INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
Escuela Superior de Cómputo

Listas de ejercicios.

Integrantes:

- Bedolla Gallegos Susana
- Castillo Amador José Carlos
- Rico Maldonado Sergio Alonso
- Hernández López Eduardo
- Morán Estrada Manuel

Grupo: 2CV1

Materia: Probabilidad y Estadística

Profesor: Ángel Salvador Montiel Sánchez

Fecha: 03/06/16

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

LISTA DE EJERCICIOS

1. Demuestre que:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (a-1)^r = a^n$$

Solución:

$a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$

$a^n = (0+a) \cdot (0+a) \cdot (0+a) \dots (0+a)$

$a^n = (1-1+a) \cdot (1-1+a) \cdot (1-1+a) \dots (1-1+a)$

$a^n = [(1+(a-1)] \cdot [(1+(a-1)] \cdot [(1+(a-1)] \dots [(1+(a-1)]$

Ya demostramos que $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} = a^n$

Si n=1 y= a – 1

$$[(1+(a-1)]^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{0} 1^{n-r} (a-1)^r$$

$$a^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (a-1)^r$$

2. De cuantas maneras pueden formarse cinco personas para abordar un autobús si dos de las personas se niegan a hacerlo una tras la otra ¿

Solución:

A B C D E -> personas (5! Formas de acomodarlas)

Si agrupamos D - E como únicamente D, obtenemos las combinaciones en las que estas 2 personas estarían untas y como puede ser D – E o E – D, entonces:

4!·2 combinaciones en las que tenemos a D – E juntos, por lo que:

$$Combinaciones = 5! - (4! * 2) = 120 - 48 = 72\ formas\ de\ formar$$

3. Dos focos se mantienen encendidos hasta que se funde. Suponer que ninguno dura más de 1600 horas. Definir un espacio muestral adecuado para este experimento donde se describen los siguientes eventos:

Solución:

A= ambos duran menos de 1000 horas.

B= ninguno se funde antes.

C= menor tiempo es de 1000 horas.

Ω= ¿?

$\Omega = \{(x, y)|x \leq 1600,\ y \leq 1600\}$ (800, 1200)

$A = \{(x, y)|x < \Omega = ¿?\}$ A = ambos duran menos de 10000 horas.

C= menor tiempo es de 1000 horas.

$\Omega = \{(x, y)|x \leq 1600,\ y \leq 1600\}$ (800, 1200)

$A = \{(x, y)|x < 1000, y < 1000\}$ (900, 700)

(880, 525)

(1100, 700)

$B = \{(x, y)|x > 1000, y > 1000\}$ B = ninguno se funde antes

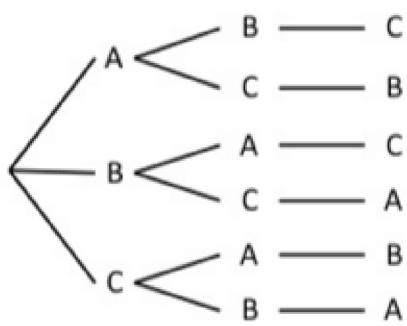
$C = \{(x, y)|1000, y < 1000\}$ C = menor tiempo es de 1000 horas.

(900, 700)

(880, 525)

(1100, 700)

4. Se inscriben Alejandro, Benito y Carlos en una carrera. ¿Cuál es la probabilidad de que Alejandro termine antes que Carlos, si todos tienen la misma habilidad y no hay empates?



Solución:

(A, B, C) = (1/3) (1/2) = 1/6

(A, C, B) = (1/3) (1/2) = 1/6

(B, A, C) = (1/3) (1/2) = (1/6)

(B, C, A)   (C, A, B)   (C, B, A)

$$P(A\ termine\ antes\ que\ C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A\ termine\ antes\ que\ C) = \frac{1}{2} \quad ó \quad 0.5 \quad ó \quad 50\%$$

5. En un año determinado para elecciones nacionales deben elegirse gobernadores para 20 estados. Si se supone que en cada estado solamente hay dos candidatos (PT y Alianza Zapatista), ¿Cuál es la probabilidad de que el mismo partido gane en todos los estados?

Datos:

$\#(\Omega) = 2^{20}$ $\#(p) = 20$

Solución:

$$P(p) = \frac{\#p}{\#\Omega} = \frac{20}{2^{20}} = 1.907348633\ x\ 10^{-5} \quad ó \quad 0.00001907348633 \quad ó \quad 1.907\ \%$$

6. Se somete a un estudiante a un examen del tipo verdadero – falso que contiene 10 preguntas; para que apruebe de responder correctamente a 8 preguntas o más. Si el estudiante esta adivinando, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe el examen?

Solución:

n: 10 p: 0.5 q: 0.5 x: 8, 9, 10

$$\sum_{x=8}^{10} \binom{n}{x} (p)^x (q)^{n-x} = \binom{10}{8} (.5)^8 (.5)^2 + \binom{10}{9} (.5)^9 (.5)^1 + \binom{10}{10} (.5)^{10} (.5)^0$$

$$= 0.043945312 + 0.009765625 + 0.0009765625 = 0.054687499 \text{ ó } 5.46\%$$

7. En el curso de Plastilina II se distribuye un examen con 10 preguntas de opción múltiple. Para aprobarlo, se requiere responder correctamente a 7 o más de las preguntas. Si se supone que se está adivinando las respuestas en cada pregunta. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen si las primeras 5 preguntas tienen 3 respuestas opcionales y las últimas 5 preguntas tienen 4 respuestas opcionales?

Solución:

Para las primeras 5 preguntas $p = \frac{1}{3} \quad y \quad q = \frac{2}{3}$

Para las últimas 5 preguntas $p = \frac{1}{4} \quad y \quad q = \frac{3}{4}$

Para tener 7 o más respuestas correctas tenemos 8 formas:

Primeras 5 (número de correctas)	**Últimas 5 (número de correctas)**				
$\mathbf{2}\left[\boldsymbol{p} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}}\right]$	$5\left[p = \left(\frac{1}{4}\right)^{5}\right]$				
$\mathbf{3}\left[\boldsymbol{p} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{3}}\right]$	$4\left[p = \left(\frac{1}{4}\right)^{4}\right]$	$5\left[p = \left(\frac{1}{4}\right)^{5}\right]$			
$\mathbf{4}\left[\boldsymbol{p} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{4}}\right]$	$3\left[p = \left(\frac{1}{4}\right)^{3}\right]$	$4\left[p = \left(\frac{1}{4}\right)^{4}\right]$	$5\left[p = \left(\frac{1}{4}\right)^{5}\right]$		
$\mathbf{5}\left[\boldsymbol{p} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{5}}\right]$	$2\left[p = \left(\frac{1}{4}\right)^{2}\right]$	$3\left[p = \left(\frac{1}{4}\right)^{3}\right]$	$4\left[p = \left(\frac{1}{4}\right)^{4}\right]$	$5\left[p = \left(\frac{1}{4}\right)^{5}\right]$	

