Rendu TP Méthodes Numériques :

Simulation d'écoulement fluide

Jacopo Iollo, Geoffroy Oudoumanessah

1 Résolution de l'équation de transport diffusion

Question 1 : On cherche deux matrices M et N telles que $\forall k \in 0, ..., N_t - 1$ on ait le système :

$$N \begin{pmatrix} \Phi(0,(k+1)dt) \\ \vdots \\ \Phi(ndx,(k+1)dt) \\ \vdots \\ \Phi((N_x-1)dx,(k+1)dt) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \Phi(0,kdt) \\ \vdots \\ \Phi(ndx,kdt) \\ \vdots \\ \Phi((N_x-1)dw,kdt) \end{pmatrix}$$

Pour répondre à cette question on utilise la formule de l'équation différentielle discrétisée et on sépare les termes en $\Phi(.,t+dt)$ et $\Phi(.,t)$, on obtient alors :

$$\Phi(x,t+dt) - \kappa\frac{dt}{dx^2}(\Phi(x+dx,t+dt) - 2\Phi(x,t+dt) + \Phi(x-dx,t+dt)$$
$$= \Phi(x,t) - c(x)\frac{dt}{2dx}(\Phi(x+dx,t) - \Phi(x-dx,t)) + c(x)^2\frac{dt^2}{2dx^2}(\Phi(x+dx,t) - 2\Phi(x,t) + \Phi(x-dx,t))$$

Puis finalement, en arrangeant les termes on trouve la forme suivante :

$$-\kappa\frac{dt}{dx^2}\Phi(x-dx,t+dt) + (1+2\kappa\frac{dt}{dt^2})\Phi(x,t+dt) - \kappa\frac{dt}{dx^2}\Phi(x+dx,t+dt)$$
$$= (c(x)\frac{dt}{2dx} + c(x)^2\frac{dt^2}{2dx^2})\Phi(x-dx,t) + (1-2c(x)^2\frac{dt^2}{2dx^2})\Phi(x,t) + (-c(x)\frac{dt}{2dx} + c(x)^2\frac{dt^2}{2dx^2})\Phi(x+dx,t)$$

Enfin, en utilisant la périodicité spatiale de Φ on en déduit aisément les matrices :

$$N = \begin{pmatrix} 1+2\kappa\frac{dt}{dx^2} & -\kappa\frac{dt}{dx^2} & 0 & \dots & -\kappa\frac{dt}{dx^2} \\ -\kappa\frac{dt}{dx^2} & 1+2\kappa\frac{dt}{dx^2} & -\kappa\frac{dt}{dx^2} & \dots & \vdots \\ 0 & -\kappa\frac{dt}{dx^2} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\kappa\frac{dt}{dx^2} \\ -\kappa\frac{dt}{dx^2} & \dots & 0 & -\kappa\frac{dt}{dx^2} & 1+2\kappa\frac{dt}{dx^2} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & c_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \dots & \vdots \\ 0 & c_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{N_x-1} \\ b_{N_x} & \dots & 0 & c_{N_x} & a_{N_x} \end{pmatrix}$$

avec, $\forall k \in 0, ...N_x - 1$

$$a_k = 1 - 2c(kdx)^2\frac{dt^2}{2dx^2}$$

$$b_k = c(kdx)\frac{dt}{2dx}(c(kdx)\frac{dt}{dx} - 1)$$
$$c_k = c(kdx)\frac{dt}{2dx}(c(kdx)\frac{dt}{dx} + 1)$$

