Отчет по практикуму на ЭВМ "Аппроксимация дифференциальной задачи с помощью метода кусочно-квадратичных конечных элементов"

Артем Зданович, 411 группа

22 января 2024 г.

1 Постановка Задачи

Аппроксимировать следующую задачу с помощью метода конечных элементов (кусочно квадратичных) и найти решение полученной системы алгебраических уравнений многосеточным методом при различных h и f

$$-(ku')' + u' + u = f(x),$$

$$u(0) + u'(0) = u(1) = 0, k = \begin{cases} 5/2 & x \leq 0.5 \\ 3 & x > 0.5 \end{cases}$$

Исследовать построенную разностную схему на устойчивость и сходимость.

2 Метод решения

Найдем решение в виде $u(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i \phi_i^h(x) + \sum_{i=0}^{N-1} c_i \psi_i^h(x)$, где c_i – некоторые коэффициенты, а $\{\phi_i^h(x), \psi_i^h(x)\}$ – набор базисных функций. Всего их $2N+1$. Явный вид этих функций:

$$\begin{cases} \phi_i^h(x) = \frac{(h(i-1)-x)(-h(i+1)+x)}{h^2}, i = 0, \dots, N \\ \psi_i^h(x) = -4N^2(x - \frac{i}{N})^2 + 1, i = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

Пусть наша сетка имеет вид $D_h = \{x_j = jh, j = 0, \dots, N; Nh = 1\}$. Считаем, что точка разрыва функции k—0.5 принадлежит множеству узлов сетки (т.е. N–четно).

Используем метод Галеркина:

$\sum_{j=0}^{N} c_j^{\phi}(L\phi_j^h(x), \phi_i^h(x)) + \sum_{j=0}^{N-1} c_j^{\psi}(L\psi_j^h(x), \phi_i^h(x)) = (f, \phi_i^h(x))$ (и аналогичное равенство, где в правой части скалярных произведений стоит $\psi_i^h(x)$).

Кроме того, имеем граничное условие, которое будем использовать позже:

$u(0) + u'(0) = u(1) = 0$.

Задача свелась к нахождению c_i из решения СЛУ $Ac = b$. Найдем элементы A (используя пакет Wolfram Mathematica) для каждого вида базисных функций:

$(L\phi_j^h(x), \phi_i^h(x)) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (k(\phi_j^h(x))'(\phi_i^h(x))' + (\phi_j^h(x))'\phi_i^h(x) + \phi_j^h(x)\phi_i^h(x) = \frac{16h}{15} + \frac{8k}{3h}, i = j$

$(L\phi_j^h(x), \phi_i^h(x)) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (k(\phi_j^h(x))'(\phi_i^h(x))' + (\phi_j^h(x))'\phi_i^h(x) + \phi_j^h(x)\phi_j^h(x) = \frac{11h}{30} - \frac{2k}{3h} \pm \frac{5}{6}, (+, i = j-1, -, i = j+1)$

$(L\psi_j^h(x), \psi_i^h(x)) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (k(\psi_j^h(x))'(\psi_i^h(x))' + (\psi_j^h(x))'\psi_i^h(x) + \psi_j^h(x)\psi_i^h(x)) = \frac{8h}{15} + \frac{16k}{3h}, i = j$

$(L\phi_j^h(x), \psi_i^h(x)) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (-k(\phi_j^h(x))'(\psi_i^h(x))' + (\phi_j^h(x))'\psi_i^h(x) + \phi_j^h(x)\psi_i^h(x)) = \pm\frac{2}{3} + \frac{7h}{15} + \frac{4k}{3h}$, ($-$, если $j = i$; $+$, если $j = i+1$)

$(L\psi_j^h(x), \phi_i^h(x)) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (-k(\psi_j^h(x))'(\phi_i^h(x))' + (\psi_j^h(x))'\phi_i^h(x) + \psi_j^h(x)\phi_i^h(x)) = \pm\frac{2}{3} + \frac{7h}{15} + \frac{4k}{3h}$, ($-$, если $j = i-1$; $+$, если $j = i$)

Матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} + \frac{4k}{3h} + \frac{8h}{15} & \frac{-2k}{3h} + \frac{5}{6} + \frac{11h}{30} & \frac{4k}{3h} + \frac{2}{3} + \frac{8h}{15} & 0 & 0 & \cdots \\ (\psi_0^h(x), L\phi_0^h(x)) & (\psi_0^h(x), L\psi_0^h(x)) & (\psi_0^h(x), L\phi_1^h(x)) & 0 & 0 & \cdots \\ (\phi_1^h(x), L\phi_0^h(x)) & (\phi_1^h(x), L\psi_0^h(x)) & (\phi_1^h(x), L\phi_1^h(x)) & (\phi_1^h(x), L\psi_1^h(x)) & (\phi_1^h(x), L\phi_2^h(x)) & \cdots \\ 0 & 0 & (\psi_1^h(x), L\phi_1^h(x)) & (\psi_1^h(x), L\psi_1^h(x)) & (\psi_1^h(x), L\phi_2^h(x)) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

где первая строка состоит из краевых условий.

Теперь найдем вектор b:

$b_i^{\phi} = (f, \phi_i^h(x)) = \int_0^1 f\phi_i^h(x)dx$

$b_i^{\psi} = (f, \psi_i^h(x)) = \int_0^1 f\psi_i^h(x)dx$

Следовательно: $b = (b_0^{\phi}, b_0^{\psi}, b_1^{\phi}, b_1^{\psi}, \dots)$ Используем краевые условия:

$u(0) + u'(0) = 0 \Rightarrow c_0^{\phi}(-\frac{5}{2} + \int_0^1 (k(\phi_0^h(x))'(\phi_0^h(x))' + (\phi_0^h(x))'\phi_0^h(x) + \phi_0^h(x)\phi_0^h(x)) + c_1^{\phi}(\int_0^1 (k(\phi_1^h(x))'(\phi_0^h(x))' + (\phi_1^h(x))'\phi_0^h(x) + \phi_1^h(x)\phi_0^h(x)) + c_0^{\psi}(\int_0^1 (k(\phi_0^h(x))'(\psi_0^h(x))' + (\phi_0^h(x))'\psi_0^h(x) + \phi_0^h(x)\psi_0^h(x)) = \int_0^1 f\phi_0 dx$

$u(1) = 0 \Rightarrow c_{\underset{N}{\phi}}\phi_N^h = 0 \Rightarrow c_{\underset{N}{\phi}} = 0$.

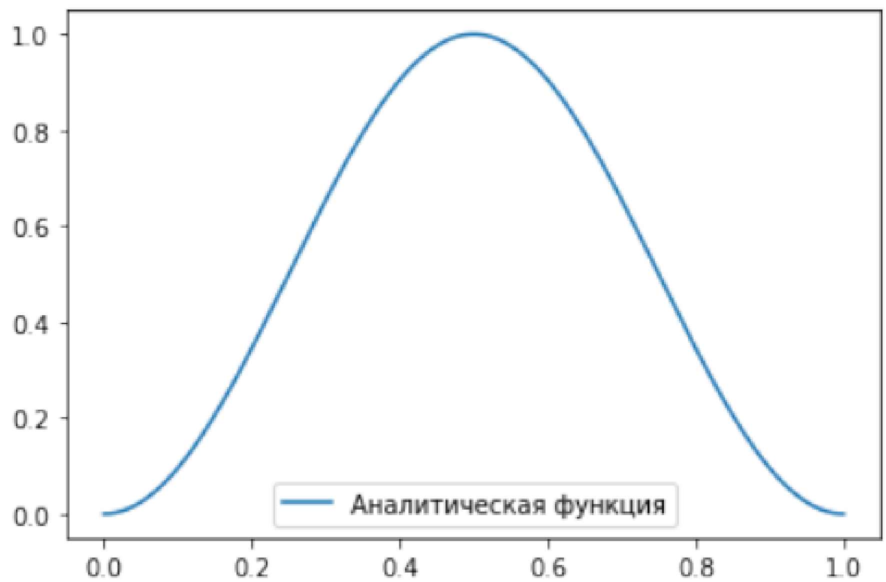
Остальные коэффициенты вычислим, используя программу на языке C++

