daher ist $L = 13a_1$ und es gilt:

$$k_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{n\pi}{13a_1}$$

Die maximale Anzahl der Moden entspricht der Anzahl der Massen: $n_{max} = 12$. Die stehende Welle ist proportional zu $\sin\left(\frac{n\pi}{13}j\right)$ mit $j = 1, \dots, 12$.

2.4.2 Zweiatomige Kette

Die lineare zweiatomige Kette repräsentiert ein eindimensionales Atomgitter mit Gitterabstand a und zwei Atomen pro Basis, die unterschiedliche Massen haben. Das leichtere Atom besitzt eine Masse m , das schwerere eine Masse M . Sie besteht aus Punktmassen, die durch ideale Hookesche Federn im Abstand $\frac{a}{2}$ verbunden sind und abwechselnd die Massen m und M haben (Abbildung 7).



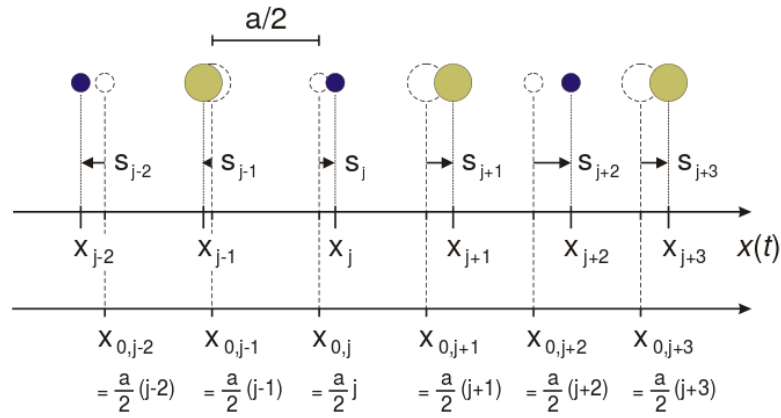
Quelle: Vorbereitungsmappe [1]

Abbildung 7: Lineare zweiatomige Kette

Analog zur einatomigen Kette bestimmen wir die Dispersionsrelation aus den gekoppelten Newtonschen Bewegungsgleichungen (s. Abbildung 8):

$$m\ddot{s}_j = D(s_{j+1} + s_{j-1} - 2s_j)$$

$$M\ddot{s}_{j+1} = D(s_{j+2} + s_j - 2s_{j+1})$$



Quelle: Vorbereitungsmappe [1]

Abbildung 8: Auslenkungen in der linearen zweiatomigen Kette

Die DGLs lösen sich mit den folgenden Ansätzen:

$$s_j = s_{0,m} \cdot e^{i(ka - \omega t)}$$

$$s_{j+1} = s_{0,M} \cdot e^{i(ka - \omega t)}$$

Wir erhalten das Gleichungssystem:

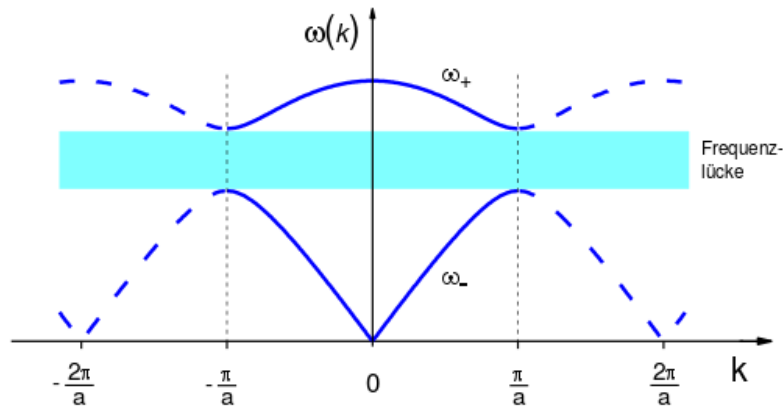
$$-\omega^2 m s_{0,m} = D s_{0,M} (1 + e^{-ika}) - 2D s_{0,m}$$

$$-\omega^2 M s_{0,M} = D s_{0,m} (1 + e^{ika}) - 2D s_{0,M}$$

Über die Forderung der Existenz einer nichttrivialen Lösung des linearen Gleichungssystems erhalten wir die Dispersionsrelation:

$$\omega_{\pm}^2 = D \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \pm D \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4}{mM} \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right)} \quad (2.5)$$

Abbildung 9 zeigt diese Dispersionsrelation. Es fällt auf, dass es zwei unterschiedliche Lösungen der Dispersionsrelation existieren, die jeweils akustischer (ω_-) und optischer (ω_+) Zweig genannt sind und durch eine Frequenzlücke getrennt sind.



Quelle: Vorbereitungsmappe [1]

Abbildung 9: Dispersionsrelation der linearen zweiatomigen Kette

Die Dispersionsrelation ist periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{a}$.

Der ω_+ -Ast heißt optischer Ast, weil die leichten und schweren Massen gegeneinander schwingen, sodass bei unterschiedlicher elektrischer Ladung die Atome m und M einen schwingenden Dipol bilden. Der Dipol kann elektromagnetische Strahlung absorbieren oder emittieren, die Schwingung wird "optisch aktiv". Die unterschiedliche Ladung resultiert aus dem ionischen oder polaren Charakter der chemischen Bindung in Kristallen.

Der ω_- -Ast heißt "akustischer Ast", da er für $k \rightarrow 0$ die größte Gruppengeschwindigkeit innerhalb der Kette aufweist, d.h. die akustische Schallgeschwindigkeit v_s .

Der Frequenzbereich zwischen den Ästen wird nie überstrichen, deshalb existiert im Frequenzspektrum der Schwingungsmoden eine Frequenzlücke.

Grenzfälle

$k \rightarrow 0$ (**Zonenzentrum**) Man kann wieder die Kleinwinkelnäherung der Sinusfunktion

anwenden und man erhält folgende Dispersionsrelationen:

$$\omega_-(k) = \sqrt{\frac{Da^2}{2(m+M)}}k$$

$$\omega_+(k) = \sqrt{2D\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)}$$

Aus dem akustischen Ast erhalten wir die Gruppen- und Phasengeschwindigkeiten:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = v_{ph} = \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{\frac{Da^2}{2(m+M)}} \quad (2.6)$$

$k \rightarrow \frac{\pi}{a}$ (**Zonenrand**) Die Dispersionsrelationen werden zu:

$$\omega_+^2 = \frac{2D}{m}$$

$$\omega_-^2 = \frac{2D}{m}$$

Modellkristall

Der Modellkristall für die zweiatomige Kette ist fast gleich wie der der einatomigen Kette. Es wurden nur zusätzliche Gewichte auf jedem zweiten Gleiter gelegt und es gibt wieder 13 Federlängen, jedoch erstreckt sich die Gitterkonstante a_2 über 2 Federn. Die Länge ist somit $L = 6.5 \cdot a$ und es gilt:

$$k_n = \frac{n\pi}{6.5a_2}$$

$$n_{max} = 6$$

3 Experimenteller Aufbau

Die linearen Ketten werden durch eine Anordnung von 12 durchnummerierten Massengleitern realisiert, die mit Federn gleicher Federkonstante D miteinander verbunden sind und zur Reibungsminimierung sich auf eine Luftkissenbahn bewegen.

