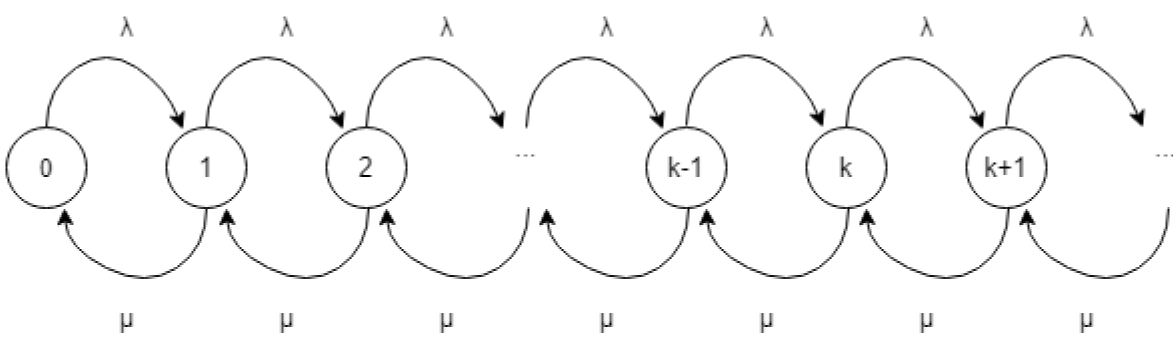
Συστήματα Αναμονής – 2η Σειρά Ασκήσεων

Γεώργιος Κυριακόπουλος – el18153

<u>Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1:</u>

α) Για να είναι εργοδική η ουρά $M/M/1$, λόγω της άπειρης χωρητικότητας της, πρέπει η ένταση του φορτίου της $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ να είναι μικρότερη της μονάδας (του ενός Erlang), άρα $\lambda < \mu$, που σημαίνει ο μέσος ρυθμός αφίξεων να είναι μικρότερος του μέσου ρυθμού εξυπηρέτησης πελατών.

Ακολουθεί το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς M/M/1:



Για τις εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων έχουμε, με βάση και τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho P_0$$

$$(\lambda + \mu) P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \Rightarrow P_2 = \rho^2 P_0$$

$$P_k = \rho^k P_0, k > 0$$

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots)$$

Με $0 < \rho < 1$ η άπειρη δυναμοσειρά συγκλίνει και έχουμε τελικά:

$P_0 \left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \Rightarrow P_0 = (1-\rho)$ και επομένως, $P_k = (1-\rho)\rho^k, k > 0$

β) Ο μέσος χρόνος καθυστέρησης, σύμφωνα με τον τύπο του Little είναι:

$$E(T) = \frac{E[n(t)]}{\gamma} = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho}$$

γ) Η πιθανότητα να υπάρξει χρονική στιγμή που θα έχουμε 57 πελάτες στο σύστημα μας είναι ίση με:

$$P_{57} = (1-\rho)\rho^{57}$$

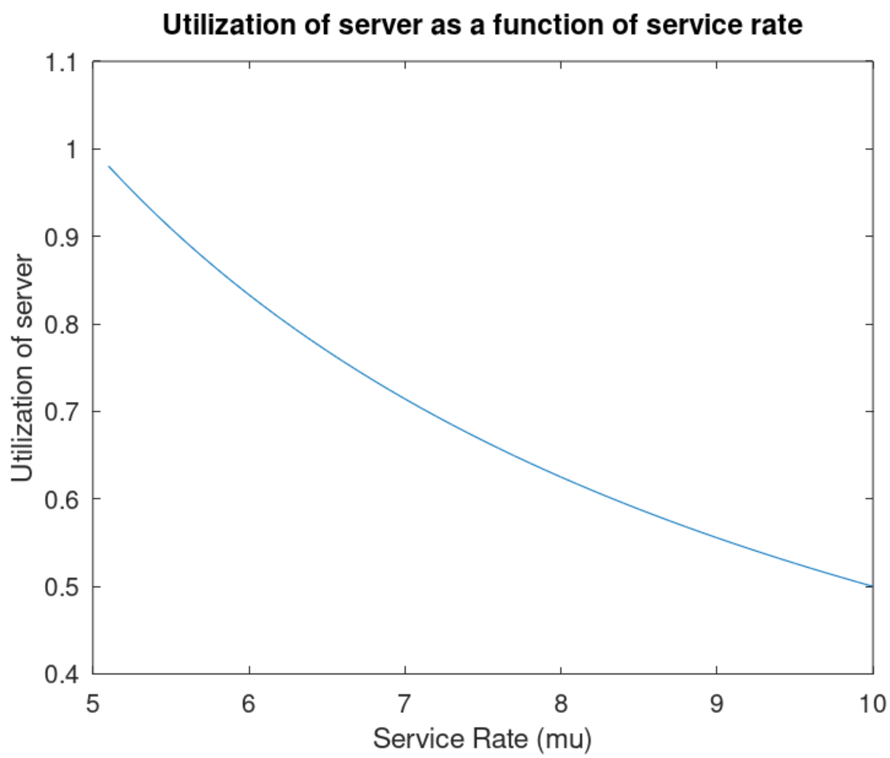
Όμως, αφού $\rho < 1$, τότε το $\rho^{57} \ll 1$ και άρα $P_{57} \ll 1$, κάτι που σημαίνει πως υπάρχει απειροελάχιστη πιθανότητα να υπάρξει χρονική στιγμή με 57 πελάτες στο σύστημα.