Entonces:

$$P\ (x \geq 7) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} * \left(\frac{1}{4}\right)^{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{4} + \left(\frac{1}{5}\right)^{5}\right] + \left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{3} + \left(\frac{1}{4}\right)^{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{5}\right] + \left(\frac{1}{3}\right)^{5}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{3} + \left(\frac{1}{4}\right)^{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{5}\right]$$

$$P(x \geq 7) = \frac{1}{9216} + \frac{1}{27648} + \frac{7}{27648} + 3.415959362x10^{-4}$$

$$P(x \geq 7) = \frac{23}{31104} = 7.394547x10^{-4} = 0.074\%$$

8. El departamento de investigación de una fábrica de focos ha perfeccionado un recubrimiento para los filamentos capaz de prolongar la duración de aquellos. Para probar la duración de los focos nuevos con la de los focos viejos, se seleccionan 10 focos fabricados con el nuevo procedimiento y 10 normales, y se forman parejas:

   Un foco viejo con uno nuevo, se somete los 10 pares a prueba y se anota cuál de los focos de cada par falla primero, si el foco nuevo o el viejo.

Suponiendo que el nuevo proceso realmente no prolonga la duración de los focos, ¿cuál es la probabilidad de que el foco viejo falle primero en por lo menos 9 de los 10 pares?

Solución:

$\#\Omega = 2^{10}$ $\#(falle\ 9\ de\ 10) = \binom{10}{9}$ ó $\binom{10}{10}$

$$\frac{\binom{10}{9}}{2^{10}} + \frac{\binom{10}{10}}{2^{10}} = \frac{10}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{11}{1024} = 0.010742 \text{ ó } 1.07\%$$

9. Demuestre que:

i) $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Solución:

Para cualquier conjunto de A y B se cumple que $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

$P(B) = P\big((A \cap B) \cup (A^c \cap B)\big)$

$P(B) = P\big((A \cap B) + P(A^c \cap B)\big) Sustituimos$

$P(A^c \cap B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) - P(A \cap B)$

$P(A^c \cap B) = P(A^c \cap B)$

ii) Si $A \subseteq B$ entonces $P(B) \leq P(A^c)$

Solución:

$B = A \cup (A^c \cap B)$

$P(B) = P\big(\cup (A^c \cap B)\big)$

$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$

$P(B) \geq P(A)$

$P(B) \leq 1 - P(A)$

$P(A) \leq P(B) \leq 1 - P(A)$

$P(A) \leq P(A^c)$ No es cierto por lo tanto no se cumple que $P(B) \leq P(A^c)$

10. Dado un experimento en el que $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, calcular

i) $P(A^C \cap B^C)$

ii) $P(C^C \cup B^C)$

iii) $P(A^C \cap B)$

Solución:

i) $P(A^C \cap B^C) = P(A \cup B)^C$

$P(A^C \cap B^C) = 1 - \mathrm{P(A \cup B)}$

$P(A^C \cap B^C) = 1 - \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big)$

$$P(A^C \cap B^C) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$P(A^C \cap B^C) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12} \quad O \quad 0.416 \quad o \quad 41.66\%$$

ii) $P(C^C \cup B^C) = P(A \cap B)^C$

$P(C^C \cup B^C) = 1 - P(A \cup B)$

$$P(C^C \cup B^C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad O \quad 0.75 \quad o \quad 75\%$$

iii) $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A^C \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \quad o \quad 0.08333 \quad o \quad 8.33\%$$

11. Demuestre por inducción que:

12. Se lanzan tres dados. Si ninguna pareja muestra la misma cara, ¿cuál es la probabilidad de que haya un uno?

13. En una fábrica de pernos las maquinas A, B y C producen respectivamente el 25, 35 y el 40% del total. En esta producción, el 5% ,4% y 2% son pernos defectuosos, se toma al azar un perno de la producción total y se le encuentra defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por B?

Solución:

$P(DA) = (.25) * (.05) = 0.0125$

$P(DB) = (.35) * (.04) = 0.014$

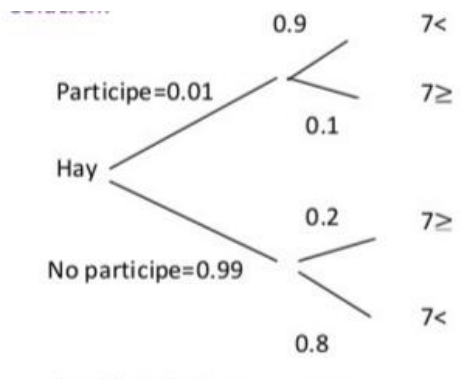
$P(DC) = (.40) * (.02) = 0.008$

$P(D) = (0.0125) + (0.014) + (0.008) = 0.0345$

$$P(DB \mid D) = \frac{0.014}{0.0345} = 0.405797 \quad \text{ó} \quad 40.57\%$$

14. En una escuela ,1% del estudiantado participa en un programa atlético intercolegial; de este grupo, 10% tiene promedio de 7 o más en tanto que el 20% del resto del estudiantado tiene un promedio de 7 o más. a) ¿qué proporción total del estudiantado tiene u nivel de 7 o más?, si se selecciona 1 estudiante a azar de entre el estudiantado se ve que tiene un nivel de 7.13, b) ¿cuál es la probabilidad de que participe en el programa atlético intercolegial?

Solución:



a) $\frac{(0.01)(0.1)+(0.2)(0.99)}{(0.9)(0.01)+(0.8)(0.99)} = \frac{0.199}{0.8} = 0.24\%$

b) $\frac{(0.01)(0.1)}{0.8} = 0.12\%$

15. Se tira un par de dados. Si la suma de los dos es cuando menos igual a 7. Calcule la probabilidad de que sea igual a 9.