Die Gleiter werden um 1 mm durch eine Turbine hochgehoben, die Luft in die Luftkissenbahn drückt.

Die periodische Anregung der Kette erfolgt mit einem Schrittmotor, der eine harmonische Bewegung mit variabler Anregungsamplitude erlaubt. Die Anregungsfrequenz kann auf Werten zwischen 0.1526 Hz bis 2.846 Hz eingestellt werden.

Die Gleiter sind mit Reflektoren ausgestattet, die die von den LEDs der "VideoCom"-Kamera periodisch abgegebenen Lichtblitze reflektieren und durch das Objektiv der Kamera auf eine CCD-Zeile abgebildet werden. Die Wiederholzeit der Lichtblitze kann zwischen 200 ms und 6.25 s variiert werden, für den Versuch beträgt sie jedoch 25 ms. Die CCD-Zeile wird mit der gleichen Wiederholzeit ausgelesen und dabei die Pixelpositionen an das Programm "Gitterschwingungen" übergeben, das dann aus den Auslenkungen $x(t)$ die Eigenfrequenzen mithilfe einer schnellen Fourier-Transformation berechnet und in Hz anzeigt.

Die Kamera muss so positioniert werden, dass sie 2 benachbarte Gleiter mit nicht abgedeckten Reflektoren sieht. Die Reflektoren der anderen Gleiter sollen abgedeckt sein, damit sie von der Kamera nicht detektiert werden. Ausserdem soll man die Kamera justieren, um die 2 Gleiterstriche in der CCD-Zeile richtig abbilden zu können.

Zur Simulation der zweiatomigen Kette werden einige Gleiter mit einem zusätzlichen Gewicht versehen.

4 Durchführung des Versuchs

Bevor wir mit den Messungen angefangen haben, wurden wir durch den Betreuer in die Bedienung der verschiedenen Versuchgeräte eingewiesen. Wir starteten die Turbine der Luftkissenbahn, brachten die Auslenkung des Schrittmotors in Nulllage, schalteten die "VideoCom"-Kamera, den Computer und die Hilfsprogramme ein.

Wir stellten sicher, dass nur 2 Gleiter für die "VideoCom"-Kamera sichtbar waren. Die Kamera war bereits korrekt positioniert und justiert, sodass wir keine Einstellungen vornehmen mussten. Die fokussierten Gleiter waren die mit den Nummern 5 und 6.

4.1 Eigenfrequenzen der einatomigen und zweiatomigen Kette

In diesem Versuch messten wir die Eigenfrequenzen der einatomigen und zweiatomigen Kette.

Wir haben mit der einatomigen Kette angefangen. Wir nahmen die Eigenfrequenzen mithilfe des LabVIEW-Programms "Gitterschwingungen" in 4 Datensätzen mit einer Dauer von 100 s auf. Vor jeder Aufnahme regten wir unterschiedliche Gleiter (Nummer 9, 6 und 3) mit einem kurzen Stoß per Hand zur Auslenkung an, nachdem die vorherigen Schwingungen der Kette durch mehrmaliges Zuhalten der Turbinenansaugungsöffnung zur Ruhe gebracht wurden. Die Messwerte sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Danach wurden die Eigenfrequenzen der zweiatomigen Kette gemessen. Die zweiatomige Kette mit 2 verschiedenen Massen wurde realisiert, indem man jeden zweiten Gleiter mit einem Zusatzgewicht versehen hat. Es galt das gleiche Messprinzip wie für die einatomige

Kette, wobei wir hier die Gleiter mit den Nummern 3, 6, 8 und 12 per Hand anregen. Die Messergebnisse entnehmen Sie der Tabelle 2.

	1. Datensatz		2. Datensatz		3. Datensatz		4. Datensatz	
Mode	Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6
1	0.276800	0.276803	0.277464	0.277463	0.276940	0.276939	0.276124	0.276126
2	0.551400	0.551400	0.550223	0.550246	0.551431	0.551428	0.550315	0.550318
3	0.817257	0.817254	0.816051	0.816035	0.817573	0.817572	0.817583	0.817561
4	1.073536	1.073084	1.073320	1.073253	1.073703	1.073683	1.072351	1.072154
5	1.313072	1.313113	1.314681	1.314679	1.314338	1.314344	1.314130	1.314140
6	1.535535	1.535524	1.536911	1.536889	1.537003	1.537010	1.535691	1.535629
7	1.739765	1.739774	1.740109	1.740094	1.740200	1.740164	1.740231	1.740202
8	1.917841	1.917969	1.918998	1.919140	1.917661	1.917741	1.918203	1.918263
9	2.067239	2.067344	2.067598	2.067945	2.067159	2.067117	2.067813	2.067824
10	2.187740	2.187746	2.187243	2.187544	2.187892	2.187883	2.188963	2.189127
11	2.277282	2.277294	2.276659	2.276642	2.275749	2.275110	2.276467	2.276799
12	2.327841	2.327748	2.328197	2.328106	2.328892	2.328834	2.328007	2.328006

Tabelle 1: Eigenfrequenzen der einatomigen Kette in Hz

	1. Datensatz		2. Datensatz		3. Datensatz		4. Datensatz	
Mode	Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6
1	0.240063	0.240064	0.240981	0.240981	0.239820	0.239817	0.240050	0.240052
2	0.477028	0.477025	0.476105	0.475868	0.476495	0.476601	0.476542	0.476552
3	0.704877	0.704884	0.704649	0.704658	0.705470	0.705475	0.705657	0.705654
4	0.919016	0.919079	0.919108	0.919054	0.918922	0.918935	0.919194	0.919178
5	1.110584	1.110585	1.111413	1.1111432	1.111496	1.111451	1.111731	1.111725
6	1.248375	1.248426	1.248730	1.248589	1.249158	1.249167	1.249751	1.249742
7	1.659992	1.659906	1.660968	1.660972	1.660559	1.660546	1.660895	1.660699
8	1.757790	1.757519	1.757680	1.757559	1.756624	1.756412	1.757384	1.757648
9	1.867276	1.867134	1.866565	1.866757	1.867893	1.867894	1.867410	1.867424
10	1.964549	1.964561	1.965178	1.965187	1.964879	1.964887	1.965090	1.965146
11	2.035767	2.035682	2.035868	2.036438	2.036601	2.036744	2.035461	2.035746
12	2.078601	2.078571	2.079307	2.079331	2.079370	2.079415	2.079656	2.079787

Tabelle 2: Eigenfrequenzen der zweiatomigen Kette in Hz

4.2 Amplitudenverhältnis

In diesem Versuchsteil sollten die Amplitudenverhältnisse der leichten und schweren Gleiter für die 6 optischen und 6 akustischen Moden der zweiatomigen Kette bestimmt werden.

Diese Moden werden durch einen Schrittmotor angeregt, indem man die für die zweiatomige Kette gemessenen Eigenfrequenzen f aus Tabelle 2 mittelt und die jeweiligen Periodendauern am Schrittmotor nach den Tabellen 3 und 4 einstellt. Welche Eigenfrequenzen welcher Mode gehören, lässt sich aus dem Wellenvektor k_n mit der im Abschnitt 4.3 gemessenen Länge bestimmen, die Einordnung in akustischem Ast bzw. optischem Ast erfolgt durch Vergleich der Beiträge der Kreisfrequenzen ω_n im Sinne von Abbildung 9.

