



**Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Cómputo**



Ingeniería en Sistemas Computacionales

Trabajo Terminal

**Software de simulación gráfica y animaciones en 3D para el
aprendizaje interactivo de la materia de mecánica y
electromagnetismo de la ISC de la ESCOM (SSIG-3D)**

(2023-A017)

Presentan:

- Guadarrama Ascencio Juan Carlos
- Ornelas García Luis Ángel
- Sampayo Hernández Mauro

Director:

- Dr. Manzanilla Granados Héctor Manuel

Resumen

Se presenta un proyecto para crear un ambiente gráfico tridimensional capaz de simular trayectorias, espacios vectoriales y animación en 3D, de diversos problemas aplicados en la materia de mecánica clásica y electromagnetismo; y de la materia de análisis vectorial de la ISC de la ESCOM. El software propuesto a desarrollar sentará las bases para el desarrollo de un laboratorio virtual de física más completo.

Índice

1. Antecedentes	5
1.1. Introducción	5
1.2. Objetivos	8
1.2.1. Objetivos Generales	8
1.2.2. Objetivos Específicos	8
1.3. Justificación	9
1.4. Resultados esperados	9
2. Estado del Arte	10
3. Marco Teórico (Ecuaciones de movimiento)	12
3.1. Cinemática.	12
3.2. El vector velocidad.	14
3.3. El movimiento rectilíneo uniforme.	16
3.4. Movimiento uniformemente acelerado.	17
3.5. Movimiento en un plano: Tiro parabólico y movimiento circular uniforme . .	19
3.5.1. Movimiento en un plano y tiro parabólico.	19
3.5.2. Movimiento circular uniforme.	20
3.6. Dinámica	23
3.6.1. Sistema inercial de referencia.	23
3.6.2. Leyes de Newton	24
3.6.3. Diagrama de cuerpo libre	25
3.6.4. Aplicaciones de la ley de Newton	29
3.7. Conservación de la energía	34
3.7.1. Trabajo, energía potencial, energía cinética y conservación de la energía mecánica.	34
4. Planificación Inicial	37
4.1. Ámbito	37
4.2. Metodología	37
4.3. Cronograma de Actividades	38
4.4. Lenguaje de programación	38
4.5. Entornos de Desarrollo	39
4.6. Arquitectura de desarrollo	40
5. Planificación Inicial del Proyecto	41
5.1. Análisis de Requerimientos	41
5.1.1. Requerimientos Funcionales	41
5.1.2. Requerimientos No Funcionales	42
5.2. Análisis de riesgos	43
5.3. Jerarquización	43
5.4. Gestión de riesgos	44

5.5. Diagrama de Casos de Uso	45
5.6. Casos de Uso	46
5.7. Diagrama de Clases	54
6. Resultados	55
6.1. Simulaciones	55
6.2. Software Obtenido	56
Referencias	58
Glosario	60

1 Antecedentes

1.1 Introducción

En México las escuelas públicas tecnológicas, tienen en común la enseñanza de las matemáticas y de la física en el plan de estudios de su tronco común, y esto es independiente de la carrera que pudieran ofertar. Para tener una idea de la matrícula que estas instituciones ofrecen, (véase, por ejemplo, el trabajo de Manzanilla et. al. [1–5]) en 2018 se reportó que estas unidades académicas tenían una matrícula superior a un millón de alumnos, en más de 550 unidades académicas, a lo largo y ancho de todo el país [1–5].

Esto implica que existe una gran demanda por el aprendizaje de la física y matemáticas en nuestro país. Dada esta necesidad y la evolución de las TICs [1–5], en el mundo [1–5], el desarrollo de un software adecuado para facilitar el aprendizaje de la física es importante. En este sentido desde la década pasada, se han reportado varios trabajos con la idea de crear a través de un software, laboratorios virtuales y diferentes tipos de aplicaciones que faciliten la enseñanza de la física [6–14]. En estos trabajos se resalta la importancia del ambiente gráfico; ya que, de alguna forma u otra, en la física se cumple que la “Imaginación es más grande que conocimiento”.

Varios de estos trabajos señalan que el lenguaje de programación en Python es una herramienta muy poderosa en la simulación gráfica de diferentes problemas de la física, sin embargo, el lenguaje por sí solo no ofrece una solución, sino que requiere de la **experiencia del docente** quien decide cómo se debe enseñar y que es lo importante, así como también de las **habilidades del programador** para realizar un ambiente de operación simple, intuitivo y poderoso. El éxito de cualquier laboratorio o simulador virtual siempre dependerá de la habilidad de enseñar, de resolver problemas y simular gráficamente los aspectos más relevantes.

Cuando se enseña física se puede observar que el desarrollo de la imaginación tridimensional para muchos de los alumnos es un **problema complejo**, muchos de ellos tienen poca experiencia con las representaciones vectoriales en los espacios 3D; por mencionar algunos ejemplos: cuando se estudian los espacios vectoriales electrostáticos de una fuente puntual de carga, la cual emana de un campo eléctrico en todas las direcciones del espacio; cuando se estudian las fuerzas de fricción debido a un objeto en movimiento sobre un plano inclinado; en el cálculo de los momentos de torsión, en el movimiento de proyectiles, en el concepto de ángulo sólido aplicado en la teoría de la electrostática, en el empleo de los sistemas coordenados esféricos y cilíndricos; por citar algunos. En general el estudio de la física requiere de un conocimiento sólido del análisis vectorial y de una poderosa imaginación tridimensional.

La física además tiene una estrecha relación con la computación e Ingeniería en Sistemas, pues como menciona Hernández en el artículo [14], “los ordenadores son hoy indispensables para analizar científicamente esas series interminables de datos que generan las grandes instalaciones de aceleradores de partículas y observatorios astronómicos o las redes de estaciones para medidas atmosféricas”. Con ayuda de la computación se puede llevar a cabo la cons-

trucción de modelos detallados de la realidad observable para realizar experimentos físicos, simulando su comportamiento en una computadora. El desarrollo de estos modelos brinda una mayor flexibilidad a la experimentación, permitiendo así, la identificación de mecanismos y procesos físicos que forman parte del fenómeno; realizar mediciones de magnitudes físicas de importancia y analizar con mayor facilidad la variación que puedan presentar bajo ciertas condiciones; y la comprobación de teorías que difícilmente puedan ser verificadas en la realidad debido a su complejidad y/o costo.

Podemos destacar también la importancia de aplicar conocimientos de física en productos populares como los videojuegos. Este factor puede llegar a ser determinante en la implementación de mecánicas dentro de estos, la manipulación de los controles o en la dinámica del cuerpo rígido que son las normas de movimiento, colisión e interacción de todos los objetos (personajes, objetos, sonidos, ambiente, muros, etc.) presentes en un videojuego, de no tomarlas en cuenta, la interactividad del jugador sería una mala experiencia dado a una mala implementación de las leyes físicas programadas en el juego.

Las últimas generaciones de estudiantes han crecido con el uso continuo de las tecnologías inteligentes (TIC) llámese celular, laptop, televisión, tableta, etc., es por ello que el desarrollo de una metodología de aprendizaje visual ha sido implementado en el sistema educativo. Por palabras del artículo de Cerro [17] “Las generaciones adolescentes actuales (Generación Z) han crecido como nativos tecnológicos digitales, con la aparición de los smartphones y la tecnología inteligente. ¿Y qué significa ser “nativo digital?”. Pues define a personas que, desde su infancia, han sido consumidores abundantes de formatos digitales, como son, principalmente, imágenes y videos. La imagen está derrotando al texto, y debemos ser conscientes de ello. La globalización está consiguiendo que las imágenes sean el nuevo idioma del siglo XXI. “

Como menciona Moreno et. al., en el artículo [7], “existen diversas causas de reprobación entre los estudiantes de ingeniería, entre las cuales se listan aquellas atribuidas a la institución educativa; tales como la existencia de programas muy extensos y tediosos, y laboratorios/talleres que cuentan con múltiples deficiencias. Esto se traduce en que la manera de enseñanza de la Física en la ingeniería puede resultar muy tediosa o compleja al alumno, además de que la retroalimentación brindada por los laboratorios de Física es insuficiente para ayudarle al alumno a comprenderla mejor; limitando así el aprendizaje que pudiera obtenerse por parte del alumno sobre la materia, y generarle frustración y/o rechazo sobre la misma”. Considerando esta reflexión, observamos una razón más de la importancia que podría tener un laboratorio virtual.

Una alternativa propuesta para mejorar el aprendizaje de la Física es la metodología conocida como Aprendizaje Activo de la Física, como menciona Sánchez et. al. en el artículo [8]

” Esta metodología permite que el estudiante aprenda Física de manera más dinámica por medio de experimentos didácticos presenciales que permiten una mejor comprensión de los problemas físicos planteados, y de esta forma este no tenga que depender de forma drástica de un libro de texto o de un profesor, a la vez que se mejora su aprendizaje en la materia”. Sin embargo, dicha metodología puede presentar limitaciones cuando se tratan ciertos temas cuya complejidad hace difícil el desarrollo de experimentos para su mejor comprensión; razón por la cual el uso de simuladores en 3D resulta ser una alternativa viable por medio de los

cuales se podría enseñar a los alumnos temas complejos de manera didáctica.

Como ya hemos mencionado, Python es un programa altamente aceptado por la comunidad científica en el desarrollo de software gráfico aplicado a la solución de problemas de física. Actualmente se puede observar una tendencia del uso de Python en grandes centros de investigación como el CERN y en ramas científicas. Como menciona Becerra [9] “Esto es debido a la disponibilidad de bibliotecas de visualización, procesamiento de señales, estadística, álgebra, etc.; de fácil utilización y que cuentan con muy buena documentación. Los paquetes NumPy (Python Numérico) y SciPy (Python Científico) son pilares para el trabajo científico hoy en día, estos emulan en muchas ocasiones las funciones disponibles por Matlab (otro de los lenguajes de corte científico existentes) lo que hace más fácil la transición a partir de este.”

En nuestra búsqueda de posibles proyectos o ideas similares a la nuestra, se destaca un proyecto desarrollado por el PhET (interactive simulations), la cual es una página web realizada por la Universidad de Colorado Boulder, cuyo contenido es una compilación de laboratorios 2D simulando problemas de distintos tópicos (física, biología, química, matemáticas, etc.) desarrollado en el lenguaje de programación HTML 5. Nos pareció que este es uno de los mejores laboratorios virtuales que pudimos encontrar y que desde nuestro punto de vista tiene un buen diseño pedagógico lo cual es muy importante y consideramos que será una buena referencia para nuestro trabajo, sin embargo, comentamos que el trabajo que aquí se presenta tendrá un lenguaje de programación diferente, estará orientado a simulaciones en 3D (no en 2D como en el laboratorio que mencionamos) y tendrá módulos de enseñanza específicos para una unidad de aprendizaje, también tendrá la diferencia de la portabilidad.

En este trabajo se plantea crear un software para la modelación tridimensional de diversos problemas de física de la materia de mecánica y electromagnetismo, empleando el lenguaje de programación Python aplicando diversos problemas modelo, de carácter universal en la enseñanza de la física clásica.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos Generales

Desarrollar un software que muestre de manera visual e interactiva ejemplos de temas de la materia de mecánica y electromagnetismo, que sirva como una herramienta auxiliar para los profesores y estudiantes de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales de la Escuela Superior de Cómputo y carreras afines, para mejorar su entendimiento y aprendizaje.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Desarrollar un módulo (conjunto de problemas resueltos afines a ese tema) que sea capaz de graficar vectores en 3D y realizar operaciones como la suma, el producto interno y el producto cruz entre vectores; resaltando la importancia, por ejemplo, la regla de la mano derecha en el producto cruz, también se aprovechará en este módulo mostrar la diferencia entre un sistema dextrógiro y levógiro.
- Desarrollar un módulo que enseñe los principios de la primera, segunda y tercera ley de Newton, donde se aplicarán aspectos gráficos en 3D del comportamiento de las fuerzas.
- Desarrollar un módulo para el estudio del tiro parabólico, esto incluirá animación virtual en 3D.
- Desarrollar un módulo para el estudio y comprensión de diferentes sistemas ortogonales de coordenadas (sistemas de coordenadas cartesianas esféricas y cilíndricas).
- Desarrollar un módulo para el estudio del ángulo sólido.
- Desarrollar un módulo para el cálculo del campo eléctrico con cargas puntuales.
- Desarrollar modulo para el cálculo del campo magnético.

1.3 Justificación

En la actualidad se han desarrollado varios proyectos destinados al aprendizaje de la física en cualquier nivel de educación, pero pocos utilizando el lenguaje de programación en Python, el cual ayudará ampliamente al desarrollo de este proyecto. La mayoría de los proyectos centrados en el aprendizaje de los estudiantes son gratuitos, pero la mayoría de estos sistemas están dentro de la web con lenguajes como HTML 5, Java y JavaScript, además de que resuelven solo un problema por sistema, es por ello que, buscando una distinta perspectiva daremos uso al lenguaje de Python dada la amplia gama de bibliotecas que soportan el trabajo en la tercera dimensión y resolveremos distintos ejercicios en un mismo proyecto.

Es un proyecto de alta relevancia, como se pudo mencionar anteriormente, ya que en nuestro país hay millones de estudiantes que pueden beneficiarse con el pasar del tiempo, y que se pretende que este trabajo sienta una base en la construcción de un laboratorio virtual más poderoso y completo, que pudiera aplicarse en el área de la hidrodinámica, reactores químicos, magnetostática, geofísica y cualquier otro tipo de disciplina que pueda beneficiarse con la construcción gráfica tridimensional del análisis de sus resultados.

1.4 Resultados esperados

- Software de simulación 3D de problemas de física clásica basado en Python.
- Documentación técnica del sistema.
- Manual de uso del servicio para interesados.
- Reporte técnico de la investigación realizada.

2 Estado del Arte

A continuación, se muestra una tabla con algunos de los simuladores más populares y cuyo concepto es similar a la idea de lo que se desea desarrollar:

Nombre	Características	Precio en el mercado
Geogebra	<ul style="list-style-type: none"> ■ Aplicaciones de Geometría, Álgebra y Álgebra computacional. ■ Potentes herramientas en armonía con una interfaz intuitiva y ágil. ■ Herramienta de autoría para crear recursos de aprendizaje interactivos como páginas web. ■ Aplicación web políglota (varios lenguajes). ■ Software de código abierto libre y disponible para usos no comerciales. ■ Lenguajes de programación: HTML 5, Java y JavaScript. 	Gratis.
Meta-calculator	<ul style="list-style-type: none"> ■ Aplicaciones de Geometría, Álgebra y Álgebra computacional. ■ Aplicación web políglota (varios lenguajes). ■ Software de código abierto libre y disponible para usos no comerciales. ■ Lenguajes de programación: HTML 5, Java y JavaScript. 	Gratis.
Online graph plotter	<ul style="list-style-type: none"> ■ Graficación de fórmulas y expresiones matemáticas. ■ Cambio de variables. ■ Solo se encuentra en inglés. ■ Lenguaje de programación: Java. 	\$25 MXN Tiene una versión gratuita.

Nombre	Características	Precio en el mercado
Physics Lab	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Simulación de varios componentes de circuitos, construcción de tus propios circuitos eléctricos en 3D y prueba cómo funcionan en tiempo real. ▪ Aplicación políglota (varios idiomas). ▪ No hay que gastar en equipos de laboratorio, ni preocuparse por cuestiones de seguridad. ▪ Lenguajes de programación: Java. 	Gratis.
PhET Interactive Simulator	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Página web con una compilación de laboratorios 2D simulando problemas de distintos tópicos. ▪ Lenguaje de Programación: HTML 5 y JavaScript. ▪ Enfocado en el aprendizaje visual. 	Gratis.
Sistema de apoyo en la enseñanza-aprendizaje del análisis vectorial (SAEAAV)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ TT realizado en la ESCOM. ▪ Visualización de campos escalares y vectoriales en 2D y 3D. ▪ Enfocado en la materia de análisis vectorial. ▪ Creado con los lenguajes de programación Java y MATLAB. 	Gratis.
Solución propuesta	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Solución de varios problemas físicas en una misma aplicación. ▪ Disponible para usos no comerciales. ▪ Aprendizaje para todo interesado, ya sean estudiantes, maestros o no lo sean. ▪ UI sencilla y amigable para con el usuario. ▪ Accesible e todo momento. ▪ Lenguaje de programación: Python. 	Gratis.

