# Límits

2022 - 2023

## 1 Successions

$u_1(n) = n^2 \to$ Divergent $\infty^2 = \infty$
$u_2(n) = \frac{1}{n_1} \to$ Convergent $\lim\limits_{n\to\infty} u_2 = 0$
$u_3(n) = e^n \to$ Divergent $\lim\limits_{n\to\infty} u_3 = \infty$
$u_4(n) = \log n \to$ Divergent $\lim\limits_{n\to\infty} = \infty$
$u_5(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to$ Divergent $\lim\limits_{n\to\infty} u_5 = \infty$

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

$x$ mai arriba a 2, per tant $x^2$ mai és 4

## 2 Límits

### 2.1 Definició informal de límit

Si $f(x)$ es pot aproximar a un valor ($\mathbb{R}$) $A$, fent que $x$ sigui suficientment proper a $a$ (pero no igual), diem que té límit a $A$ quan $x$ tendeix a $a$, i escrivim.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

### 2.2 Tipus de límits

1. Límit a l'infinit $\pm\infty$
2. Límit en un punt $(x \to a)$ límits laterals $x \to a^{\pm}$

## 2.3 Propietats dels límits

Si $f(x)$ i $g(x)$ són funcions i existeix $\lim_{x\to a}$ i $\lim_{x\to a} g(x)$, c és constant.

1. $\lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to a} cf(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$
3. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
4. $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$
5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, sempre que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

## 2.4 Límits a l'infinit

| | | |
|---|---|---|
| $\lim_{x\to+\infty} x^2 = \infty$ | $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ | $\lim_{x\to+\infty} e^x = \infty$ |
| $\lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$ | $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ | $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ |

### 2.4.1 Valors

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{k}{\infty} = 0$ | $\dfrac{k}{0} = \infty$ | $\dfrac{\infty}{k} = \infty$, si$k \neq 0$ |
| $k \pm \infty = \infty$ | $k\,(\pm\infty) = \pm\infty$ | |

En funcions polinòmiques el límit és igual al límit del térme de grau més gran.

En cas que substituïnt les $x$ per $\infty$ quedi $\frac{\infty}{\infty}$, s'ha de dividir el valor del límit per $x$, ja que $\frac{\infty}{\infty}$ és una indeterminació.

En cas que substituïnt les $x$ per $\infty$ quedi $\infty - \infty$, s'ha de mutiplicar el valor del límit per el seu conjugat, ja que $\infty - \infty$ és una indeterminació.

## 2.5 Indeterminacions

$\dfrac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ s'agafen els valors dominants (grau més gran).

$\infty - \infty \Rightarrow$ es mutiplica per el conjugat.

$\dfrac{0}{0} \Rightarrow$ aplicar propietats algebraiques par arribar a altres indeterminacions.

$0 \cdot \infty \Rightarrow$ aplicar propietats algebraiques par arribar a altres indeterminacions.

$1^\infty \Rightarrow$ intentar arribar a una expressió d'aquest estil: $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$

## 2.6 Continuitat d'una funció

Una funció $f$ és contínua en $x = a$ si $\exists f(a)$ i $\exists \lim_{x \to a} f(a)$, és a dir, $\lim_{x \to a^-} f(a) = \lim_{x \to a^+} f(a) = k$

Si $\exists \lim_{x \to a} f = k \neq f(a) \rightarrow$ discontinuïtat evitable.

Si $\lim_{x \to a^-} f = k_1$ i $\lim_{x \to a^+} = k_2$ i $k_1 \neq k_2 \rightarrow$ discontinuïtat de salt.

Si $\lim_{x \to a^-} f(a) = \pm\infty$ i/o $\lim_{x \to a^+} f(a) = \pm\infty \rightarrow$ discontinuïtat asimptótica.

## 2.7 Asímptotes

A.Verticals: $x = k, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to k} f = \infty$

A.Horitzontals: $y = k, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to \infty} f = k$

A.Obliqües: $y = mx + n, \quad m = \lim_{x \to \infty} \left( f(x) \cdot \frac{1}{x} \right), \quad n = \lim_{x \to \infty} \left( f(x) - mx \right)$