Mode n	\bar{f} [Hz]	$T = \frac{1}{\bar{f}}$ [s]	$k_n = \frac{n\pi}{L}$ [m ⁻¹]	$\bar{\omega}_n = 2\pi\bar{f}$ [Hz]
1	0.240229	4.162700	0.578562	1.509400
2	0.476527	2.098520	1.157120	2.994110
3	0.705166	1.418110	1.735690	4.430690
4	0.919061	1.088070	2.314250	5.774630
5	1.111270	0.899875	2.892810	6.982290
6	1.248990	0.800645	3.471370	7.847650

Tabelle 3: Frequenzen zur Anregung der Moden des akustischen Astes

Mode n	\bar{f} [Hz]	$T = \frac{1}{\bar{f}}$ [s]	$k_n = \frac{n\pi}{L}$ [m ⁻¹]	$\bar{\omega}_n = 2\pi\bar{f}$ [Hz]
6	1.66057	0.602204	3.471370	10.433700
5	1.75733	0.569046	2.892810	11.041600
4	1.86729	0.535534	2.314250	11.732600
3	1.96493	0.508923	1.735690	12.346000
2	2.03604	0.49115	1.157120	12.792800
1	2.07925	0.480942	0.578562	13.064300

Tabelle 4: Frequenzen zur Anregung der Moden des optischen Astes

Es musste auch auf eine geeignete Anregungsamplitude auf dem Schrittmotor geachtet werden, eine zu große Amplitude würde zu sehr starken Schwingungen und evtl. Zerstörung der Kette, bei einer zu kleinen Amplitude wären die Schwingungen der mittleren Gleiter 5 und 6 sehr klein.

Nach der Anregung warteten wir etwa 5 bis 7 Minuten jeweils für die optischen und akustischen Moden auf den Einschwingvorgang und nahmen die Amplituden der beiden Gleiter 20 mal mit dem LabVIEW-Programm auf. Die Messergebnisse zeigen die Tabellen 5, 6, 7 und 8.

Im Labor wurde das Schwingungsbild mit den am Platz liegenden Amplitudenmustern verglichen. Dabei lokalisierten wir die Knoten, wo die Schwingungsamplitude am kleinsten war. Für alle beobachteten Schwingungsbilder konnten wir Übereinstimmung mit den am Platz liegenden Amplitudenmustern finden.

1. Mode		2. Mode		3. Mode	
Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6
61.759282	63.370394	142.180609	48.601870	55.046317	99.486148
61.893542	63.370394	142.449127	48.601870	55.314835	99.620408
61.893542	63.370394	142.314868	48.601870	55.314835	99.620408
62.027801	63.370394	142.449127	48.870389	55.314835	99.620408
62.027801	63.370394	142.449127	48.870389	55.180576	99.620408
62.162060	63.638913	142.314868	48.601870	55.314835	99.754667
62.162060	63.907431	142.314868	48.601870	55.314835	100.023186
62.162060	63.638913	142.583387	48.601870	55.314835	99.888926
62.296320	63.638913	142.583387	48.601870	55.314835	99.888926
62.027801	63.638913	142.583387	48.870389	55.449095	100.023186
62.162060	63.638913	142.583387	48.870389	55.449095	100.023186
62.162060	63.638913	142.583387	48.601870	55.449095	100.023186
62.296320	63.638913	142.583387	48.736129	55.449095	100.023186
62.162060	63.638913	142.583387	48.601870	55.449095	100.023186
62.296320	63.638913	142.717646	48.870389	55.449095	100.023186
62.296320	63.638913	142.717646	48.601870	55.449095	100.023186
62.430579	63.773172	142.583387	48.870389	55.449095	100.023186
62.564838	63.907431	142.851905	48.870389	55.449095	100.023186
62.564838	63.907431	142.851905	48.870389	55.449095	100.023186
62.296320	63.907431	142.717646	48.870389	55.449095	100.023186

Tabelle 5: Amplituden des akustischen Astes für $n = 1 - 3$ in mm

4. Mode		5. Mode		6. Mode	
Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6
111.435227	42.828720	22.018527	45.916684	74.648176	17.453710
111.569486	42.828720	22.018527	45.916684	74.782435	17.587970
111.569486	42.828720	22.018527	45.916684	74.916695	17.722229
111.838005	43.097238	22.018527	45.916684	75.050954	17.587970
111.838005	42.962979	22.018527	45.916684	75.050954	17.722229
111.703745	42.962979	22.018527	45.782425	75.050954	17.587970
111.703745	42.694460	22.018527	46.050943	75.185213	17.587970
111.838005	42.962979	22.152786	45.916684	75.185213	17.587970
111.703745	42.828720	22.018527	46.050943	75.185213	17.587970
111.838005	42.962979	22.018527	46.050943	75.185213	17.587970
111.838005	42.962979	22.152786	45.916684	75.050954	17.453710
111.838005	42.962979	22.152786	45.916684	74.648176	17.453710
111.703745	42.962979	22.018527	45.916684	74.648176	17.453710
111.972264	43.097238	22.018527	46.050943	74.782435	17.453710
111.972264	43.231498	22.018527	45.916684	74.916695	17.453710
112.106523	43.231498	22.018527	45.916684	75.050954	17.453710
112.106523	43.231498	22.152786	45.782425	75.185213	17.587970
112.106523	43.097238	22.018527	45.782425	75.185213	17.587970
111.972264	43.365757	22.018527	45.782425	75.050954	17.587970
111.972264	43.231498	22.018527	45.782425	75.050954	17.453710

Tabelle 6: Amplituden des akustischen Astes für $n = 4 - 6$ in mm

1. Mode		2. Mode		3. Mode	
Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6
6.444447	10.606485	9.129633	6.041669	9.398152	30.611123
6.175928	10.337967	9.129633	5.907410	9.800930	30.745382
5.907410	10.337967	9.129633	6.041669	9.532411	30.745382
6.175928	10.337967	9.129633	6.041669	9.532411	30.745382
6.041669	10.337967	9.129633	5.907410	9.532411	30.879641
6.041669	10.337967	9.129633	5.907410	9.398152	30.745382
5.907410	10.337967	9.398152	5.907410	9.666670	30.745382
5.907410	10.203708	9.398152	6.041669	9.398152	30.745382
5.907410	10.203708	9.129633	6.041669	9.398152	30.745382
5.907410	10.203708	9.398152	5.907410	9.398152	30.611123
6.175928	10.472226	9.398152	6.175928	9.398152	30.611123
6.175928	10.472226	9.398152	6.041669	9.398152	30.745382
6.175928	10.472226	9.398152	5.907410	9.398152	30.745382
6.175928	10.337967	8.995374	5.907410	9.398152	31.013900
6.175928	10.472226	9.263892	5.907410	9.398152	31.013900
6.175928	10.472226	9.263892	5.773150	9.532411	30.879641
6.175928	10.472226	9.129633	5.907410	9.532411	31.013900
6.175928	10.606485	9.129633	5.907410	9.398152	30.745382
6.175928	10.606485	9.398152	5.907410	9.398152	30.745382
6.175928	10.740745	9.129633	5.773150	9.398152	30.745382