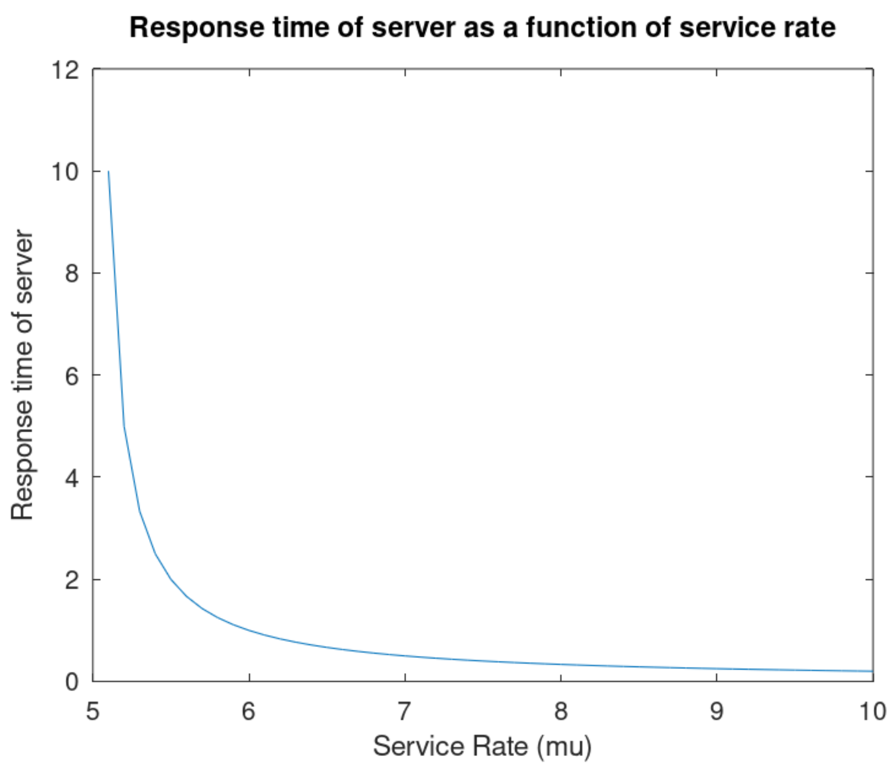
Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave:

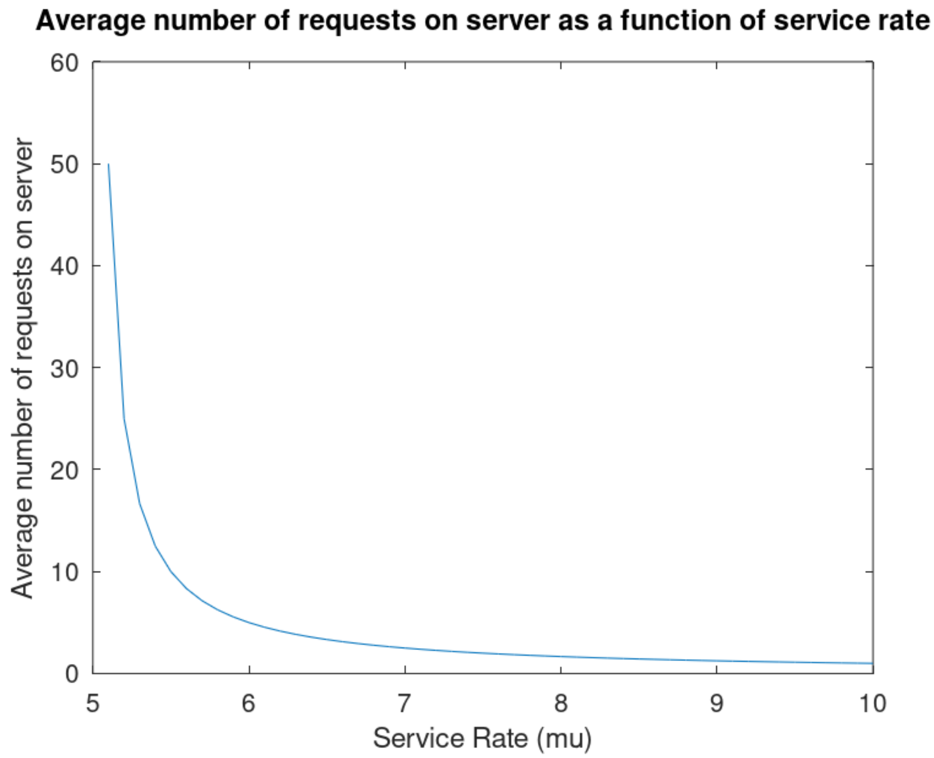
α) Για να είναι εργοδικό το σύστημα πρέπει $\lambda < \mu$, επομένως χρειάζεται $\mu > 5$.