3 Marco Teórico (Ecuaciones de movimiento)

3.1 Cinemática.

Un primer contacto relacionado con la física comprende el estudio de la mecánica clásica, la cual está relacionada con la comprensión del movimiento de los cuerpos bajo los efectos de alguna o ninguna fuerza. Al caso del estudio de un conjunto de fuerzas que actúa sobre un objeto que permanece en reposo se le denomina estática y al caso contrario se le llama dinámica. La estática tiene muchas aplicaciones en la ingeniería civil, en la construcción de estructuras etc. Por otra parte, la dinámica se puede aplicar a todo aquello que se mueve a velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz.

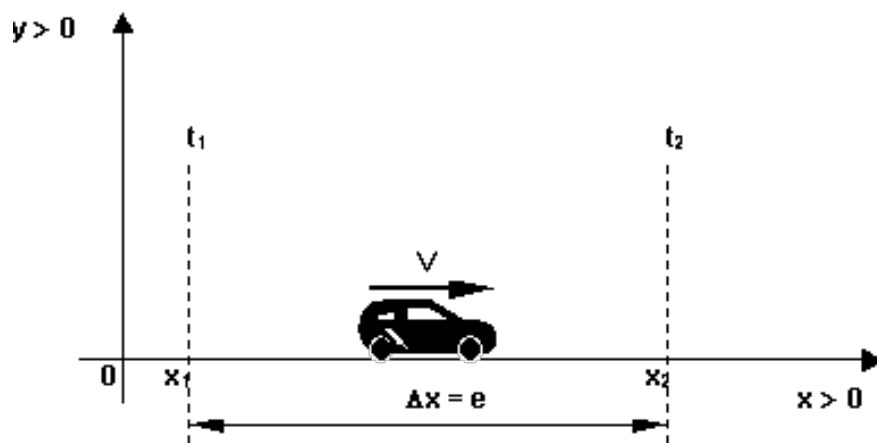


Figura 1: Movimiento rectilíneo uniforme

En el plan de estudios 2020 de la materia de mecánica y electromagnetismo de la ESCOM, se plantea como la primera unidad de aprendizaje el estudio de la dinámica. Para ello es conveniente que el alumno tenga bases sólidas en la materia de análisis vectorial y con las herramientas adquiridas pueda introducirse al estudio de la dinámica de manera eficiente.

La dinámica estudia el movimiento de los cuerpos de acuerdo a una fuerza aplicada, cuando nos referimos al movimiento, nos estamos refiriendo a cierta trayectoria que un cuerpo puede tener conforme experimenta la presencia de una fuerza y la trayectoria se puede comprender como el conjunto continuo de diferentes posiciones en el espacio que un cuerpo puede adquirir conforme transcurre el tiempo. El movimiento de un cuerpo queda descrito perfectamente por las ecuaciones de movimiento que describen su trayectoria y velocidad en función del tiempo. Así que la finalidad de la dinámica sería obtener las ecuaciones de movimiento para un cuerpo u objeto en función del tiempo, bajo el efecto de una fuerza externa que actúa sobre él.

Para obtener las ecuaciones de movimiento es necesario comprender como se definen los vectores en \mathcal{R}^3 , es decir, en el espacio tridimensional, en el cual si se recuerda, los vectores se pueden definir como una triada de números reales: $\vec{r} = (x, y, z)$, donde x, y y z , son el conjunto

de coordenadas (números reales) de \vec{r} , y que operan bajo dos operaciones, el producto por un escalar y la suma coordenada a coordenada entre ellos, revise el capítulo 1 de [20]. También es importante notar que las ecuaciones de movimiento implican la aplicación de una fuerza sobre un cuerpo, en cuanto a esto es necesario saber o comprender que es una fuerza y que se entiende por un cuerpo. En esta sección veremos que una fuerza se define a partir de la segunda ley de Newton, y eso implica conocer y tratar con el concepto de aceleración (\vec{a}), que desde el punto de vista matemático, se define como la segunda derivada del vector de posición respecto del tiempo, esto implica también conocimientos de análisis vectorial, ya que es necesario derivar cantidades vectoriales, como son la posición (\vec{r}), y velocidad (\vec{v}). Esto sugiere cierta experiencia en estos métodos. También en el estudio de las fuerzas hay una ley de Newton omnipresente, la tercera ley. Por otra parte es importante resaltar el concepto de cuerpo u objeto, ya que desde el punto de vista de la dinámica este concepto se refiere a un modelo de una partícula, es decir todo cuerpo está idealmente modelado por una partícula puntual, bajo este modelo las partículas puntuales no sufren ni experimentan deformaciones, cambios de temperatura, reacciones químicas etc., tal como ocurre en el mundo real. También es importante señalar que dentro de este capítulo sólo trataremos a la dinámica traslacional, y de allí que sólo consideremos a un cuerpo como una partícula puntual, ya que desde el punto de vista de la dinámica rotacional, se puede definir a un cuerpo, como el llamado cuerpo rígido, que consiste de la unión de un conjunto continuo de puntos con masa.

Entonces, para construir el formalismo de las ecuaciones de movimiento, emplearemos un método poco ortodoxo, pero que consideramos poderoso si se le presta un poco de atención. En este apartado, partiremos de lo general a lo particular.

3.2 El vector velocidad.

En coordenadas esféricas se tiene que el vector de posición como una función del tiempo, se puede escribir como

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t) \quad (1)$$

Esto significa que de manera general, tanto la magnitud como la dirección del vector de posición pueden o no evolucionar en el tiempo, como se puede imaginar una partícula tendrá una trayectoria dada, según sean las fuerzas externas que actúen sobre ella, entonces un cambio diferencial de la trayectoria, expresada por el cambio del vector de posición vendrá dado por:

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\hat{r} \quad (2)$$

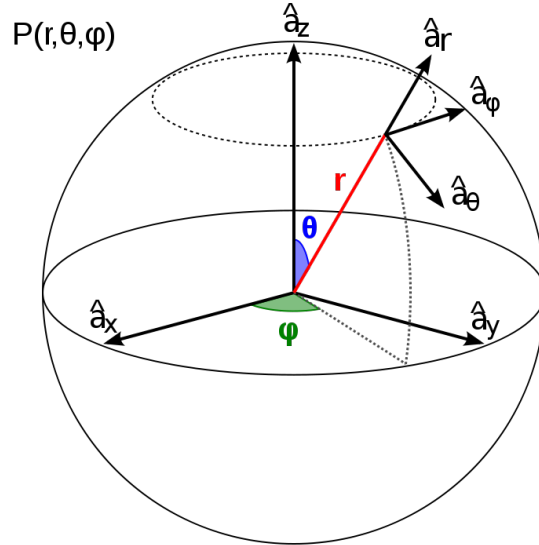


Figura 2: Descripción de las coordenadas esféricas. Obsérvese que un punto en \mathcal{R}^3 está en términos, de las coordenadas $\vec{r} = (r, \theta, \phi)$; donde el valor r corresponde a la distancia del origen al punto \vec{r} , ϕ es el ángulo azimutal y θ el ángulo polar.

Por otra parte el diferencial $d\hat{r}$, se puede escribir aplicando la definición del diferencial de una función vectorial, véase [20], es decir:

$$d\hat{r} = \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} dr \quad (3)$$

Si además consideramos que: $\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}$, $\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \sin(\theta)\hat{\phi}$ y $\frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = 0$, entonces, la ecuación 3, se puede escribir como:

$$d\hat{r} = \hat{\theta} d\theta + \sin(\theta) \hat{\varphi} d\varphi \quad (4)$$

Entonces, sustituyendo la ecuación 4 en la ecuación 2, se tiene

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin(\theta) d\varphi \hat{\varphi} \quad (5)$$

Entonces, si dividimos esta ecuación entre el dt , obtenemos el vector de la velocidad de una partícula en coordenadas esféricas, como una función del tiempo, es decir, de manera general las coordenadas $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$ son funciones que dependerán del tiempo y evolucionarán según las condiciones iniciales y las fuerzas que actúen sobre la partícula.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} + r \sin(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \hat{\varphi} \quad (6)$$

donde se puede definir: $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ y $v(t) = \frac{dr}{dt} = \dot{r}(t)$, quedando la velocidad escrita de manera compacta como:

$$\vec{v}(t) = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin(\theta) \dot{\varphi} \hat{\varphi} \quad (7)$$

Esto quiere decir, que de manera general, el vector de la velocidad de cualquier partícula es igual a un vector de tres componentes \hat{r} , $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$ dependientes del tiempo, y con componentes \dot{r} , $r\dot{\theta}$ y $r\sin(\theta)\dot{\varphi}$, respectivamente; también todas ellas dependientes del tiempo. Donde $\dot{r}(t)$, representa el desplazamiento espacial en la dirección del vector \hat{r} , la cual también es conocida como desplazamiento traslacional y tiene unidades de longitud por unidad de tiempo, hay otro par de desplazamientos por unidad de tiempo que corresponden a las funciones $\dot{\theta}(t)$ y $\dot{\varphi}(t)$, las cuales representan la conocida velocidad angular que puede comprenderse como el desplazamiento angular por unidad de tiempo, o bien conocida como número de revoluciones por unidad de tiempo. La ecuación 7, es la ecuación más general de la velocidad, escrita en coordenadas esféricas y es muy útil su descripción en esta forma, ya que a partir de ella como veremos más adelante es muy fácil deducir las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme, el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y el movimiento circular uniforme.

3.3 El movimiento rectilíneo uniforme.

Supongamos que nos encontramos en el espacio y nos encontramos sobre un sistema inercial de referencia, y supongamos que el movimiento que observamos corresponde al de una partícula que se mueve en una sola dirección y a una rapidez constante, es decir la magnitud de espacio recorrida por unidad de tiempo es constante, de esta observación podríamos deducir que no hay rotaciones en ningún sentido o dirección, es decir, todas las velocidades angulares son cero ($\dot{\theta}(t) = 0$ y $\dot{\varphi}(t) = 0$), por lo tanto la ecuación 7 se simplifica a:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{r} \quad (8)$$

ya que en este caso particular el vector unitario \hat{r} apunta siempre en una misma dirección, entonces podríamos denotarlo por alguno de los vectores fijos del sistema de coordenadas cartesiano, como lo es por ejemplo el eje x , véase la figura 1, representado por el vector unitario en la dirección \hat{i} . Por lo tanto podríamos escribir la ecuación 8 más específicamente como:

$$\vec{X}(t) = \dot{x}(t)\hat{i} \quad (9)$$

Esta es una ecuación vectorial, pero considerando que sólo apunta en una dirección y que además su rapidez es constante, entonces:

$$\dot{x}(t) = k = \frac{dx(t)}{dt} \quad (10)$$

En su forma vectorial esta ecuación queda.

$$\dot{\vec{X}}(t) = k\hat{i} \quad (11)$$

La ecuación 10 es una ecuación diferencial lineal de primer orden la cual se puede integrar de manera directa, es decir:

$$\int k dt = \int \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] dt = kt + c = x(t) \quad (12)$$

como puede observarse, esta simple solución nos muestra que la posición del tiempo siempre será directamente proporcional al tiempo, y también se puede observar que si en el tiempo cero, es decir al inicio del movimiento, la partícula se encontraba en alguna posición dada, por ejemplo ($\vec{X}(0) = \vec{X}_0 = x(0)\hat{i} = 0\hat{i}$), entonces la *ecuación de movimiento* para la partícula es:

$$\vec{X}(t) = (kt)\hat{i}. \quad (13)$$

Que es la finalidad de la cinemática y la dinámica, a partir de esta ecuación es posible construir la trayectoria, a través de una gráfica.

Obsérvese que si derivamos el vector velocidad con respecto al tiempo ($\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \vec{X}(t) = \vec{a}(t)$) obtenemos que la aceleración, que también es un vector, y que en este caso vale cero tal como podemos observar con lo siguiente:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{X}}(t) = \frac{dk}{dt}\hat{i} + k\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{0} \quad (14)$$

Dado que la segunda ley de Newton establece que la fuerza aplicada sobre una partícula es igual a $\vec{F} = m\vec{a}$, donde \vec{F} es la fuerza y m representa a la masa de la partícula, entonces podemos deducir de la segunda ley de Newton, que para un movimiento uniforme la aceleración es cero y por lo tanto la fuerza aplicada sobre el objeto es nula. Por lo que esto nos lleva al principio de la **primera ley de Newton**, que establece *que todo cuerpo en estado de reposo o movimiento tenderá a permanecer en dicho estado en ausencia de una fuerza externa*. Si observamos de las ecuaciones que obtuvimos, si el cuerpo estuviera en reposo, entonces $k = 0$, y podríamos observar que bajo esta situación todas las variables posición, velocidad y aceleración serían cero, por lo que el cuerpo permanecería en reposo en ausencia de la fuerza externa. En el caso de $k \neq 0$, se puede observar como ya discutimos, que el cuerpo se moverá a velocidad constante eternamente en la dirección \hat{i} , esto deduce la primera ley.

3.4 Movimiento uniformemente acelerado.

El movimiento uniformemente acelerado considera que el movimiento de la partícula se desarrolla a aceleración constante, y no existe ningún tipo de rotación o velocidad angular, por lo que $\dot{\theta}$ y $\dot{\varphi}$, son iguales a cero, es decir, no existe desplazamiento angular, por lo que la ecuación 7, continúa siendo:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\hat{r} \quad (15)$$

Si aplicamos la derivada respecto al tiempo de esta ecuación tenemos que la aceleración es:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\dot{r}(t)}{dt}\hat{r} + \dot{r}(t)\frac{d\hat{r}}{dt} = \ddot{r}(t)\hat{r} + \dot{r}(t)\frac{d\hat{r}}{dt} \quad (16)$$

Dado que en este caso particular la aceleración es constante, no debería experimentar cambio en su magnitud ni en su dirección, entonces considerando esto $\ddot{r}(t) = a(t) = a$, es decir, un valor constante, y en cuanto a la dirección tenemos lo mismo, es decir, debe permanecer constante, lo cual implica que: $\frac{d\hat{r}}{dt} = 0$. Entonces, la ecuación 16, podría escribirse como:

$$\vec{a}(t) = \ddot{r}(t)\hat{r} = a\hat{r} \quad (17)$$

Esto implica que $\ddot{r}(t) = a$, mientras que el vector unitario \hat{r} , permanece constante en una única dirección. Entonces, de manera directa es posible resolver la ecuación diferencial $\ddot{r}(t) = a$, que corresponde a una ecuación diferencial lineal de segundo orden; mientras que el vector unitario \hat{r} puede permanecer en cualquier dirección fija, como podrían ser los vectores unitarios del sistema cartesiano \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} , esto se puede resolver en coordenadas cartesianas como sigue:

Sea \vec{a} el vector de la aceleración constante, de manera general un vector constante puede tener valores diferentes de cero en sus componentes (x, y, z) , es decir, $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, donde a_x , a_y y a_z puede ser cualquier número real. Entonces, la dirección del vector \hat{r} dependerá de los valores de las componentes de la aceleración, esto es:

$$\hat{r} = \frac{1}{|\vec{a}|} (a_x, a_y, a_z). \quad (18)$$

Donde $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, entonces el vector de la aceleración descompuesto en sus coordenadas cartesianas se escribe como:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{r}_x \hat{i} + \ddot{r}_y \hat{j} + \ddot{r}_z \hat{k} = \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad (19)$$

De modo que por comparación entre las diferentes componentes obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden,

$$\begin{aligned} \ddot{r}_x &= a_x \\ \ddot{r}_y &= a_y \\ \ddot{r}_z &= a_z \end{aligned}$$

Como puede observarse cualquiera de estas tres ecuaciones, son ecuaciones diferenciales de segundo orden y tienen exactamente la misma solución, por lo que bastara con resolver una de ellas para tener la solución de todas las demás. Entonces, si elegimos resolver la última de estas ecuaciones tenemos que:

$$\ddot{r}_z(t) = \frac{d\dot{r}_z(t)}{dt} = a_z \quad (20)$$

lo cual integrando directamente con respecto a t y considerando a_z constante, tenemos (siguiendo el mismo procedimiento de un párrafo anterior):

$$\dot{r}_z(t) = a_z t + c_1 \quad (21)$$

Donde $\dot{r}_z(t)$, es la componente de la velocidad en la dirección del eje Z , nuevamente es posible calcular el valor de c_1 , si consideramos que en el tiempo $t = 0$, la velocidad tiene un valor inicial $\dot{r}_z(0) = v_{z0}$, entonces la ecuación 21, se escribe como:

$$\dot{r}_z(t) = a_z t + v_{z0} = v_z(t). \quad (22)$$

Aplicando este procedimiento nuevamente tenemos:

$$r_z(t) = a_z \frac{t^2}{2} + v_{z0} t + Z_0 = r_z(t) = Z(t). \quad (23)$$

Donde $Z_0 = r_z(0) = Z(0)$, es el valor de la posición inicial de la coordenada Z . Recuerde que el valor de las coordenadas de un vector puede ser cualquier número real, es decir, pueden ser positivas o negativas, en este caso el vector constante aceleración $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, puede

tener coordenadas en x , y o z , con signo negativo o positivo, el valor del signo que elijamos para estas coordenadas dependerá de la dirección en que apunta la fuerza (quien es la que genera a la aceleración), con respecto a nuestro sistema de referencia. Entonces, si la fuerza en nuestro sistema de coordenadas apunta en una dirección negativa con respecto a como hemos definido nuestro sistema de coordenadas, entonces la aceleración debería llevar signo negativo.