Tabelle 7: Amplituden des optischen Astes für $n = 1 - 3$ in mm

4. Mode		5. Mode		6. Mode	
Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6	Gleiter 5	Gleiter 6
19.064822	16.111117	3.356483	28.865752	4.027779	15.574080
19.064822	16.111117	3.759261	28.865752	4.296298	16.111117
19.333341	16.111117	3.759261	28.865752	4.296298	16.111117
19.467600	16.111117	3.759261	28.865752	4.296298	16.111117
19.467600	16.379636	3.625001	28.731492	4.296298	16.111117
19.601859	16.379636	3.625001	29.000011	4.296298	16.111117
19.467600	16.245376	3.893520	29.000011	4.027779	16.245376
19.601859	16.111117	3.625001	29.000011	4.296298	16.379636
19.333341	16.245376	3.490742	28.731492	4.296298	16.379636
19.467600	16.111117	3.759261	28.731492	4.296298	16.379636
19.467600	16.111117	3.490742	28.731492	4.430557	16.648154
19.333341	16.111117	3.490742	28.865752	4.564817	16.648154
19.333341	16.111117	3.490742	28.865752	4.564817	16.648154
19.601859	16.111117	3.759261	29.000011	4.564817	16.648154
19.333341	16.111117	3.759261	28.865752	4.296298	16.648154
19.467600	16.111117	3.759261	29.000011	4.296298	16.648154
19.333341	16.111117	3.490742	28.731492	4.296298	16.648154
19.467600	15.976858	3.490742	28.865752	4.296298	16.782414
19.333341	16.111117	3.490742	28.597233	4.296298	16.648154
19.333341	15.976858	3.490742	28.597233	4.430557	16.916673

Tabelle 8: Amplituden des optischen Astes für $n = 4 - 6$ in mm

4.3 Gesamtlänge der Kette

Die Gesamtlänge der Kette wurde mit einem Stahlbandmaß zu $L = 5.43\text{ m}$ gemessen. Den systematischen Fehler schätzten wir mit $\sigma_L = 0.005\text{ m}$ ab.

5 Auswertung

5.1 Dispersionsrelation

Es sind die Dispersionsrelationen (Eigenkreisfrequenzen ω gegen Wellenvektor k) der einatomigen und zweiatomigen Kette graphisch darzustellen.

5.1.1 Einatomige Kette

Die in Tabelle 1 experimentell ermittelten Eigenfrequenzen f der einatomigen Kette haben wir für jede Mode gemittelt (\bar{f}) und daraus die Eigenkreisfrequenzen $\bar{\omega} = 2\pi\bar{f}$ bestimmt. Für jede Mode n berechneten wir auch den Wellenvektor k_n .

Die gemessenen Eigenfrequenzen haben einen systematischen Fehler aufgrund der Messung durch die Apparatur, dem wir an dieser Stelle nicht eingehen.

Die Mittelwerte der Eigenfrequenzen \bar{f} enthalten einen statistischen Fehler $\sigma_{\bar{f}}$, der sich aus der Standardabweichung des Mittelwertes ergibt.

Der statistische Fehler der Eigenkreisfrequenzen $\sigma_{\bar{\omega}}$ ergibt sich mit Fehlerfortpflanzung zu:

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{\omega}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{f}}\right)^2 \cdot \sigma_{\bar{f}}^2} \\ &= \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{f}} \cdot \sigma_{\bar{f}} \\ &= 2\pi\sigma_{\bar{f}}\end{aligned}$$

Der Wellenvektor k_n ist mit einem systematischem Fehler behaftet, da die gemessene Länge der Kette L auch einen systematischen Fehler $\sigma_L = 0.005\text{ m}$ hat:

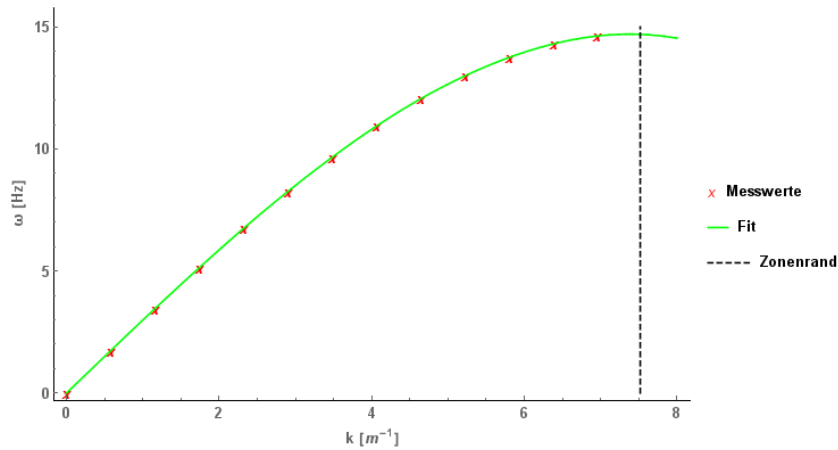
$$\begin{aligned}\sigma_{k_n} &= \sqrt{\left(\frac{\partial k_n}{\partial L}\right)^2 \cdot \sigma_L^2} \\ &= \frac{\partial k_n}{\partial L} \\ &= \frac{n\pi}{L^2} \cdot \sigma_L\end{aligned}$$

Tabelle 9 fasst die Ergebnisse zusammen:

Mode n	\bar{f} [Hz]	$\sigma_{\bar{f}}$ [Hz]	$k_n = \frac{n\pi}{L}$ m ⁻¹	σ_{k_n} [m ⁻¹]	$\bar{\omega}_n = 2\pi\bar{f}$ [Hz]	$\sigma_{\bar{\omega}_n}$
1	0.276832	0.000510	0.578562	0.000533	1.739390	0.003204
2	0.550845	0.000610	1.157120	0.001065	3.461060	0.003833
3	0.817111	0.000673	1.735690	0.001598	5.134060	0.004229
4	1.073140	0.000587	2.314250	0.002131	6.742710	0.003688
5	1.314060	0.000634	2.892810	0.002664	8.256500	0.003984
6	1.536270	0.000729	3.471370	0.003196	9.652690	0.004580
7	1.740070	0.000190	4.049940	0.003729	10.933200	0.001194
8	1.918230	0.000561	4.628500	0.004262	12.052600	0.003525
9	2.067500	0.000331	5.207060	0.004795	12.990500	0.002080
10	2.188020	0.000669	5.785620	0.005327	13.747700	0.004203
11	2.276500	0.000743	6.364180	0.005860	14.303700	0.004668
12	2.328200	0.000430	6.942750	0.006393	14.628500	0.002702

Tabelle 9: Mittlere Eigenfrequenzen \bar{f} , Eigenkreisfrequenzen ω_n und Wellenvektor k_n der einatomigen Kette

Dann trugen wir ω gegen k auf und erhielten die Dispersionsrelation der einatomigen Kette wie in Abbildung 10. Der Fit wurde durch Interpolation der Messwerte gezeichnet. Um einen besseren Fit zu erhalten, wurde zur Interpolation auch der nicht gemessene Wert (0,0) hinzugefügt.