Solución:

Cada cara de un solo dado tiene 1/12 de probabilidad de caer, y para que la suma sea por lo menos 7, tenemos 21 combinaciones de interés:

1	**6**					
2	5	6				
3	4	5	6			
4	3	4	5	6		
5	2	3	4	5	6	
6	1	2	3	4	5	6

Y tenemos un total de 36 resultados posibles, entonces:

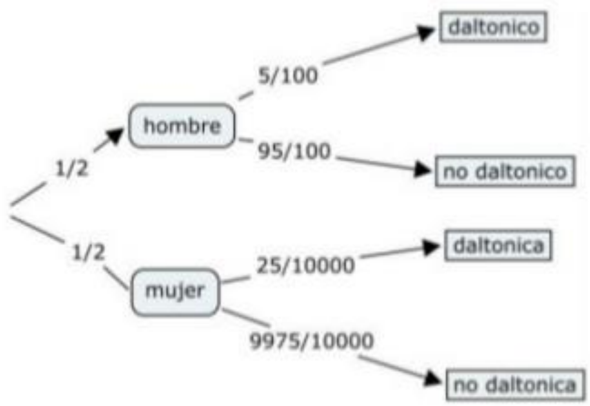
$\#\,(\Omega) = 36 \quad \#(\geq 7) = 21 \quad \#(=9) = 4$

$P(\geq 7) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \qquad P(=9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$$P\big((=9|\geq 7)\big) = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{21} = 0.19047619 \quad \text{ó} \quad 19.047\%$$

16. Supongamos que 5 de cada 100 hombres y 25 de cada 10000 mujeres sufren daltonismo. Una persona daltónica se escoge aleatoriamente.
    Cuál es la probabilidad de que sea hombre (supongamos que hay el mismo número de hombres que de mujeres).

Solución:



$$P(H) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{100}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{100}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{25}{10000}\right)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{40}+\frac{1}{800}} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{21}{800}} = \frac{20}{21}$$

$P(H) = 0.95238$ ó $95.23\ \%$

17. Se escoge al azar un punto entre el 0 y el 1 en el eje de la x dentro del plano (x, y). A continuación se dibuja un círculo con centro en el origen, y radio determinado por el punto escogido. Calcule la probabilidad de que el área del circulo sea menor que $\frac{\pi}{2}$.

Solución:

$$\frac{\pi}{2} = 90°$$

$$\#(\Omega) = 10\ mm\ x\ 10\ mm = 100\ mm^2$$

$\#(C) = \pi r^2 = \pi(.5)^2 = 0.25$

$$P(c) = \frac{\#c}{\#\Omega} = \frac{\pi(.25)}{4(.25)4.25} = \frac{\pi}{16}$$

$P(c) = 5.0265\ x\ 10^{-3}$ ó 0.5%

18. Se rompe una regla de 12 pulgadas al azar en 2 partes a lo largo. ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud de la parte más larga sea al menos el doble de la más corta?

Solución:

Si nos interesa que la parte más larga sea por lo menos el doble de grande que la parte más pequeña, necesitamos saber a partir de qué punto se cumple esta condición, de esta forma podemos ver que si la parte más larga es de cuando menos 2/3 del tamaño total, se cumple esta condición.
Por lo tanto la probabilidad de que la parte más larga sea de por lo menos el doble de la parte más corta es de:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

19. Si la función de probabilidad de la variable aleatoria está dada por:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{8}(y+1) & 2 \le y \le 4 \\ 0 & otro \end{Bmatrix}$$

Determine:

i) $P(y < 3.2)$

ii) $P(2.9 < y < 3.2)$

Solución:

i) $P(y < 3.2) = \int_2^{3.2} f(y)dy = \int_2^{3.2} \frac{1}{8}(y+1)dy = \frac{1}{8}\int_2^{3.2}(y+1)\,dy$

$$P(y < 3.2\,) = \frac{1}{8}\int_{2}^{3.2} y\,dy + dy = \frac{1}{8}\int_{2}^{3.2} y\,dy + \frac{1}{8}\int_{2}^{3.2} dy$$

$$P(y < 3.2) = \frac{1}{8}\left(\frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_{2}^{3.2} = \frac{1}{8}\left(\left(\frac{3.2^2}{2} + 3.2\right) - \left(\frac{2^2}{2} + 2\right)\right)$$

$$P(y < 3.2) = \frac{1}{8}(8.32 - 4) = \frac{1}{8}(4.32) = 0.54 \quad o \quad 54\%$$

ii) $P(2.9 < y < 3.2) = \int_{2.9}^{3.2} f(y)dy = \int_{2.9}^{3.2} \frac{1}{8}(y+1)dy = \frac{1}{8}\int_{2.9}^{3.2}(y+1)\,dy$

$$P(2.9 < y < 3.2) = \frac{1}{8}\int_{2.9}^{3.2} y\,dy + dy = \frac{1}{8}\int_{2.9}^{3.2} y\,dy + \frac{1}{8}\int_{2.9}^{3.2} dy$$

$$P(2.9 < y < 3.2) = \frac{1}{8}\left(\frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_{2.9}^{3.2} = \frac{1}{8}\left(\left(\frac{3.2^2}{2} + 3.2\right) - \left(\frac{2.9^2}{2} + 2.9\right)\right)$$

$$P(2.9 < y < 3.2) = \frac{1}{8}(8.32 - 7.105) = \frac{1}{8}(1.215)$$

$$P(2.9 < y < 3.2) = 0.151875 \quad o \quad 15.18\%$$

20. Si la función de distribución de la variable aleatoria x está dada por:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{c}{\sqrt{x}} & 0 \le x \le 4 \\ 0 & otro \end{Bmatrix}$$

Determine el valor de c.

Solución:

La variable es continua $\qquad$ $¿\,p(\Omega) = 17?$

$$p(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{4} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{4} \frac{c}{\sqrt{x}}\,dx$$

\# No se puede integrar esta función.

21. La cantidad real de café (en gramos) en un recipiente de 230 gr llenado por cierta máquina es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 0 & x \leq 227.5 \\ \frac{1}{5} & 227.5 \leq x232.5 \\ 0 & x \geq 232.5 \end{Bmatrix}$$

Determina las probabilidades de que un recipiente de 230 gr llenado por esta máquina contendrá cuando mucho 228.65 gr de café.