Question 2 : On a bien N qui est symétrique, pour vérifier qu'elle est définie positive, on va poser la matrice de Jordan : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. On montre que les valeurs propres de la matrice de Jordan sont les racines N_t^{ime} de l'unité. On trouve par ailleurs que N est la matrice issue de l'évaluation d'un certain polynôme par J. En posant ce polynôme Q, on trouve alors :

$$Q(X) = 1 + 2\kappa\frac{dt}{dx^2} - \kappa\frac{dt}{dx^2}(X + X^{N_t-1})$$

On a aussi J diagonalisable $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $J = P^{-1}DP$ avec $D = Diag((\omega_k)_{0\leq k\leq N_t})$, ainsi on obtient alors $Q(J) = P^{-1}Q(D)P$ par bloc on obtient que les valeurs propres de la matrice N sont les évaluations de Q en $(\omega_k)_{0\leq k\leq N_t}$. Montrons que $\forall k \in 0, ..., N_{t-1}$ on a $Q(\omega_k) > 0$. En effet on a bien $\omega_k + \omega_k^{N_t-1} = e^{\frac{2ik\pi}{N_t}} + e^{\frac{2ik\pi(N_t-1)}{N_t}} = 2cos(\frac{2k\pi}{N_t}) \in \mathbb{R}$ de plus $1 + 2\kappa\frac{dt}{dx^2} - \kappa\frac{dt}{dx^2}(2cos(\frac{2k\pi}{N_t})) > 0$, N est alors bien symétrique définie positive.
Cela justifie donc bien l'utilisation d'une méthode de type Cholesky car on peut écrire, avec $T \in T_n(\mathbb{R})$:

$$T^tT \begin{pmatrix} \Phi(0,(k+1)dt) \\ \vdots \\ \Phi(ndx,(k+1)dt) \\ \vdots \\ \Phi((N_x-1)dx,(k+1)dt) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \Phi(0,kdt) \\ \vdots \\ \Phi(ndx,kdt) \\ \vdots \\ \Phi((N_x-1)dw,kdt) \end{pmatrix}$$

On résout alors : $T^tY = M \begin{pmatrix} \Phi(0,kdt) \\ \vdots \\ \Phi(ndx,kdt) \\ \vdots \\ \Phi((N_x-1)dw,kdt) \end{pmatrix}$ puis $T \begin{pmatrix} \Phi(0,(k+1)dt) \\ \vdots \\ \Phi(ndx,(k+1)dt) \\ \vdots \\ \Phi((N_x-1)dx,(k+1)dt) \end{pmatrix} = Y$

Question 3 : On code les fonctions *up_sweep_cholesky* et *down_sweep_cholesky* avec l'algorithme de Cholesky vu en cours. Enfin on utilise l'algorithme de résolution vu précédemment pour coder la fonction *my_cholesky*.

Question 4 : On initialise d'abord les matrices M, N, phi_0 et la fonction de convection. Enfin on applique N_t fois la fonction *my_cholesky* pour trouver Φ au temps final on obtient, pour els différentes valeur de κ testées :

