

## 1 目的

連成振動のモデルの検証を行なう。

## 2 原理

### 単振子の特性

回転軸から振動子の重心までの距離を  $h[\text{m}]$ 、振動子の質量を  $m[\text{kg}]$ 、回転軸に対する振動子の慣性モーメントを  $I[\text{kgm}^2]$  とすると、振動子の振れの角度  $\theta$  は、

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh \sin \theta \\ \approx -mgh\theta$$

と表される。このことから、単振子の振動数  $f[\text{Hz}]$  は、

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgh}{I}}$$

と求まる。

### 回転軸の結合係数

一つの回転軸に同じ質量で同じ腕の長さの 2 つの振子 (A, B) を同じ向きに固定して土台に置き、重力に従って垂れさせる。この時、片方の振子に力を加えて  $\theta_A$  だけ回転させて固定すると、もう片方の振子も回転軸から加わるトルク  $N$  によって回転する。そして、 $\theta_B$  だけ回転したところで重力のトルク  $mgh \sin \theta_B$  と  $N$  が釣り合って停止する。

ところで、ねじれの角度  $\Delta\theta = \theta_A - \theta_B$  が  $\pi$  に比べて十分小さいとき、 $N$  と  $\Delta\theta$  の間には比例関係があると考えて良い。このことから、結合定数  $c$  を導入することによってトルクの釣り合いの式は

$$mgh \sin \theta_B = c(\theta_A - \theta_B)$$

と表されることが分かる。

### 連成振動の特性

#### 連成振子の動き

一つの回転軸に同じ質量で同じ腕の長さの 2 つの振子 (A, B) を固定して振動させることを考える。このとき、振子 A, B はそれぞれ重力のモーメントと回転軸のねじれから生じる復元力のモー

メントが働く。

このことから運動方程式を立てると、

$$\begin{aligned} I \frac{d^2 \theta_A}{dt^2} &= -mgh \sin \theta_A + c(\theta_B - \theta_A) \approx -mgh \theta_A + c(\theta_B - \theta_A) \\ I \frac{d^2 \theta_B}{dt^2} &= -mgh \sin \theta_B - c(\theta_B - \theta_A) \approx -mgh \theta_B - c(\theta_B - \theta_A) \end{aligned}$$

となる。これを、変数変換、

$$\begin{aligned} \theta_G &= \frac{\theta_A + \theta_B}{2} \\ \theta_R &= \frac{\theta_A - \theta_B}{2} \end{aligned}$$

を用いて解くと、

$$\begin{aligned} \theta_G &= A \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \theta_R &= B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\omega_1 = \sqrt{mgh/I}$ 、 $\omega_2 = \sqrt{(mgh + 2c)/I}$  であり、A、B、 $\phi_1$ 、 $\phi_2$  は未定定数である。

ここで、 $\theta_G$ 、 $\theta_R$  から  $\theta_A$ 、 $\theta_B$  を求めると、

$$\begin{aligned} \theta_A &= A \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \theta_B &= A \cos(\omega_1 t + \phi_1) - B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

が得られる。このことから、2 つの結合した振子の運動は基準振動の重ね合わせで表せることが分かる。

### 基準振動

以下の 2 つの初期条件について振動数を測定することで、基準振動の角振動数  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  を実験的に得ることができる。

まず、時刻  $t = 0$  において  $\theta_A = \theta_B = \theta_0$  で振子が静止している場合について考えると、

$$\theta_A = \theta_0 \cos(\omega_1 t), \theta_B = \theta_0 \cos(\omega_1 t)$$

が成り立つ。従って、振子 A,B の振動の周波数を計測することで  $\omega_1$  を求めることができる。次に、時刻  $t = 0$  において  $\theta_A = \theta_0$ 、 $\theta_B = -\theta_0$  で振子が静止している場合について考えると、

$$\theta_A = \theta_0 \cos(\omega_2 t), \theta_B = -\theta_0 \cos(\omega_2 t)$$

が成り立つ。従って、同様にして  $\omega_2$  を求めることができる。

うなり

$t = 0$  において、 $\theta_A = \theta_0$ ,  $\theta_b = 0$  で振子が静止している場合について考える。

初期条件より  $A = B = \theta_0/2$ ,  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  となるので、

$$\begin{aligned}\theta_A &= \theta_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \\ \theta_B &= \theta_0 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\end{aligned}$$

である。これは、振幅振動を表している。この振幅振動の角周波数は  $\omega_2 - \omega_1$  であるから、その周期は  $T_{AB} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$  である。

### 3 装置

実験で用いた剛体振子実験装置について説明する。この装置は、軽量の SUS パイプと 0.35kg の重りからなる振り子、振子を吊るすための回転軸 (SUS の細い棒)、そして軸を置く土台からなる。振り子についているネジを締めることで、振子と軸を固定することができる。さらに、土台には目盛りが付いており、振子が中心からどれだけ動いたかを測定することができる。また、軸受けから目盛りまでの距離は  $R = 63.5[\text{cm}]$  である。

### 4 方法

まず、実験 A により単振子の特性を調べた。次に、実験 B により回転軸の結合係数を調べた。最後に、実験 C により連成振動の特性を調べた。

#### 実験 A. 単振子の特性

振子を回転軸に固定し、軸を土台に置いて自由に振動できるようにした。そして、初期振幅を  $x = 5[\text{cm}]$  とし、重りの中心と回転軸との間の距離  $y$  を変えながら、振子の振動数  $f$  を計測した。振動数  $f$  を計測するときは、振子が静止状態から 30 往復する時間をストップウォッチで計測し、1 往復にかかる時間  $T$  を求め、その逆数から振動数  $f$  を求めた。また、 $y$  を変化させるときは、 $0.3[\text{m}]$  から  $0.6[\text{m}]$  まで  $5[\text{cm}]$  刻みで変化させた。