Quelle: Selbst gezeichnet

Abbildung 10: Dispersionsrelation der einatomigen Kette

Die Gitterkonstante a bestimmt man, wie bereits im Abschnitt auf Seite 8 zu den Schwingungsmoden des Modellkristalls erklärt, aus:

$$a = \frac{L}{13} = \frac{5.43 \text{ m}}{13} = 0.417690 \text{ m}$$

Der systematische Fehler der Gitterkonstante σ_a ergibt sich mit Fehlerfortpflanzung zu:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_L}{13} = 0.000385 \text{ m}$$

Also zusammenfassend für die Gitterkonstante a :

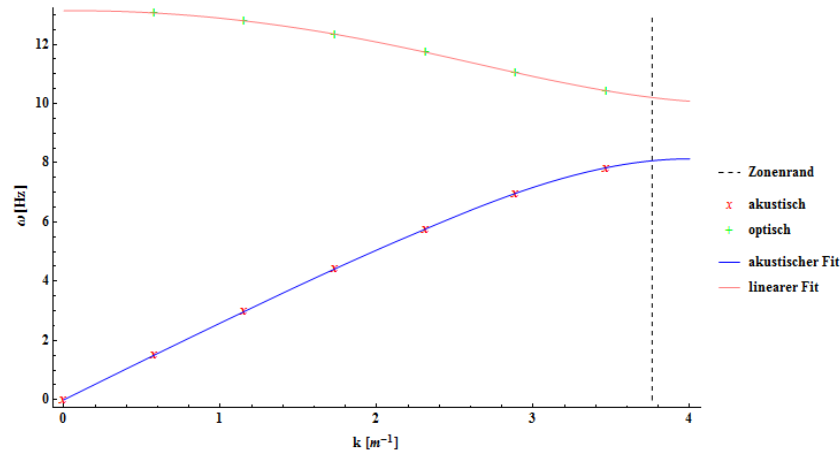
$$a = (0.417690 \pm 0.000385) \text{ m}$$

Der Zonenrand beträgt $\frac{\pi}{a} = 7.52 \text{ m}^{-1}$ und ist in Abbildung 6 eingezeichnet. Der systematische Fehler des Zonenrands σ_z bestimmt durch Fehlerfortpflanzung beträgt:

$$\sigma_z = \frac{\pi}{a^2} \cdot \sigma_a = \frac{\pi}{(0.417690 \text{ m})^2} \cdot 0.000385 \text{ m} = 0.006933 \text{ m}$$

5.1.2 Zweiatomige Kette

Die Dispersionsrelation der zweiatomigen Kette wurde anhand der Daten von Tabellen 3 und 4 in Abbildung 11 gezeichnet.



Quelle: Selbst gezeichnet

Abbildung 11: Dispersionsrelation der zweiatomigen Kette

Zwecks Fehlerrechnung erweitern wir nun die Tabellen 3 und 4 um die Spalten $\sigma_{\bar{f}}$ und $\sigma_{\bar{\omega}_n}$, die wir analog zur Tabelle 9 bestimmen. Der Fehler des Wellenvektors k_n wurde bereits in Tabelle 9 bestimmt und wird hier nicht nochmal aufgelistet.

Mode n	\bar{f} [Hz]	$\sigma_{\bar{f}}$ [Hz]	$k_n = \frac{n\pi}{L}$ [m ⁻¹]	$\bar{\omega}_n = 2\pi\bar{f}$ [Hz]	$\sigma_{\bar{\omega}_n}$ [Hz]
1	0.240229	0.000476	0.578562	1.509400	0.002991
2	0.476527	0.000400	1.157120	2.994110	0.002513
3	0.705166	0.000440	1.735690	4.430690	0.002765
4	0.919061	0.000101	2.314250	5.774630	0.000635
5	1.111270	0.000460	2.892810	6.982290	0.002890
6	1.248990	0.000551	3.471370	7.847650	0.003462

Tabelle 10: Mittlere Eigenfrequenzen \bar{f} , Eigenkreisfrequenzen $\bar{\omega}_n$ des akustischen Astes der zweiatomigen Kette mit Fehlerrechnung

Mode n	\bar{f} [Hz]	$\sigma_{\bar{f}}$ [Hz]	$k_n = \frac{n\pi}{L}$ [m ⁻¹]	$\bar{\omega}_n = 2\pi\bar{f}$ [Hz]	$\sigma_{\bar{\omega}_n}$ [Hz]
6	1.66057	0.000417	3.471370	10.433700	0.002620
5	1.75733	0.000516	2.892810	11.041600	0.003242
4	1.86729	0.000477	2.314250	11.732600	0.002997
3	1.96493	0.000263	1.735690	12.346000	0.001652
2	2.03604	0.000481	1.157120	12.792800	0.003022
1	2.07925	0.000445	0.578562	13.064300	0.002796

Tabelle 11: Mittlere Eigenfrequenzen \bar{f} , Eigenkreisfrequenzen $\bar{\omega}_n$ des optischen Astes der zweiatomigen Kette mit Fehlerrechnung

Die Gitterkonstante a der zweiatomigen Kette ist das Doppelte der Gitterkonstante der einatomigen Kette (siehe auch die Gleichung dazu im Abschnitt "Modellkristall" auf Seite 11):

$$a = \frac{L}{6.5} = 0.835380 \text{ m}$$

Der systematische Fehler der Gitterkonstante σ_a beträgt:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_L}{6.5} = 0.000769 \text{ m}$$

Zusammenfassend beträgt die Gitterkonstante a :

$$a = (0.835380 \pm 0.000769) \text{ m}$$

Der Zonenrand beträgt damit $\frac{\pi}{a} = 3.76 \text{ m}^{-1}$ und wurde ebenfalls in Abbildung 11 der Dispersionsrelation eingezeichnet. Der systematische Fehler des Zonenrandes σ_z beträgt:

$$\sigma_z = \frac{\pi}{a^2} \cdot \sigma_a = \frac{\pi}{(0.835380 \text{ m})^2} \cdot 0.000769 \text{ m} = 0.003462 \text{ m}$$

5.2 Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeiten für die einatomige $v_{s,1}$ und zweiatomige Kette $v_{s,2}$ lassen sich, laut den Gleichungen 2.4 und 2.6, folgendermaßen bestimmen:

$$v_s = \frac{\omega}{k}$$

Diese Beziehung gilt für Wellenvektore k sehr nahe dem Nullpunkt. Deshalb bestimmen wir die Steigung des linearen Teils der jeweiligen Dispersionskurven, der durch die beiden Punkte $(0, 0)$ und (ω_1, k_1) geht und erhalten:

$$v_{s,1} = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{1.739390 \text{ Hz}}{0.578562 \text{ m}^{-1}} = 3.006402 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{s,2} = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{1.509400 \text{ Hz}}{0.578562 \text{ m}^{-1}} = 2.608882 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Da, wie wir in den vorigen Abschnitten der Auswertung gesehen haben, sowohl die Eigenkreisfrequenzen ω als auch die Wellenvektoren k_n fehlerbehaftet sind, sind auch die daraus berechneten Schallgeschwindigkeiten fehlerbehaftet. Mit Fehlerfortpflanzung ergibt sich also:

$$\sigma_{v_s} = \sqrt{\left(\frac{\partial v_s}{\partial \omega}\right)^2 \sigma_\omega^2 + \left(\frac{\partial v_s}{\partial k}\right)^2 \sigma_k^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{k^2} \cdot \sigma_\omega^2 + \frac{\omega^2}{k^4} \cdot \sigma_k^2}$$