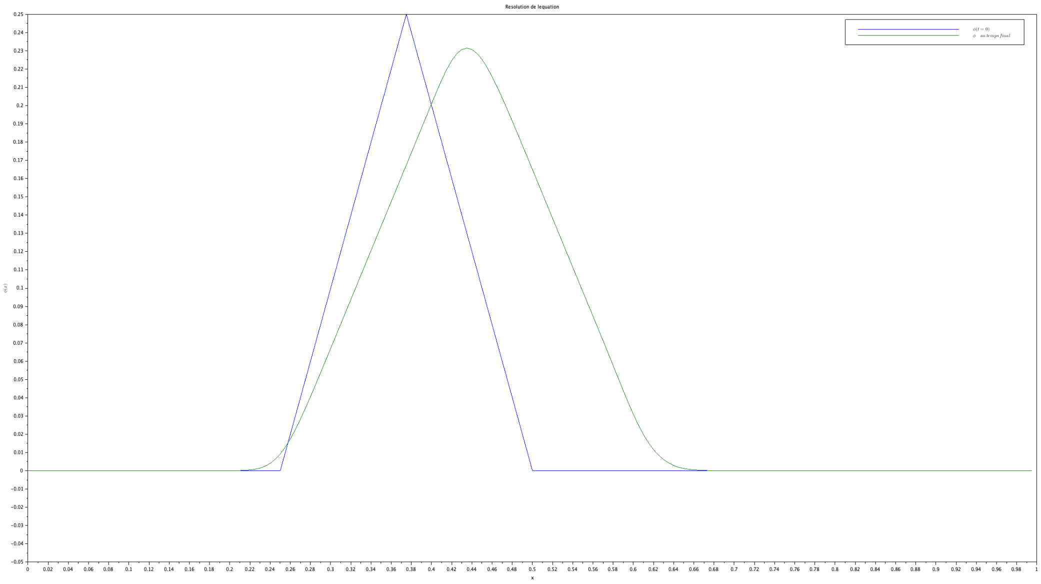

FIGURE 1 – $\kappa = 10^{-4}$

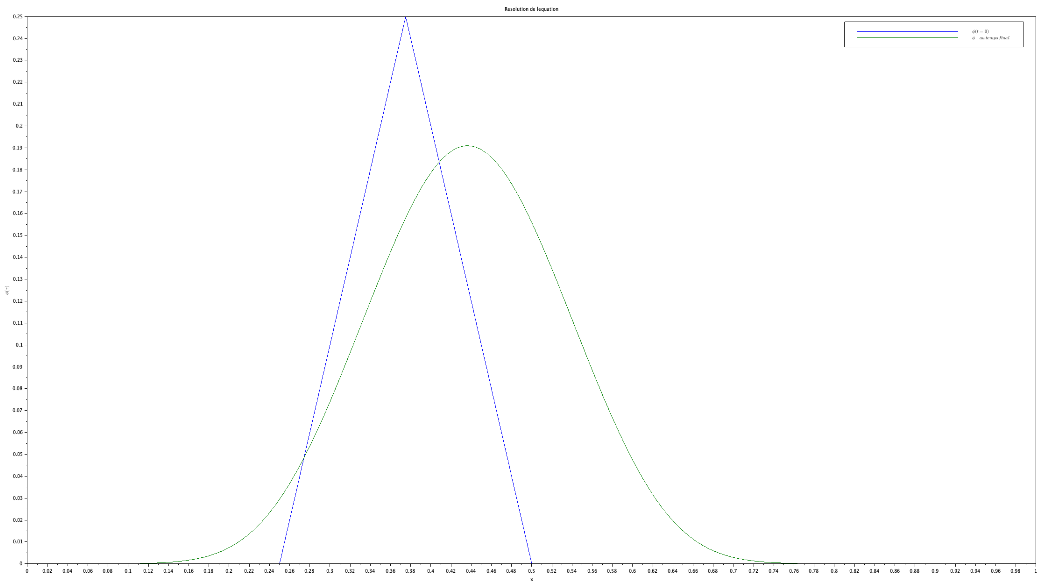

FIGURE 2 – $\kappa = 10^{-3}$

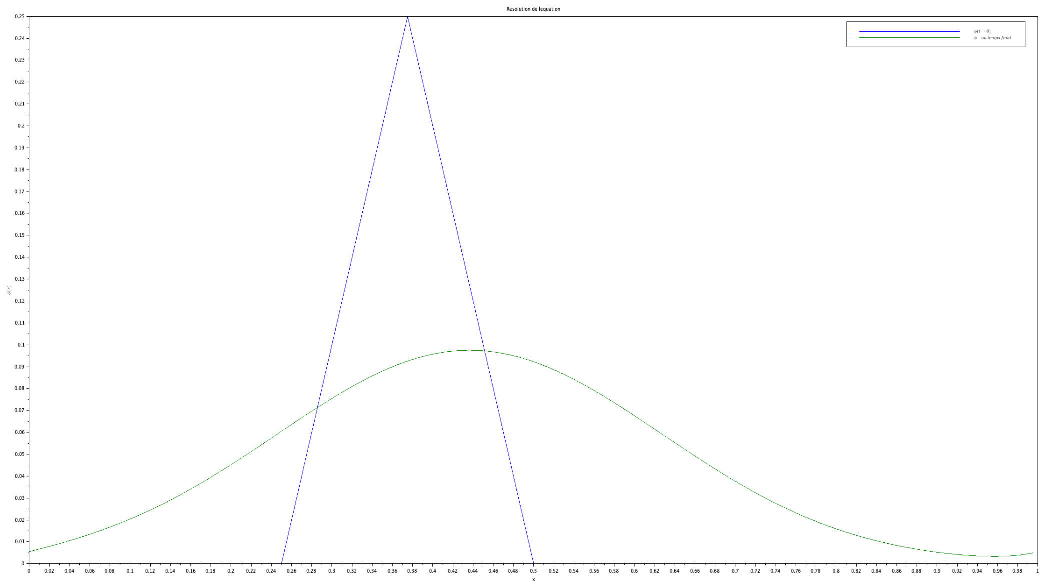

FIGURE 3 – $\kappa = 10^{-2}$

Question 5 : On code assez simplement la fonction *solveur_1D* avec la fonction *umfpack* qui résous un système de la forme $Ax = b$. Enfin on écrit une fonction *solveur_2D* qui utilise la méthode de splitting présentée et on plot les résultats. On obtient alors :

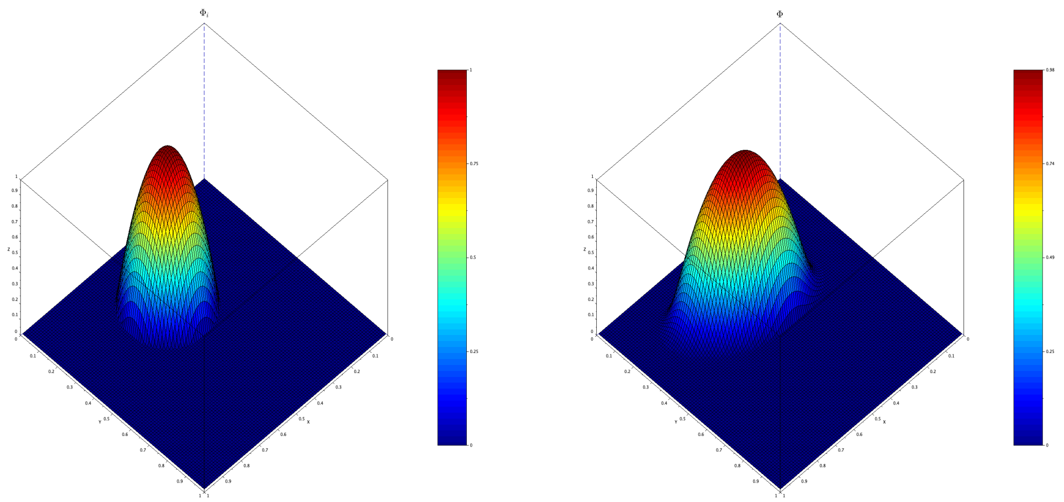

FIGURE 4 – *Solveur2D*

2 Résolution du problème de Poisson

Question 6 : On a, $\forall n, m > 1$ et pour $\mathbf{k_x} = \frac{2i\pi q}{L_x}$ et $\mathbf{k_y} = \frac{2i\pi p}{L_y}$: $S_{nm}(f) = \sum\limits_{p=-n}^{n} \sum\limits_{q=-m}^{m} \hat{f}_{pq} e^{\mathbf{k_y} y} e^{\mathbf{k_x} x}$ et $S_{nm}(\Psi) = \sum\limits_{p=-n}^{n} \sum\limits_{q=-m}^{m} \hat{\Psi}_{pq} e^{\mathbf{k_y} y} e^{\mathbf{k_x} x}$. De plus, on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 S_{nm}(\Psi)}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 S_{nm}(\Psi)}{\partial y^2} = S_{nm}(f)(x, y)$$

D'où, en passant faisant la somme des dérivées :

$$\sum_{p=-n}^{n}\sum_{q=-m}^{m} \hat{\Psi}_{pq}\mathbf{k_x}^2 e^{\mathbf{k_y}y}e^{\mathbf{k_x}x} + \sum_{p=-n}^{n}\sum_{q=-m}^{m} \hat{\Psi}_{pq}\mathbf{k_y}^2 e^{\mathbf{k_y}y}e^{\mathbf{k_x}x} = \sum_{p=-n}^{n}\sum_{q=-m}^{m} \hat{f}_{pq}e^{\mathbf{k_y}y}e^{\mathbf{k_x}x}$$

Puis finalement, en identifiants les coefficients, on trouve alors :

$$\hat{\Psi}_{pq} = \frac{\hat{f}_{pq}}{\mathbf{k_x}^2 + \mathbf{k_y}^2}$$

Question 7 : Pour cette question, on écrit la fonction *fftfreq* avec la formule donnée.