#### 実験 B. 回転軸の結合係数

腕の長さ  $y = 0.45[\text{m}]$  の 2 つの振子 A、B を  $0.5\text{m}$  ほどの間隔をあけて回転軸に固定した。この時、ねじれがないように注意した。そして、外力が無い状態でポインタが示す目盛り  $s_A(0)$ ,  $s_B(0)$  を記録した。

その後、振子 A のおもりを手で持って静かに座標  $s_A$  を変化させ、傾角  $\theta_A = (s_A - s_A(0))/R$  を変化させる。それぞれの  $s_A$  ごとに  $s_B$  を読み取り、 $\theta_B = (s_B - s_B(0))/R$  を測定した。

## 実験 C. 連成振動の特性

実験 B と同様に実験器具を設定し、以下の a,b,c の 3 つの初期条件について、振子を振動させた。a, b に関しては、振子が静止状態から 30 往復するまでの時間をストップウォッチにて計測した。c に関しては、振子を運動させ、片方の振子の振幅が 0 になってからもう一度振幅が 0 になるまでの時間をストップウォッチにて計測した。いずれの計測も、同じ条件で何度か実施した。

### a. 角振動数 $\omega_1$ を与える初期条件

$t = 0$  にて  $s_A = 5[\text{cm}], s_B = 5[\text{cm}]$  の位置でポインタを置き、静止状態から静かに手を離す。

### b. 角振動数 $\omega_2$ を与える初期条件

$t = 0$  にて  $s_A = 5[\text{cm}], s_B = -5[\text{cm}]$  の位置でポインタを置き、静止状態から静かに手を離す。

### c. うなりを与える初期条件

$t = 0$  にて  $s_A = 5[\text{cm}], s_B = 0[\text{cm}]$  の位置でポインタを置き、静止状態から静かに手を離す。

## 5 データ

### 実験 A. 単振子の特性

表 1: 単振子の特性

$y[\text{cm}]$	$time[\text{s}]$
30.1	34.31
35.1	36.37
40.1	38.3
45.1	40.14
50.1	42.05
55.1	43.85
60.1	45.89

### 実験 B. 回転軸の結合係数

振子に力を加えない状態のポインタの値は

$$s_A(0) = 3.5[\text{mm}]$$

$$s_B(0) = 1.0[\text{mm}]$$

であった。

また、表??の  $s_A, s_B$  に関しては、測定値からそれぞれ  $s_A(0)$ ,  $s_b(0)$  を引いた値である。

表 2: 回転軸の結合係数

$s_A[\text{mm}]$	$s_B[\text{mm}]$	$s_A[\text{mm}]$	$s_B[\text{mm}]$	$s_A[\text{mm}]$	$s_B[\text{mm}]$
$-1.3 \times 10^{-2}$	$-1.8 \times 10^{-3}$	$6.5 \times 10^{-3}$	0.0	$5.6 \times 10^{-2}$	$5.3 \times 10^{-3}$
$-2.4 \times 10^{-2}$	$-3.0 \times 10^{-3}$	$1.7 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$6.1 \times 10^{-2}$	$6.0 \times 10^{-3}$
$-3.4 \times 10^{-2}$	$-3.9 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-2}$	$1.9 \times 10^{-3}$	$6.7 \times 10^{-2}$	$6.5 \times 10^{-3}$
$-4.4 \times 10^{-2}$	$-5.0 \times 10^{-3}$	$2.6 \times 10^{-2}$	$2.5 \times 10^{-3}$	$7.1 \times 10^{-2}$	$6.8 \times 10^{-3}$
$-5.4 \times 10^{-2}$	$-5.9 \times 10^{-3}$	$3.2 \times 10^{-2}$	$2.8 \times 10^{-3}$	$7.6 \times 10^{-2}$	$7.0 \times 10^{-3}$
$-6.4 \times 10^{-2}$	$-6.5 \times 10^{-3}$	$3.6 \times 10^{-2}$	$3.1 \times 10^{-3}$	$8.2 \times 10^{-2}$	$8.0 \times 10^{-3}$
$-7.4 \times 10^{-2}$	$-7.8 \times 10^{-3}$	$4.1 \times 10^{-2}$	$3.7 \times 10^{-3}$	$8.6 \times 10^{-2}$	$8.4 \times 10^{-3}$
$-8.4 \times 10^{-2}$	$-9.0 \times 10^{-3}$	$4.6 \times 10^{-2}$	$4.0 \times 10^{-3}$		
$-9.3 \times 10^{-2}$	$-9.9 \times 10^{-3}$	$5.1 \times 10^{-2}$	$4.8 \times 10^{-3}$		

### 実験 C. 連成振動の特性

a. 角振動数  $\omega_1$  を与える初期条件

1 回目 39.17[s]

2 回目 39.19[s]

b. 角振動数  $\omega_2$  を与える初期条件

1 回目 35.56[s]

2 回目 35.54[s]

c. うなりを与える初期条件

1 回目 11.90[s]

2 回目 12.05[s]

3 回目 12.27[s]

4 回目 11.83[s]

5 回目 12.21[s]