Solución:

$$P(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$P(\Omega) = \int_{-\infty}^{227.5} f(x)dx + \int_{227.5}^{232.5} f(x)dx + \int_{232.5}^{\infty} f(x)dx$$

$$P(\Omega) = 0 + \int_{227.5}^{232.5} f(x)dx + 0$$

$$P(\Omega) = \frac{1}{5}\int_{227.5}^{232.5} dx = \frac{1}{5} * |_{227.5}^{232.5}$$

$$P(\Omega) = \frac{1}{5}(232.5) - \frac{1}{5}(227.5)$$

$$P(\Omega) = \frac{93}{2} - \frac{91}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(x \leq 228.65) = \frac{1}{5}\int_{227.5}^{228.65} dx = \frac{1}{5} * |_{227.5}^{228.65}$$

$$P(x \leq 228.65) = \frac{1}{5}(228.65) - \frac{1}{5}\ (227.5)$$

$$P(x \leq 228.65) = \frac{4573}{100} - \frac{91}{2} = \frac{9146 - 9100}{200} = \frac{46}{200} = \frac{23}{100}$$

$$P(x \leq 228.65) = 0.23 \quad \text{ó} \quad 23\%$$

22. El retraso o adelanto (en minutos) de un vuelo de Guadalajara a Monterrey es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{288} & (36 - x^2) - 6 < x < 6 \\ 0 & otro \end{Bmatrix}$$

Donde los valores negativos son indicativos de que el vuelo llega adelantado y los valores positivos señalan que el vuelo llega retrasado. Determine la probabilidad de que uno de estos vuelos llegará cuando menos dos minutos antes.

Solución:

$$p(-6 \leq x \leq -2) = \int_{-6}^{-2} f(x)dx$$

$$p(-6 \leq x \leq -2) = \int_{-6}^{-2} \frac{1}{288}(36 - x^2)dx$$

$$p(-6 \leq x \leq -2) = \frac{1}{288}\int_{-6}^{-2} (36 - x^2)dx$$

$$\frac{1}{288}\left[\int_{-6}^{-2} (36 - x^2)dx\right]$$

$$\frac{1}{288}\left[36\,x|_{-6}^{-2} - \frac{x^3}{3}|_{-6}^{-2}\right]$$

$$\frac{1}{288}\left[-72 + 216 - \left(-\frac{8}{3} + \frac{216}{3}\right)\right]$$

$$\frac{1}{288}\left[154 + \frac{8}{3} - 72\right]$$

$$\frac{1}{288}\left[82+\frac{8}{3}\right]$$

$$\frac{1}{288}\left[\frac{254}{3}\right]= \quad 0.29 \qquad ó \qquad 30\%$$

23. Si la gente de un contratista en una obra de construcción puede considerarse como una variable aleatoria que tiene la densidad de probabilidad:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{18}\,(x+1) & -1<x<5\\ 0 & otro\end{cases}$$

Donde las unidades se expresan en miles de pesos, ¿cuál es la utilidad esperada?

24. La probabilidad de que la Sra. Martínez venda una cadena de oro con una ganancia de $3000 es 3/20 la probabilidad de que la venda y obtenga una ganancia de $1500 es 7/20, la probabilidad de que salga a mano es 7/20 y la probabilidad de que pierda $1500 es 3/20, ¿cuál es la ganancia esperada?

25. El tiempo que tardan en atender a un individuo en una cafetería es una variable aleatoria con la densidad de probabilidad:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} & x>0\\ 0 & otro\end{cases}$$

Obtenga el valor esperado de esta distribución.

26. El número de horas de operación satisfactoria que proporciona un televisor Sony es una variable aleatoria cuya función de probabilidad es:

$$f(z)=\begin{cases}0.0001\,e^{-.0001z} & z>0\\ 0 & otro\end{cases}$$

Obtenga el valor esperado de esta distribución.

1. Se sabe que 10% de los vasos producidos por cierta máquina tienen algún defecto. Si se seleccionan 10 vasos fabricados por esta máquina ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno ese defectuoso? ¿Cuantos se esperaría encontrar defectuosos?

Solución:

n: 10 p: 0.10 q: 0.90 x: 0

$$\binom{n}{k}(p)^x(q)^{n-x} = \binom{10}{0}(.10)^0(.90)^{10} = 0.34867844o\ 34.86\%$$

$$\mu = np = 10 * .10 = 1$$

2. Un laberinto para ratas tiene un corredor recto, y al final una bifurcación; en la bifurcación, la rata debe ir a la derecha o a la izquierda. Suponer que se colocan 10 ratas, en el laberinto, de una en una. Si cada rata toma al azar una de las dos alternativas del camino. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando menos 9 vayan al mismo lado?

Solución:

$n = 10$

$p = 0.5$

$q = 0.5$

$x \geq 9$

$$P(x \geq 9) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$P(x \geq 9) = \sum_{x=9}^{10} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$P(x \geq 9) = \binom{10}{9}(0.5)^9(0.5)^1 + \binom{10}{10}(0.5)^{10}(0.5)^0$$

$$P(x \geq 9) = 0.099765625 + 0.0009765625$$

$$P(x \geq 9) = 0.0107421875 \quad \text{ó} \quad 1.07\%$$

3.- En una “prueba de tortura” se enciende y se apaga un interruptor eléctrico hasta que este falla. Si la probabilidad es 0.001 de que el interruptor falle en cualquier momento en que este encendido o apagado, cual es la probabilidad de que el interruptor no falle durante las primeras 800 veces que se enciende o apague?.

Solución:

$n = 800$ $\quad p = 0.001$ $\quad \lambda = np = 800 * 0.001 = 0.8$ $\quad x = 0$

$$P(x=0) = \frac{\lambda^x * e^{-\lambda}}{x!} = \frac{0.8^0 * e^{-0.8}}{0!} = \frac{1 * e^{-0.8}}{1} = \frac{1}{e^{0.8}} = 0.449328 \text{ ó } 44.93\%$$

4. Un ingeniero de control de calidad inspecciona una muestra tomada al azar de dos calculadoras portátiles de cada lote de 18 unidades que llega y acepta el lote si ambas están en buenas condiciones de funcionamiento; en caso contrario, se inspecciona todo el lote y el costo se carga al distribuidos. ¿Cuál es la probabilidad de que este lote sea aceptado sin mayor inspección si contiene:

i) Cuatro calculadoras en mal estado?

Datos:

$N = 18$ $\quad n = 2$ $\quad K = 18 - 4 = 14$ $\quad x = 2$

Solución:

$$f(x) = \frac{\binom{14}{2}\binom{18-14}{2-2}}{\binom{18}{2}} = \frac{(91)(1)}{153} = 0.594771241 \text{ ó } 59.4771\%$$

ii) Ocho calculadoras en malas condiciones de funcionamiento?

Datos:

$N = 18$
$n = 2$
$K = 18$
$x = 2$

$-8 = 10$

Solución:

$$f(x) = \frac{\binom{10}{2}\binom{18-10}{2-2}}{\binom{18}{2}} = \frac{(45)(1)}{153} = 0.294117647 \ \acute{o} \ 29.4117\%$$

5. Un examen de opción múltiple consta de ocho preguntas y tres respuestas a cada pregunta. Si un estudiante responde a cada pregunta tirando un dado y marca la primera respuesta si obtiene un 1 o un 2, la segunda respuesta si obtiene un 3 o un 4, y la tercera respuesta si obtiene un 5 o un 6, ¿Cuál es la probabilidad de que logre exactamente cuatro respuestas correctas?