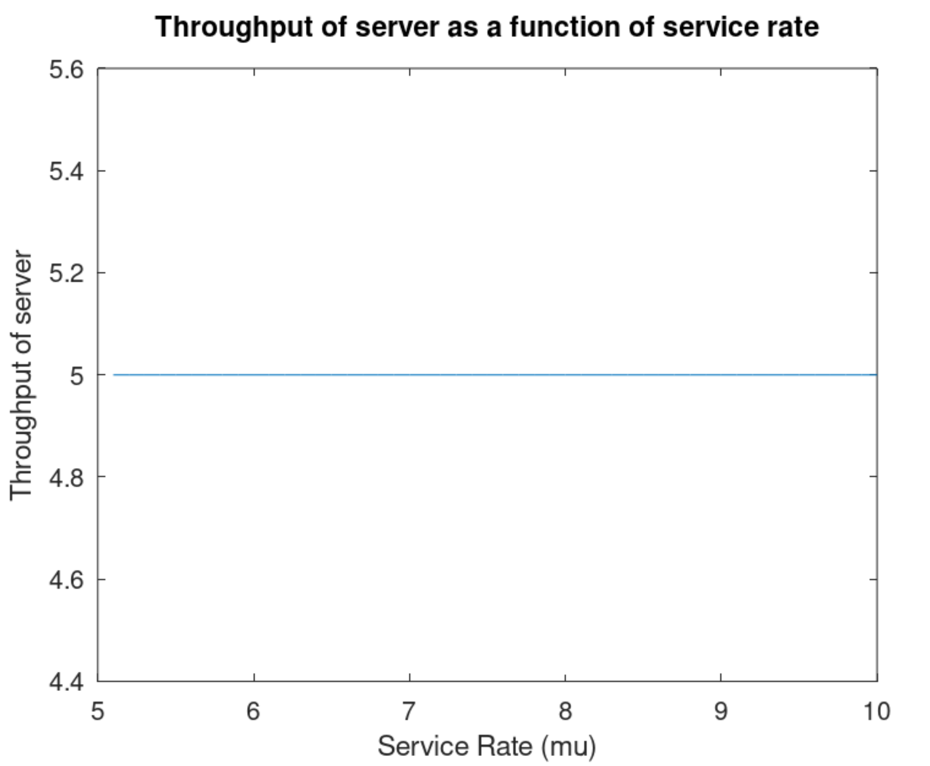
β) Με βάση τον παρακάτω κώδικα υπολογίζουμε τις τιμές για τα ζητούμενα γραφήματα, τα οποία φαίνονται αμέσως μετά.

```
% TASK: Plot the charts of utilization, response time, average number
 of
% customers and throughput for the allowed mu's.

counter = 1;

l = 5;
mu = 5.1:0.1:10;

for i=1:columns(mu)
  [util(i), resp(i), numb(i), through(i)] = qsmm1(l,mu(i));
endfor

figure(counter++);
plot(mu, util);
xlabel("Service Rate (mu)");
ylabel("Utilization of server");
title("Utilization of server as a function of service rate");

figure(counter++);
plot(mu, resp);
xlabel("Service Rate (mu)");
ylabel("Response time of server");
title("Response time of server as a function of service rate");

figure(counter++);
plot(mu, numb);
xlabel("Service Rate (mu)");
ylabel("Average number of requests on server");
title("Average number of requests on server as a function of service
rate");

figure(counter++);
plot(mu, through);
xlabel("Service Rate (mu)");
ylabel("Throughput of server");
title("Throughput of server as a function of service rate");
```


Utilization of server as a function of service rate
Utilization of server
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
5
6
7
8
9
10
Service Rate (mu)


Response time of server as a function of service rate
Response time of server
12
10
8
6
4
2
0
5
6
7
8
9
10
Service Rate (mu)