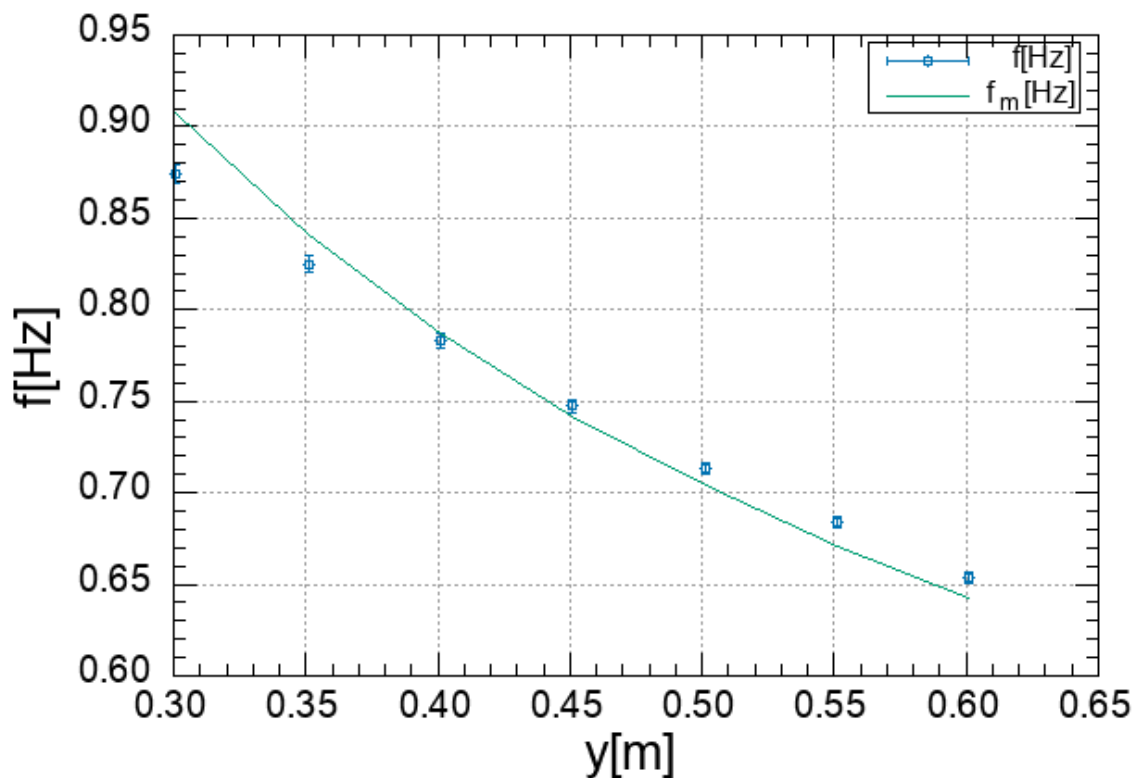


図 1: 剛体単振子の特性と単振子の理論特性

## 6 解析

### 実験 A. 単振子の特性

振動数  $f$  の測定誤差  $\Delta f$  を見積もる。誤差伝播の法則から、

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = -\frac{30}{t^2} \Delta t$$

となる。ただし、計測時間の誤差である  $\Delta t$  は、ストップウォッチを押すタイミングのミスが原因であると考え  $\Delta t = 0.2[\text{s}]$  とした。

この値をエラーバーの大きさに取って表??をグラフにしたのが図??である。ただし、全質量がおもりの中心に集中していると仮定した単振子の振動数  $f_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{y}}$  も同じグラフにプロットした。

