Vectors

-

Gener 2023

1 Introduction

Donats els punts A i B el vector $\vec{AB} = B - A \longrightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix}$$

1.1 Coneixaments Previs

1.2 Angle d'un vector

$$\tan(\alpha) = \frac{u_2}{u_1}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{u_2}{u_1}\right)$$

1.2.1 Mutiplicació per un escalar

$$k \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} k \cdot u_1 \\ k \cdot u_2 \end{pmatrix}, k \in R$$

1.2.2 Mutiplicació de dos vectors - Producte escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 + v_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$$

1.2.3 Vector Unitari

El mòdul del vector és 1

$$\hat{u} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$$

2 Equacions de la recta

Siguin $A = (a_1, a_2)$ i $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

2.1 Equació vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OX} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{u}$$

2.2 Equació paramètrica

Dividir l'equació vectorial en dos

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda \cdot u_1 \\ y = a_2 + \lambda \cdot u_2 \end{cases}$$

2.3 Equació contínua

Resultata d'igualar les equacions peramètriques per λ.

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}$$

2.4 Equació punt-pendent

$\frac{u_2}{u_1} = m$ on m és el pendent de la recta.

$$y - a_2 = \frac{u_2}{u_1} \cdot (x - a_1)$$

2.5 Equació General o implicita

$$Ax + By + C = 0$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \perp \vec{u}$$

2.6 Equació explícita

$$y = mx + n$$

n és la ordenada a l'origen, és a dir, valor de y que fa que $x = 0$

3 Equació canònica

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

a i b són els punts de tall no nuls $(a, 0)$ i $(0, b)$

4 Propietats del producte escalar

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Longleftrightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Longleftrightarrow 90° < \theta < 180°$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Longleftrightarrow 0° < \theta < 90°$$

5 Segments

5.1 Punt mig d'un segment

Donat el segment $\overline{AB}$ el punt mig M és la suma del punt A més el vector $\vec{AB}$ entre 2

$$0\vec{M} = 0\vec{A} + \frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$$

5.2 Partir un segment en parts iguals

Doant el segment $\overline{PQ}$ amb punts M i N, el vector $\vec{PM}$ és un terç del vector $\vec{PQ}$

$$0\vec{M} = 0\vec{P} + \frac{1}{3} \cdot \vec{PQ}$$

La formula general diria així:

$$0\vec{M} = 0\vec{P} + \frac{1}{n} \cdot \vec{PQ}$$

On $\overline{PQ}$ és un segment, M el punt que es vol saber i n el nombre de punts totals.

6 Posició relativa

$P(x_0, y_0)$
$r : Ax + By + C = 0$
$r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$
$s : A'x + B'y + C = 0$
$s : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

6.1 Punt - Recta

Per compropbar si un punt pertany a una recta:

$$P \in r, Ax_0 + By_0 + C = 0$$

$$P \notin r, Ax_0 + By_0 + C \neq 0$$

6.2 Recta - Recta

6.2.1 Paral·leles

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

$\vec{u}, \vec{v}$ són linear dependents, $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$
Cap punt de r pertany a s, $A_r \notin s$
$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

6.2.2 Coincidents

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

$\vec{u}, \vec{v}$ són linealment dependents
Tots els punts de r pertanyen a s, $A_r \in s$

6.2.3 Secants

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

$\vec{u}, \vec{v}$ són linealment independents

6.2.4 Perpendiculars

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\begin{cases} r : y = m_1 \cdot x + n_1 \\ s : y = m_2 \cdot x + n_2 \end{cases} \quad r \perp s \Longleftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\vec{n_u} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

7 Rectes singulars

mediatriu: *recte $\perp$ a una altre recta i que pasa pel seu punt mig.*
bisactriu: *recte que parteix l'angle que formen dos altres rectes entre dos.*
altura: *recte $\perp$ a un costat d'un triangle que pasa pel vertex oposat.*
mediana: *recte que va d'un punt mig d'un costat d'un triangle fins al vertex oposat.*

8 Problemes metrics

8.1 Punt - Punt

Doants els punts $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$ la distancia entre els punts és el modul del vector.