Der Fehler der Schallgeschwindigkeit für die einatomige Kette $\sigma_{v_{s,1}}$ beträgt:

$$\sigma_{v_{s,1}} = \sqrt{\frac{1}{(0.578562 \text{ m}^{-1})^2} \cdot (0.003204 \text{ Hz})^2 + \frac{(1.739390 \text{ Hz})^2}{(0.578562 \text{ m}^{-1})^4} \cdot (0.000533 \text{ m}^{-1})^2}$$

$$= 0.005792 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Fehler der Schallgeschwindigkeit für die zweiatomige Kette $\sigma_{v_{s,2}}$ beträgt:

$$\sigma_{v_{s,2}} = \sqrt{\frac{1}{(0.578562 \text{ m}^{-1})^2} \cdot (0.002991 \text{ Hz})^2 + \frac{(1.509400 \text{ Hz})^2}{(0.578562 \text{ m}^{-1})^4} \cdot (0.000533 \text{ m}^{-1})^2}$$

$$= 0.005353 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zusammenfassend also:

$$v_{s,1} = (3.006402 \pm 0.005792) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{s,2} = (2.608882 \pm 0.005353) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.3 Massenverhältnis

Das Massenverhältnis $\gamma = \frac{M}{m}$ bestimmt sich aus dem Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten $v_{s,1}$ und $v_{s,2}$ für $k \rightarrow 0$ (siehe Formeln 2.4 bzw. 2.6 auf Seiten 8 bzw. 11):

$$\begin{aligned}\frac{v_{s,1}}{v_{s,2}} &= \sqrt{\frac{Da_1^2}{m} \cdot \frac{2(m+M)}{Da_2^2}} \\ &= \sqrt{\frac{Da_1^2}{m} \cdot \frac{2(m+M)}{4Da_1^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m+M}{2m}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{M}{m}}\end{aligned}$$

Das Massenverhältnis γ beträgt:

$$\begin{aligned}\gamma = \frac{M}{m} &= 2 \cdot \left(\frac{v_{s,1}}{v_{s,2}} \right)^2 - 1 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{3.006402}{2.608882} \right)^2 - 1 \\ &= 1.655921\end{aligned}$$

Da $v_{s,1}$ und $v_{s,2}$ fehlerbehaftet sind, so ist auch das Massenverhältnis:

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma &= \sqrt{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial v_{s,1}} \right)^2 \sigma_{v_{s,1}}^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial v_{s,2}} \right)^2 \sigma_{v_{s,2}}^2} \\ &= \sqrt{\frac{16 \cdot v_{s,1}^2}{v_{s,2}^4} \cdot \sigma_{v_{s,1}}^2 + \frac{16 \cdot v_{s,1}^4}{v_{s,2}^6} \cdot \sigma_{v_{s,2}}^2} \\ &= 0.014950\end{aligned}$$

Mit Fehler beträgt es:

$$\boxed{\gamma = 1.655921 \pm 0.014950}$$

5.4 Federkonstante der einatomigen Kette

Es ist die Federkonstante D der einatomigen Kette mit 2 Methoden zu bestimmen:

5.4.1 Aus der Dispersionsrelation

Aus Gleichung 2.2 auf Seite 7 gilt für die Dispersionsrelation der einatomigen Kette:

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4D}{m}} \left| \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right|$$

Durch Umformen ergibt sich die gesuchte Federkonstante D_1 :

$$D_1 = \frac{m \cdot \omega^2}{4 \sin^2 \left(\frac{ka_1}{2} \right)}$$

Dabei ist die a_1 die Gitterkonstante der einatomigen Kette mit $a_1 = 0.41769 \text{ m}$, m die Masse der leichten Gleiter mit $m = 0.504 \text{ kg}$. Für den Wellenvektor k und die Eigenfrequenz ω_1 kann ein beliebiges Wertepaar aus Tabelle 9 herangezogen werden. Wir wählen das erste Paar und erhielten:

$$D_1 = \frac{0.504 \text{ kg} \cdot (1.739390 \text{ Hz})^2}{4 \sin^2 \left(\frac{0.578562 \text{ m}^{-1} \cdot 0.41769 \text{ m}}{2} \right)} = 26.238000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Dabei sind die Kreisfrequenz $\omega(k)$, der Wellenvektor k und die einatomige Gitterkonstante a_1 fehlerbehaftet. Auch die daraus berechnete Federkonstante D_1 ist damit fehlerbehaftet (Fehlerfortpflanzung):

$$\begin{aligned} \sigma_{D_1} &= \sqrt{\left(\frac{\partial D_1}{\partial \omega} \right)^2 \sigma_\omega^2 + \left(\frac{\partial D_1}{\partial k} \right)^2 \sigma_k^2 + \left(\frac{\partial D_1}{\partial a_1} \right)^2 \sigma_{a_1}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{m \cdot \omega}{2 \cdot \sin^2 \left(\frac{ka_1}{2} \right)} \right)^2 \cdot \sigma_\omega^2 + \left(\frac{a_1 \cdot m \cdot \omega^2}{4 \cdot \tan \left(\frac{ka_1}{2} \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{ka_1}{2} \right)} \right)^2 \cdot \sigma_k^2 +} \\ &\quad \left(\frac{k \cdot m \cdot \omega^2}{4 \cdot \tan \left(\frac{ka_1}{2} \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{ka_1}{2} \right)} \right)^2 \cdot \sigma_{a_1}^2} \\ &= 0.056723 \frac{\text{N}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Die Federkonstante D_1 samt Fehlergrenzen lautet:

$$D_1 = (26.238000 \pm 0.056273) \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

5.4.2 Aus der Schallgeschwindigkeit

Ein weiterer Weg die Federkonstante D der einatomigen Kette zu bestimmen, ist aus der Schallgeschwindigkeit $v_{s,1}$. Die Schallgeschwindigkeit beträgt laut Gleichung 2.4 auf Seite 8:

$$v_{s,1} = \sqrt{\frac{Da_1^2}{m}}$$

Also erhält man daraus die Federkonstante D_2 :

$$D_2 = \frac{m \cdot v_{s,1}^2}{a_1^2}$$

Wir setzen darin den 1. Wertepaar (ω_1, k_1) ein (denn da liegt k sehr nahe dem Nullpunkt):

$$D_2 = \frac{0.504 \text{ kg} \cdot (3.006402 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{(0.41769 \text{ m})^2} = 26.1106 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Weil die Schallgeschwindigkeit $v_{s,1}$ und die Gitterkonstante a_1 fehlerbehaftet sind, ist auch die davon abhängige Federkonstante D_2 mit dem Fehler nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz fehlerbehaftet:

$$\begin{aligned} \sigma_{D_2} &= \sqrt{\left(\frac{\partial D_2}{\partial v_{s,1}}\right)^2 \sigma_{v_{s,1}}^2 + \left(\frac{\partial D_2}{\partial a_1}\right)^2 \sigma_{a_1}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2 \cdot m \cdot v_{s,1}}{a_1^2}\right)^2 \sigma_{v_{s,1}}^2 + \left(\frac{2 \cdot m \cdot v_{s,1}^2}{a_1^3}\right)^2 \sigma_{a_1}^2} \\ &= 0.063897 \frac{\text{N}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Zusammenfassend für die Federkonstante D_2 haben wir:

$$D_2 = (26.110600 \pm 0.063897) \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