Solución:

Distribución binomial

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} & p^x q^{n-x} \quad x = 0,1,2,3 \ldots . n \\ 0 & otro \end{cases}$$

En este caso *sustituyendo*

n=8 $p(x = 4) = \binom{8}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 0.1707 \ O \ 17\%$

$p = \frac{1}{3}$ $q = \frac{2}{3}$ X=4

6. Si el 40% de los alumnos se volvieran agresivos en un periodo de 2 horas después de haber ingerido algún liquido en el Sportaco, determine la probabilidad de que exactamente seis de los 15 alumnos que han ingerido algún líquido se vuelvan agresivos en el periodo de 2 horas.

Solución:

P=0.4, q=0.6, n=15, x=6, np=6

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$p(x=6)=\binom{15}{6}(.4^6)(.6^9$$

$$)=20.69\ \%$$

7. Un jurado de 7 jueces debe decidir entre 2 finalistas quien es la ganadora de un concurso de belleza, para lo cual bastara una mayoría de los jueces. Suponga que 4 jueces voten por María y que los otros 3 voten por Susana. Si se seleccionan al azar 3 jueces y se les pregunta por quien van a votar, ¿cuál es la probabilidad de que la mayoría de los jueces de la muestra estén a favor de María?

Solución:

Usando la hipergeométrica $P(X)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ donde:

N=7, n=3, k=4, $x \geq 2$

$$P(x \geq 2) = P(x=2) + P(x=3)$$

$$P(x \geq 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{7-4}{3-2}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{7-4}{3-3}}{\binom{7}{3}}$$

$$P(x \geq 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{0}}{\binom{7}{3}}$$

$$P(x \geq 2) = \frac{(6)(3)}{(35)} + \frac{(4)(1)}{(35)}$$

$$P(x \geq 2) = \frac{18}{35} + \frac{4}{35}$$

$$P(x \geq 2) = \frac{22}{35}$$

$$P(x \geq 2) = .62857 \text{ ó } 62.85\%$$

8. Se ha observado que el transito promedio de automóviles en determinado punto de un camino rural es de 3 por hora. Suponga que los instantes en que pasan los mismos son independientes, haciendo que x represente el número de los que pasan por este punto en un intervalo de 20 minutos, calcule la probabilidad de P(x>2)

$x \quad \lambda$

Usando Poisson $P(X) = \frac{\lambda \ e^{-}}{x!}$ para:

$\lambda = 3x60\ min. \Rightarrow 1x20\ min.$

$x > 2$

$$P(X > 2) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{1^x e^{-1}}{x!}$$

$$P(x > 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{1^x e^{-1}}{x!}$$

$$P(x > 2) = 1 - \left(\frac{1^0 e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 e^{-1}}{1!} + \frac{1^2 e^{-1}}{2!}\right)$$

$$P(x > 2) = 1 - \left(\frac{1xe^{-1}}{1} + \frac{1xe^{-1}}{1} + \frac{1xe^{-1}}{2}\right)$$

$$P(x > 2) = 1 - e^{-1}\left(\frac{2+2+1}{2}\right)$$

$$P(x > 2) = 1 - e^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 1 - \frac{2.5}{e}$$

$$P(x > 2) = 1 - .9196$$

$$P(x > 2) = .0803 \text{ ó } 8.03\%$$

9. En determinada planta manufacturera han ocurrido accidentes a razón de 1 cada 2 meses. suponiendo que ocurren en forma independiente, Cual es el numero esperado de accidentes al año?

Solución:

$$\lambda = 1\ accidente\ cada\ 2\ meses\ \therefore$$

$$\lambda = 0.5\frac{accidentes}{mes}\left[(\cancel{1\ año})\left(\frac{12\ meses}{\cancel{1\ año}}\right)\right]$$

$$\lambda = 6\ accidentes\ al\ año$$

10.- En Chilpancingo, la incompatibilidad se da como la razón o motivo legal en el 70% de todos los casos de divorcio. Obtenga la probabilidad de que cinco de los seis siguientes divorcios archivados en esta ciudad argumenten incompatibilidad, como un motivo principal.

Datos:

$n = 6$ $p = 70\%$ 0.7 $q = 1 - p = 1 - 0.7 = 0.3$ $x = 5$

Solución:

$$La\ variable\ es\ binomial$$

$$f(x) = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$f(x) = \binom{6}{5}(0.7^5)(0.3^{6-5})$$

$$f(x) = (6)(0.16807)(0.3)$$

$$f(x) = 0.302526\ 30.2526\%$$

12. Suponga que el 40% de los empleados a destajo de la empresa ACME están a favor de tener representación sindical y que se entrevista a una muestra aleatoria de 10 de ellos y se les solicita una respuesta anónima, cual es la probabilidad de que la mayoría de los que respondan estarán a favor de la representación sindical?

Solución:

Distribución binomial

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} & p^x q^{n-x} \quad x = 0,1,2,3 \ldots . n \\ 0 \quad otro \end{cases}$$

Sustituyendo en la formula

n=10; *p=0.6;* *q=0.4;* *x=4*

$$p(x = 4) = \binom{10}{4} (0.6)^4 (0.4)^6 = 0.11$$

$$p(\Omega) = 1 - 0.11 = 0.89 \; o \; 89\%$$

13.- Un profesor de ESCOM selecciona al azar a 3 alumnos de un grupo de 10 para aprobarlos. Suponiendo que el semestre anterior aprobó a cuatro de esos 10 alumnos, determine la probabilidad de que exactamente 2 de los tres alumnos hayan aprobado el semestre anterior.

Solución:

N=10, n=3, k=4, x=2

$$\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(x = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$$

$$P(x = 2) = 0.3 \text{ ó } 30\%$$

14. En promedio, de cada 500 cervezas servidas en el Sportaco 2 salen defectuosas, ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote específico de 100 cervezas no haya ninguna defectuosa?

Solución:

λ

Usando Poisson $P(X) = \frac{\lambda^x e^-}{x!}$ para:

$\lambda = 2x500\ cervezas \Rightarrow .4x100\ cervezas;$ $\qquad x = 0$

$$P(X) = \frac{.4^0 e^{-.4}}{0!}$$

$$P(X) = \frac{1xe^{-.4}}{1}$$

$$P(X) = \frac{1}{e^{.4}}$$

$P(X) = .67032$ ó 67.03%

15. Debido a las altas tasas de interés, una empresa reporta que el 30% de sus cuentas por cobrar de otras empresas están vencidas. Si un contador toma una muestra aleatoria de cinco de estas cuentas, determine la probabilidad de que la mayoría de las cuentas estén vencidas.