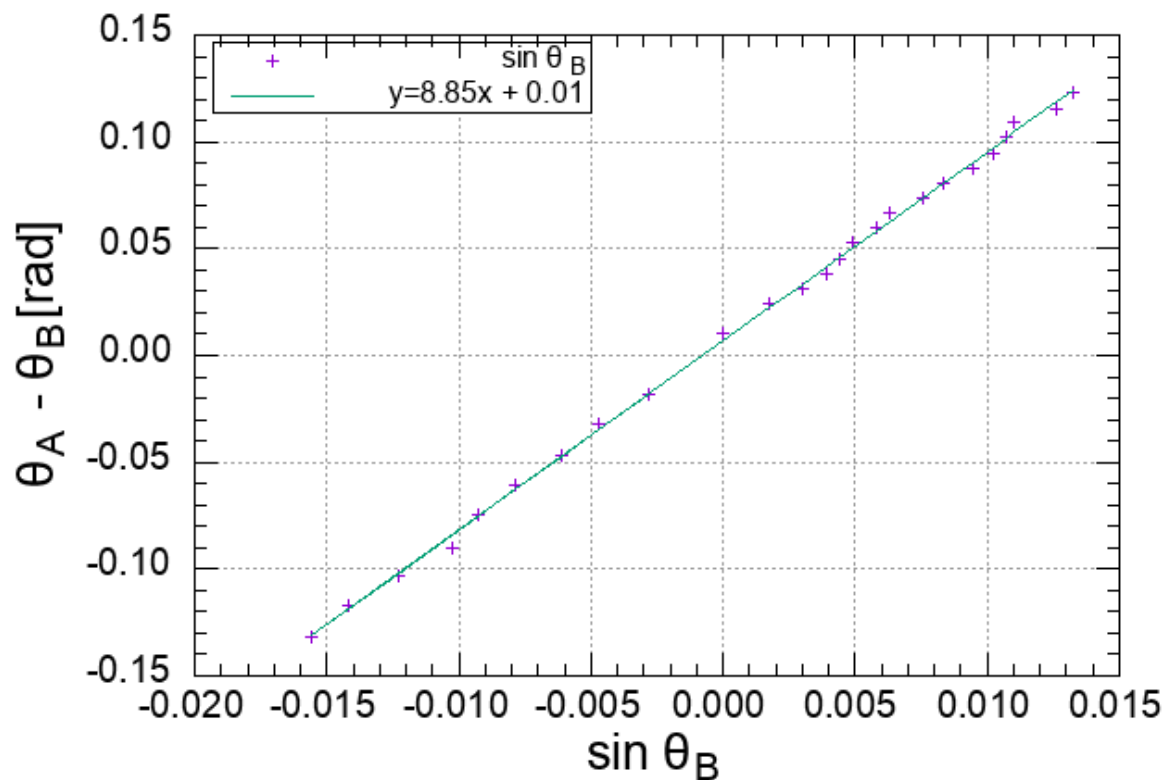


図 2: 重力によるモーメントとねじれによるモーメントの関係

### 実験 B. 回転軸の結合係数

図??をグラフにプロットしたのが図??である。ただし、最小二乗法によって傾き・切片を計算した直線を書き足してある (傾き  $q = 8.85$  であった)。また、最小二乗法によって求めた傾きの誤差は有効桁数以下の大きさだったので無視した。

### 実験 C. 連成振動の特性

#### a. 角振動数 $\omega_1$ を与える初期条件

1 回目と 2 回目の結果を平均した値を「30 往復にかかった時間」とし、 $\omega_1$  を求めると、

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\frac{39.17+39.19}{2 \times 30}} = 4.811 [\text{Hz}]$$

となる。

b. 角振動数  $\omega_2$  を与える初期条件

1 回目と 2 回目の結果を平均した値を「30 往復にかかった時間」とし、 $\omega_2$  を求めると、

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{\frac{35.56+35.54}{2 \times 30}} = 5.302[\text{Hz}]$$

となる。

c. うなりを与える初期条件

1 ~ 5 回目の結果を平均した値を  $T_{AB}$  とすると、

$$T_{AB} = \frac{11.90 + 12.05 + 12.27 + 11.83 + 12.21}{5} = 12.05[\text{s}]$$

となる。

## 7 考察

### 7.1 単振子モデルとのズレ

単振子モデル  $f_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{y}}$  と、実験 A の結果とのズレ  $\Delta f = |f_m - f|$  をグラフにすると、図?? のようになる。このグラフを見ると、 $y = 0.4[\text{m}]$  においてズレが最小となっており、 $y = 0.4[\text{m}]$  から離れるに従ってズレが大きくなることが分かる。

このことは、振子の腕に無視できない大きさの重さがあることから説明できる。すなわち、振子全体の重心  $h$  は腕の中心にある腕自体の重心と重りの重心の平均になるため、 $y$  よりも腕の中心に近い場所にあるのである。腕の中心に近い  $y = 0.4[\text{m}]$  においてズレが最小となっているのは、 $y = 0.4[\text{m}]$  付近において腕自体の重心と重りの重心が一致するためと考えられる。

ところで、腕の長さは  $R = 0.65[\text{m}]$  であるから、腕の重心は  $y = \frac{R}{2} = 0.33[\text{m}]$  にあるはずである。このように腕の重心の位置とズレが最小となる位置がずれるのは、振子の運動が軸受の摩擦などの影響で減衰振動になっていたからと考えられる。減衰振動の振動数は減衰なしの振動数に比べて小さくなるため、実験結果のグラフ全体が「下」にずれ込み、単振動モデルの振動数と一致する  $y$  が大きくなったと考えられる。

### 7.2 $\omega_1 < \omega_2$ となる理由

$\omega_1 < \omega_2$  となる理由を定性的に考察する。

質量  $m$  の物体が  $F(x) = -kx$  の力を受けるときの単振動の角振動数は  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  であり、 $k$  が大きいと  $\omega$  が大きくなる。また、初期条件 (b) では、重力だけでなく金属棒のねじれトルクが加わるため、初期条件 (a) に比べて  $k$  の値が大きくなる。従って、 $\omega_1 < \omega_2$  となると考えられる。