Question 8 : Il suffit de coder la fonction *poisson_2d* en suivant l'algorithme donnée et en faisant attention au cas où $\mathbf{k_x}$ et $\mathbf{k_y}$ sont simultanément nuls.

Question 9 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et on pose $\Psi_\alpha(x,y) = \alpha sin(2\pi x)sin(2\pi y)$, on a :

$$\Delta\Psi_\alpha(x,y) = -8\pi^2\alpha sin(2\pi x)sin(2\pi y) = sin(2\pi x)sin(2\pi y)$$

D'où $\alpha = \frac{-1}{8\pi^2}$ puis $\Psi_\alpha(x,y) = \frac{-1}{8\pi^2}sin(2\pi x)sin(2\pi y)$, on peut finalement coder la fonction *solution_field*

Question 10 : On obtient un test réussi avec une erreur de : $8.6736173799e^{-18}$, on a donc une précision de l'ordre de 10^{-18} sur nos calculs qui sont alors très précis.

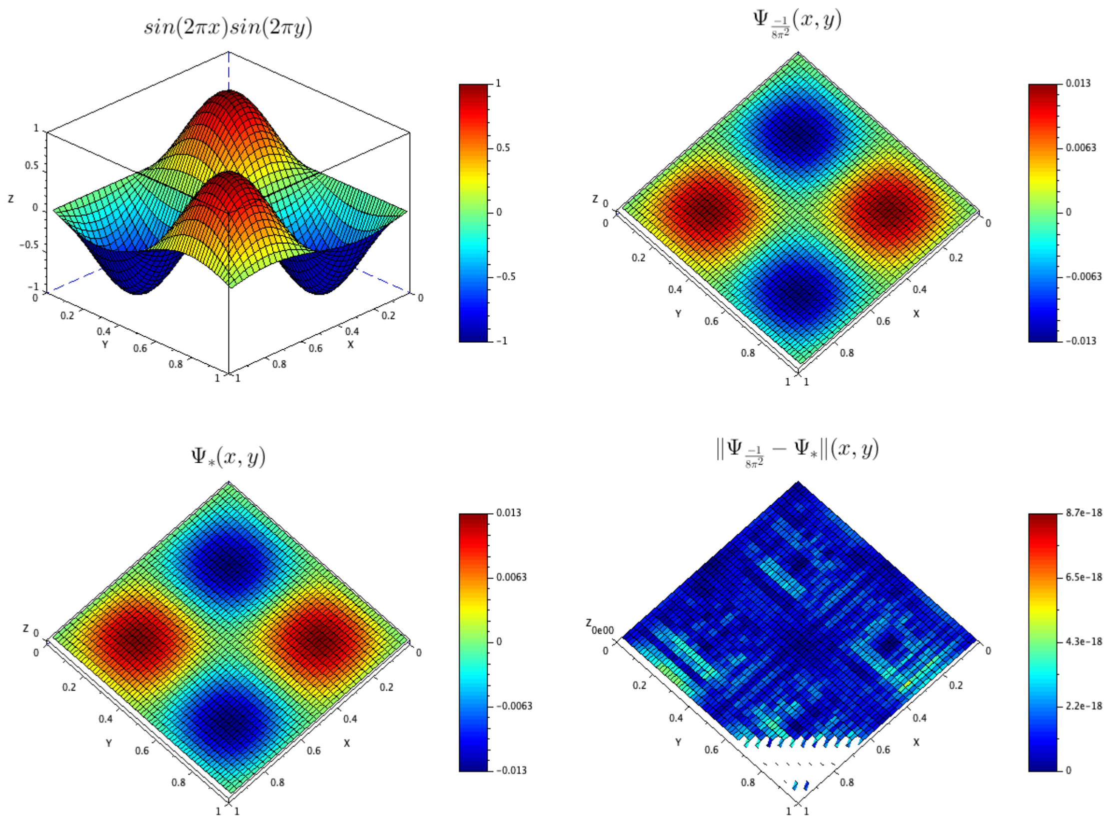

FIGURE 5 – Résultats du Test

Question 11 : On trouves les coefficients de Fourier de $\hat{\mathbf{u}}_x$ et $\hat{\mathbf{u}}_y$ avec le même raisonnement que lors de la question 8 :

$$\Delta S_{nm}(\mathbf{u}_x)(x,y) = -\frac{\partial S_{nm}(\omega)}{\partial y}(x,y)$$