Average number of requests on server as a function of service rate
Average number of requests on server
Service Rate (mu)
0
10
20
30
40
50
60
5
6
7
8
9
10

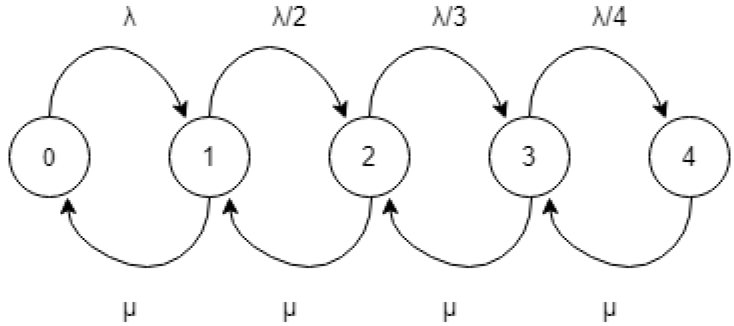

Throughput of server as a function of service rate
Throughput of server
Service Rate (mu)
4.4
4.6
4.8
5
5.2
5.4
5.6
5
6
7
8
9
10

γ) Με βάση το διάγραμμα μέσου χρόνου καθυστέρησης θα διάλεγα $\mu = 8$, καθώς προσφέρει, σε σχέση με το $\mu = 6$ λιγότερη από μισή καθυστέρηση, το οποίο με τη σειρά του προσφέρει ήδη αισθητή μείωση στο χρόνο καθυστέρησης σε σχέση με το προηγούμενο του (φθηνότερο) $\mu = 5$. Θεωρώ πως η καθυστέρηση αυτή φτάνει σε έναν ικανοποιητικό σημείο για την ορθή λειτουργία του εξυπηρετητή με $\mu = 8$, χωρίς να αυξάνεται έντονα το οικονομικό κόστος της επιλογής αυτής, καθώς επίσης και σταθεροποιείται η καθυστέρηση σε αυτές τις τιμές του μ, οπότε αποτελεί την καλύτερη επιλογή.

δ) Σύμφωνα και με το παραπάνω διάγραμμα, το throughput μιας ουράς M/M/1 παραμένει σταθερό, ίσο με το λ (5) και ανεξάρτητο της επιλογής του ρυθμού εξυπηρέτησης, καθώς είναι ουρές απείρου μεγέθους και επομένως χωράνε άπειρο αριθμό πελατών. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τον τύπο ρυθμαπόδοσης για ουρές M/M/1/N: $\gamma = \lambda(1 - P_N) = \lambda(1 - P_B) = \lambda(1 - 0) = \lambda$, αφού έχουμε ουρά απείρου μεγέθους, επομένως και $P_B = 0$.

Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process) - εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K:

α)



Όπου $\lambda = 5$, $\mu = 10$, $\lambda_i = \frac{\lambda}{i+1}$ για $i = 0,1,2,3$ και $\mu_i = \mu$ για $i = 1,2,3,4$.

Για τις εξισώσεις ισορροπίας έχουμε:

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$
$$\lambda_{i-1} P_{i-1} = \mu_i P_i, i = 1,2,3,4$$

Και με τη βοήθεια της Κανονικοποίησης Εργοδικών Πιθανοτήτων:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

Έχουμε επομένως:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_3}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$P_4 = \frac{\lambda_3}{\mu_4} P_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_4}\frac{\lambda_2}{\mu_3}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

Και μέσω της Κανονικοποίησης:

$$P_0 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 + \frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 + \frac{\lambda_2}{\mu_3}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 + \frac{\lambda_3}{\mu_4}\frac{\lambda_2}{\mu_3}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 = 1 \Rightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_3}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_3}{\mu_4}\frac{\lambda_2}{\mu_3}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1}} \Rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{6\mu^3} + \frac{\lambda^4}{24\mu^4}} \Rightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384}} = \frac{1}{1.6484375} \Rightarrow$$