Dado que el procedimiento de solución es el mismo para cada una de las componentes, entonces,

$$r_x(t) = a_x \frac{t^2}{2} + v_{x0}t + X_0 = r_x(t) = X(t). \quad (24)$$

y

$$r_y(t) = a_y \frac{t^2}{2} + v_{y0}t + Y_0 = r_y(t) = Y(t). \quad (25)$$

Donde v_{x0} , v_{y0} , X_0 y Y_0 , son los valores de las posiciones y velocidades respectivamente.

Entonces la ecuación de movimiento que define la trayectoria de la partícula en todo momento para una partícula con un movimiento uniformemente acelerado es:

$$\vec{r}(t) = (X(t), Y(t), Z(t)) \quad (26)$$

donde las funciones $X(t)$, $Y(t)$ y $Z(t)$, están dadas por las ecuaciones 23, 24 y 25.

La ecuación que define la velocidad en todo tiempo es:

$$\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \quad (27)$$

Donde $v_x(t)$, $v_y(t)$ y $v_z(t)$, son las componentes de la velocidad obtenidas a partir de ecuaciones similares a la ecuación 22.

3.5 Movimiento en un plano: Tiro parabólico y movimiento circular uniforme

3.5.1 Movimiento en un plano y tiro parabólico.

A partir de las ecuaciones 26 y 27, es posible deducir el movimiento a un tiro parabólico, como recordaremos en el tiro parabólico hay un lanzamiento de una partícula que sale con una velocidad inicial \vec{v}_0 y posición inicial \vec{r}_0 , y a partir de estas condiciones iniciales, siempre habrá una fuerza externa vertical que actúa sobre la partícula, hasta que cese el movimiento. Esta fuerza es conocida como la gravedad y para experimentos que ocurren al nivel de la tierra dicho valor se considera constante, de modo que el valor de la aceleración que utilizaremos en todas nuestras simulaciones para calcular el efecto de la fuerza gravitacional, será de $9,81[m/s^2]$. Entonces, bajo esta premisa se puede ver que este movimiento es uniformemente acelerado ya que la gravedad se considerará como una aceleración constante, considerando

esto es necesario definir el origen y el sistema de referencia, para fines prácticos en varios libros de texto, se considera que el vector inicial de la posición es $\vec{r}_0 = (X_0, Y_0, 0)$ y el de la velocidad corresponde a: $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, 0)$, mientras que el vector aceleración será : $\vec{a} = (0, -g, 0)$, es decir, el vector aceleración solo tendrá una componente en la dirección del eje Y , tendrá un signo negativo, considerando que el eje Y es positivo hacia arriba y la gravedad, siempre apunta hacia abajo. Bajo estas consideraciones y tomando en cuenta las ecuaciones 26 y 27, tenemos que los vectores de posición y velocidad quedarán definidos como,

$$\vec{r}(t) = (v_{0x}t + X_0, -\frac{gt^2}{2} + v_{0y}t + Y_0, 0) \quad (28)$$

$$\vec{v}(t) = (v_{0x}, -gt + v_{0y}, 0) \quad (29)$$

De la ecuación 28, se puede observar que la trayectoria estará definida sólo por las coordenadas $X(t)$ y $Y(t)$, ya que la evolución de la trayectoria en función del tiempo es: $(X(t), Y(t), 0)$. Entonces este movimiento ocurrirá sobre el plano XY , ya que la coordenada en Z siempre valdrá cero, y dada que la coordenada en $X(t)$ es directamente proporcional a t y $Y(t)$ proporcional a t^2 , entonces la trayectoria tendrá un comportamiento parabólico. El hecho de que el movimiento ocurra sobre un plano no significa que no pueda ocurrir en un espacio de tres dimensiones, por ejemplo, si consideramos un tiro donde hay una velocidad inicial en la coordenada Z , $v_{0z} \neq 0$, entonces, habrá un tiro parabólico sobre un plano, pero que se despliega en un espacio 3D. Como podemos ver el formalismo desarrollado en el párrafo anterior, es lo suficientemente poderoso, para obtener las ecuaciones de movimiento de un tiro parabólico.

3.5.2 Movimiento circular uniforme.

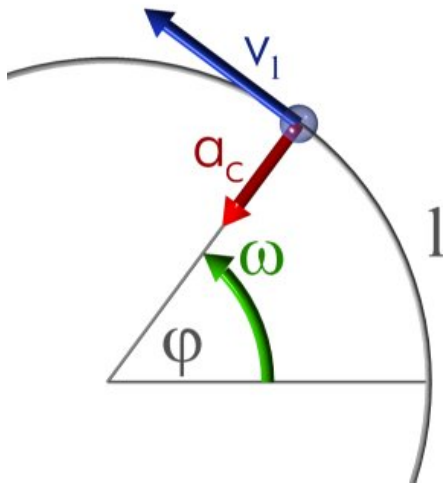


Figura 3: Movimiento circular uniforme

En esta sección hablaremos de un movimiento cuya trayectoria describe en todo momento un círculo de radio fijo R , con una rapidez angular constante (ω), como se puede ver en la figura 3. Como puede observarse en la figura, el círculo (la trayectoria que sigue la partícula en todo momento) puede centrarse alrededor del eje Z , y el desplazamiento se puede dar sobre el plano XY . Nótese que una de las características de este movimiento, es que se da sobre una circunferencia de radio fijo R , lo cual implica que la magnitud del vector de posición es constante, esto es ($|\vec{r}(t)| = R$). También puede observarse que el vector velocidad ($\vec{v}(t)$) de la partícula, siempre es tangente a la trayectoria, y por lo tanto siempre es perpendicular al vector de posición $\vec{r}(t)$. Si adicionalmente consideramos a las coordenadas esféricas, se puede observar que el vector unitario de la velocidad, descrito de esta forma, es paralelo al vector unitario $\hat{\phi}$, por lo que

siempre apuntan en la misma dirección, entonces el vector de la velocidad se puede escribir como $\vec{v}(r) = |\vec{v}(t)|\hat{v} = |\vec{v}(t)|\hat{\phi}$. Considerando todo esto, podemos ver a partir de la ecuación 7, que cumple lo siguiente: que el módulo del vector de la posición al ser constante, ($|\vec{r}| = R = r$), tiene como valor en su derivada $\dot{r} = 0$, y también es posible observar que el ángulo $\theta(t)$, esta fijo a $\theta = \frac{\pi}{2}$, por lo que $\dot{\theta}(t) = 0$ y $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Entonces, bajo todas estas consideraciones tenemos que el vector velocidad de la ecuación 7, queda como:

$$\vec{v}(t) = r\dot{\phi}\hat{\phi} \quad (30)$$

De acuerdo a lo explicado en la sección anterior, $\dot{\phi}$ representa una velocidad angular; en este caso es la velocidad angular o el número de revoluciones que da la partícula alrededor del eje Z, tal como se ve en la figura 3. Entonces si definimos a $\omega = \dot{\phi}$, y $r = R$ y $\hat{phi} = \hat{v}$, entonces la ecuación 30, queda como:

$$\vec{v}(t) = R\omega\hat{v} \quad (31)$$

donde la magnitud de la velocidad es $|\vec{v}(t)| = R\omega$, de modo que si despejamos a ω , nos queda:

$$\omega = \frac{v_T}{R} \quad (32)$$

donde $v_T = |\vec{v}(t)|$, es la magnitud de la velocidad tangencial, que ya habíamos comentado y R el radio de la circunferencia. Esta ecuación es muy conocida en los libros de texto y dice que la velocidad angular de un movimiento uniformemente acelerado es directamente proporcional a la rapidez tangencial e inversamente proporcional al radio del movimiento.

Si quisiéramos saber si existe alguna fuerza externa que este generando este movimiento, lo único que debemos hacer es que de acuerdo a la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, donde la aceleración es la derivada respecto del tiempo de la velocidad, en este caso particular de movimiento podemos derivar la ecuación 32 respecto del tiempo de modo que:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dR\omega\hat{v}}{dt} = R\omega\frac{d\hat{v}}{dt} = R\omega\frac{d\hat{\phi}}{dt} \quad (33)$$

y considerando que $d\hat{\phi} = -Rd\phi\hat{r}$, entonces:

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dR\omega\hat{v}}{dt} = R\omega\frac{d\hat{v}}{dt} = R\omega\frac{d\hat{\phi}}{dt} = -R\omega\left(\frac{d\phi}{dt}\right)\hat{r} = -R\omega^2\hat{r} = R\omega^2(-\hat{r}) \quad (34)$$

lo cual nos indica que la aceleración de un movimiento circular uniforme, es un vector de magnitud $|\vec{a}_c| = R\omega^2$, apuntando en una dirección $-\hat{r}$, que de acuerdo a la figura 3, la aceleración queda apuntando hacia el centro, por lo que lleva el nombre de aceleración centrípeta y de allí que le hayamos escrito el subíndice c .

Entonces la magnitud de la fuerza centrípeta, seria el producto de la masa de la partícula por la magnitud de la aceleración centrípeta, es decir: $F_c = R\omega^2 = \frac{v_T^2}{R}$ y con dirección hacia el centro, esto se puede ver de la siguiente ecuación,

$$\vec{F}_c = m\vec{a}_c = R\omega^2(-\hat{r}) = R\left(\frac{v_T}{R}\right)^2(-\hat{r}) = \frac{v_T^2}{R}(-\hat{r}) \quad (35)$$

Como podemos observar el movimiento uniforme tiene una magnitud en su velocidad tangencial constante, es decir, la magnitud de la velocidad es constante, sin embargo el objeto esta acelerado, esto muestra un ejemplo claro de que la aceleración no solo se da cuando un objeto cambia su rapidez, sino que se da también cuando un objeto cambia su dirección. Es decir, para cambiar la dirección de un objeto que esta en movimiento, se requiere aplicar una fuerza, el cambio de la dirección del vector velocidad requiere de la aplicación de una fuerza.

3.6 Dinámica

3.6.1 Sistema inercial de referencia.

Para poder hablar de movimiento es necesario tener un punto de referencia, por ejemplo, imaginemos que estamos en un lugar hipotético del espacio donde no haya cosa alguna mas que nosotros mismos, como si estuviéramos en el interior de una inmensa caja oscura. Al no percibir ningún punto de referencia, en primera instancia, no sabríamos si nos estamos moviendo. Es decir, como podríamos saber si viajamos hacia arriba, hacia abajo, hacia la izquierda o a la derecha de algún punto fijo dado; probablemente no pudiéramos saber si quiera, si estamos quietos. Sin embargo, si tuviéramos una manzana fluorescente (para que brille en la oscuridad) en la mano y supiéramos un poco de física hay algunas cosas que podríamos hacer para saber. Por ejemplo, podríamos intentar abrir la mano, lo mas cuidadoso posible, sin empujar la manzana, con la finalidad de ver si la manzana continua viajando junto con nosotros, de ser así, es decir, de soltar la manzana y ver que sigue viajando junto a nosotros, podría significar dos cosas, una es que de acuerdo a la primera ley de Newton, estemos viajando a una misma velocidad lo cual continuara mientras no haya una fuerza externa que nos perturbe; podríamos continuar de este modo, viajando eternamente a velocidad constante.

Otra posibilidad seria, que ambos estuviéramos siendo acelerados con una misma aceleración y en una misma dirección como por ejemplo, bajo la influencia de un campo gravitatorio, en este caso estaríamos experimentando una aceleración traslacional. Como no tendríamos forma de saber si nuestro movimiento esta en reposo, o a velocidad constante o es uniformemente acelerado, entonces podríamos hacer un experimento con la manzana, podríamos tomar la manzana y lanzarla con todas nuestras fuerzas en una dirección al azar, si no hubiera fuerza externa observaríamos que la manzana una vez que se despega de nosotros, se alejará por siempre en la misma dirección y a una velocidad constante; sin embargo, si estuviéramos bajo el efecto de un campo de fuerza externo, observaríamos que la manzana tendría variaciones en su vector velocidad, ya sea en su magnitud, en su dirección o ambas, debido al efecto de la fuerza externa. Con este simple experimento, podríamos saber si nos encontramos o no sobre un sistema inercial de referencia, *observatorio inercial* u *observatorio no inercial*, ya que se define un sistema inercial de referencia como aquel que se encuentra o viaja a velocidad constante, que corresponde al individuo que observa el primer caso de nuestra explicación, mientras que en el segundo caso cuando el sistema de observación esta bajo el efecto de una fuerza externa, es decir, esta acelerado, se dice que corresponde a un sistema no inercial de referencia.

Entonces las tres leyes de Newton son validas y se observan desde un sistema inercial de referencia. Los sistemas de referencia bajo los cuales hay una fuerza externa aplicada o en otras palabras aquellos que están acelerados no cumplen con las leyes de Newton, y por lo tanto en este tipo de sistemas de observación las leyes de Newton no pueden aplicarse.

3.6.2 Leyes de Newton

En esta sección definiremos las leyes de Newton, sin embargo la comprensión profunda de estas leyes se adquiere resolviendo problemas, realizando practicas, de modo que en cada una de estas actividades para el alumno, sea posible comprender como es que en todo momento estas leyes están actuando. También es importante señalar, que las leyes de Newton son validas en los limites de velocidades en las que se mueven los objetos de nuestra vida cotidiana, sin embargo aquellos objetos que se mueven a velocidades cercanas a las de la luz, no cumplen con las leyes de Newton y pasan a formar parte de otra mecánica, llamada mecánica relativista, y que tiene como postulado principal que ningún objeto es capaz de viajar mas rápido que la velocidad de la luz. Por ultimo hay que comentar que las fuerzas son cantidades vectoriales y por lo tanto tienen magnitud, dirección y sentido y cumplen con todas las propiedades de los vectores. A continuación definimos las leyes de Newton.

Primera ley de Newton:

Si la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es cero, sera posible obtener un conjunto de marcos de referencia en que el cuerpo no tenga aceleración alguna. [18]. Esto en otras palabras nos quiere decir, que mientras en un cuerpo no exista fuerza neta aplicada, este se moverá a velocidad constante, ya que al no estar acelerado no hay cambio en la rapidez traslacional ni en la dirección. Esta ley se puede obtener a partir de la segunda ley.

Segunda ley de Newton:

La suma total de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual, al producto de la masa por la aceleración de dicha partícula. [18]

$$\sum_i^n \vec{F}_i = m\vec{a}. \quad (36)$$

Esta es una ley fundamental y no se puede obtener a partir de otras ecuaciones, y nos esta indicando que la suma total de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula nos dará una fuerza resultante, que sera igual al producto de la masa de la partícula multiplicada por la aceleración que experimenta. A lo largo de este laboratorio consideraremos que cada una de las fuerzas que actúan sobre el sistema no dependerán del tiempo y por lo tanto la suma de todas y cada una de ellas siempre sera constante y por lo tanto de acuerdo a 36 el vector de la aceleración también lo sera.

Por último, es importante señalar que en nuestros casos de estudio se considera que la masa de la partícula es constante, sin embargo, de manera general esto no es así, por ejemplo hay sistemas que tienen un cambio significativo en la cantidad de su masa conforme se mueven, por ejemplo, los cohetes; para este tipo de situaciones la fuerza no se escribe como el producto de la masa por la aceleración sino como el cambio del momento lineal respecto del tiempo, esto es:

$$\sum_i^n \vec{F}_i = \frac{d[m\vec{v}(t)]}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (37)$$

Tercera ley de Newton:

La tercera ley de newton también conocida como la ley de acción y de reacción dice: Cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, también el otro, ejerce una fuerza sobre el. Estas dos fuerzas siempre tienen una misma magnitud y dirección contraria [18].