3 Аппроксимация

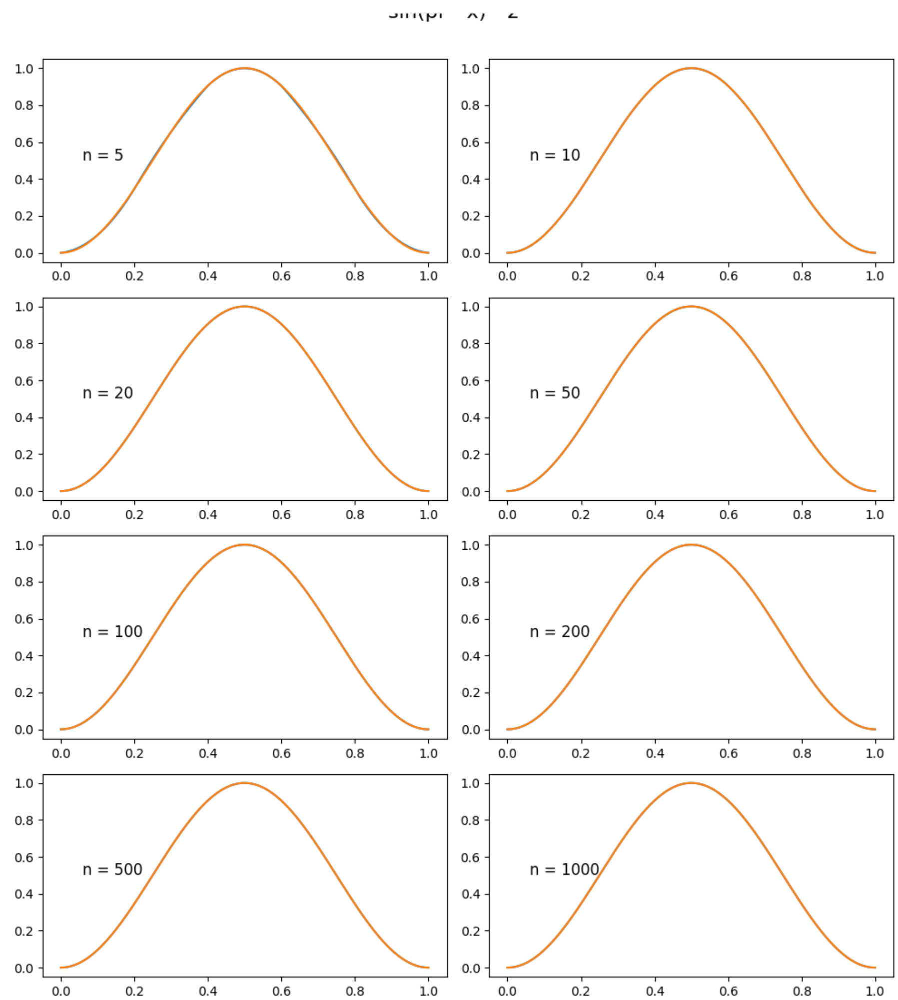
Посмотрим на работу алгоритма на примере. Возьмем в качестве правой части

$$f(x) = \pi sin(2\pi x) - \frac{1}{2}(1 + 4k\pi^2)cos(2\pi x) + \frac{1}{2}$$

Тогда аналитическим решением задачи будет $sin^2(\pi x)$. Аппроксимируем решение с данной функцией f и построим графики обеих функций. Так как наша схемах на многочленах второй степени точна, то она аппроксимирует решение с точностью $O(h^3)$. Имеет место устойчивость и сходимость.



4 Результаты



Зависимость погрешности, от масштаба разбиения при различных $N = 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000$ представлена ниже:

N	Погрешность
5	0.007417784509667902
10	0.0010042043463169836
20	0.00012387928543550197
50	7.931414252815294e-06
100	9.895600467380028e-07
200	1.211727257421913e-07
500	7.03288249859213e-09
1000	9.68061797390618e-10