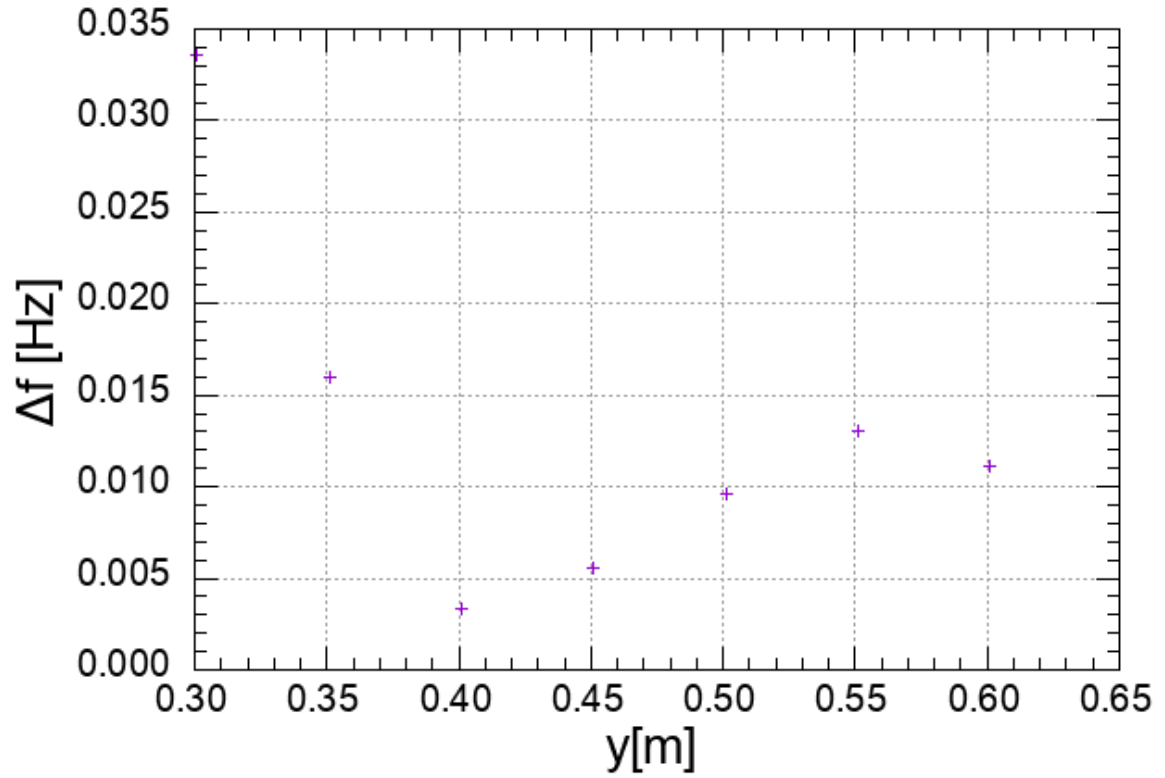


図 3: 実験結果と単振子モデルのズレ

### 7.3 $q$ と $T_{AB}$ の関係

まず、 $q$  の定義から、

$$c = \frac{mgh}{q}$$

である。

また、 $\omega_1, \omega_2$  の定義から、

$$\begin{aligned}
 \omega_2 - \omega_1 &= \sqrt{(mgh + 2c)/I} - \sqrt{mgh/I} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{I}} \left( \sqrt{mgh + 2c} - \sqrt{mgh} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{I}} \left( \sqrt{mgh + 2mgh/q} - \sqrt{mgh} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{I/mgh}} \left( \sqrt{1 + 2/q} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

また、 $\omega_0 = \omega_1 = \sqrt{mgh/I}$  から、

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_0 \left( \sqrt{1 + 2/q} - 1 \right)$$

従って、

$$T_{AB} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\left( \sqrt{1 + 2/q} - 1 \right)}$$

となる。

また、実験 A の振子が  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgh}{I}}$  に従っているとすると、実験結果より、 $y = 0.45[\text{m}]$  のとき、

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2\pi f \\ &= 2\pi \times \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgh}{I}} \\ &= 2\pi \times 0.7474 \end{aligned}$$

となる。

これらから  $T_{AB}$  を求めると、 $T_{AB} = 12.47[\text{s}]$  となる。ところで、 $T_{AB}$  の測定誤差  $\Delta T_{AB}$  は、

$$\Delta T_{AB} = \sqrt{\left( \frac{\partial T_{AB}}{\partial \omega_1} \right)^2 \Delta \omega_1^2 + \left( \frac{\partial T_{AB}}{\partial \omega_2} \right)^2 \Delta \omega_2^2} \approx 1[\text{s}]$$

であるから、 $T_{AB}$  の実測値 (11.90, 12.05, 12.27, 11.83, 12.21) のいずれも誤差幅の中に入る事がわかる。

## 7.4 連成振動の振子の振れ角の時間変化

振れ角の時間変化の周波数  $f_{amp}$  は、

$$f_{amp} = f_2 - f_1 = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} = 0.07819[\text{Hz}]$$

または、

$$f_{amp} = f_{AB} = \frac{1}{T_{AB}} = 0.08297[\text{Hz}]$$

と求まる。

これを元に振子 A,B の振れ角の時間変化をグラフにしたのが図??、図??である。ただし、 $\theta_0 = \frac{5[\text{cm}]}{64.5[\text{cm}]} = 0.0787$  とした。