La tercera ley de newton es muy importante y se puede demostrar a partir de ella la conservación del momento lineal que es una propiedad fundamental en el estudio de la mecánica clásica. También es muy importante a la hora de estudiar sistemas formados por varios cuerpos, estructuras rígidas, etc.

3.6.3 Diagrama de cuerpo libre

De acuerdo a la segunda ley de Newton la suma de todas las fuerzas da como resultado una fuerza que es directamente proporcional a la aceleración con la que se mueve la partícula. Si la fuerza es nula, entonces la aceleración también lo es, es decir, el vector aceleración será $\vec{a} = 0$, lo cual no significa que con respecto a un sistema inercial de referencia el cuerpo no se este moviendo, recuerde que en ausencia de fuerza un objeto pudiera permanecer en movimiento permanente a velocidad constante.

Cuando la fuerza aplicada sobre la partícula es diferente de cero, entonces habrá una fuerza neta, aplicada sobre la partícula, tal que producirá una aceleración constante, ya que en nuestros casos de estudio trataremos con fuerzas independientes del tiempo. Uno de los casos más simples pero más ilustrativos a tratar es el arrastre de un objeto sobre una superficie inclinada, este tipo de movimiento a pesar de ser simple, involucra la comprensión de una fuerza muy especial conocida como la fuerza de fricción ($\vec{\mathcal{F}}$) y también implica el concepto de la fuerza normal ($\vec{\mathcal{N}}$), ambas fuerzas tienen en común que son una fuerza de reacción y se pueden explicar a partir de la tercera ley de newton, tal como vemos a continuación.

Fuerza de fricción: De acuerdo a nuestra experiencia, sabemos que si arrastramos un cuerpo a lo largo de una superficie, es necesario aplicar una fuerza en la dirección del movimiento, a lo que comúnmente le llamamos *empuje*.



Figura 4: Superficie de contacto entre dos cuerpos

De acuerdo a la tercera ley de Newton, si *empujamos un objeto*, entonces, debe existir una fuerza neta que también se aplica sobre nosotros, una pregunta válida es ¿Cuál es la causa que genera esta oposición al movimiento del cuerpo que deseamos mover? , para responder esto, pensemos que existen dos posibles causas. La primera es debida a la inercia que presenta la masa del objeto, es decir, cuando intentamos cambiar la velocidad traslacional de un objeto, debido a su masa y a la segunda ley de Newton, resulta necesario aplicar una fuerza neta; esto es: para que este objeto experimente un cambio en la rapidez de su masa y para que cambie la dirección de su movimiento, es necesario aplicar una fuerza neta o total diferente de cero. Por otra parte, durante el *empuje* hay otra fuerza que se manifiesta en sentido opuesto al movimiento, que es conocida como la fuerza de fricción, esta fuerza, es una fuerza de resistencia que se origina cuando dos superficies se deslizan una respecto de la otra. Las superficies de los objetos, aunque pudieran verse planas, no son completamente lisas, siempre tienen alguna rugosidad, esta rugosidad hace que dos superficies se entrelacen entre si como si fueran una especie de engranes, Véase la figura 4, por ejemplo, en esta figura se ha representado de color negro la superficie correspondiente al objeto al cual se le aplica la fuerza de desplazamiento o empuje, y de color rojo a la superficie del suelo o sobre la que pretendemos deslizar el objeto. Con esta imagen podemos analizar lo que sucede sobre la superficie de contacto cuando aplicamos un empuje, para esto imaginemos que inicialmente el objeto se encuentra en reposo y en algún momento aplicamos una pequeña fuerza sobre el objeto (representado por el objeto de color negro), en ese instante de acuerdo a la segunda ley de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) el objeto tenderá a moverse en la dirección del movimiento con una velocidad \vec{v} , que será proporcional a su masa; sin embargo de acuerdo a nuestra experiencia, no siempre que apliquemos una fuerza sobre un objeto que queremos desplazar, este se moverá, a menos que sea lo *suficientemente grande*. Entonces, si aplicamos una fuerza sobre un objeto y este no se mueve, no significa que la segunda ley de Newton no se este cumpliendo, lo que significa simplemente es que la fuerza neta total aplicada sobre el objeto, es decir, la suma

de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto es cero. Entonces, si la fuerza de empuje sobre el objeto no produce un desplazamiento, debe de existir otra fuerza que la anule, y esa fuerza es justamente la fuerza de fricción estática $\vec{\mathcal{F}}_s$. Esta fuerza se puede comprender mejor analizando la figura 4, en esta figura se puede observar que la rugosidad de la superficie de ambos objetos, puede servir como una especie de engranaje, o de dientes, con el que ambas superficies quedan acopladas, este tipo de dentadura, podría imaginarse como un conjunto de crestas y valles que deben romperse o sobreponerse para que el objeto empujado pudiera avanzar en la dirección horizontal, lo cual implica que estas rugosidades ejerzan una resistencia al movimiento y por lo tanto son una fuerza de reacción que se manifiesta cada vez que el cuerpo se empuja, sino hay empuje no existe fuerza de fricción, obsérvese que esta fuerza de reacción es ejercida por el suelo o el piso sobre el cuerpo. Entonces, si continuamos incrementando la fuerza de empuje, resulta que hay un máximo de resistencia de la fuerza de fricción estática (cuando se vencen los valles) de modo que es vencida la resistencia al movimiento inicial y por lo tanto en este punto el cuerpo puede iniciar su desplazamiento. En este punto cuando la fuerza de empuje es lo suficientemente grande para arrastrar al cuerpo se dice que el cuerpo a pasado de una condición estática a una condición dinámica. Una vez que el cuerpo esta en movimiento, la fuerza de fricción no desaparece, sin embargo disminuye, probablemente a que la superficie que se requiere destruir para desplazarlo en un instante dado es menor a la inicial. A la fuerza de fricción en movimiento se le conoce como fuerza de fricción cinética ($\vec{\mathcal{F}}_k$).

Fuerza Normal ($\vec{\mathcal{N}}$): Otra Fuerza de reacción muy importante en el movimiento de los cuerpos sobre superficies es la fuerza normal. La fuerza Normal es una fuerza debida a la reacción de una superficie que soporta un peso (W), por ejemplo, cuando nos encontramos sentados en una banca del salón de clases, todo nuestro peso y el de la banca, se encuentra aplicando una fuerza sobre el piso, y este para mantenernos fijos, ejerce una fuerza de reacción sobre nuestra silla y nosotros, de modo que nos sostiene. Recuerde que la fuerza de reacción es igual en magnitud a la de acción pero en sentido contrario, de modo que la fuerza total sobre un cuerpo estático, es siempre nula o igual a cero. También es importante notar que la dirección de la normal siempre es perpendicular a la superficie de contacto, y por lo tanto perpendicular al movimiento.

Entonces podemos concluir, que la fuerza de fricción y la fuerza normal son fuerzas de reacción y solo se manifiestan si hay una fuerza aplicada, note que estas fuerzas de reacción *no pueden generar desplazamiento*, lo cual es muy importante tener en cuenta a la hora de resolver problemas relacionados.

La relación entre la fuerza de fricción y la fuerza normal (\vec{N}): Como se puede observar del diagrama de la fuerza normal, la fuerza que se ejerce sobre el objeto es debida a la fuerza gravitacional que actúa sobre cada uno de los átomos que lo conforman, la cual es igual a la masa del cuerpo multiplicada por el valor de la gravedad. Toda la fuerza gravitacional ejercida sobre la masa del cuerpo (formada por cada uno de sus átomos) la conocemos como el peso del cuerpo, esta fuerza se transmite al piso o suelo, a través de la superficie de contacto, igual a través de la superficie de contacto se transmite la fuerza del piso hacia la pared, entonces, el efecto de la magnitud de estas fuerzas es proporcional al acoplamiento de dichas superficies, entonces, la magnitud de la fuerza de fricción sera proporcional a la magnitud del valor de la fuerza de fricción, es decir, a mayor peso, mayor fuerza normal, y por lo tanto mayor acoplamiento entre las superficies, a mayor acoplamiento mayor fuerza requerida para deslizar al objeto, esto es, mayor fuerza de fricción. Sin embargo, es importante notar que la fuerza de fricción siempre apunta en la dirección opuesta al vector velocidad, que es tangente a la trayectoria del movimiento del objeto, y perpendicular a la fuerza normal. Un esquema de esto se puede ver en la figura 5.

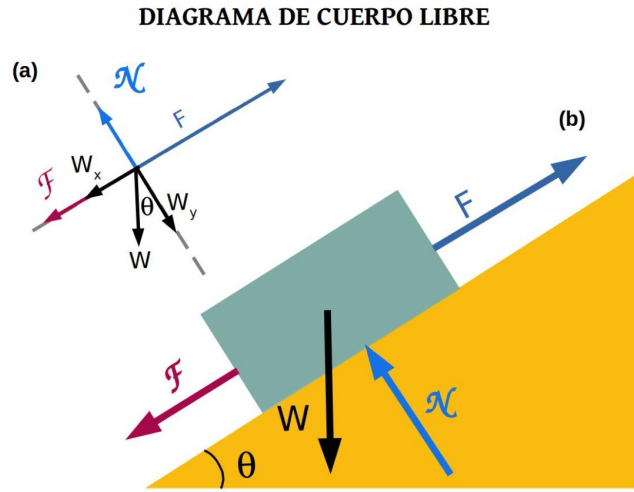


Figura 5: Diagrama de cuerpo libre. En esta figura, se describe la fuerza normal con un vector en color azul claro y perpendicular al plano (\vec{N}), Se describe la fuerza de empuje por F , en forma paralela al plano inclinado, y la fuerza de fricción opuesta al movimiento \vec{F} ; por último se muestra la fuerza de debida a la gravedad ejercida sobre la masa del cuerpo (\vec{W}).

3.6.4 Aplicaciones de la ley de Newton

A continuación mostraremos un modelo simple de la aplicación de las leyes de Newton al desplazamiento de un cuerpo a lo largo de una superficie.

Diagrama de cuerpo libre: Dado que las fuerzas pueden representarse por medio de vectores, es posible representarlas por medio de un diagrama de cuerpo libre, tal como se ve en la figura 5. Considerando que las ecuaciones de movimiento de un cuerpo dependen directamente de la fuerza resultante de todas aquellas que actúan sobre el, un diagrama de cuerpo libre es de gran utilidad, ya que nos permite analizar y descomponer cada una de las fuerzas implicadas en sus componentes a lo largo de un sistema de coordenadas adecuado, que nos muestra una descripción completa del problema.

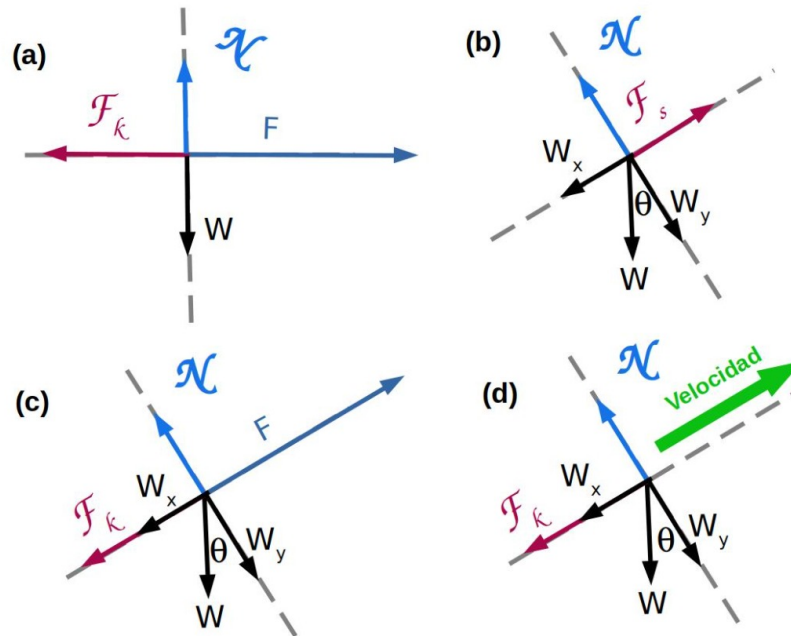


Figura 6: En esta figura se muestran los diagramas de cuerpo libre, que representan cuatro casos distintos de diferentes situaciones en las que se aplica una fuerza de arrastre o empuje sobre un cuerpo de peso \vec{W} . (a) Corresponde al diagrama de cuerpo libre del movimiento de un cuerpo sobre un plano, (b) Corresponde al movimiento de un cuerpo sobre un plano inclinado con una pendiente de ángulo θ y donde la fuerza de empuje es nula, (c) Corresponde al caso cuando la fuerza de empuje es mayor que la fuerza de fricción igualmente a un plano inclinado de ángulo θ y por último, el caso de un diagrama de un cuerpo que inicia su movimiento con una velocidad inicial \vec{v}_0 y carece de fuerza de empuje.

En la figura 3.6.4, se muestran cuatro diferentes diagramas de cuerpo libre. El del inciso a) se refiere al caso de un desplazamiento horizontal debido a una fuerza de empuje, \vec{F} , que apunta hacia la derecha. Entonces, en este caso, de acuerdo a lo comentado anteriormente,

pueden existir dos tipos de fuerza de fricción, uno que corresponde a la fuerza de fricción estática que es la fuerza ejercida sobre el cuerpo por el suelo (superficie de contacto), igual en magnitud a la fuerza de empuje pero en dirección opuesta de modo que la fuerza neta total del sistema es cero y por lo tanto no hay movimiento, en términos de ecuaciones podemos escribir esto como:

$$\vec{F}_T = m\vec{a} = (F - \mathcal{F}_s)\hat{i} + (\mathcal{N} - W)\hat{j} = \vec{0} = 0\hat{i} + 0\hat{j} \quad (38)$$

Entonces, si igualamos componentes de lado derecho con componentes del lado izquierdo, tenemos que las siguientes ecuaciones escalares:

$$F = \mathcal{F}_s \quad (39)$$

$$\mathcal{N} = W = mg \quad (40)$$

Ahora, considerando que la fuerza de fricción es proporcional a fuerza Normal, podemos correctamente suponer que es directamente proporcional de modo que $\mathcal{F} = \mu_s \mathcal{N}$, donde la constante de proporcionalidad μ_s , es llamada coeficiente de fricción estática. Entonces, si tenemos como datos de entrada el valor del coeficiente de fricción estática, y la masa del cuerpo, es posible calcular la fuerza mínima necesaria para iniciar el movimiento, esto es porque el producto del coeficiente de la fuerza de fricción por la normal, corresponde a la fuerza mínima necesaria a vencer para iniciar el movimiento. En caso de que la fuerza de empuje aplicada sea menor a este valor mínimo, el cuerpo no se moverá y la fuerza de fricción también será menor a este valor, la fuerza de fricción es una fuerza de reacción y siempre será, en este caso, igual en magnitud y en sentido contrario a la fuerza de empuje, *Obsérvese que la fuerza de fricción no genera ningún tipo de desplazamiento.*

En el caso de la figura 3.6.4(b), tenemos el caso del desplazamiento de un cuerpo sobre un plano inclinado, cuyo esquema puede verse en la figura 5. En este tipo de movimiento se pueden tratar diferentes casos como lo ilustran los incisos (b), (c) y (d) de la figura 3.6.4. El inciso (b) representa el caso donde la fuerza de empuje esta ausente, en este caso la única fuerza que induce el desplazamiento, es la fuerza de gravedad que actúa sobre la masa del cuerpo. De acuerdo a dicho diagrama, las fuerzas totales que actúan sobre el cuerpo son:

$$\vec{F}_T = m\vec{a} = (\mathcal{F} - W_x)\hat{i} + (\mathcal{N} - W_y)\hat{j} = ma_x\hat{i} + ma_y\hat{j} = ma_x\hat{i} + m\vec{0}_y\hat{j} = ma_x\hat{i} \quad (41)$$