$$P_0 = 0.60663507109 \approx 0.606635$$

$$P_1 = \frac{0.60663507109}{2} = 0.30331753554 \approx 0.303318$$

$$P_2 = \frac{0.60663507109}{8} = 0.07582938388 \approx 0.0758294$$

$$P_3 = \frac{0.60663507109}{48} = 0.01263823064 \approx 0.0126382$$

$$P_4 = \frac{0.60663507109}{384} = 0.00157977883 \approx 0.00157978$$

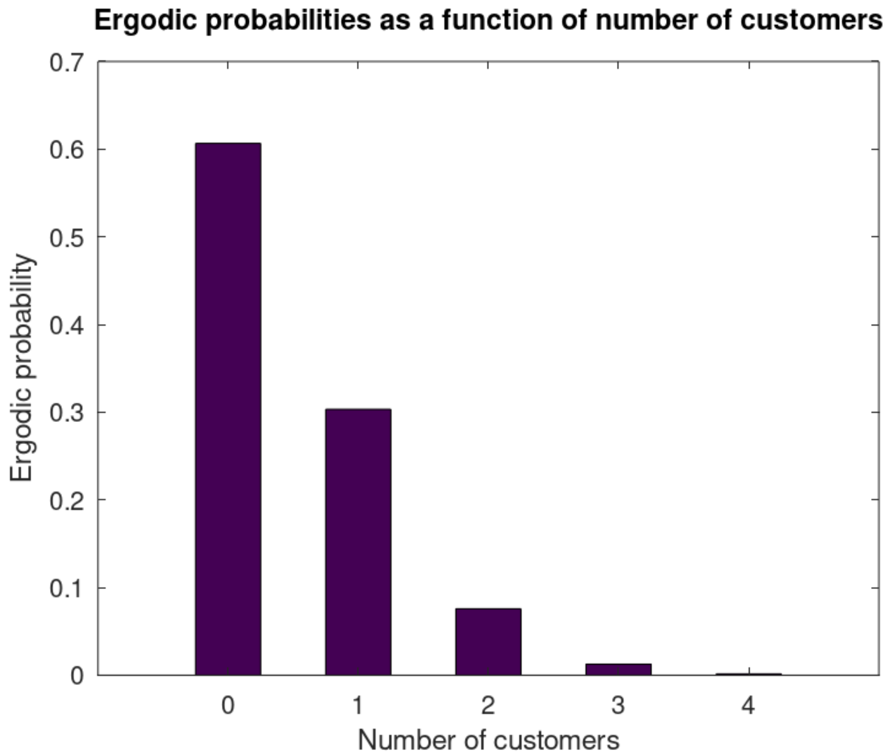
$$P_B = P_4 \approx 0.00157978$$

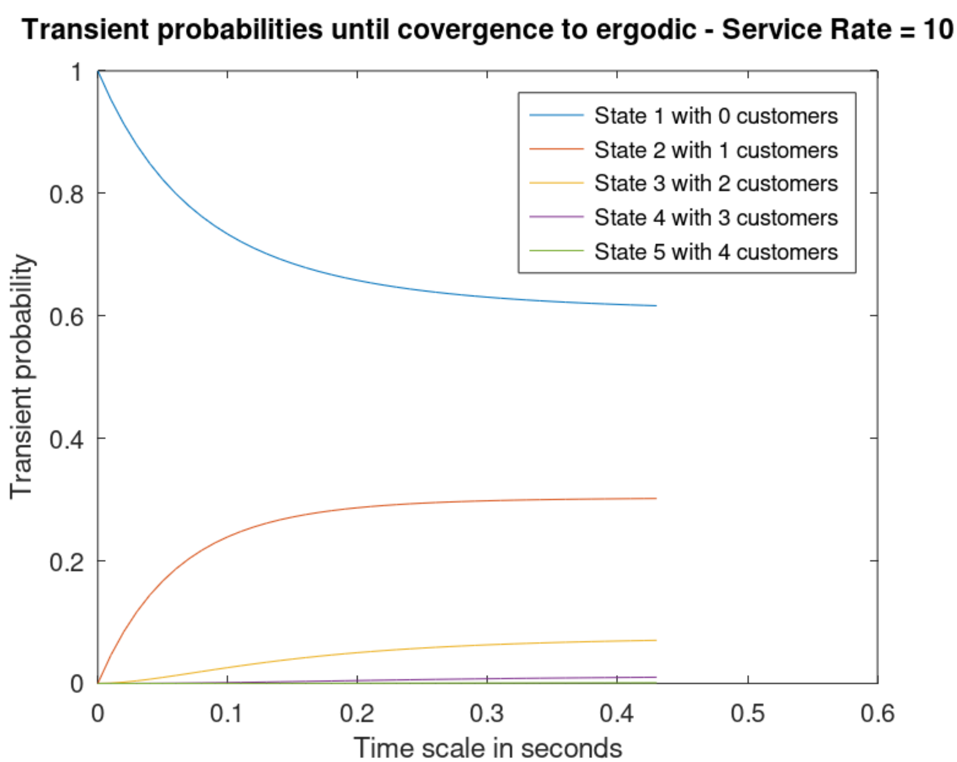
β) Παρακάτω παρατίθεται ο κώδικας για την επίλυση όλων των ερωτημάτων και έπειτα τα αποτελέσματα κάθε ερωτήματος χωριστά, μαζί με τα διαγράμματα και συμπεράσματα – σχόλια τους.