Solución: $n = 5$

$$P(x \geq 3) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$p = 0.3$

$$P(x \geq 3) = \sum_{x=3}^{5} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$q = 0.7$

$x \geq 3$

$$P(x \geq 3) = \binom{5}{3}(0.3)^3(0.7)^2 + \binom{5}{4}(0.3)^4(0.7)^1 + \binom{5}{5}(0.3)^5(0.7)^0$$

$$P(x \geq 3) = 0.1323 + 0.00567 + 0.00243$$

$P(x \geq 3) = 0.1404$ ó 14.04%

16. Se ha determinado que el número de camiones que llegan cada hora un almacén tiene una distribución que se muestra en la siguiente tabla. Calcule el número esperado de llegadas por hora y la varianza de esta distribución.

Número de camiones	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	0.05	0.10	0.15	0.25	0.30	0.10	0.05

Solución:

$$E[x] = \mu = \sum xf(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + x_4 f(x_4) + x_5 f(x_5) + x_6 f(x_6) + x_7 f(x_7)$$

$$\mu = (0)(0.05) + (1)(0.10) + (2)(0.15) + (3)(0.25) + (4)(0.30) + (5)(0.1) + (6)(0.05)$$

$$\underline{\mu = 0 + 0.10 + 0.30 + 0.75 + 1.20 + 0.50 + 0.30 = 3.15}$$

$$E[x^2] = \mu_2 = \sum x^2 f(x) = x_1^2 f(x_1) + x_2^2 f(x_2) + x_3^2 f(x_3) + x_4^2 f(x_4) + x_5^2 f(x_5) + x_6^2 f(x_6) + x_7^2 f(x_7)$$

$$\mu_2 = (0)^2(0.05) + (1)^2(0.10) + (2)^2(0.15) + (3)^2(0.25) + (4)^2(0.30) + (5)^2(0.1) + (6)^2(0.05)$$

$$\mu_2 = 0 + 0.10 + 0.60 + 2.25 + 4.80 + 2.50 + 1.80 = 12.05$$

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu^2 = 12.05 - (3.15)^2 = 12.05 - 9.9225 = 2.1275$$

$$\underline{\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.1275} = \pm 1.458595}$$

La mayoría de los datos esta entre:

$$(\mu - \sigma, \mu + \sigma) \rightarrow (3.15 - 1.458595, 3.15 + 1.458595) \rightarrow (1.69, 4.60)$$

$$\underline{(\mu - \sigma, \mu + \sigma) \rightarrow (1,5)}$$

17.- En la siguiente tabla se identifica la probabilidad de que el sistema de computación se caiga el número señalado por periodos por semana, durante la fase de instalación del sistema. Calcule el número esperado de veces por semana que la computadora no está trabajando y la varianza de esta distribución.

Número de Periodos	4	5	6	7	8	9
Probabilidad	0.01	0.08	0.29	0.42	0.14	0.06

Solución:

$$\mu = (4 \times 0.01) + (5 \times 0.08) + (6 \times 0.29) + (7 \times 0.42) + (8 \times 0.14) + (9 \times 0.06)$$

$$\mu = 6.78$$

$$\sigma^2 = (16 \times 0.01) + (25 \times 0.08) + (36 \times 0.29) + (49 \times 0.42) + (64 \times 0.14) + (81 \times 0.06)$$

$$\sigma^2 = 46$$

18. Obtenga el valor esperado de la variable aleatoria x con función de distribución dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{8} & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & otro \end{cases}$$

$$\mu = \int_2^4 \frac{x-1}{8} x \, dx$$

$$\mu = \frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_2^4$$

$$\mu = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2}\right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right)\right] = \frac{19}{12} = 1.58333$$

19. Si x es una variable aleatoria binomial, ¿Para qué valor de p es la probabilidad binomial un máximo?

Solución:

$$f_x(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Derivamos en ambos lados con respecto a p y posteriormente igualamos a cero

$$\frac{d}{dp}f_x(x) = \binom{n}{x}\{-p^x(n-x)(1-p)^{n-x-1} + (1-p)^{n-x}xp^{x-1}\} = 0$$

$$(1-p)^{n-x}xp^{x-1} = p^x(n-x)(1-p)^{n-x-1}$$

$$(1-p)xp^{x-1} = p^x(n-x)$$

$$(1-p)x = p(n-x)$$

$$\frac{1-p}{p} = \frac{n-x}{x}$$

$$\frac{1}{p} - 1 = \frac{n}{x} - 1$$

$$\frac{1}{p} = \frac{n}{x}$$

$$p = \frac{x}{n}$$

20. Demuestre que la media y la varianza de la distribución binomial son:

i) μ=np

ii) σ^2=npq

Demostración:

Sea x una variable binomial.

i) μ=np

$$\mu = E[x] = \sum_{i=0}^{n} x \cdot f(x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$\mu = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$$

$$\mu = \sum_{x=1}^{n} x \frac{xn(n-1)!}{(n-x)!\,x(x-1)!} pp^{x-1} q^{n-x}$$

$$\mu = np \sum_{x=1}^{n} x \frac{(n-1)!}{(n-x)!\,(x-1)!} p^{x-1} q^{n-x}$$

Sustituyendo *y=x-1* *m=n-1*

$$\mu = np \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{(m-y)!\,y!} p^{y} q^{m-y}$$

$$\mu = np \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} q^{m-y}$$

$$\mu = np(1)$$

$$\mu = n$$

ii) σ^2=npq

$$\sigma^2 = E[(x-\mu)^2] = \sum_{x=0}^{n} (x-\mu)^2 f(x)$$

$$\sigma^2 = E[(x-\mu)^2] = E[x^2] - \mu^2 \cdots\cdots\; ec(1)$$

Resolvemos por otra parte $E[x^2]$

$$E[x^2] = E[x^2 - x + x] = E[(x^2 - x) + x]$$

$$E[x^2] = E[x(x-1)] + E[x] = E[x(x-1)] + np \cdots\cdots\; ec(2)$$

Resolvemos por otra parte: $E[x(x-1)]$

$$E[x(x-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)f(x) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$E[x(x-1)] = \sum_{x=2}^{n} \frac{x(x-1)n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$$

$$E[x(x-1)] = \sum_{x=2}^{n} \frac{x(x-1)n(n-1)(n-2)!}{(n-x)!\,x(x-1)(x-2)!} p^2 p^{x-2} 1^{n-x}$$

$$E[x(x-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-x)!\,(x-2)!} p^{x-2} q^{n-x}$$