Donde a_x , es la magnitud de la aceleración total del cuerpo en la dirección de x y a_y la magnitud de la aceleración respectiva en y , del diagrama puede observarse que nunca hay aceleración en la coordenada y , $a_y = 0$, ya que el eje de las y siempre es paralelo al plano. En otras palabras, $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$. Si el cuerpo inicialmente se encontrara en reposo y además su peso fuera lo suficientemente grande para vencer a la fuerza de fricción estática, entonces, el cuerpo se desplazaría hacia abajo, de no ser así el cuerpo se mantendría en equilibrio, de modo que la suma de todas las fuerzas sería cero, por lo tanto cada una de las componentes de su aceleración sería nula. De manera general, de la ecuación 41, se puede escribir en dos

formas, una cuando el cuerpo esta en movimiento, y otra, cuando esta en reposo y a punto de salir de el, es decir, cuando la fuerza de fricción estática es igual a $\mathcal{F}_s = \mu_s \mathcal{N}$. Analicemos el caso cuando esta en movimiento, y hay una aceleración debido a su peso. Considerando la componente en X de la ecuación 41 se tiene:

$$ma_x = \mathcal{F}_k - W_x = \mu_k \mathcal{N} - mg \sin \theta. \quad (42)$$

Considerando la componente en Y ,

$$ma_y = 0 = \mathcal{N} - W_y = \mathcal{N} - mg \cos \theta. \quad (43)$$

De esta ecuación obtenemos:

$$\mathcal{N} = mg \cos \theta. \quad (44)$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 42, obtenemos,

$$ma_x = \mathcal{F}_k - W_x = \mu_k mg \cos \theta - mg \sin \theta = mg(\mu_k \cos \theta - \sin \theta). \quad (45)$$

Es decir, si el peso vence la fuerza de fricción, caerá con una aceleración en la dirección de X igual a:

$$a_x = g(\mu_k \cos \theta - \sin \theta). \quad (46)$$

Si el sistema esta en equilibrio, entonces la aceleración $a_x = 0$, lo cual implica de acuerdo a la ecuación 45, que el coeficiente de fricción estática es $\mu_k = \tan \theta$, lo cual significa que el hecho de que un cuerpo en reposo resbale o no para una pendiente dada (un ángulo de inclinación dado), no depende de la masa del objeto, sino del valor del coeficiente de fricción, es decir, si el coeficiente de fricción es mayor que la pendiente del plano de inclinación ($\tan \theta$), el objeto no caerá, de lo contrario sera arrastrado hacia abajo. Por otra parte si integramos respecto del tiempo la ecuación 46 y suponiendo que se parte del reposo, tenemos:

$$v_x = g(\mu_k \cos \theta - \sin \theta)t. \quad (47)$$

y la posición respecto del origen:

$$x = \frac{g}{2}(\mu_k \cos \theta - \sin \theta)t^2. \quad (48)$$

En el caso de que no hubiera fricción $\mu_k = 0$, las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$v_x = -gt \sin(\theta). \quad (49)$$

y la posición respecto del origen:

$$x = -\frac{gt^2}{2} \sin(\theta). \quad (50)$$

Ahora si aplicamos una fuerza de empuje, lo primero que debería vencerse, para iniciar el movimiento, es la fuerza de fricción estática y a la componente en X del peso (W_x), esto se puede ver en la figura 3.6.4(c). En este caso, se tiene que la suma de todas las fuerzas en la componente X es,

$$ma_x = F_x - \mathcal{F}_k - W_x = F_x - \mu_k \mathcal{N} - mg \sin \theta. \quad (51)$$

$$ma_y = F_y + \mathcal{N} - W_y = F_y + \mathcal{N} - mg \cos \theta. \quad (52)$$

Nuevamente, si el cuerpo esta a punto de abandonar el reposo, $a_x = 0$ y $a_y = 0$, entonces, a partir de las ecuaciones 51 y 52, se tiene:

$$F_x = \mathcal{F}_s + W_x = \mu_k \mathcal{N} + mg \sin \theta. \quad (53)$$

$$\mathcal{N} = W_y - F_y = mg \cos \theta - F_y. \quad (54)$$

Si consideramos que no hay desplazamiento respecto al eje Y , el valor de la normal no puede ser negativo, y por lo tanto $0 \leq F_y \leq mg \cos \theta$, esto es considerando que el ángulo, $\frac{\pi}{2} \geq \alpha \geq 0$. Entonces, si sustituimos el valor de la normal obtenido en la ecuación 54 en la ecuación 53, se obtiene,

$$F_x = \mu_s (mg \cos \theta - F_y) + mg \sin \theta. \quad (55)$$

$$F_x = -\mu_s F_y + mg(\mu_s \cos \theta + mg \sin \theta). \quad (56)$$

Si consideramos que las componentes de la fuerza F no son independientes, es decir, $F_y = F_x \tan \alpha$. entonces la ecuación 56, queda:

$$F_x = -\mu_s F_x \tan \alpha + mg(\mu_s \cos \theta + \sin \theta). \quad (57)$$

o bien:

$$F_x = \frac{mg(\mu_s \cos \theta + \sin \theta)}{(1 + \mu_s \tan \alpha)}. \quad (58)$$

Esta es la fuerza mínima necesaria para iniciar el movimiento ascendente del cuerpo, si por ejemplo el ángulo de incidencia $\alpha = 0$, la componente $F_y = 0$, y F_x se reduce a:

$$F_x = mg(\mu_s \cos \theta + \sen \theta) \quad (59)$$

de modo que al integrarla con respecto al tiempo nos da las ecuaciones de movimiento, suponiendo que parte del reposo:

$$v_x = g(\mu_s \cos \theta + \sen \theta)t. \quad (60)$$

y

$$X = \frac{gt^2(\mu_s \cos \theta + \sen \theta)}{2}. \quad (61)$$

Si además, consideramos que el plano es horizontal, esto es $\theta = 0$, véase la figura 3.6.4(a), entonces,

$$F_x = mg\mu_s. \quad (62)$$

$$v_x = g\mu_s t. \quad (63)$$

y

$$X = \frac{gt^2\mu_s}{2}. \quad (64)$$

que corresponden a las ecuaciones que habíamos obtenido en la figura 3.6.4(a). Considerando las ecuaciones 51 y 52, en el caso en donde solo hay desplazamiento horizontal $a_y = 0$, se tiene que

$$ma_x = F_x - \mathcal{F}_k - W_x = F_x - \mu_k \mathcal{N} - mg \sen \theta. \quad (65)$$

$$ma_y = \vec{0} = F_y + \mathcal{N} - W_y = F_y + \mathcal{N} - mg \cos \theta. \quad (66)$$

lo que nos da:

$$a_x = F_x + \mu_k F_y - mg(\mu_k \cos \theta + \sen \theta). \quad (67)$$

Si consideramos que las componentes de las fuerzas se pueden escribir en términos de la magnitud de la fuerza total y del ángulo de arrastre α , es decir: $F_x = F \cos \alpha$ y $F_y = F \sen \alpha$, entonces:

$$a_x = F(\cos \alpha + \mu_k \cos \alpha) - mg(\mu_k \cos \theta + \sen \theta). \quad (68)$$

Esta ecuación solo sera valida si $a_x \geq 0$, ya que el objeto deberá estar en movimiento ascendente. Dado que la magnitud de la fuerza F , de la ecuación 68 es constante, entonces la aceleración a_x también lo es, por lo que las ecuaciones de movimiento quedarán descritas por: $v_x = a_x t$ y $X = (a_x t^2)/2$.

El ultimo caso que se consideró, es el caso cuando el desplazamiento es hacia arriba, y se parte con una velocidad inicial \vec{v}_0 , mientras que la fuerza de fricción detiene al cuerpo, véase la figura 3.6.4 (d). Si se observa, este caso es similar al anterior, solo que no hay fuerza externa ($\vec{F} = \vec{0}$), por lo que las ecuaciones de movimiento quedan:

$$a_x = -mg(\mu_k \cos \theta + \sen \theta). \quad (69)$$

$$v_x = v_0 - mgt(\mu_k \cos \theta + \sen \theta). \quad (70)$$

$$X = v_0 t - \frac{mgt^2(\mu_k \cos \theta + \sen \theta)}{2}. \quad (71)$$

Debido a que no hay fuerza externa, los efectos de la gravedad y la fricción detendrán finalmente al cuerpo, en un tiempo igual a:

$$t_f = \frac{v_0}{mg(\mu_k \cos \theta + \sen \theta)}, \quad (72)$$

y el desplazamiento máximo alcanzado en este tiempo será:

$$X_f = \frac{v_0^2}{2mg(\mu_k \cos \theta + \sen \theta)}. \quad (73)$$

De la ecuación 72, se puede observar que en el caso limite cuando la fricción tiende a desaparecer $\mu_k = 0$ y el plano se convierte en un plano horizontal $\theta = 0$, veríamos que el tiempo tiende $t_f = \infty$. Lo cual tiene sentido con la primera ley de Newton.

3.7 Conservación de la energía

El principio de la conservación de la energía considera que la energía no se crea ni se destruye, únicamente se transforma, en esta sección, trataremos con dos tipos de energía, la energía cinética y la energía mecánica y su relación con el trabajo.

3.7.1 Trabajo, energía potencial, energía cinética y conservación de la energía mecánica.

El trabajo está definido como la fuerza aplicada a lo largo de una trayectoria, en este sentido, una trayectoria puede definirse como una sucesión de puntos de \mathcal{R}^3 , o como una función

tal que $\vec{s} : D \subset \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3$, es decir, $\vec{s}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donde el parámetro t , puede ser el tiempo. entonces un diferencial de trayectoria está dado por: $d\vec{s} = (dx(t), dy(t), dz(t))$. Entonces si $\vec{F}(t)$ es la fuerza aplicada a lo largo de la trayectoria y el parámetro t corresponde al tiempo, entonces, el diferencial del trabajo es definido como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (74)$$

donde el producto, \cdot , representa el producto interno. Dado que el producto interno representa la proyección de la fuerza $\vec{F}(t)$ sobre la trayectoria $\vec{s}(t)$, entonces, un diferencial de trabajo es producto de la cantidad de fuerza aplicada sobre una cantidad diferencial-mente pequeña de trayectoria. Por otra parte, el vector velocidad está relacionado por la trayectoria por medio de $\vec{v} = d\vec{s}/dt$, y de acuerdo a la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a} = m d\vec{v}/dt$, entonces es posible escribir el diferencial del trabajo como:

$$dW = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} \left(\frac{dt}{dt} \right) = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \left(\frac{d\vec{s}}{dt} \right) dt = m \vec{v} \cdot d\vec{v}. \quad (75)$$

Entonces el trabajo a lo largo de una trayectoria que inicia en un tiempo inicial $t = 0$, desde la posición inicial, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, y velocidad inicial, $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$, hasta un tiempo final t_f , en sus respectivas posiciones y velocidades finales es:

$$W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} dW = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_f} \vec{v} \cdot d\vec{v} \quad (76)$$

Considerando que la energía cinética se define como, $m(\vec{v} \cdot \vec{v}/2) = m(v^2/2)$, y que:

$$d \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) = \vec{v} \cdot d\vec{v} \quad (77)$$

entonces, se tiene de acuerdo a la ecuación: 77

$$W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} dW = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_f} d \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) = \frac{v_f^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \quad (78)$$

La ecuación 78, nos establece la relación entre el trabajo y la energía cinética y nos dice que *el trabajo realizado a través de una trayectoria cuyo campo de fuerzas es conservativo, es igual a la diferencia de la energía cinética final menos la inicial.*

Dado que en un campo de fuerzas conservativo, el cambio en la energía cinética es igual al cambio de la energía potencial, entonces, la relación entre el trabajo y la energía potencial está dada por:

$$W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} dW = E_{pf} - E_{p0} = \frac{v_f^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = E_{kf} - E_{k0} \quad (79)$$

Donde E_{p0} y E_{pf} , representan la energía potencial inicial y final respectivamente; mientras que $E_{kf} = v_f^2/2$, y $E_{k0} = v_0^2/2$. Entonces, el cambio en la energía potencial es igual al cambio de la energía cinética, a este resultado se le conoce como la *conservación de la energía mecánica*. En el caso del campo gravitacional, se tiene que el cambio de energía potencial está dado por:

$$E_{pf} - E_{p0} = mg(h_f - h_0) \quad (80)$$

Donde h_f y h_0 , son las posiciones finales e iniciales respecto de algún punto de referencia dado.

4 Planificación Inicial

4.1 Ámbito

El **SSIG-3D** va dirigido a los alumnos que cursen la materia de **Mecánica y Electromagnetismo** o profesores que la impartan, para auxiliarlos en la comprensión de los temas de forma visual por medio de animaciones y gráficas mostradas en la aplicación de escritorio.

4.2 Metodología

Considerando las características del proyecto que se pretende desarrollar, y la manera en la que se le dará seguimiento a cada uno de los módulos a realizar para la elaboración del producto, se propone el uso de la metodología de **Scrum**. Bajo esta metodología un proyecto se divide en pequeños ciclos (conocidos en Scrum como “Sprints”) los cuales para nuestro proyecto serán concluidos cada quince días, ordenados por prioridad, para entregar avances en un menor tiempo. Esto permitirá añadir constantemente valor y optimizar los procesos dentro de nuestro proyecto.

Además, esta metodología establece una serie de reuniones continuas que se realizarán a lo largo del desarrollo del proyecto, lo cual, además de asegurar una continua comunicación entre los miembros del equipo, posibilitará llevar una continua observación de cada uno de los módulos que constituyen el mismo, lo que facilita la detección de posibles fallas o aspectos a mejorar durante su desarrollo.

Para mantener una correcta organización y un control sobre la asignación de tareas a los integrantes del equipo, se lleva un registro de los puntos a tratar en cada uno de los sprint que se realizan durante todo el desarrollo del proyecto en la plataforma que tiene por nombre “Trello”, en ella se etiquetaran los avances y acuerdos a los que llegue el equipo de desarrollo.

Los roles que constituirán la metodología Scrum en este proyecto son:

- **Product Owner:** Este rol será personificado por el director del TT (Profesor Manzanilla Granados Héctor Manuel).
- **ScrumMaster:** Este rol será personificado por el director del TT (Profesor Manzanilla Granados Héctor Manuel).
- **Equipo de Desarrollo:** Conformado por los alumnos Guadarrama Ascencio Juan Carlos, Ornelas García Luís Ángel y Sampayo Hernández Mauro.

4.3 Cronograma de Actividades

Cronograma:													
Ítem	Actividades	Meses											
		A G O	S E P	O C T	N O V	D I C	E N E	F E B	M A R	A B R	M A Y	J U N	
1	Análisis, diseño y construcción del ambiente gráfico tridimensional en Python.												
2	Evaluación TT I.												
3	Creación y programación de las prácticas de laboratorio.												
4	Retroalimentación y pruebas.												
5	Redacción del reporte técnico.												
6	Evaluación TT II.												

Figura 7: Cronograma

4.4 Lenguaje de programación

Python

Python es un lenguaje de programación gratuito con gran popularidad entre la comunidad de programadores, dado a su versatilidad y sencillez para el desarrollo de software. Su inmensa variedad de librerías facilitan el trabajo de los desarrolladores de software evitando escribir el código desde cero, siendo una herramienta viable en el área de ciencia de datos (extracción de conocimiento a través de conjunto de datos, entrenando a un computador a comprender los datos y realizar predicciones precisas), machine learning (clasificación de datos con precisión), pruebas de software y demás actividades.

Las características que destacan el lenguaje:

- **Lenguaje interpretado:** Ejecuta directamente el código línea por línea, al existir un error detiene su ejecución facilitando su localización para resolverlo.
- **Lenguaje tipado dinámicamente:** No es necesario asignar tipos de variables cuando se escribe código dado que Python lo determina en tiempo de ejecución.

- **Lenguaje de alto nivel:** Lenguaje cercano a la comunicación humana.
- **Lenguaje orientado a objetos:** Considera todo como un objeto, también puede admitir programación estructurada y funcional.