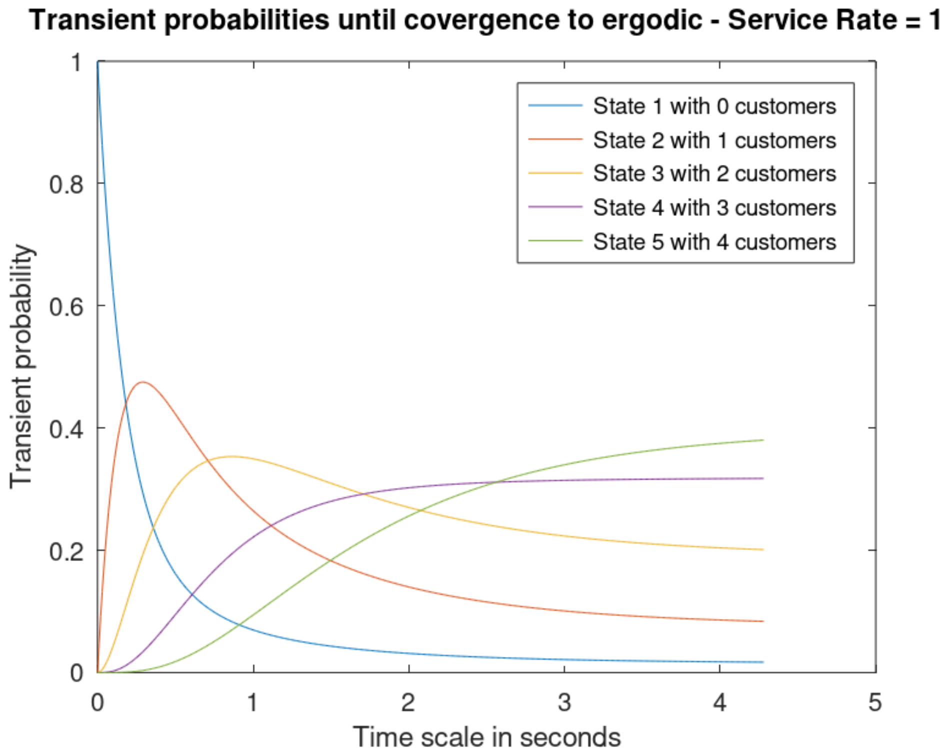
```
% TASK: Simulate an M/M/1/4 system.
counter = 1;

l = 5;
mu = 10;

% System with 4 customers at most, therefore 5 states.
states = [0, 1, 2, 3, 4];

% The system is initially empty.
initial_state = [1, 0, 0, 0, 0];

% Define the birth and death rates between the states of the system.
births_B = [l, l/2, l/3, l/4];
deaths_D = [mu, mu, mu, mu];

% (i) Get the transition matrix of the birth-death process.
transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);
printf("The transition matrix of the system is: \n");
disp(transition_matrix);

% (ii) Get the ergodic probabilities of the system and plot the bar f
or bar chart.
P = ctmc(transition_matrix);
printf("\nThe ergodic probabilities of the system are: \n");
ergodicP = sprintf("%d  ", P);
printf("%s \n", ergodicP);

figure(counter++);
bar(states, P, 0.5);
xlabel("Number of customers");
ylabel("Ergodic probability");
title("Ergodic probabilities as a function of number of customers");

% (iii) Get the average number of customers on stationary state.
average = 0;
for i=1:4;
  average += i*P(i+1);
endfor
```