5.5 Federkonstante der zweiatomigen Kette

Auch für die zweiatomige Kette soll die Federkonstante D aus der Dispersionsrelation aus Gleichung 2.5 auf Seite 10 bestimmt werden. Wir nehmen den akustischen Ast:

$$\omega(k)^2 = D \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) - D \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4}{mM} \sin^2 \left(\frac{ka_2}{2} \right)}$$

Auflösen nach der gesuchten D :

$$D_3 = \frac{\omega^2}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4}{mM} \sin^2 \left(\frac{ka_2}{2} \right)}}$$

Die unbekannte Masse M des schweren Gleiters kann aus dem zuvor bestimmten Massenverhältnis $\gamma = \frac{M}{m}$ und aus der bekannten Masse des leichten Gleiters $m = 0.504 \text{ kg}$ berechnet werden:

$$M = \gamma \cdot m = 1.655921 \cdot 0.504 \text{ kg} = 0.834584 \text{ kg}$$

Da das Massenverhältnis fehlerbehaftet war, muss dies bei der Masse des schweren Gleiters M ebenfalls berücksichtigt werden (Fehlerfortpflanzung):

$$\sigma_M = m \cdot \sigma_\gamma = 0.504 \text{ kg} \cdot 0.014950 = 0.007535 \text{ kg}$$

Wir wählten dann willkürlich das erste Wertepaar (ω_1, k_1) aus Tabelle 3 auf Seite 14 und erhielten:

$$D_3 = \frac{(1.509400 \text{ Hz})^2}{\left(\frac{1}{0.504 \text{ kg}} + \frac{1}{0.834584 \text{ kg}}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{0.504 \text{ kg}} + \frac{1}{0.834584 \text{ kg}}\right)^2 - \frac{4}{0.504 \text{ kg} \cdot 0.834584 \text{ kg}} \cdot \sin^2\left(\frac{0.578562 \text{ m}^{-1} \cdot 0.83538 \text{ m}}{2}\right)}} = 26.2619 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Der Fehler σ_{D_3} der bestimmten Federkonstante D_3 entsteht aus dem Fortpflanzung der Fehler der abhängigen Größen ω , M , k und a_2 :

$$\sigma_{D_3} = \sqrt{\left(\frac{\partial D_3}{\partial \omega}\right)^2 \cdot \sigma_\omega^2 + \left(\frac{\partial D_3}{\partial M}\right)^2 \sigma_M^2 + \left(\frac{\partial D_3}{\partial k}\right)^2 \sigma_k^2 + \left(\frac{\partial D_3}{\partial a_2}\right)^2 \sigma_{a_2}^2}$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_3}{\partial \omega} &= \frac{2\omega}{\frac{1}{m} + \frac{1}{M} - \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4 \sin^2\left(\frac{a_2 k}{2}\right)}{m \cdot M}}} \\ \frac{\partial D_3}{\partial M} &= -\frac{\omega^2 \left(-\frac{1}{M^2} + \frac{m+M-2 \cdot M \cdot \sin\left(\frac{a_2 k}{2}\right)}{M^2 \sqrt{(m+M)^2 - 4mM \sin\left(\frac{a_2 k}{2}\right)}}\right)}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} - \sqrt{\frac{(m+M)^2 - 4 \cdot m \cdot M \sin\left(\frac{a_2 k}{2}\right)}{m^2 M^2}}\right)^2} \\ \frac{\partial D_3}{\partial k} &= -\frac{a_2 \cdot m \cdot M \cdot \omega^2 \cos\left(\frac{ka_2}{2}\right)}{\sqrt{\frac{(m+M)^2 - 4mM \sin\left(\frac{a_2 k}{2}\right)}{m^2 M^2}} \left(M - m \left(-1 + \sqrt{\frac{(m+M)^2 - 4mM \sin\left(\frac{ka_2}{2}\right)}{m^2}}\right)\right)^2} \\ \frac{\partial D_3}{\partial a_2} &= -\frac{k \cdot m \cdot M \cdot \omega^2 \cdot \cos\left(\frac{ka_2}{2}\right)}{\sqrt{\frac{(m+M)^2 - 4mM \sin\left(\frac{ka_2}{2}\right)}{m^2 M^2}} \left(M - m \left(-1 + \sqrt{\frac{(m+M)^2 - 4mM \sin\left(\frac{ka_2}{2}\right)}{m^2}}\right)\right)^2} \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Werte in die Gleichung des Fehlers σ_{D_3} erhält man:

$$\sigma_{D_3} = 0.042775 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Damit beträgt die Federkonstante D_3 mit Fehlergrenzen:

$$D_3 = (26.261900 \pm 0.042775) \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

5.6 Amplitudenverhältnisse

Es sind nun die Amplitudenverhältnisse $\frac{s_{0,m}}{s_{0,M}}$ der Auslenkungen der leichten und schweren Gleiter zu bestimmen.

Da die leichten und schweren Massen sich in unterschiedlichen Positionen befinden und die Amplituden an diesen Stellen gemessen wurden, müssen sie korrigiert werden, um die Positionsunabhängigkeit des Amplitudenverhältnisses zu erreichen. Dabei gilt für die Amplitude einer Schwingung am Ort x :

$$s_0(x) = s_0 \sin(kx)$$

wobei s_0 die maximale Amplitude, $k = \frac{n\pi}{13a_2}$ der Wellenvektor und x die Position der Gleiter in der Kette sind. Weiterhin gilt $x = \frac{a_2}{2}j$ mit a_2 die Gitterkonstante.

Der leichte Gleiter befand sich bei uns in Position 6, der schwere in Position 5. Das korrigierte Amplitudenverhältnis zweier benachbarter Gleiter beträgt also:

$$\frac{s_{0,m}(j)}{s_{0,M}(j-1)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{s_{0,m}^{Punkt}}{s_{0,M}^{Punkt}} \quad \text{mit} \quad a = \left| \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{13}j\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{13}(j-1)\right)} \right|$$

a ist der Korrekturfaktor des Amplitudenverhältnisses. Durch obige Formel könnten wir die Amplitudenverhältnisse berechnen. Wir bildeten für jeden Gleiter in einer Mode die Mittelwerte ihrer jeweiligen Amplituden, bestimmten den modenabhängigen Korrekturfaktor und anschließend daraus das Amplitudenverhältnis dieser Gleiter für die Mode.

Jede gemessene Amplitude ist mit einem systematischen Fehler aufgrund der Apparatur behaftet, den wir hier nicht berücksichtigen werden. Die Mittelwerte der Amplituden $\overline{s_{0,m}^{Punkt}}$, $\overline{s_{0,M}^{Punkt}}$ sind mit statistischem Fehler $\sigma_{s(6)}$ bzw. $\sigma_{s(5)}$ aufgrund der Standardabweichung behaftet.

Dadurch ist das Amplitudenverhältnis auch mit einem Fehler σ_A behaftet (Fehlerfortpflanzung):

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial s_{0,m}^{Punkt}}\right)^2 \cdot \sigma_{s(6)}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial s_{0,M}^{Punkt}}\right)^2 \cdot \sigma_{s(5)}^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{a^2 \cdot s_{0,M}^2} \cdot \sigma_{s_{0,m}}^2 + \frac{s_{0,m}^2}{a^2 \cdot s_{0,M}^4} \cdot \sigma_{s_{0,M}}^2} \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse für die akustischen und optischen Moden finden sich jeweils in Tabellen 12 und 13.