Por último hablaremos de las ventajas y desventajas que conllevan el utilizar Python:

Ventajas:

- + **Lenguaje de alto nivel:** Dado que puede usar elementos del lenguaje natural, ya que tiene una sintaxis similar al inglés, haciéndolo fácil de leer, escribir y aprender.
- + **Librerías:** Cuenta con una variedad extensa, facilitando su uso en diferentes áreas.
- + **Portable:** Compatibilidad con todos los sistemas operativos (macOS, Linux, UNIX y Windows).
- + **Gratuito.**
- + **Código abierto:** Todos pueden usarlo y distribuirlo libremente.
- + **Cuenta con una grande comunidad.**

Desventajas:

- ! **Lento:** Pero ya existen opciones para lograr optimizar este problema.
- ! **Alto consumo de memoria.**

4.5 Entornos de Desarrollo

Entorno	Uso en el proyecto	Justificación
Visual Studio Code	Desarrollo e implementación de la interfaz gráfica, así como de las clases del simulador SSIG-3D.	Es un IDE muy completo ya que este cuenta con muchas herramientas y complementos para trabajar con el lenguaje Python.
QT Designer	Desarrollo de la Interfaz Gráfica de Usuario.	Este IDE nos permite diseñar de manera mas versátil la interfaz gráfica, por lo que puede acelerar el desarrollo funcional y estructural de la aplicación.
GitHub	Respaldo de código fuente del proyecto en versiones, acceso al proyecto para todos los miembros del equipo y aportación de mejoras en el proyecto.	Es una plataforma para crear proyectos abiertos de herramientas y aplicaciones. Se caracteriza sobre todo por sus funciones colaborativas que ayudan a que todos puedan aportar mejoras en el código.

4.6 Arquitectura de desarrollo

El Modelo Vista Controlador (MVC) es un estilo de arquitectura de software que separa los datos de una aplicación, la interfaz de usuario, y la lógica de control en tres componentes distintos:

- **Modelo:** Contiene la representación de los datos que maneja un sistema, su lógica de negocio, y sus mecanismos de persistencia.
- **Vista:** También conocida como " Interfaz de Usuario". Se compone la información que se envía al cliente y los mecanismos de interacción con éste.
- **Controlador:** Actúa como intermediario entre el Modelo y la Vista, gestionando el flujo de información entre ellos y las transformaciones para adaptar los datos a las necesidades de cada uno; así como también recibir los eventos de entrada del usuario (un clic, un cambio en un campo de texto, activaciones de botones, etc.).

[19]

5 Planificación Inicial del Proyecto

5.1 Análisis de Requerimientos

5.1.1 Requerimientos Funcionales

Módulo	Requerimientos
Sistema	<ul style="list-style-type: none">■ Permitirá al USUARIO visualizar todos los MÓDULOS disponibles.■ Permitirá al USUARIO acceder al MÓDULO de su elección.■ Permitirá al USUARIO visualizar un resumen teórico del MÓDULO seleccionado.■ Permitirá al USUARIO generar una animación en formato GIF de alguno de los problemas de ejemplo, o a partir de sus propios proyectos.■ Generará una GRÁFICA, a partir de los valores asignados a cada una de las variables definidas por el MÓDULO que se haya seleccionado.■ Generará TABLAS de resultados, a partir de los valores asignados a las variables del problema.
Entorno Gráfico	<ul style="list-style-type: none">■ Permitirá al USUARIO visualizar las GRÁFICAS generadas e interactuar con ellas.■ Permitirá al USUARIO visualizar las TABLAS generadas con los valores asignados a las variables del MÓDULO.■ Permitirá al USUARIO visualizar uno o varios problemas de ejemplo, para cada MÓDULO disponible.■ Permitirá al USUARIO modificar las variables que NO sean consideradas como CONSTANTES definidas por el MÓDULO que se haya seleccionado.■ NO permitirá al USUARIO modificar las variables que sean consideradas como CONSTANTES definidas por el MÓDULO que se haya seleccionado.

5.1.2 Requerimientos No Funcionales

Módulo	Requerimientos
Sistema	<ul style="list-style-type: none">▪ Otorgará al USUARIO la posibilidad de generar un NOMBRE DE USUARIO y asignarlo a su proyecto.▪ Estará disponible en el idioma español.▪ Estará disponible como una aplicación ejecutable para computadoras.▪ El backend estará desarrollado con Phyton3.▪ Permitirá al USUARIO guardar un proyecto, como un archivo de simulación.▪ Permitirá al USUARIO cargar un archivo de simulación.▪ Los valores que se podrán almacenar dentro de cada variable propia de cada MÓDULO, estarán restringidos de acuerdo a las respectivas limitantes de dichos MÓDULOS.
Entorno Gráfico	<ul style="list-style-type: none">▪ La GUI estará desarrollada con la biblioteca gráfica PhytonQT.

5.2 Análisis de riesgos

ID Riesgo	Descripción	Probabilidad	Impacto	Semáforo
R1	La disponibilidad de los miembros varía de acuerdo con las actividades o tareas que cada uno desempeña.	4 (probable)	C (moderado)	
R2	Los integrantes carecen de experiencia con el lenguaje de programación Python.	3 (ocasional)	D (peligroso)	
R3	Desconocemos del presupuesto requerido para el desarrollo de este proyecto.	2 (posible)	B (menor)	
R4	Desconocemos la posible asistencia de los miembros en reuniones futuras.	4 (probable)	C (moderado)	
R5	Un probable paro de labores puede dificultar comunicación o avances del proyecto.	4 (probable)	C (moderado)	
R6	Rendimiento de internet en la zona de desarrollo es muy variable.	5 (frecuente)	D (peligroso)	
R7	Los dispositivos podrían no estar en condiciones para ejecutar la aplicación.	2 (posible)	B (menor)	
R8	Posible pérdida accidental o inesperada de los datos.	1 (improbable)	D (peligroso)	
R9	Ignorar alguna configuración relevante en el IDE de desarrollo.	2 (posible)	D (peligroso)	
R10	Identificación de requerimientos para el correcto desarrollo, objetivo y funcionamiento de la aplicación.	1 (improbable)	D (peligroso)	

5.3 Jerarquización

ID Riesgo	Descripción	Semáforo
R6	El rendimiento de internet en la zona de desarrollo es muy variable.	
R1	La disponibilidad de los miembros varía de acuerdo a las actividades o tareas que cada uno tiene.	
R2	Los integrantes carecen de experiencia con el lenguaje de programación Python.	
R4	Posible ausencia de algún miembro.	
R5	Paro de labores.	
R9	Ignorar alguna configuración relevante en el IDE de desarrollo.	
R3	Presupuesto desconocido.	
R7	Falla de un dispositivo.	
R8	Posible pérdida de datos.	
R10	Falta de identificación de requerimientos.	

5.4 Gestión de riesgos

ID Riesgo	Descripción	Prevención	Minimización	Semáforo
R6	El rendimiento de internet en la zona de desarrollo es muy variable.	Conectarse a una red con buena señal y transmisión.	Buscar la red con menor dispositivos conectados.	
R1	La disponibilidad de los miembros varía de acuerdo a las actividades o tareas que cada uno tiene.	Establecer un horario de trabajo en el que los miembros tengan disponibilidad.	Dar indicaciones a realizar en el tiempo que tengan disponible los miembros.	
R2	Los integrantes carecen de experiencia con el lenguaje de programación Python.	Trabajar en proyectos de aplicaciones con Python que permitan un mejor desenvolvimiento en el desarrollo del proyecto.	Buscar material, libros, videos, cursos para adquirir conocimiento.	
R4	Desconocemos la posible asistencia de los miembros en reuniones futuras.	Mantener contacto de cualquier inconveniente de causa mayor en el horario de los usuarios.	Mantener comunicación continua de los integrantes.	
R5	Las condiciones aplicadas por el paro de labores pueden dificultar reuniones del equipo ya avances del proyecto.	Mantener un contacto constante con los integrantes para no perder tiempo útil para el desarrollo.	Reuniones constantes y control de avances.	
R9	Ignorar alguna configuración relevante en el IDE de desarrollo.	Leer la documentación del IDE, seguir los pasos correctamente de su instalación.	Cada vez que se haya terminado un paso volver a revisar la documentación para evitar errores.	
R3	Desconocemos del presupuesto requerido para el desarrollo de este proyecto.	Realizar un estudio correcto sobre posibles inversiones para el proyecto.	Mantener sueldos o gastos mínimos.	
R7	El dispositivo podría no estar en condiciones para ejecutar la aplicación.	Preservar el cuidado del dispositivo	Utilizar otro dispositivo con características similares.	
R8	Posible pérdida accidental o inesperada de los datos.	Mantener siempre información respaldada en un equipo alterno.	Evitar la eliminación de cualquier tipo de datos.	
R10	Identificación de requerimientos para el correcto desarrollo, objetivo y funcionamiento de la aplicación.	Realizar una junta con el cliente donde exponga los objetivos y funcionalidades del proyecto	Basarse en un proyecto similar adaptando lo que el cliente solicita.	

5.5 Diagrama de Casos de Uso

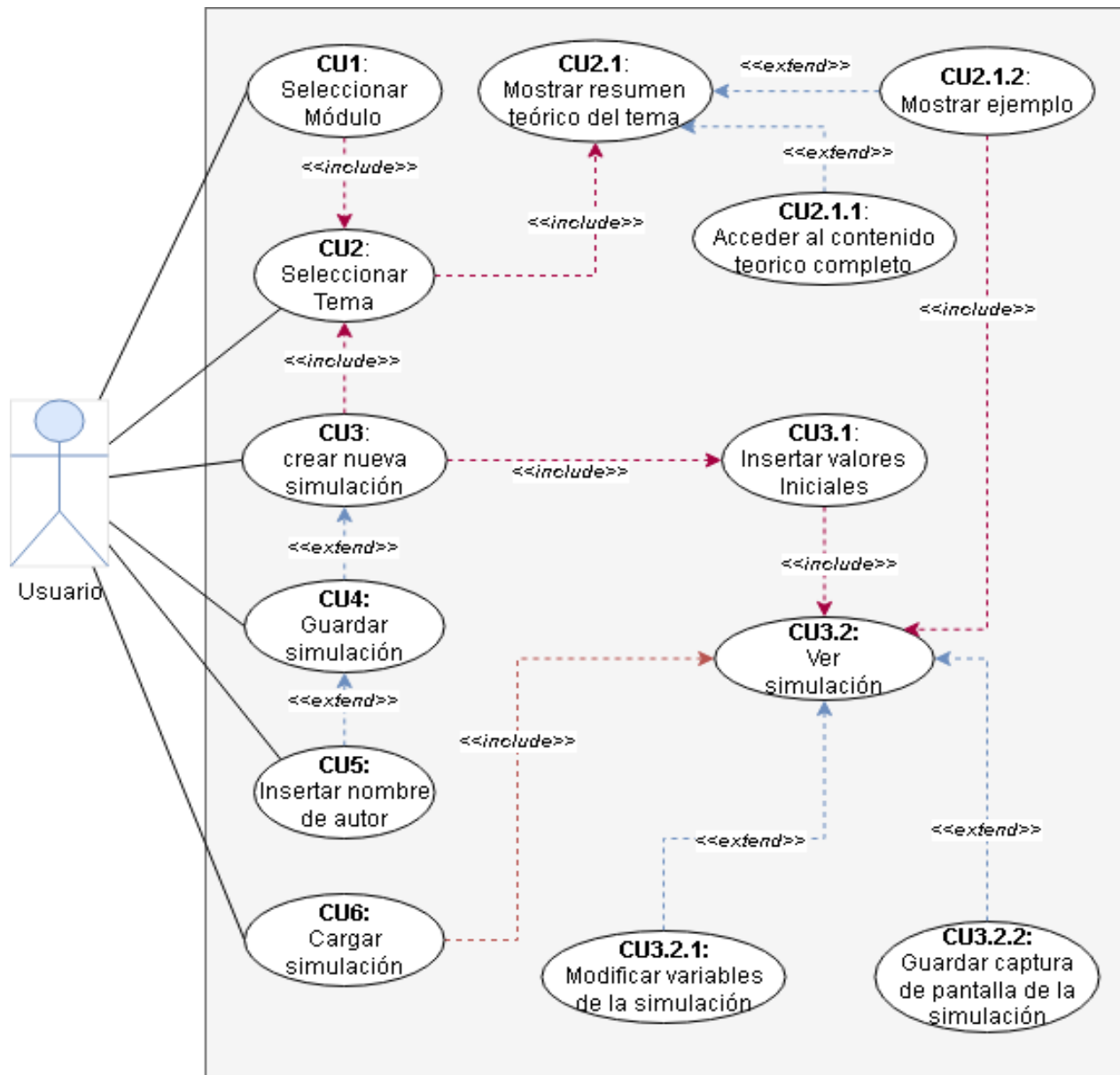


Figura 8: Diagrama de caso de uso SSIG-3D

5.6 Casos de Uso

Caso de uso:	CU1: Seleccionar módulo.
Actores:	Usuario .
Propósito:	Permitir al Usuario seleccionar un módulo del SSIG-3D.
Entradas:	<ul style="list-style-type: none">▪ Seleccionar uno de los módulos disponibles en pantalla.
Salidas:	<ul style="list-style-type: none">▪ El programa ejecuta el CU2: Seleccionar tema.
Precondiciones:	<ul style="list-style-type: none">▪ N/A
Secuencias:	<ol style="list-style-type: none">1. El programa inicia mostrando una pantalla de bienvenida.2. El Usuario selecciona uno de los módulos disponibles.

Caso de uso:	CU2: Seleccionar tema.
Actores:	Usuario .
Propósito:	Permitir al Usuario seleccionar un tema del módulo previamente seleccionado del SSIG-3D.
Entradas:	<ul style="list-style-type: none">▪ Seleccionar uno de los temas disponibles en pantalla.
Salidas:	<ul style="list-style-type: none">▪ El programa ejecuta el CU2.1: Mostar resumen teórico del tema.
Precondiciones:	<ul style="list-style-type: none">▪ Seleccionar un módulo.
Secuencias:	<ol style="list-style-type: none">1. El usuario abre una lista desplegable de temas.2. El usuario selecciona uno de los temas disponibles del Módulo seleccionado.

Caso de uso:	CU2.1: Mostrar resumen teórico del tema.
Actores:	Usuario.
Propósito:	El programa muestra en la sección de teoría un resumen breve del tema seleccionado previamente.
Entradas:	<ul style="list-style-type: none"> ■ Seleccionar el botón mostrar ejemplo. ■ Seleccionar el botón Mostrar más.
Salidas:	<ul style="list-style-type: none"> ■ El programa despliega un breve resumen del tema seleccionado previamente. ■ El programa ejecuta el CU2.1.1: Acceder al contenido teórico completo, cuando selecciona el botón Mostrar más. ■ El programa ejecuta el CU2.1.2: Mostrar ejemplo, cuando se selecciona el botón Mostrar Ejemplo.
Precondiciones:	<ul style="list-style-type: none"> ■ Seleccionar un tema de un módulo disponible.
Secuencias:	<ol style="list-style-type: none"> 1. El usuario selecciona uno de los temas disponibles del Módulo seleccionado. 2. El programa muestra en la sección de teoría un resumen del tema.

Caso de uso:	CU2.1.1: Acceder al contenido teórico completo.
Actores:	Usuario.
Propósito:	Permite al usuario acceder a una sección donde se explica más a detalle, con más ejemplos y ejercicios del tema seleccionado.
Entradas:	<ul style="list-style-type: none"> ■ N/A
Salidas:	<ul style="list-style-type: none"> ■ Redirigir al usuario a una sección donde se muestra más contenido teórico.
Precondiciones:	<ul style="list-style-type: none"> ■ Seleccionar el boton Mostrar Más en la sección de Teoría.
Secuencias:	<ol style="list-style-type: none"> 1. El programa despliega un resumen teórico del tema seleccionado. 2. El usuario explora en la sección de teoría. 3. El usuario selecciona el botón Mostrar Mas. 4. El programa redirige el usuario a una nueva sección donde se muestra más contenido del tema.

Caso de uso:	CU2.1.2: Mostrar ejemplo.
Actores:	Usuario
Propósito:	Mostrar al usuario, a base de un ejemplo de la sección de teoría, una Simulación.
Entradas:	<ul style="list-style-type: none"> ▪ N/A
Salidas:	<ul style="list-style-type: none"> ▪ El programa ejecutar el CU3.2: Ver Simulación.
Precondiciones:	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Seleccionar el botón Mostrar Ejemplo en la sección de Teoría..
Secuencias:	<ol style="list-style-type: none"> 1. El programa despliega un resumen teórico del tema seleccionado. 2. El usuario explora en la sección de teoría. 3. El usuario selecciona el botón Mostrar Ejemplo. 4. El programa ejecuta la simulación.