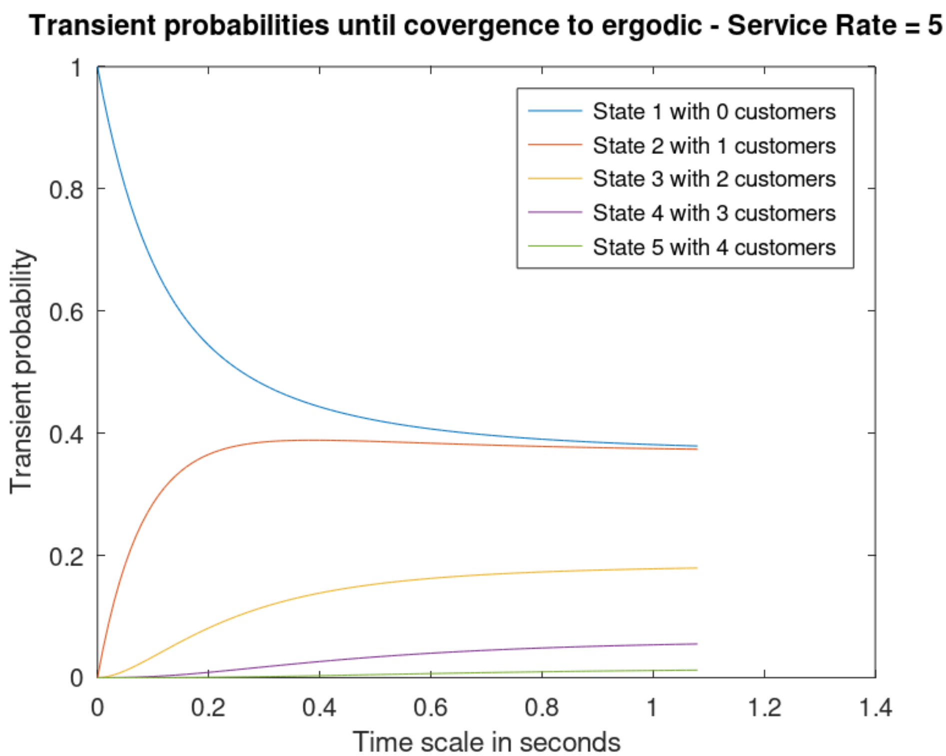
```
printf("\nThe average number of customers on stationary state is: %d.
 \n", average);

% (iv) Get the blocking probability.
blocking_probability = P(end);
printf("\nThe blocking probability of the system is: %d. \n", blockin
g_probability);

% (v) Transient probability of all the states until they converge to
their ergodic probability.
% Convergence takes place when Prob and P differ by 0.01.
index = 0;
for T = 0:0.01:50
  index++;
  Prob = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
  Prob1(index) = Prob(1);
  Prob2(index) = Prob(2);
  Prob3(index) = Prob(3);
  Prob4(index) = Prob(4);
  Prob5(index) = Prob(5);
  if Prob - P < 0.01
    break;
  endif
endfor

T = 0:0.01:T;
figure(counter++);
plot(T, Prob1, T, Prob2, T, Prob3, T, Prob4, T, Prob5);
xlabel("Time scale in seconds");
ylabel("Transient probability");
title(sprintf("Transient probabilities until covergence to ergodic -
Service Rate = %d", mu));
legend("State 1 with 0 customers", "State 2 with 1 customers", "State
 3 with 2 customers", "State 4 with 3 customers", "State 5 with 4 cus
tomers");

% (vi) Repeat the (v) part with different mu values.
mu = [1, 5, 20];

for i=1:columns(mu)
  deaths_D = [mu(i), mu(i), mu(i), mu(i)];
  transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);
```

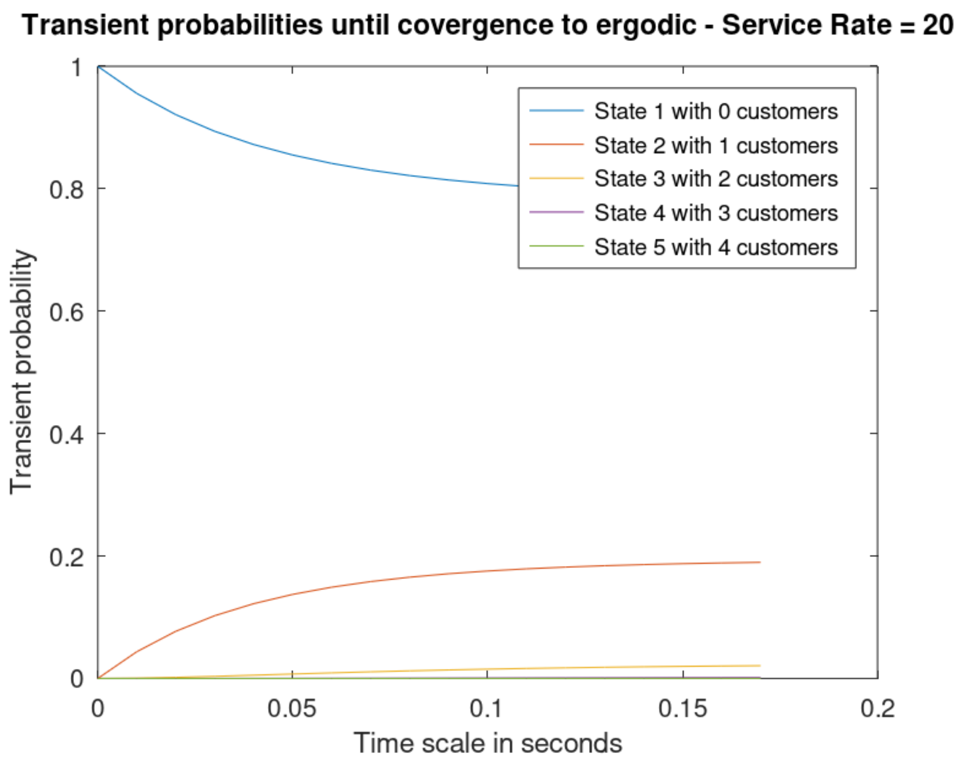
```
  P = ctmc(transition_matrix);

  Prob1 = [0];
  Prob2 = [0];
  Prob3 = [0];
  Prob4 = [0];
  Prob5 = [0];
  index = 0;
  for T = 0:0.01:50
    index++;
    Prob = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
    Prob1(index) = Prob(1);
    Prob2(index) = Prob(2);
    Prob3(index) = Prob(3);
    Prob4(index) = Prob(4);
    Prob5(index) = Prob(5);
    if Prob - P < 0.01
      break;
    endif
  endfor

  T = 0:0.01:T;
  figure(counter++);
  plot(T, Prob1, T, Prob2, T, Prob3, T, Prob4, T, Prob5);
  xlabel("Time scale in seconds");
  ylabel("Transient probability");
  title(sprintf("Transient probabilities until covergence to ergodic
- Service Rate = %d", mu(i)));
  legend("State 1 with 0 customers", "State 2 with 1 customers", "Sta
te 3 with 2 customers", "State 4 with 3 customers", "State 5 with 4 c
ustomers");
endfor
```