$$\sum_{p=-n}^{n}\sum_{q=-m}^{m} \hat{\mathbf{u}}_{xpq}\mathbf{k_x}^2 e^{\mathbf{k_y}y}e^{\mathbf{k_x}x} + \sum_{p=-n}^{n}\sum_{q=-m}^{m} \hat{\mathbf{u}}_{xpq}\mathbf{k_y}^2 e^{\mathbf{k_y}y}e^{\mathbf{k_x}x} = -\sum_{p=-n}^{n}\sum_{q=-m}^{m} \hat{\omega}_{pq}\mathbf{k_y} e^{\mathbf{k_y}y}e^{\mathbf{k_x}x}$$

$$\Delta S_{nm}(\mathbf{u}_y)(x,y) = \frac{\partial S_{nm}(\omega)}{\partial x}(x,y)$$

$$\sum_{p=-n}^{n}\sum_{q=-m}^{m} \hat{\mathbf{u}}_{ypq}\mathbf{k_x}^2 e^{\mathbf{k_y}y}e^{\mathbf{k_x}x} + \sum_{p=-n}^{n}\sum_{q=-m}^{m} \hat{\mathbf{u}}_{ypq}\mathbf{k_y}^2 e^{\mathbf{k_y}y}e^{\mathbf{k_x}x} = \sum_{p=-n}^{n}\sum_{q=-m}^{m} \hat{\omega}_{pq}\mathbf{k_x} e^{\mathbf{k_y}y}e^{\mathbf{k_x}x}$$

Finalement on a les relations suivantes :

$$\hat{\mathbf{u}}_{xpq} = \frac{-\hat{\omega}_{pq}}{\mathbf{k_x}^2 + \mathbf{k_y}^2}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{xpq} = \frac{\hat{\omega}_{pq}}{\mathbf{k_x}^2 + \mathbf{k_y}^2}$$

On code ainsi, dans la fonction *poisson_ curl_ 2d* en calculant les $\hat{\mathbf{u}}_{xpq}$ et $\hat{\mathbf{u}}_{xpq}$ puis en passant à la transformée inverse de Fourier on trouve $\mathbf{u}_x$ et $\mathbf{u}_y$. Pour le test donné, on obtient les résultats suivants :