Caso de uso:	CU3: Crear nueva simulación.
Actores:	Usuario.
Propósito:	Permitir al usuario crear desde cero una simulación a base de un tema seleccionado previamente.
Entradas:	<ul style="list-style-type: none"> ▪ N/A
Salidas:	<ul style="list-style-type: none"> ▪ El programa ejecuta el CU3.1: Insertar Valores Iniciales.
Precondiciones:	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Seleccionar un tema de un Modulo disponible.
Secuencias:	<ol style="list-style-type: none"> 1. El usuario selecciona uno de los temas de un Modulo disponible. 2. El programa habilita el botón Generar nueva simulación. 3. El usuario selecciona el botón Generar nueva simulación.

Caso de uso:	CU3.1: Insertar Valores Iniciales.
Actores:	Usuario.
Propósito:	Permitir al usuario ingresar valores iniciales para iniciar la simulación.
Entradas:	<ul style="list-style-type: none"> Valores numéricos flotantes o enteros.
Salidas:	<ul style="list-style-type: none"> El programa ejecuta el CU3.2: Ver Simulación.
Precondiciones:	<ul style="list-style-type: none"> Seleccionar el botón Generar nueva simulación.
Secuencias:	<ol style="list-style-type: none"> El programa pide valores numéricos para inicializar la animación. El usuario ingresa los valores numéricos. El usuario selecciona el botón Iniciar nueva simulación. El programa ejecuta la simulación.
Errores:	<ul style="list-style-type: none"> El usuario ingresa uno o varios valores NO numéricos. El programa despliega el mensaje Error: Los valores ingresados no son Números flotante o enteros. El usuario NO ingresa uno o varios valores numéricos. El programa despliega el mensaje Error: No se ingresaron todos los valores necesarios. El usuario NO ingresa valores numéricos. El programa despliega el mensaje Error: No se ingresaron todos los valores necesarios.

Caso de uso:	CU3.2: Ver Simulación.
Actores:	Usuario.
Propósito:	Mostrar al usuario una simulación a base de los parámetros de un tema específico. Los parámetros pueden ingresados por el usuario o ser predeterminados de un ejemplo (CU2.1.2 Mostrar Ejemplo).
Entradas:	<ul style="list-style-type: none"> ▪ N/A
Salidas:	<ul style="list-style-type: none"> ▪ El programa despliega una simulación animada del tema previamente seleccionado. ▪ El programa ejecuta el CU3.2.1: Modificar variables de la simulación, cuando cambia un valor de una o varias variables y selecciona el botón Actualizar simulación. ▪ El programa ejecuta el CU3.2.2: Guardar captura de pantalla de la simulación, cuando selecciona el botón Tomar Captura de Pantalla.
Precondiciones:	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ingresar valores iniciales/Recibir los valores predeterminados del CU2.1.2: Mostrar Ejemplo.
Secuencias:	<ol style="list-style-type: none"> 1. El programa recibe los valores numéricos para inicializar la animación. 2. El programa ejecuta la simulación y la despliega en pantalla.

Caso de uso:	CU3.2.1: Modificar Variables de la Simulación.
Actores:	Usuario.
Propósito:	Permitir al usuario modificar las variables de la simulación y reiniciarlas.
Entradas:	<ul style="list-style-type: none"> Valores numéricos flotantes o enteros. Seleccionar el botón Actualizar simulación.
Salidas:	<ul style="list-style-type: none"> Actualización de la simulación a base de los valores ingresados.
Precondiciones:	<ul style="list-style-type: none"> La simulación fue iniciada.
Secuencias:	<ol style="list-style-type: none"> El usuario modifica las variables de la simulación en los recuadros disponibles en pantalla. El usuario selecciona el botón Actualizar simulación. El programa recibe los valores ingresados. El programa reinicia la simulación a base de los valores ingresados.
Errores:	<ul style="list-style-type: none"> El usuario ingresa uno o varios valores NO numéricos. El programa despliega el mensaje Error: Los valores ingresados no son Números flotante o enteros y NO actualiza la simulación. El usuario NO ingresa uno o varios valores numéricos. El programa despliega el mensaje Error: No se ingresaron todos los valores necesarios y NO actualiza la simulación. El usuario NO ingresa valores numéricos. El programa despliega el mensaje Error: No se ingresaron todos los valores necesarios y NO actualiza la simulación.

Caso de uso:	CU3.2.2: Guardar Captura de Pantalla de la Simulación.
Actores:	Usuario
Propósito:	Guardar una captura de pantalla de la simulación.
Entradas:	<ul style="list-style-type: none"> N/A
Salidas:	<ul style="list-style-type: none"> Generar un archivo de imagen que se guarda en el disco duro.
Precondiciones:	<ul style="list-style-type: none"> Seleccionar el botón Tomar Captura de Pantalla.
Secuencias:	<ol style="list-style-type: none"> El usuario selecciona el boton Tomar Captura de Pantalla. El programa toma una captura de pantalla de la simulación en curso. El programa genera un archivo de imagen. El programa guarda la captura de pantalla en la carpeta de capturas del SSIG-3D.

Caso de uso:	CU4: Guardar simulación.
Actores:	Usuario.
Propósito:	Permitir al usuario guardar los parámetros de simulación.
Entradas:	<ul style="list-style-type: none"> N/A
Salidas:	<ul style="list-style-type: none"> Generar un archivo de texto el cual contiene los parámetros de la simulación.
Precondiciones:	<ul style="list-style-type: none"> Seleccionar el botón Guardar Simulación.
Secuencias:	<ol style="list-style-type: none"> El usuario selecciona el botón Guardar Simulación. El programa recopila los parámetros de la simulación. El programa guarda en una archivo de texto los parámetros de la simulación.

Caso de uso:	CU5: Insertar nombre de autor.
Actores:	Usuario.
Propósito:	Permite al usuario insertar un nombre de autor para las simulaciones generadas por este.
Entradas:	<ul style="list-style-type: none"> Cadena de caracteres.
Salidas:	<ul style="list-style-type: none"> N/A
Precondiciones:	<ul style="list-style-type: none"> Iniciar el SSIG-3D.
Secuencias:	<ol style="list-style-type: none"> El usuario inicia SSIG-3D. El programa pide el nombre de usuario . El usuario ingresa su nombre. El usuario selecciona el botón Iniciar SSIG-3D.

Caso de uso:	CU6: Cargar Simulación.
Actores:	Usuario.
Propósito:	Permite al usuario cargar una simulación previamente guardada en un archivo de texto.
Entradas:	<ul style="list-style-type: none"> ■ Seleccionar el botón Cargar simulación. ■ Archivo de texto.
Salidas:	<ul style="list-style-type: none"> ■ El programa ejecuta el CU3.2: Ver Simulación.
Precondiciones:	<ul style="list-style-type: none"> ■ N/A
Secuencias:	<ol style="list-style-type: none"> 1. El usuario inicia SSIG-3D. 2. El usuario selecciona el botón Cargar simulación. 3. El programa muestra la pantalla del explorador para seleccionar archivos. 4. El usuario elige el archivo. 5. El programa carga los parámetros guardados en el archivo.

5.7 Diagrama de Clases

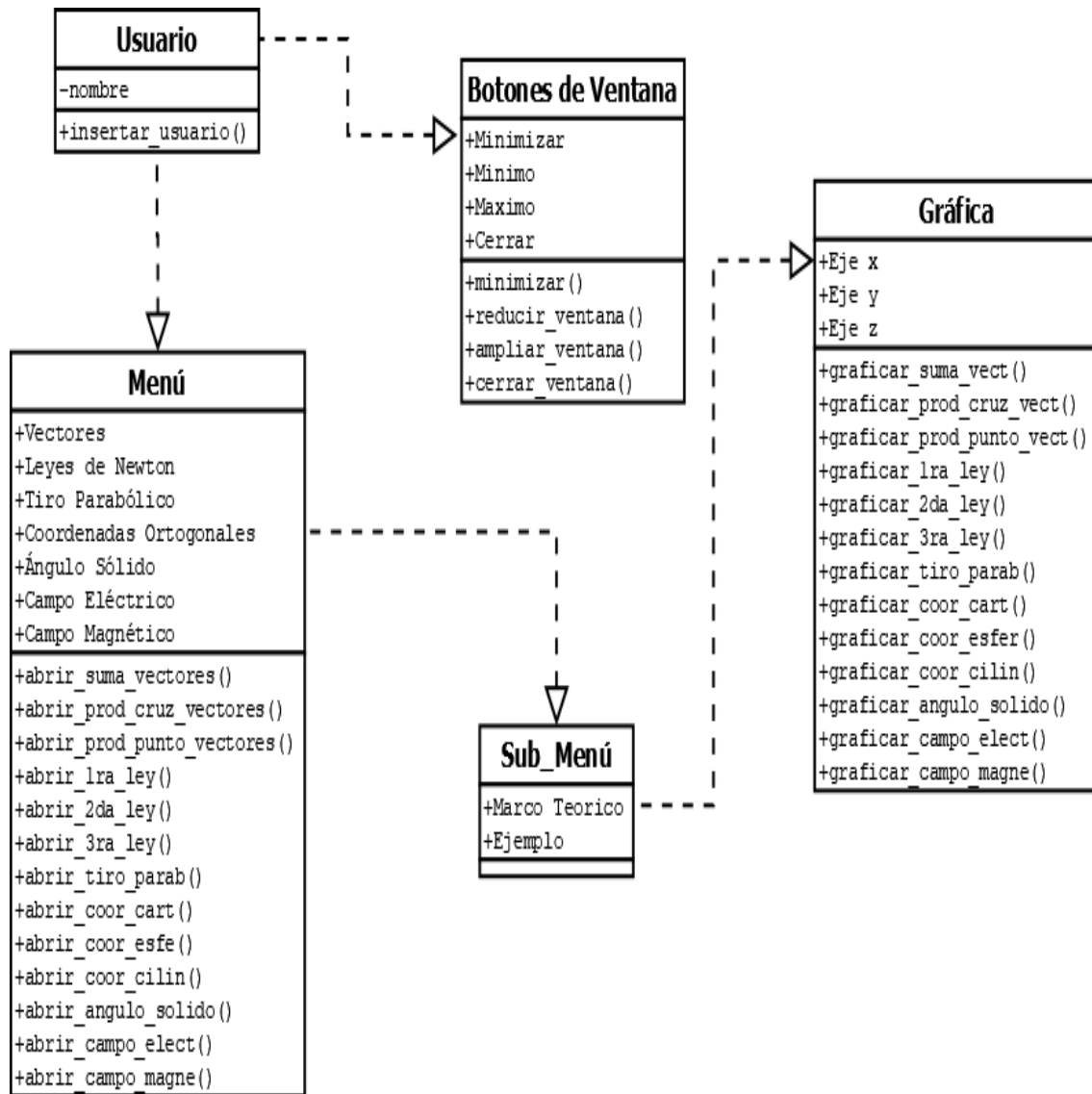


Figura 9: Diagrama de clases

6 Resultados

6.1 Simulaciones

Para el desarrollo de nuestra aplicación, nos hemos apoyado con el software llamado Qt Designer, una herramienta amigable y muy útil para el desarrollo de una interfaz en el lenguaje Python.

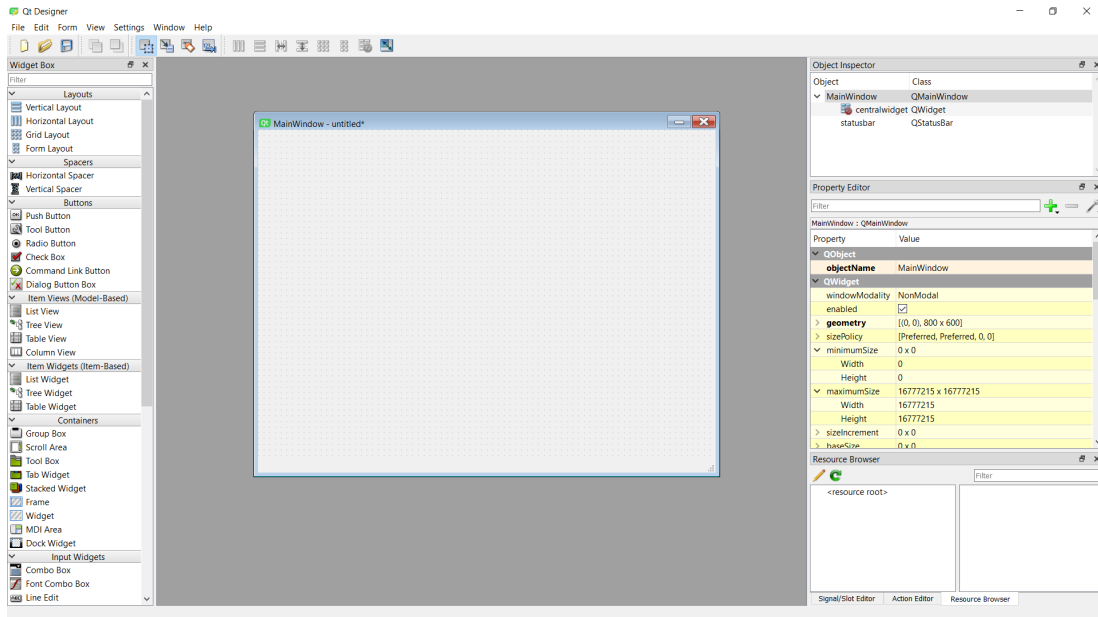


Figura 10: QT Designer

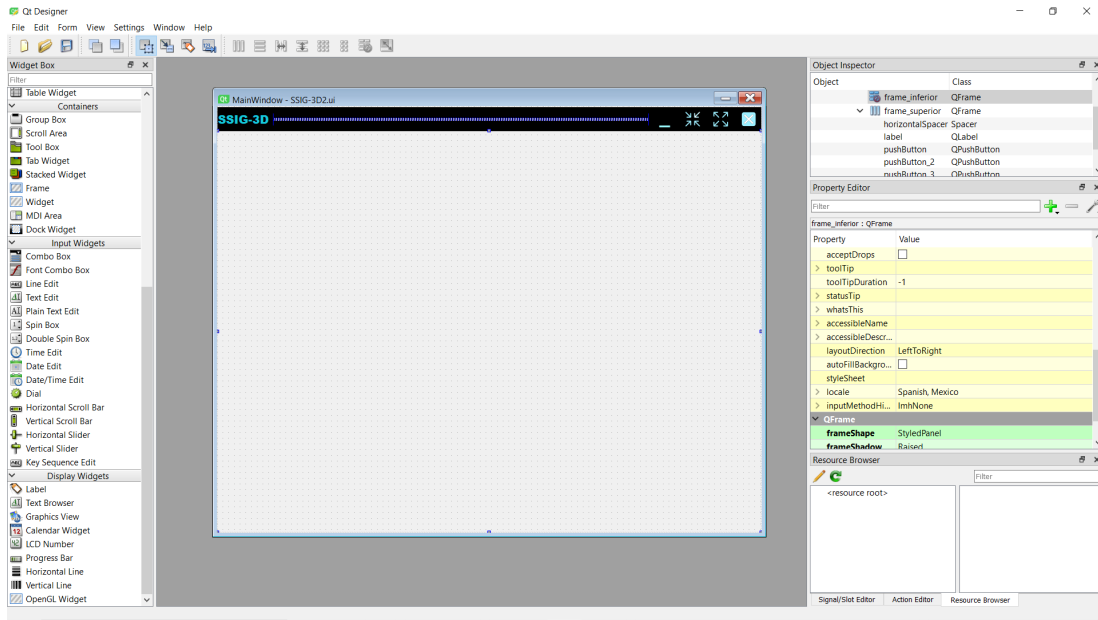


Figura 11: Primeros pasos con Qt Designer

6.2 Software Obtenido

Al familiarizarse con la herramienta, logramos grandes avances en el desarrollo de la interfaz para nuestra aplicación, además de poder transformar todo el proyecto en código Python para poder agregar funcionalidades (gráficas) y otros efectos a nuestros botones y módulos.