Mode n	$\overline{s_{0,m}^{Punkt}(6)}$ [mm]	$\sigma_{s(6)}$ [mm]	$\overline{s_{0,M}^{Punkt}(5)}$ [mm]	$\sigma_{s(5)}$ [mm]	a	$\frac{1}{a} \cdot \frac{\overline{s_{0,m}^{Punkt}(6)}}{\overline{s_{0,M}^{Punkt}(5)}}$	σ_A
1	63.632200	0.187230	62.182200	0.210149	1.061700	0.963849	0.004319
2	48.729400	0.134083	142.550000	0.178939	0.360892	0.947212	0.002865
3	99.888900	0.189871	55.368500	0.110198	2.011990	0.896661	0.002468
4	43.016700	0.176402	111.831000	0.187229	0.468136	0.821678	0.003640
5	45.910000	0.092146	22.045400	0.055099	3.438910	0.605576	0.011023
6	17.547700	0.088202	74.990500	0.192230	0.805754	0.290410	0.001639

Tabelle 12: Amplitudenverhältnisse für die akustischen Moden

Mode n	$\overline{s_{0,m}^{Punkt}(6)}$ [mm]	$\sigma_{s(6)}$ [mm]	$\overline{s_{0,M}^{Punkt}(5)}$ [mm]	$\sigma_{s(5)}$ [mm]	a	$\frac{1}{a} \cdot \frac{\overline{s_{0,m}^{Punkt}(6)}}{\overline{s_{0,M}^{Punkt}(5)}}$	σ_A
1	10.418500	0.147073	6.108800	0.141149	1.061700	1.606380	0.043496
2	5.954400	0.090064	9.230330	0.136884	0.360892	1.787490	0.037864
3	30.778900	0.122238	9.465280	0.111055	2.011990	1.616200	0.020028
4	16.138000	0.103081	19.393800	0.147557	0.468136	1.777520	0.017658
5	28.838900	0.127742	3.568290	0.266583	3.438910	2.350160	0.175886
6	16.413200	0.319725	4.323150	0.141820	0.805754	4.711840	0.179769

Tabelle 13: Amplitudenverhältnisse für die optischen Moden

Die bestimmten Amplitudenverhältnisse waren anschließend gegen k_n aufzutragen (Abbildung 12). Da die leichten und schweren Massen im optischen Ast gegenphasig schwingen, ist das Amplitudenverhältnis der Gleiter negativ. Die obigen Tabellen 12 und 13 zeigen nur die Beträge der Amplitudenverhältnisse.

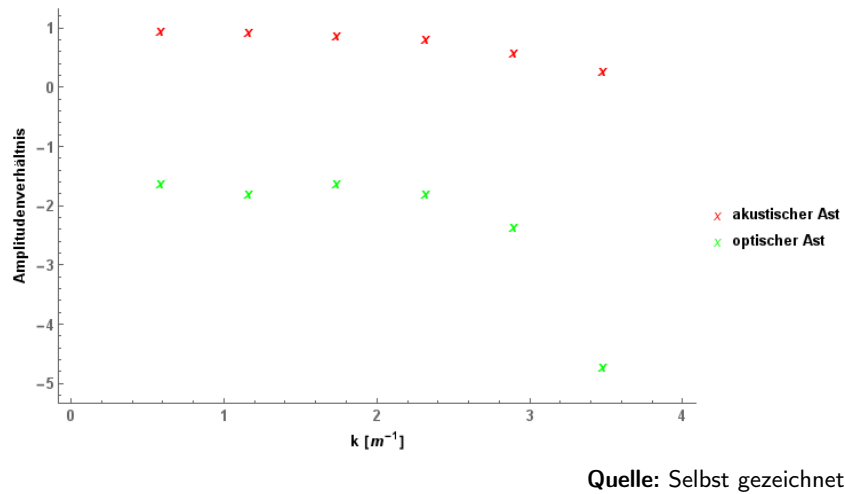


Abbildung 12: Amplitudenverhältnisse

6 Diskussion der Ergebnisse

Wir bestimmten und zeichneten die Dispersionsrelationen der einatomigen und zweiatomigen Ketten aus den gemessenen Eigenfrequenzen und stellten fest, dass diese sehr gut mit der in der Vorbereitung aus dem mathematischen Modell gezeichneten Dispersionsrelation übereinstimmen. Auch die Fehler der Eigenkreisfrequenzen ω_n und der Wellenvektoren k_n waren sehr klein. Im Anschluss wurden auch die Gitterkonstanten der linearen Ketten berechnet.

Danach wurden die Schallgeschwindigkeiten für die einatomige und zweiatomige Kette bestimmt. Diese waren aufgrund der sehr kleinen Fehler sehr gut. Das Gleiche lässt sich auch für das bestimmte Massenverhältnis sagen.

Die Federkonstanten wurden nach 3 Methoden berechnet: aus der einatomigen Kette anhand ihrer Dispersionsrelation und Schallgeschwindigkeit und aus der zweiatomigen Kette anhand ihrer Dispersionsrelation. Wir erhielten jeweils:

$$\begin{aligned} D_1 &= (26.238000 \pm 0.056273) \frac{\text{N}}{\text{m}} & D_2 &= (26.110600 \pm 0.063897) \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ D_3 &= (26.261900 \pm 0.042775) \frac{\text{N}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Diese Werte stimmen unter Berücksichtigung der Fehlergrenzen sehr gut miteinander überein.

Anschließend wurden die Amplitudenverhältnisse zwei benachbarter Gleiter bestimmt. Auch hier waren die Ergebnisse zufriedenstellend. So konnte man für den akustischen Ast beobachten, wie am Anfang das Amplitudenverhältnis fast 1 war, also die leichte und schwere Masse gleich große Auslenkungen hatten. Für größere Wellenvektoren nahm das Verhältnis ab und ging gegen 0, d.h. die leichten Massen ruhten. Im optischen Ast war das Verhältnis für kleine Wellenvektoren k relativ konstant, fiel jedoch am Ende in der Nähe der 1. Brioullin Zone stark ab, d.h. die schweren Massen ruhten.

Wir können zusammenfassend behaupten, dass die mathematischen Beschreibungen der linearen einatomigen und zweiatomigen Kette mit ihren Vereinfachungen das reale Verhalten solcher Ketten sehr gut modellieren können. Jedoch konnte in diesem Versuch keine Verknüpfung des realen Festkörpers zum Modell der linearen Kette aufgezeigt werden.

Literatur

- [1] Gitterschwingungen - Vorbereitungsmappe, September 2014.
- [2] Wikipedia. Gruppengeschwindigkeit — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2014. [Zugriff am 11. Januar 2015].

- [3] Wikipedia. Kristallstruktur — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2014. [Zugriff am 11. Januar 2015].
- [4] Wikipedia. Stehende Welle — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2014. [Zugriff am 11. Januar 2015].
- [5] Wikipedia. Wigner-Seitz-Zelle — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2014. [Zugriff am 11. Januar 2015].