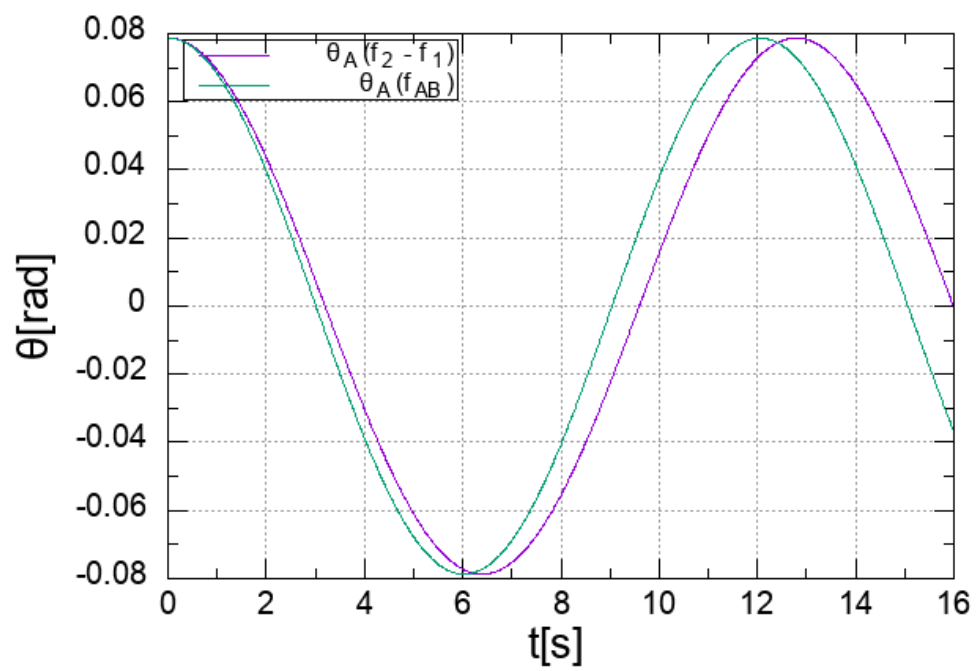


図 4: 振子 A の振れ角の時間変化

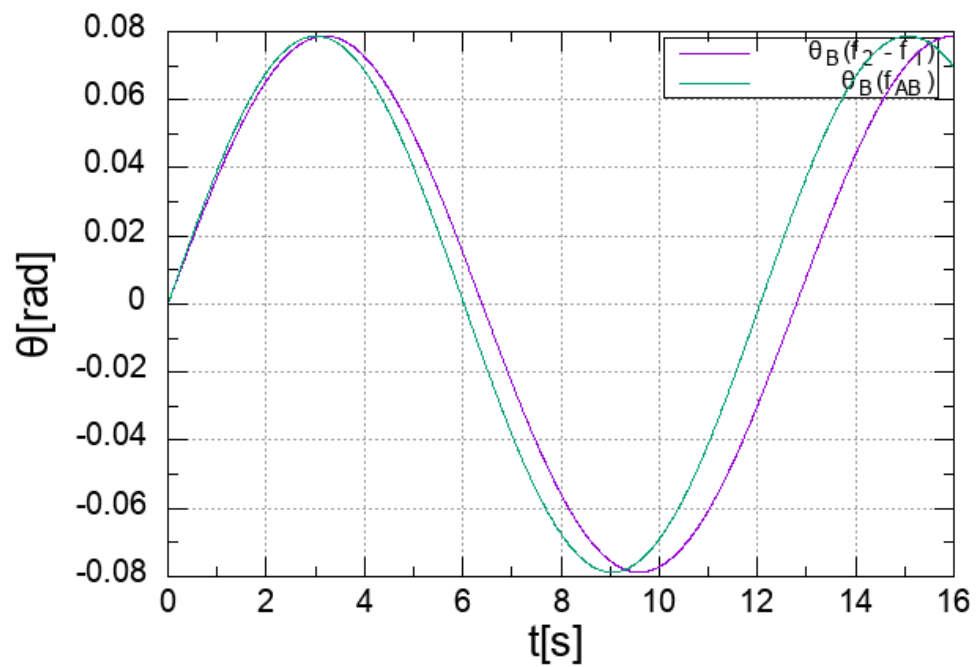


図 5: 振子 B の振れ角の時間変化

## 7.5 電気回路における連成振動

同一のコンデンサ  $C$ 、同一のコイル  $L$  を用いて作成された 2 つの LC 共振回路があるとする。さらに、これらの共振回路のコイルの間に、大きさ  $M$  の相互インダクタンスがあるとする。この時、これら 2 つの回路に流れる電流は連成振動を成す。

この連成振動の基準振動の角周波数は  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}}$  と  $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}$  の 2 つとなる。