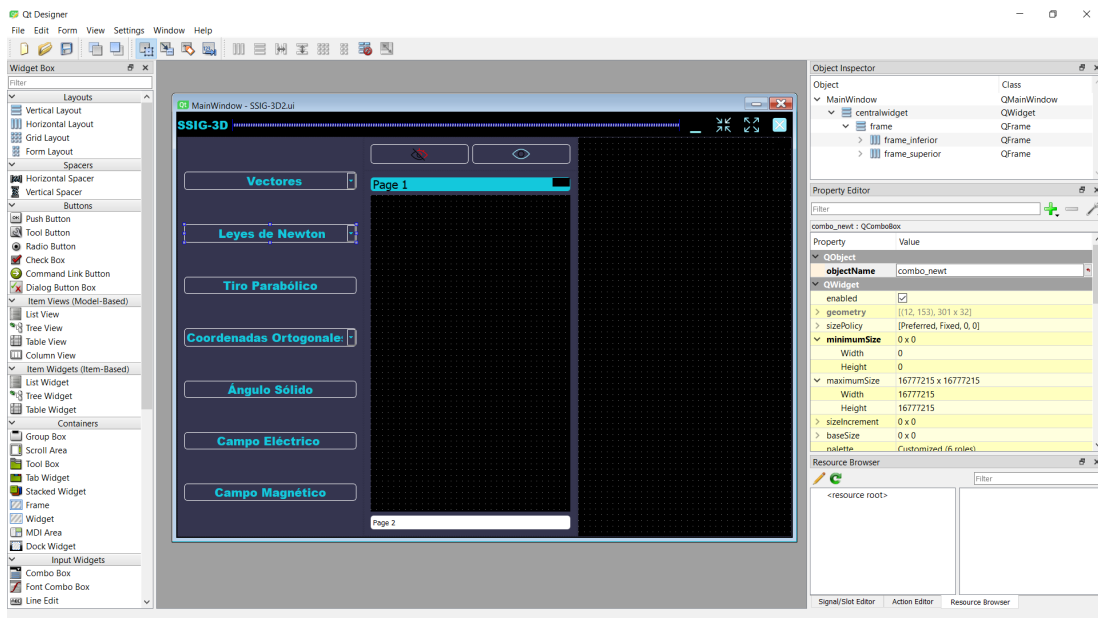


Figura 12: SSIG-3D Pantalla reducida

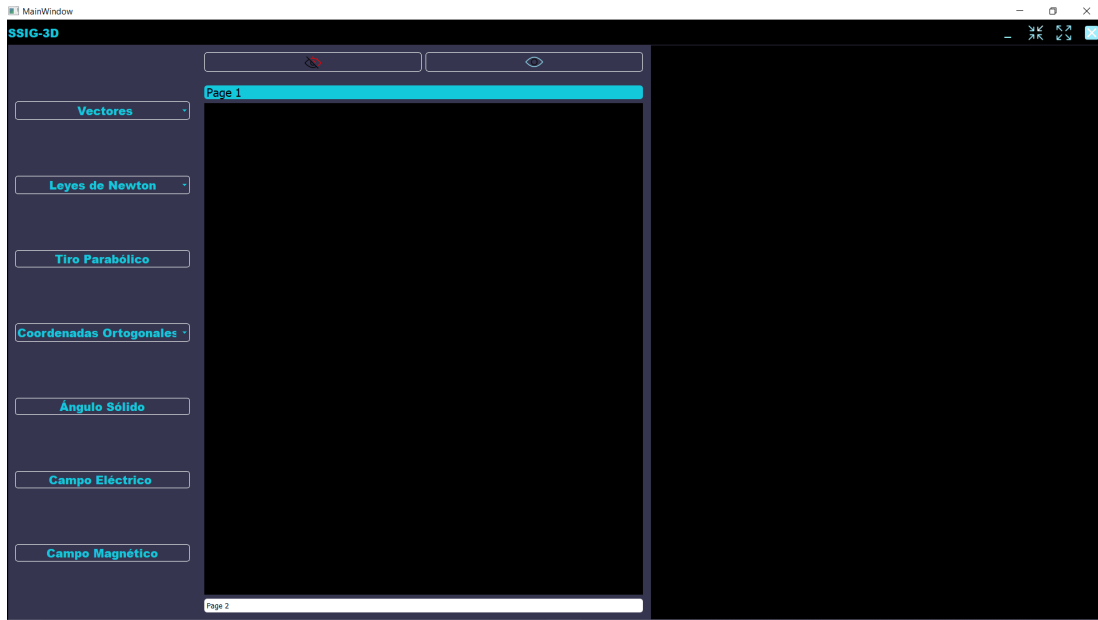


Figura 13: SSIG-3D Pantalla completa

Referencias

- [1] Navarrete-Cazales, Z., López-Membrillo, M. G., & Manzanilla-Granados, H. M. (2020). **“Logros y perspectivas de la educación superior a distancia en el Tecnológico Nacional de México”**. Revista de Educación Superior del Sur Global - RESUR, (9-10), 53-82. (ISSN: 2393-6789).
- [2] Navarrete Cazales, Z., Manzanilla Granados, H. M & López Membrillo, M. G. (2020) **“El Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica en México. Políticas y estructura”**. Revista de Estudos em Educação e Diversidade - REED, 1(2), 320-338. (ISSN:2675-6889)
- [3] Navarrete-Cazales, Z., Manzanilla Granados, H. M., & López Membrillo, M. G. (2021) **“El subsistema de educación tecnológica de financiamiento público. Un análisis comparativo de cuatro instituciones”**. En Navarro- Leal, M., Navarrete-Cazales, Z. & Rivera Peña, J. R. (Coords) Políticas Educativas. Una mirada internacional y comparada, México: Sociedad Mexicana de Educación Comparada / Escuela Normal “Miguel F. Martínez” Centenaria y Benemérita. pp. 261-280 (ISBN: 978-607-8557-76-9)
- [4] Manzanilla Granados, H. M., López Membrillo, M. G., & Navarrete Cazales, Z. (2020) **“Análisis comparativo de la creación y desarrollo de los Institutos Tecnológicos en México”**. En Z. Navarrete-Cazales, C. Ornelas, & M. A. Navarro-Leal, (Coords.) Educación comparada: tendencias teóricas y empíricas internacionales y nacionales. México: Plaza y Valdés Editores / Sociedad Mexicana de Educación Comparada. pp. 345-356. (ISBN: 978-607-8624-97-3)
- [5] López-Membrillo, M. G., y Manzanilla-Granados, H. M. (2020). **“Educación en línea en el Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica en México”**. En: Navarrete-Cazales, Z., Martínez-Iñiguez, J. E., y Soto-Curiel, J. A. (Coords.). Educación Superior en Prospectiva. México: Plaza y Valdés / Sociedad Mexicana de Educación Comparada. pp. 133-149 (ISBN: 978-607-8624-88-1)
- [6] Marro, Joaquín. (2022). **“Física y computación”**,
- [7] María Guadalupe Amado Moreno, Ángel García Velázquez, Reyna Arcelia Brito Páez, Bertha Ivonne Sánchez Luján, Carlos Alfonso Sagaste Bernal. (2014). **“Causas de reprobación en ingeniería desde la perspectiva del académico y administradores”**. ISSN 1850-0870.
- [8] Rubén Sánchez Sánchez, César Mora, Lino Jesús Velázquez Arteaga. (2014). **“Aprendizaje Activo de la Física para estudiantes de Ingeniería en la Ciudad de México”**. ISSN 2007-9842.
- [9] Díaz-Ricardo, Yanet, Becerra-García, Roberto Antonio, Challenger-Pérez, Ivet. (2014) **“El lenguaje de programación Python”**. Ciencias Holguín, vol. XX. ISSN: 1027-2127

- [10] Amaya Franky, Germán (2009). **"Laboratorios reales versus laboratorios virtuales, en la enseñanza de la física"**. El Hombre y la Máquina, núm. 33. ISSN: 0121-0777.
- [11] Arias Rueda, María Judith, & Montiel, Egle, & Garrido, Ninfa (2012). **"Análisis de experiencias del Laboratorio de Física desde una perspectiva estudiantil: insumos para elaborar un multimedia"**. Multiciencias, vol.12. pp. 209-214. ISSN: 1317-2255.
- [12] Tamayo Cuenca, Ronal, & Valdés Tamayo, Pedro, & Ferras Santiesteban, Elser (2015). **"Experiencias de la aplicación de objetos virtuales de aprendizaje de física moderna"**. Telos, vol. 17. ISSN: 1317-0570.
- [13] Aceituno Mederos, José Antonio, & Mujica Marcelo, Víctor Manuel (2016). **"Validacion del ambiente virtual en tres dimensiones: LA MANSIÓN DE LA FISICA como videojuego para el aprendizaje"**. Ciencia y Sociedad. ISSN: 0378-7680.
- [14] Hernández, Jesús & Jiménez, Andrés & Porras, Hernán. (2016). **"Desarrollo de aplicaciones en Python para el aprendizaje de física computacional (Development of Python applications for learning computational physics)"**. Revista Ingeniería, Investigación y Desarrollo, Vol. 16 No 1, pp. (72-82).
- [15] Romero Reyes, Sergio. (2014). **"Sistema de apoyo en la enseñanza-aprendizaje del análisis vectorial"** (SAEAAV).
- [16] Trigas Gallego, Manuel. **"Metodología Scrum. Gestión de Proyectos Informáticos"**.
- [17] Cabezas Cerro, Antonio José. (2019). **"Metodología basada en el aprendizaje Práctico-visual"**.
- [18] R. Resnick, D. Halliday, K. Krane. (2012). **"Física: vol. 1"**.
- [19] Universidad de Alicante. **"Modelo vista controlador (MVC)"**. URL: <https://si.ua.es/es/documentacion/asp-net-mvc-3/1-dia/modelo-vista-controlador-mvc.html>
- [20] Cálculo Vectorial. J. Marsden, A. Tromba, Prentice Hall, 5 edición.

Glosario

- **Ambiente Gráfico** Programa informático que actúa de interfaz de usuario, utilizando un conjunto de imágenes y objetos gráficos para representar la información y acciones disponibles en la interfaz. Su principal uso, consiste en proporcionar un entorno visual sencillo para permitir la comunicación con el sistema
- **Ángulo** Figura plana formada por dos segmentos de recta que se cortan en un punto. El punto donde se cortan se llama vértice. Los segmentos son los lados del ángulo. La medida de un ángulo indica la abertura entre sus lado.
- **Ángulo sólido** Ángulo sólido es cada una de las dos partes en que una superficie cónica divide al espacio.
- **Campo eléctrico** Campo de fuerza creado por la atracción y repulsión de cargas eléctricas (la causa del flujo eléctrico) y se mide en Voltios por metro (V/m).
- **Campo vectorial** Conjunto de vectores que sirven como la descripción de la magnitud de alguna cantidad variable que se mide para explicar algún fenómeno.
- **CERN** Organización Europea para la Investigación Nuclear (por sus siglas en Francés Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire).
- **Coordenadas**
 - Números reales expresados en un cierto orden que determinan la posición de un punto en una recta, plano o espacio.
 - Una manera de definir y ubicar a un punto en el espacio.
- **Coordenadas esféricas** Son un sistema de coordenadas tridimensional. Este sistema tiene la forma (ρ, θ, φ) , en donde, ρ es la distancia desde el origen hasta el punto, θ es el ángulo formado con respecto al eje x, y y φ es el ángulo formado con respecto al eje z .
- **Cuerpo rígido** Consiste de la unión de un conjunto continuo de puntos con masa.
- **Datos**
 - Información concreta sobre hechos, elementos, etc., que permite estudiarlos, analizarlos o conocerlos.
 - Cifra, letra o palabra que se suministra a la computadora como entrada y la máquina almacena en un determinado formato.
- **Derivada** La derivada es la mejor aproximación lineal a una función en un punto.
- **Diferencial** Se define como el producto de la derivada de la función.
- **Dinámica** Estudia el movimiento de los cuerpos de acuerdo a una fuerza aplicada

- **Dinámica del cuerpo rígido** Estudia el movimiento de sistemas de cuerpos interconectados bajo la acción de fuerza externa.
- **Ecuación** Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas
- **Emular** Imitar una cosa procurando igualarla o incluso mejorarla.
- **Espacio Vectorial** Es un conjunto no vacío V de objetos, llamados vectores, en el que se han definido dos operaciones: la suma y el producto por un escalar
- **Estática** El estudio de un conjunto de fuerzas que actúa sobre un objeto que permanece en reposo
- **Experimento** Prueba que consiste en provocar un fenómeno en unas condiciones determinadas con el fin de analizar sus efectos o de verificar una hipótesis o un principio científico.
- **Fenómeno**
 - Manifestación de una actividad que se produce en la naturaleza y se percibe a través de los sentidos.
 - Cosa inmaterial, hecho o suceso que se manifiesta y se puede percibir a través de los sentidos o del intelecto.
- **Formalismo** Tendencia a aplicar y observar de forma rigurosa el método y las fórmulas de una escuela, en la enseñanza o en la investigación científica.
- **Fuente puntual de carga** Aquella que radia energía de forma continua y de manera uniforme en todas las direcciones; es decir; que radia energía de forma esférica.
- **Geofísica** Parte de la geología que estudia la estructura y composición de la Tierra y los agentes físicos que la modifican.
- **GUI** (del inglés graphical user interface) interfaz gráfica de usuario. La interfaz entre la persona y la máquina. El objetivo de esta interfaz gráfica es representar el código del backend de un sistema de la forma más clara posible para el usuario para simplificarle las tareas diarias. Para esto, son muy importantes los iconos y las imágenes, ya que solo estos permiten una aplicación universal e independiente del texto.
- **Hidrodinámica** Parte de la dinámica que estudia el movimiento de los líquidos en relación con las causas que lo originan.
- **Interactivo** Que permite una interacción, a modo de diálogo, entre la máquina y el usuario.
- **Interfaz**
 - Dispositivo capaz de transformar las señales generadas por un aparato en señales comprensibles por otro.
 - Zona de comunicación o acción de un sistema sobre otro.
- **ISC** Ingeniería en sistemas computacionales

- **Lenguaje de programación**

- Es una herramienta que permite desarrollar software o programas para computadora
- Programa destinado a la construcción de otros programas informáticos. Su nombre se debe a que comprende un lenguaje formal que está diseñado para organizar algoritmos y procesos lógicos que serán luego llevados a cabo por un ordenador o sistema informático, permitiendo controlar así su comportamiento físico, lógico y su comunicación con el usuario humano.

- **Magnetostática** El estudio de todos los fenómenos físicos en los que intervienen campos magnéticos constantes en el tiempo.

- **Mecánicas**

- Parte de la física que estudia el movimiento y el equilibrio de los cuerpos, así como de las fuerzas que los producen.
- Modo o manera de funcionar un acontecimiento que requiere un proceso.

- **Modelo**

- Cosa que sirve como pauta para ser imitada, reproducida o copiada.
- Representación de un objeto.

- **Modulo** Elemento con función propia concebido para poder ser agrupado de distintas maneras con otros elementos constituyendo una unidad mayor.

- **Momento** Es una expresión matemática que implica el producto de una distancia y una cantidad física. Los momentos generalmente se definen con respecto a un punto de referencia fijo y se refieren a cantidades físicas ubicadas a cierta distancia del punto de referencia.

- **Movimiento** La trayectoria que un cuerpo puede tener conforme experimenta la presencia de una fuerza.

- **NumPy** Biblioteca para el lenguaje de programación Python que da soporte para crear vectores y matrices grandes multidimensionales.

- **Objeto**

- Fin al que se dirige una acción u operación.
- (programa de computadoras) Es un ente que consta de un estado y de un comportamiento, que a su vez constan respectivamente de datos almacenados y de tareas realizables durante el tiempo de ejecución.

- **Ortogonal** Que forma ángulo recto.

- **Parábola** Curva abierta formada por dos líneas o ramas simétricas respecto de un eje y en que todos sus puntos están a la misma distancia del foco (un punto) y de la directriz (recta perpendicular al eje).

- **Partícula** Cuerpo material de pequeñas dimensiones constituyente de la materia.
- **PhET** Acrónimo para Physics Education Technology.
- **Regla de la mano derecha** Es un método para determinar sentidos vectoriales, y tiene como base los planos cartesianos. Se emplea prácticamente en dos maneras:
 - Para sentidos y movimientos vectoriales lineales.
 - Para movimientos y direcciones rotacionales.
- **SciPy** Biblioteca libre y de código abierto para Python. Se compone de herramientas y algoritmos matemáticos.
- **TIC** Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, son el conjunto de recursos, herramientas, equipos, programas informáticos, aplicaciones, redes y medios.
- **Trayectoria**
 - El conjunto continuo de diferentes posiciones en el espacio que un cuerpo puede adquirir conforme transcurre el tiempo.
 - Camino o ruta que sigue un cuerpo en movimiento.
- **Vector** Un ente matemático como la recta o el plano. Un vector se representa mediante un segmento de recta, orientado dentro del espacio euclidiano tridimensional.