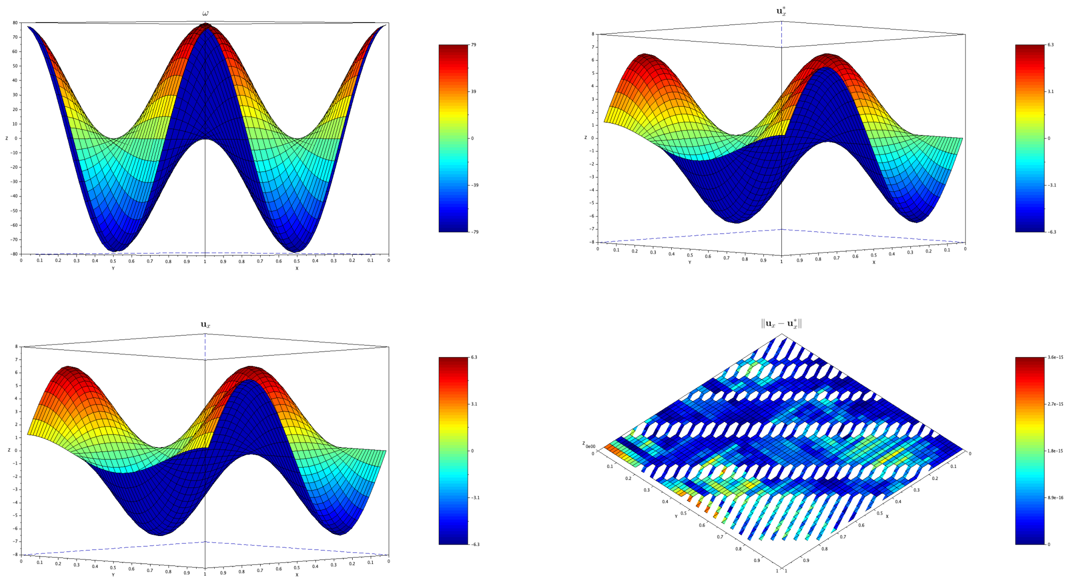

FIGURE 6 – Résultats du Test pour $\mathbf{u}_x$

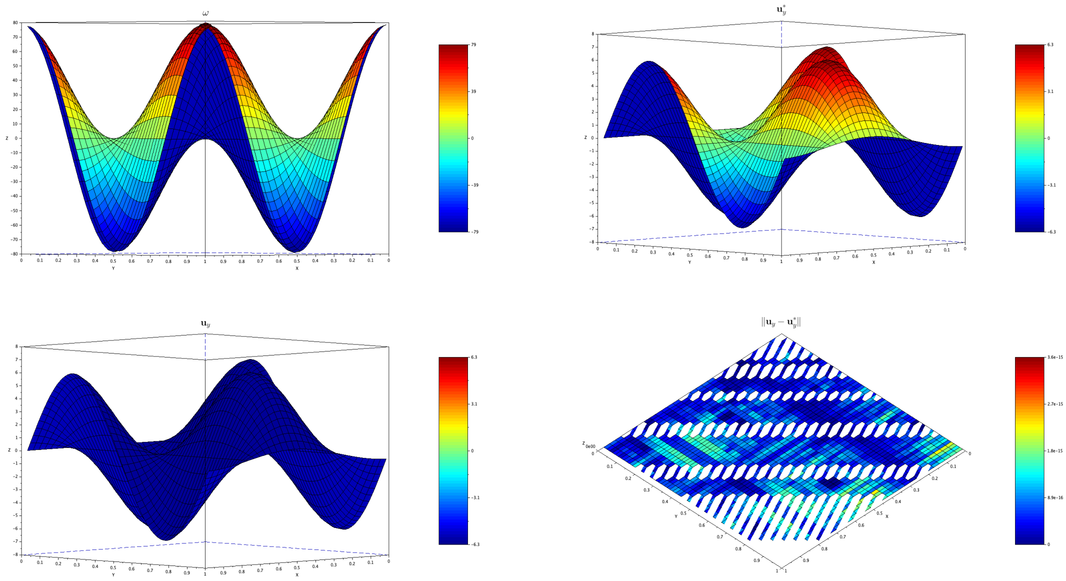

Figure 7 – Résultats du Test pour $\mathbf{u}_y$

On constate que les erreurs commises sont de l'ordre que celles commises précédemment lors de la question 10, ce qui semble normal puisque l'on utilise la même méthode pour la résolution.

3 Simulation numérique

Question 12 : On a $\omega^0(x,y) = \frac{\partial \mathbf{u}_y^0}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{u}_x^0}{\partial y}$. De plus, $\frac{\partial \mathbf{u}_y^0}{\partial x} = 2\pi\delta cos(2\pi x)$ et

$$\frac{\partial \mathbf{u}_x^0}{\partial y} = \begin{cases} \frac{\rho}{ch^2(\rho(y-0.25))} & \text{si } \rho \leq 0.5 \\ \frac{-\rho}{ch^2(\rho(0.75-y))} & \text{si } \rho > 0.5 \end{cases}$$