Bouncing Ball

Beschreibung:

Realisieren Sie die unten vorgestellten Modelle für den Bouncing Ball.

Motivation:

Jeder von uns hat wahrscheinlich in seinem Leben schon einmal Tischtennis gespielt und dabei gesehen wie der Ball auf der Platte springt, zuerst noch relativ hoch, aber mit zunehmender Zeit mit immer niedrigerer Amplitude und in einer höheren Frequenz. Bis er schließlich in die Rollphase übergeht. Diese einfache Alltagsbeobachtung ist bereits ein Beispiel für kontinuierliches Geschehen mit Zustandsereignissen und kann deshalb als Veranschaulichung von Umsetzungen und Test der Qualität von Simulationsalgorithmen verwendet werden.

Modellbeschreibung:

Modell I: Grundmodell
Um die oben beschriebene Aufgabenstellung in einer Basisvariante umzusetzen bedarf es keinen tiefgreifenden Mechanikkenntnissen. Die Bewegung der frei fallenden Masse in einem Gravitationsfeld ohne Widerstand ist durch zwei triviale Differentialgleichungen gegeben:

$$\dot{v} = -g \tag{1}$$
$$\dot{h} = v \tag{2}$$

bei der $g = 9.81\frac{m^2}{s}$ die für die Erde gültige Erdanziehungskraft ist.
Die Anfangsbedingungen $v(0) = v_0$ und $h(0) = h_0$ definieren die Geschwindigkeit und die Höhe über der Tischplatte zum Zeitpunkt $t = 0$.
Trifft nun der Ball auf eine Platte $(h = 0)$ so entsteht eine diskontinuierliche Änderung der Geschwindigkeit des Balls. Der Integrationsalgorithmus muss gestoppt und der exakte Zeitpunkt dieses State Events lokalisiert werden. Sobald das State Event lokalisiert ist, können unterschiedliche Modelle/Modellteile für das Verhalten während des Kontaktes bzw. durch den Kontakt erzwungen umgesetzt werden. Im Grundmodell wird hierzu ein sehr einfacher Ansatz basierend auf Newtons 3.Gesetz angewendet und ein Faktor μ eingeführt der den Verlust von Energie beschreibt. Die Geschwindigkeit v_i^- des Balls direkt vor dem Kontakt mit der Platte steht zur Geschwindigkeit v_i^+ nach dem Kontakt mit der Platte in folgender Beziehung:

$$v_i^+ = \mu v_i^- \tag{3}$$

Modell II: Modell mit Luftwiderstand
Um das Grundmodell zu erweitern, wird jetzt ein Faktor β eingeführt, der die Luftreibung beschreiben soll. Die Differentialgleichungen ändern sich dadurch zu:

$$\dot{v} = -g - \beta v^2 \operatorname{sgn}(v) \tag{4}$$
$$\dot{h} = v \tag{5}$$

Die Bedingung des State Events und die Beziehung der Geschwindigkeiten bleiben unverändert.
Modell III: Modell mit Feder-Dämpfer-Komponente
Eine weitere Möglichkeit das Grundmodell realistischer zu machen ist, den Aufprall nicht durch ein Event, das nur die Anfangswerte für die Berechnung der Flugphase ändert, zu beschreiben, sondern durch ein eigenes Differentialgleichungsmodell, das auch die Verformung des Balles berücksichtigt. Dadurch muss man die Differntialgleichungen ändern, und zwar für die Flugphase:

$$\dot{v} = -g \tag{6}$$
$$\dot{h} = v \tag{7}$$
$$\dot{y} = -\frac{k}{d}y \tag{8}$$

und für den Aufprall ergibt sich:

$$\dot{v} = -g + f_c \tag{9}$$
$$\dot{h} = v \tag{10}$$
$$\dot{y} = -\dot{h} \tag{11}$$

mit $f_c = \max((-kh - d\dot{h}), 0)$. Die neu eingeführte Variable y steht für die Verformung und f_c ist die normalisierte Kontaktkraft, die aufgrund des unilateralen Kontaktes zwischen Ball und Boden nicht positiv sein kann.
Abschließend müssen noch die Bedingungen für Beginn und Ende des Aufpralls festgelegt werden. Der Aufprall beginnt klarerweise wenn der Ball den Boden berührt, das heißt: $h + y = 0$. Und er endet wenn keine Kraft mehr zwischen Ball und Boden wirkt, also $f_c = 0$.

Aufgabenstellung:

Implementieren Sie diese Modelle in einem Simulator und führen Sie folgende Aufgaben durch:

1. Simulieren Sie das Grundmodell aus Modell I mit folgenden Parameterwerten:

$$v_0 = 0 \tag{12}$$
$$h_0 = 10 \tag{13}$$
$$\mu = 0.9 \tag{14}$$
$$g = 9.81 \tag{15}$$

   Verwenden Sie verschieden Löser für die Simulation und variieren Sie die Endzeitpunkte $t_{end} = 5, 10, 20, 30$.
   Stellen Sie die Höhe und die Geschwindigkeit in Plots dar.
   Untersuchen Sie die Auswirkung der Schrittweite, wenn Sie einen Fixed-Step-Solver benutzen.

2. Untersuchen Sie das Grundmodell aus Modell I analytisch und berechnen Sie eine Formel für die Zeiten der Kontakte. Berechnen Sie den Grenzwert der entstehenden geometrischen Reihe und vergleichen Sie wieviele Kontakte die verschiedenen Solver bis zu diesem Zeitpunkt berechnet haben. Weiters vergleichen Sie die analytisch berechneten Zeitpunkte mit denen die der Solver berechnet und stellen Sie den Fehler graphisch oder in einer Tabelle dar.
3. Simulieren Sie das Modell mit Luftwiderstand aus Modell II mit folgenden Parametern für Erde und Mars:

$$v_0 = 0 \tag{16}$$
$$h_0 = 10 \tag{17}$$
$$g_e = 9.81 \tag{18}$$
$$g_m = 3.69 \tag{19}$$
$$\beta_e = 0.02 \tag{20}$$
$$\beta_m = 2.3 \cdot 10^{-4} \tag{21}$$

   Stellen Sie Höhe und Geschwindigkeit des Balles für Erde und Mars in einem Plot dar und ermitteln Sie nach wievielen Kontakten der Ball nur noch auf eine maximale Höhe von 5m kommt. Vergleichen Sie außerdem den Verlauf der Geschwindigkeitskurve mit der aus Aufgabe 1.
4. Simulieren Sie das Modell mit einem Feder-Dämpfer-Element aus Modell III mit den Parametern:

$$g = 9.81 \tag{22}$$
$$k = 10^6 \tag{23}$$
$$d = 500 \tag{24}$$
$$h_0 = 10 \tag{25}$$
$$v_0 = 0 \tag{26}$$
$$y_0 = 0 \tag{27}$$

   Variieren Sie k und d jeweils um den Faktor 100 und beschreiben Sie den Einfluss den die beiden Parameter auf das Modell haben. Achten Sie dabei besonders auf die Verformung des Balles, die Dauer des Aufpralles und den Energieverlust des Balles beim Aufprall.

mögliche Entwicklungsumgebungen/Programmiersprachen: MATLAB, Simulink, SimScape, Maplesim