## 8 結論

連成振動の実験結果は、その理論的なモデルに測定誤差の範囲で従う。

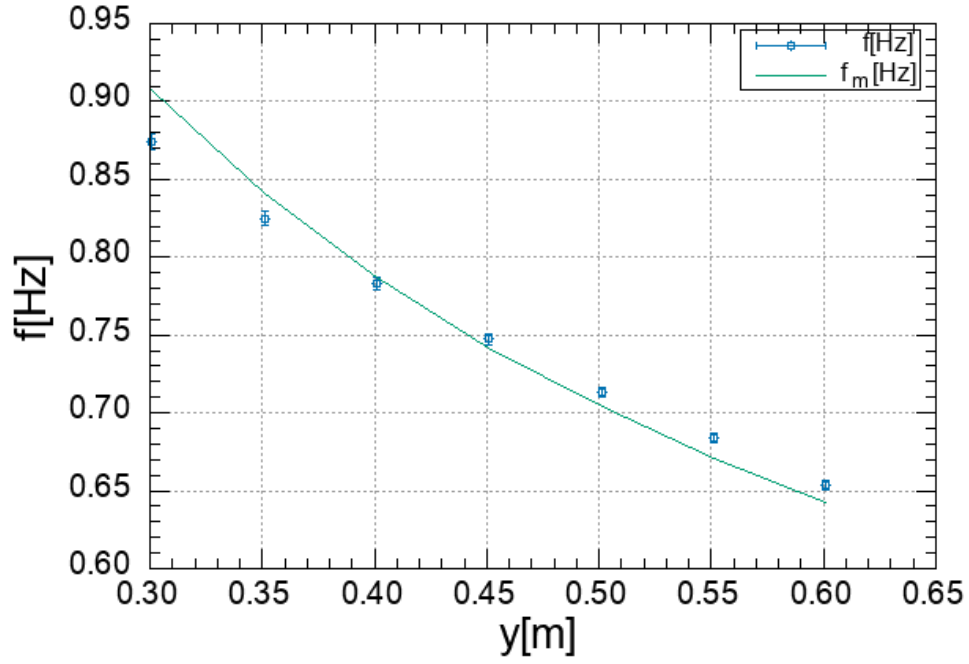


図 6: 剛体単振子の特性と単振子の理論特性

表 3: 回転軸の結合係数

$s_A[mm]$	$s_B[mm]$	$s_A[mm]$	$s_B[mm]$	$s_A[mm]$	$s_B[mm]$
$-1.3 \times 10^{-2}$	$-1.8 \times 10^{-3}$	$6.5 \times 10^{-3}$	0.0	$5.6 \times 10^{-2}$	$5.3 \times 10^{-3}$
$-2.4 \times 10^{-2}$	$-3.0 \times 10^{-3}$	$1.7 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$6.1 \times 10^{-2}$	$6.0 \times 10^{-3}$
$-3.4 \times 10^{-2}$	$-3.9 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-2}$	$1.9 \times 10^{-3}$	$6.7 \times 10^{-2}$	$6.5 \times 10^{-3}$
$-4.4 \times 10^{-2}$	$-5.0 \times 10^{-3}$	$2.6 \times 10^{-2}$	$2.5 \times 10^{-3}$	$7.1 \times 10^{-2}$	$6.8 \times 10^{-3}$
$-5.4 \times 10^{-2}$	$-5.9 \times 10^{-3}$	$3.2 \times 10^{-2}$	$2.8 \times 10^{-3}$	$7.6 \times 10^{-2}$	$7.0 \times 10^{-3}$
$-6.4 \times 10^{-2}$	$-6.5 \times 10^{-3}$	$3.6 \times 10^{-2}$	$3.1 \times 10^{-3}$	$8.2 \times 10^{-2}$	$8.0 \times 10^{-3}$
$-7.4 \times 10^{-2}$	$-7.8 \times 10^{-3}$	$4.1 \times 10^{-2}$	$3.7 \times 10^{-3}$	$8.6 \times 10^{-2}$	$8.4 \times 10^{-3}$
$-8.4 \times 10^{-2}$	$-9.0 \times 10^{-3}$	$4.6 \times 10^{-2}$	$4.0 \times 10^{-3}$		
$-9.3 \times 10^{-2}$	$-9.9 \times 10^{-3}$	$5.1 \times 10^{-2}$	$4.8 \times 10^{-3}$		