Ergodic probabilities as a function of number of customers
Ergodic probability
Number of customers
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4


Transient probabilities until covergence to ergodic - Service Rate = 10
Transient probability
Time scale in seconds
State 1 with 0 customers
State 2 with 1 customers
State 3 with 2 customers
State 4 with 3 customers
State 5 with 4 customers
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6


Transient probabilities until covergence to ergodic - Service Rate = 1
State 1 with 0 customers
State 2 with 1 customers
State 3 with 2 customers
State 4 with 3 customers
State 5 with 4 customers
Transient probability
Time scale in seconds
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
1
2
3
4
5


Transient probabilities until covergence to ergodic - Service Rate = 5
State 1 with 0 customers
State 2 with 1 customers
State 3 with 2 customers
State 4 with 3 customers
State 5 with 4 customers
Transient probability
Time scale in seconds
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4




```
The transition matrix of the system is:
   -5.0000    5.0000         0         0         0
   10.0000  -12.5000    2.5000         0         0
         0   10.0000  -11.6667    1.6667         0
         0         0   10.0000  -11.2500    1.2500
         0         0         0   10.0000  -10.0000

The ergodic probabilities of the system are:
0.606635  0.303318  0.0758294  0.0126382  0.00157978

The average number of customers on stationary state is: 0.49921.

The blocking probability of the system is: 0.00157978.
```

i) Βλέπουμε ακριβώς παραπάνω τις τιμές της μήτρας ρυθμού μεταβάσεων.

ii) Στο πρώτο διάγραμμα που παρατίθεται βλέπουμε το bar to bar chart των εργοδικών πιθανοτήτων, καθώς και στο τελευταίο διάγραμμα που αποτελεί το μήνυμα που τυπώνει το πρόγραμμα μας. Παρατηρούμε ότι βγαίνουν ίσες με αυτές που έχουμε υπολογίσει στο ερώτημα (α).

iii) Υπολογίζουμε και εκτυπώνουμε τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα μέσω του αθροίσματος $\sum_1^k kP_k$ και βγαίνει ίσος με 0.49921 όπως φαίνεται και στο μήνυμα που εκτυπώνεται από το πρόγραμμα μας (τελευταίο διάγραμμα).

iv) Η πιθανότητα απόρριψης πελάτη (blocking probability) είναι ίση με την εργοδική πιθανότητα της τελευταίας κατάστασης του συστήματος μας, η οποία έχει υπολογιστεί ίση με $P_B = P_4 = 0.00157978$.

v) Σύμφωνα και με τον κώδικα του προγράμματος δημιουργούμε τη γραφική παράσταση (δεύτερο διάγραμμα) για $\mu = 10$, όπου βλέπουμε την εξέλιξη των πιθανοτήτων του συστήματος μέχρι αυτές να συγκλίνουν με 1% απόκλιση στις αντίστοιχες εργοδικές.

vi) Σε αυτό το ερώτημα επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία του ερωτήματος (v) για διάφορες τιμές του μ, συγκεκριμένα $\mu = 1, \mu = 5, \mu = 20$. Αυτό που παρατηρούμε είναι πως όσο αυξάνεται το μ, επομένως όσο μειώνεται ο λόγος $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, τόσο εντονότερα οι πιθανότητες του συστήματος συγκλίνουν στην αρχική κατάσταση του συστήματος. Επιπλέον, όσο αυξάνεται το μ, δηλαδή ο ρυθμός εξυπηρέτησης, τόσο πιο γρήγορα το σύστημα μας συγκλίνει μέχρι να έχει 1% απόκλιση από τις εργοδικές πιθανότητες.