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

8.2 Recte - Punt

Si $P \in r, d(P,r) = 0$
Si $P \notin r, d(P,r) = \|\vec{PQ}\|$ on Q és la intersecció entre r i la recta $\perp r$
El punt Q és la projecció de P sobre r

$$d(P,r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

8.3 Recta - Recta

Coincidents, $d(r,s) = 0$
Secants, $d(r,s) = 0$
Paral·leles, $d(r,s) = d(P_r, s)$

8.4 Angles

Coincidents, $\alpha(r,s) = 0$
Paral·leles, $\alpha(r,s) = 0$
Secants:

$$\alpha(r,s) = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$$

8.5 Punt Simètric

8.5.1 Simètria respecte un punt

Sigui A un punt, B un altre punt i A' el simetric de A respecte B

$$0\vec{A'} = 0\vec{A} + \vec{AB}$$

8.5.2 Simètria respecte una recte

Siguin $r : y = m_r \cdot x + n_s$ i $A = (a_1, a_2)$

1 - Trobar $\perp$ de r que passa per A

Si $r \perp s, m_r \cdot m_s = -1$

$$s : y = m_s \cdot x + n_s$$

2 - Troba n_s substituin el punt A en la equqació

$$a_2 = m_s \cdot a_1 + n_s$$

3 - Troba el punt M el cual és la intersecció entre rectes

$$\begin{cases} r : y = m_r \cdot x + n_r \\ s : y = m_s \cdot x + n_s \end{cases}$$

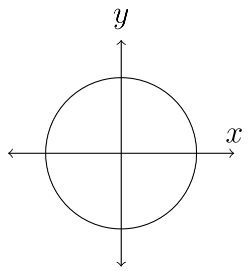
4 - Solucionar el problema com la simetrai de punts

$$0\vec{A'} = 0\vec{M} + \vec{AM}$$

8.6 Llocs geomètrics

Mediatriu: *Lloc geomètric dels puns que equidisten 2 punts. És una recta.*
Circumferència: *Lloc geomètric dels punts que equidisten d'un punt.*
Equació d'una circumferència:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



Equació general d'una circumferència:

$$x^2 + y^2 = Ax + By + C = 0$$

$$A = -2a, B = -2b, C = a^2 + b^2 - r^2$$

8.6.1 Intersecció entre circumferència i recta

Siguin r és el radi, C és el centre i s una recta.

Tangent: 1 intersecció $d(s, C) = r$
Secant: 2 interseccions $d(s, C) < r$
Exterior: 0 interseccions $d(s, C) > r$

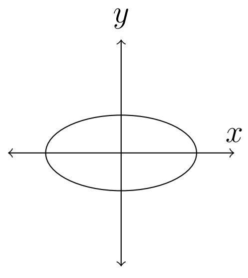
Les interseccions són les solucions de les equaicons.

8.6.2 El·lipse

Lloc geomètric dels puns, tals que la suma de distancia d'un punt a dos de donats és constant.

$$\frac{(x-k)^2}{a^2} + \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$$

On (k, h) és el centre de la el·lipse, el punt mig entre els dos focus.
a és el semi eix horitzontal i b el semi eix vertical.



8.6.3 Paràbola

Lloc geomètric dels punts que equidisten d'un punt (focus) i una recta (directriu).
Directriu horitzontal

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x^2 = -2py$$

p és la distancia entre el focus i la directriu.

Directriu vertical

$$x = ay^2 + by + c$$

$$y^2 = -2px$$

8.6.4 Hipèrbola

Llog geomètric dels punts tals que la diferència de distáncies d'un punt a dos donats (focus) és constant.

$$\frac{(x-k)^2}{a^2} - \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$$