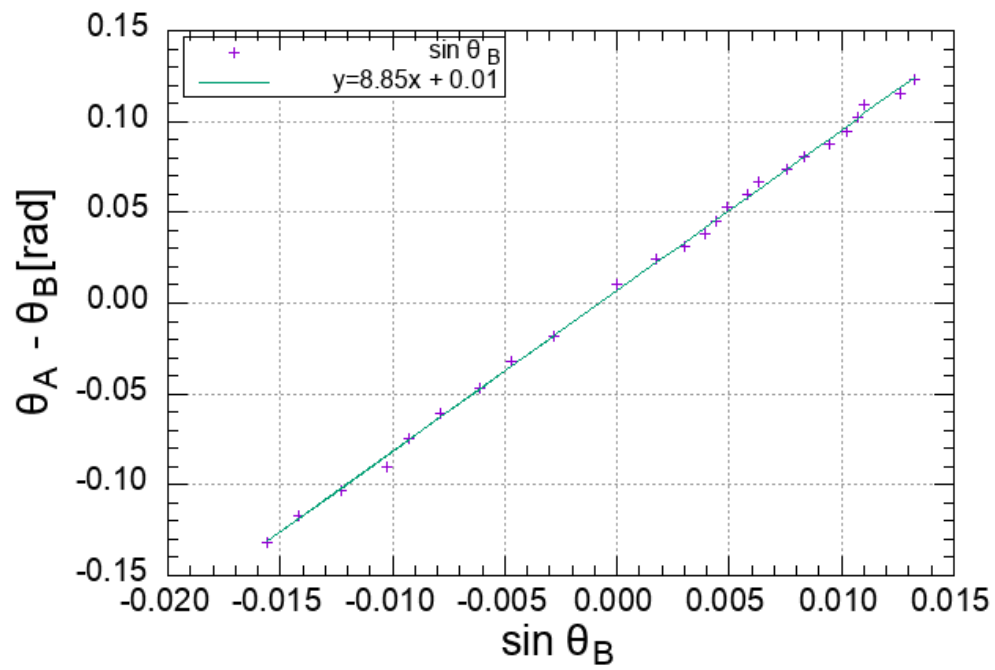


図 7: 重力によるモーメントとねじれによるモーメントの関係

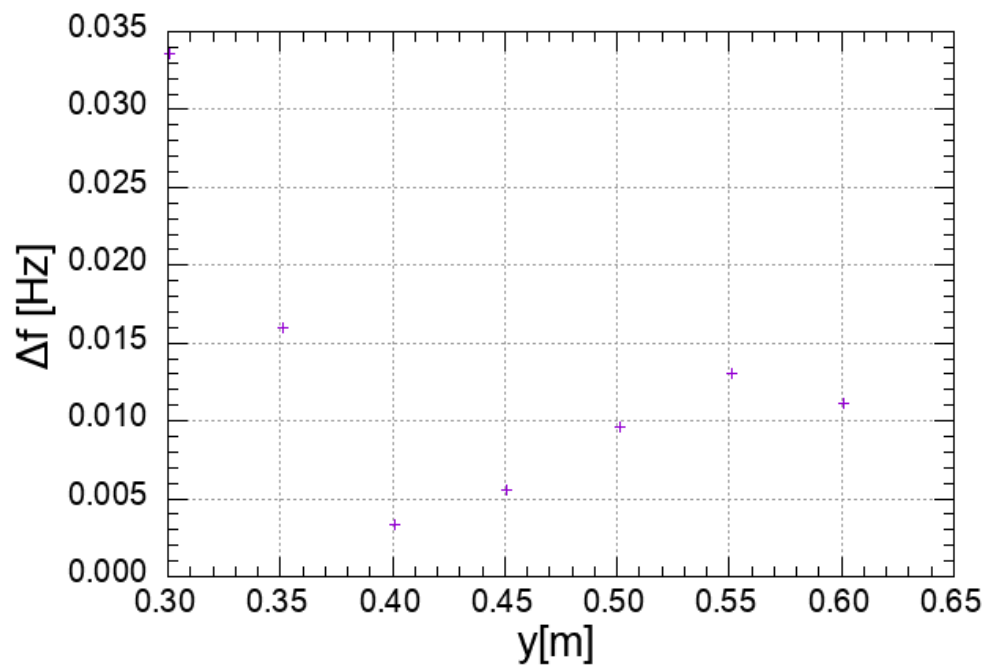


図 8: 実験結果と単振子モデルのズレ

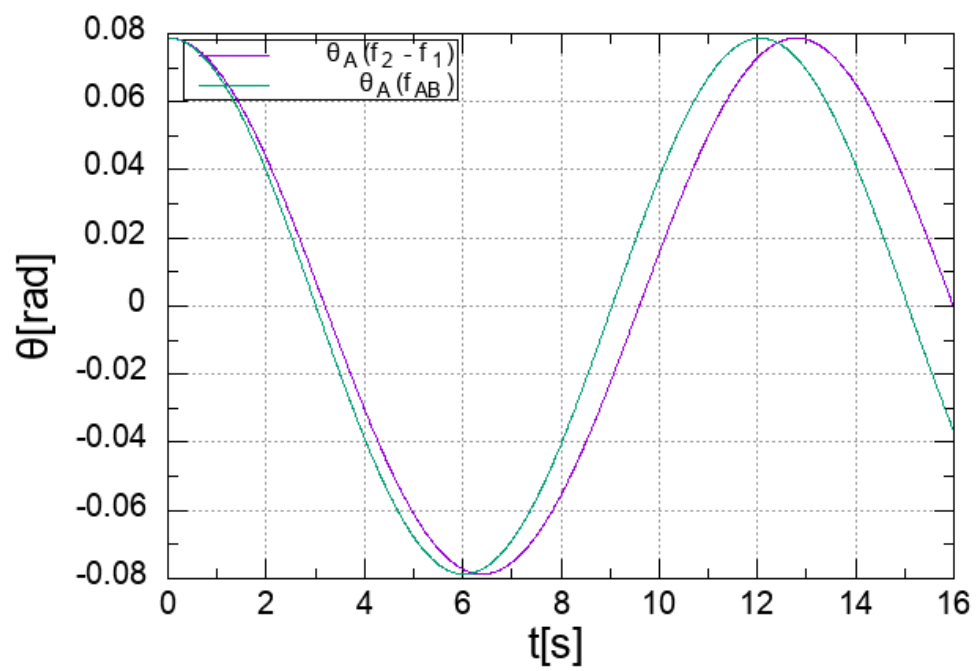


図 9: 振子 A の振れ角の時間変化

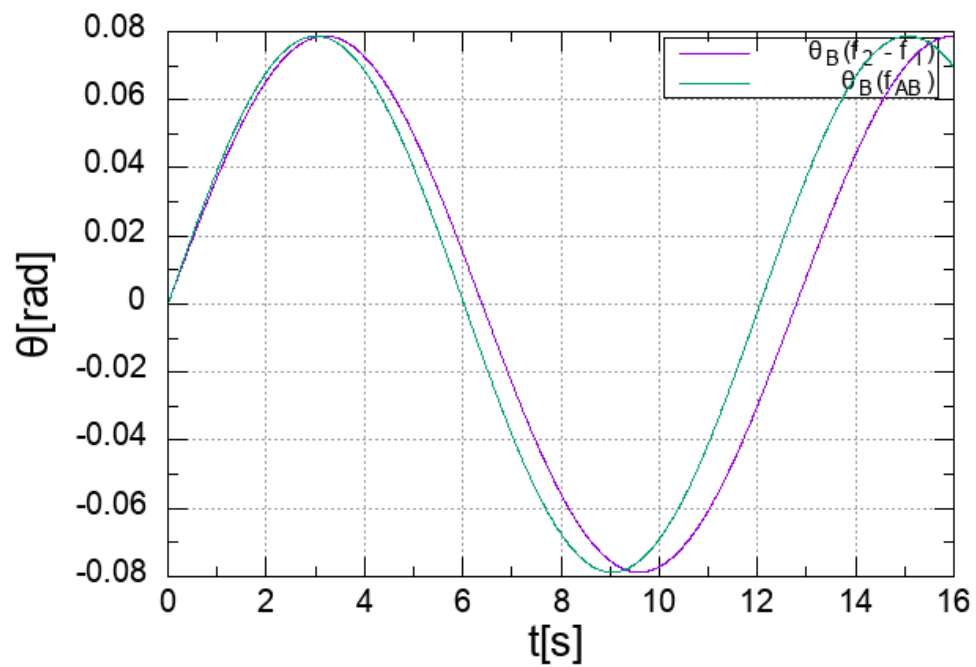


図 10: 振子 B の振れ角の時間変化