Sustituyendo *m=n – 2,* *y=x – 2*

$$E[x(x-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{(m-y)!\,y!} p^y q^{m-y}$$

$$E[x(x-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} p^y q^{m-y}$$

$$E[x(x-1)] = n(n-1)p^2(1)$$

$$E[x(x-1)] = n(n-1)p^2 \cdots\cdots\cdots\; ec(3)$$

Sustituimos la ec(3) en la ec(2)

$$E[x^2] = E[x(x-1)] + np$$

$$E[x^2] = n(n-1)p^2 + np$$

$$E[x^2] = n(n-1)p^2 + np$$

$E[x^2] = n(n-1)p^2 + np \cdots\cdots\cdots ec(4)$

Sustituimos la ec(4) en la ec(1)

$\sigma^2 = n(n-1)p^2 + np - \mu^2$

$\sigma^2 = \ n(n-1)p^2 + np - (np)^2$

$\sigma^2 = np - np^2 = np(1-p)$

$\sigma^2 = npq$

21. Demuestre que la media de distribución geométrica está dada por: $\mu = \frac{1}{p}$

Demostración:

$f(x) = pq^{n-q} = P(\Omega)$

$P(\Omega) = 1$

$$E[x] = \sum_{i=0}^{n} pq^{n-1} = pq^0 + pq^1 + pq^2 + \cdots + pq^n$$

$P(\Omega) = p(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1})$

Analizamos cuando $n \to \ \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-r^{n-1})}{1-r}$$

Si *r = 1*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-r^{n-1})}{1-r} = \infty$$

Si *r > 1*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-r^{n-1})}{1-r} = \infty$$

Si *r < 1*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-r^{n-1})}{1-r} = \frac{a_1(1-0)}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

Debido a que $p + q = 1 \ \rightarrow q < 1$

$a_1 = 1\,, \quad r = q$

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

27. El número promedio de solicitudes de servicio que se reciben en un departamento de reparación de maquinaria por cada turno de 8 horas es de 10. Determine la probabilidad de que se reciban más de 15 solicitudes en un turno de 8 horas elegido al azar.

Solución:

$\lambda = 10\,, \qquad x > 15$

$P(x > 15) = 1 - P(x \le 15)$

$$P(x > 15) = 1 - \sum_{x=0}^{15} \frac{\lambda^x e^{-1}}{x!}$$

$$P(x > 15) = 1 - \frac{10^0 e^{-10}}{0!} - \frac{10^1 e^{-10}}{1!} - \frac{10^2 e^{-10}}{2!} - \frac{10^3 e^{-10}}{3!} - \frac{10^4 e^{-10}}{4!} - \frac{10^5 e^{-10}}{5!} - \frac{10^6 e^{-10}}{6!}$$
$$- \frac{10^7 e^{-10}}{7!} - \frac{10^8 e^{-10}}{8!} - \frac{10^9 e^{-10}}{9!} - \frac{10^{10} e^{-10}}{10!} - \frac{10^{11} e^{-10}}{11!} - \frac{10^{12} e^{-10}}{12!}$$
$$- \frac{10^{13} e^{-10}}{13!} - \frac{10^{14} e^{-10}}{14!} - \frac{10^{15} e^{-10}}{15!}$$

$P(x > 15) = 1 - 0.0951259$

$P(x > 15) = 0.0487404$ o 4.87%

28. Un embarque de 10 máquinas incluye una defectuosa. Si se eligen 7 máquinas al azar de ese embarque, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de las 7 este defectuosa?

Solución:

$N = 10 \quad k = 1 \quad n = 7 \quad x = 0$

$$P(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{1}{0}\binom{10-1}{7-0}}{\binom{10}{7}} = \frac{\binom{1}{0}\binom{9}{6}}{\binom{10}{7}} = \frac{1 \cdot 36}{120} = 0.3 = 30\%$$

30. Un promedio de 0.5 clientes por minuto llega a una caja de salida en un almacén, Cual es la probabilidad de que lleguen 5 o más clientes en un intervalo dado de 5 minutos.

Solución:

$\lambda = 0.5 * 5 = 2.5$

$$P(x \geq 5) = 1 - P(0 < x < 4) = 1 - \sum_{x=0}^{4} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$P(x \geq 5) = 1 - \sum_{x=0}^{4} \frac{2.5^x \cdot e^{-2.5}}{x!}$$

$P(x \geq 5) = 1 - 0.89117 = 0.10882 = 10.88\%$

31.-Un promedio de 0.5 clientes por minuto llega a una caja de salida en un almacén, cuál es la probabilidad de que lleguen más de 20 clientes a la caja en un intervalo especifico de media hora.

Solución:

$$\lambda = 0.5\frac{clientes}{min}$$

$$\lambda = 0.5\frac{clientes}{min}\left(\frac{30}{30}\right) = 15\frac{clientes}{30\ min} = 15\frac{clientes}{0.5\ hr}$$

$$P(x > 20) = 1 - P(x \leq 20)$$

$$P(x > 20) = 1 - \sum_{(x=0)}^{20} \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$P(x > 20) = 1 - \sum_{(x=0)}^{20} \frac{15^x \cdot e^{-15}}{x!}$$

$$P(x > 20) = 1 - 0.917029 = 0.082971 = 8.29\%$$

33. Demuestre que las distribuciones vistas en clase son de probabilidad.

Solución:

i) Distribución Binomial

$$P(\Omega) = \sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1$$

Sabemos que:

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x} \quad \forall\ a,b\ \in\ \mathbb{R}$$

Si $a = p$ y $b = q$

$$(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$1^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1$$

ii) Distribución Geométrica

$$P(\Omega) = \sum_{x=1}^{n} f(x) = \sum_{x=1}^{n} pq^{n-1}$$

$$P(\Omega) = pq^0 + pq^1 + pq^2 + \cdots + pq^n$$

$$P(\Omega) = p(1 + q + q^1 + \cdots + pq^{n-1})$$

Por otra parte resolvemos $(1 + q + q^1 + \cdots + pq^{n-1})$

$$S_n = r^0 a_1 + r^1 a_1 + r^2 a_1 + \cdots + r^n a_1$$

$$rS_n = r^1 a_1 + r^2 a_1 + r^3 a_1 + \cdots + r^{n+1} a_1$$

$$S_n - rS_n = a_1 - r^{n+1} a_1$$

$$S_n\ (1-r) = a_1(1-r^{n+1})$$

$$S_n\ = \frac{a_1(1-r^{n+1})}{1-r}$$

Si: $n \to \infty$

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-r^{n+1})}{1-r}$$

Cuando r < 1

$$S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

$a_1 = 1 \quad r = q$

$$S_n = \frac{1}{1-q} = (1+q+q^1+\cdots+pq^{n-1})$$

$$P(\Omega) = p(1+q+q^1+\cdots+pq^{n-1})$$

$$P(\Omega) = p\frac{1}{1-q} = p\frac{1}{p} = 1$$

iii) Distribución de Poisson

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}\ = 1$$

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}\ = 1$$

$$\lambda = np \rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$$

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = 1$$

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(n-x)!\,x!} \frac{\lambda^{x}}{n^{x}} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = 1$$

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)(n-x)!}{(n-x)!\,x!} \frac{\lambda^{x}}{n^{x}} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = 1$$

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \frac{\lambda^{x}}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = 1$$

$$\sum_{x=0}^{n} \left[1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{x-1}{n}\right)\right] \frac{\lambda^{x}}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = 1$$

$$Si \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{x=0}^{n} [1(1-0)(1-0)\ldots(1-0)] \frac{\lambda^{x}}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = 1$$

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^{x}}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = 1$$

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!} = 1$$

1.-Las siguientes son las puntuaciones de una prueba de IQ obtenidas por una muestra aleatoria de 18 estudiantes de ESCOM:

130, 122, 119, 142, 136, 127, 120, 152, 141

132, 127, 118, 150, 141, 133, 137, 129, 142

Determine un intervalo de confianza del 93% para la puntuación promedio de todos los estudiantes de ESCOM.

Solución:

$n = 18$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 133.22222222$$

$$\sigma^2 = E[(x-\mu)^2] = E[x^2] - \mu^2$$

$$E[x^2] = \sum x^2 f(x) = 17846.6666$$

$$\mu = E[x] = 133.22 \;\therefore\; \mu^2 = 17748.16049$$

$$\therefore \sigma^2 = 17846.6666 - 17748.16049 = 98.503117284$$

$$\sigma = 9.925027599$$

$$Z_{\frac{100\pm93}{2}} = \pm 1.81$$

$$\bar{x} - Z_{\frac{100-93}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\frac{100+93}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 133.22 - 1.81\,\frac{9.925}{\sqrt{18}} < \mu < 133.22 + 1.81\,\frac{9.925}{\sqrt{18}}$$

$= 128.9879 < \mu < 137.456448$

(128,138)

3.-Con la finalidad de estimar la proporción de recién nacidos que son varones, se registró el género de 10 000 niños recién nacidos. Si de éstos 4 000 fueron varones, determine un intervalo de confianza del 96% para la proporción real.

Solución:

$$n = 10000 \quad p = \frac{4000}{10000} \quad \mu = np = (10000)\left(\frac{2}{5}\right) = 4000$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10000\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)} = 48.989794$$

$$Z_{\frac{100\pm96}{2}} = \pm 2.05$$

$$\bar{x} - Z_{\frac{100-96}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\frac{100+96}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4000 - 2.05\ \frac{48.98}{100} < \mu < 4000 + 2.05\ \frac{48.98}{100}$$

$$= 3998.99591 < \mu < 4001.00409$$

(3998,4002)

7.- Supóngase que la cantidad real de café instantáneo colocada por una máquina llenadora en frascos de "n onzas" es una variable aleatoria que tiene una distribución normal con varianza=0.0025 de onza. Si sólo el 3% de los frascos van a contener menos de n onzas de café. ¿Cuál debe ser el contenido medio de estos frascos?

Solución:

$\sigma^2 = 0.0025$

$\sigma = \pm 0.05$

$P(x < n) = 3\%$ ó .03

$\mu = ?$

$$P(x < n) = I(Z_{MAX}) - I(-\infty)$$

$$0.03 = I(Z_{MAX}) - 0 \qquad I(Z_{MAX}) = .03 \;\therefore\; Z_{MAX} = -1.88$$

$$Z_{MAX} = \frac{b-\mu}{\sigma} \qquad -1.88 = \frac{n-\mu}{.05} \qquad \mu = n + (1.88)(.05) \quad \mu = .094 + n$$

El contenido medio de los frascos de café es de $.094 + n$ onzas.

8.-Supóngase que la cantidad real de pintura colocada por una máquina llenadora en latas de 8 galones es una variable aleatoria que tiene distribución normal con desviación estándar .0025 de onza. Si sólo el 3% de las latas van a contener menos de 8 galones de pintura. ¿Cuál debe ser el contenido medio de estas latas?

Solución:

$\sigma^2 = 0.0025$

$\sigma = \pm 0.05$

$P(x < n) = 3\%$ ó .03

$\mu = ?$

$n = 8$

$$P(x < 8) = I(Z_{MAX}) - I(-\infty)$$

$$0.03 = I(Z_{MAX}) - 0 \qquad I(Z_{MAX}) = .03 \quad \therefore \quad Z_{MAX} = -1.88$$

$$Z_{MAX} = \frac{b-\mu}{\sigma} \qquad -1.88 = \frac{8-\mu}{.05} \qquad \mu = 8 + (1.88)(.05) \quad \mu = 8.094$$

El contenido medio de los frascos de café es de 8.094 galones.

11.- Durante varios años, se había aplicado un examen diagnóstico a todos os alumnos de tercer semestre de la ESCOM. Si 64 estudiantes, seleccionados al azar, tardaron en promedio 28.5 minutos en resolver el examen con una varianza de 9.3, ¿Cuántos se esperaría que tardaron entre 27 y 32 minutos en resolver el examen?

Solución:

$\sigma^2 = 9.3$

$\sigma = \pm\, 3.049$

$P(27 \leq x \leq 32) = ?$

$\mu = 28.5$

$n = 64$

$$P(27 \leq x \leq 32) = I(Z_{MAX}) - I(Z_{min})$$

Escriba aquí la ecuación.

Dónde:

$$Z_{MAX} = \frac{b-\mu}{\sigma} = \frac{32-28.5}{3.049} = 1.14791735$$

$I(1.14791735) = 0.8729$

$$Z_{min} = \frac{a - \mu}{\sigma} = \frac{27 - 28.5}{3.049} = -0.49196454786$$

$I(-0.49196454786) = 0.3121$

$P(27 \leq x \leq 32) = 0.8729 - 0.3121 = 0.5608$ ó 56.08%

Se esperaría que el 56.08% de los alumnos tarden entre 27 y 32 minutos en resolver el examen, que son aproximadamente 36 de 64 alumnos.