ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής
Σήματα και Συστήματα

2η Σειρά Ασκήσεων (2019-20)

Οι λύσεις υποβάλλονται **ηλεκτρονικά** μέσω της ιστοσελίδας του μαθήματος στο mycourses.ntua.gr.
Πρέπει να υποβληθεί **ένα και μόνο** αρχείο σε μορφή **pdf**.
Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι **ατομικές**.
Προσθεμία υποβολής: **11-02-2020**.

Άσκηση 1

Θεωρούμε ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου με σήματα εισόδου $x_c(t)$ και σήματα εξόδου $y_c(t)$. Για να υλοποιήσουμε αυτό το σύστημα ψηφιακά, χρησιμοποιούμε τα εξής τρία στάδια:

- Δειγματοληψία του $x_c(t)$ και μετατροπή του σε σήμα διακριτού χρόνου $x_d[n]$.
- Ψηφιακή επεξεργασία του $x_d[n]$ από ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου που παράγει ως έξοδο το διακριτό σήμα $y_d[n]$.
- Μετατροπή του $y_d[n]$ σε συνεχές σήμα $y_c(t)$ με πλήρη ανακατασκευή (παρεμβολή) συνεχούς από διακριτό (όπως προβλέπει το θεώρημα δειγματοληψίας).

Θεωρούμε ότι όλα τα σήματα συνεχούς χρόνου στην είσοδο έχουν πεπερασμένο εύρος ζώνης. Δηλ., $X_c(\omega) = 0$ για $|\omega| \geq \pi/T_s$. Επίσης η δειγματοληψία τους γίνεται με συχνότητα $\omega_s = 2\pi/T_s$.
Εστω ότι, η απόκριση συχνότητας του διακριτού συστήματος ισούται με

$$H_d(\Omega) = j\frac{\Omega}{T_s}, \quad |\Omega| < \pi,$$

και $H_d(\Omega) = H_d(\Omega + 2\pi)$.
(α) Να βρείτε αναλυτικά την κρουστική απόκριση $h_d[n]$ του συστήματος διακριτού χρόνου.
(β) Να βρείτε την σχέση εισόδου-εξόδου στο πεδίο του χρόνου για το ενδιάμεσο διακριτό σύστημα $x_d[n] \mapsto y_d[n]$ καθώς και για το συνολικό συνεχές σύστημα $x_c(t) \mapsto y_c(t)$ και να εξηγήσετε τι είδος επεξεργασίας

εκτελούν τα δύο αυτά συστήματα.

Επιπρόσθετα, αν το συνεχές σήμα εισόδου ισούται με

$$x_c(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}$$

(γ) Να βρείτε αναλυτικά το διακριτό σήμα εξόδου $y_d[n]$.
(δ) Να βρείτε αναλυτικά το συνεχές σήμα εξόδου $y_c(t)$.

Σε όλα τα ερωτήματα να εξηγήσετε την εργασία και αποτελέσματα σας.

Άσκηση 2

Θεωρείστε ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x[n] = (\frac{1}{2})^n u(n)$ και αρχικές συνθήκες $y(-1) = 0.75$ και $y(-2) = 0.25$, του οποίου η είσοδος $x[n]$ και η έξοδος $y[n]$ συνδέονται μέσω της παρακάτω εξίσωσης διαφορών:

$$y(n) = y(n-1) - y(n-2) + \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1). \tag{1}$$

(α) Να βρεθεί αναλυτικά η έξοδος $y[n]$ του συστήματος λύνοντας την εξίσωση διαφορών στο πεδίο του χρόνου.

(β) Να βρεθεί αναλυτικά η έξοδος $y[n]$ του συστήματος λύνοντας την εξίσωση διαφορών στο πεδίο της συχνότητας.

(γ) Προσδιορίστε την απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ για το σύστημα και διακρίνετε την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης.

(δ) Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(n)$ του συστήματος.

Άσκηση 3

Υπολογίστε τον μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ για τα ακόλουθα σήματα. Βρείτε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών, την αντίστοιχη περιοχή σύγλισης και δείξτε αν υπάρχει ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT):

(α) $x[n] = \begin{cases} \sum_{k=-n}^{n} a^{|k|}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \qquad |a| < 1$

(β) $x[n] = 2^n u[n] + 3(\frac{1}{2})^n u[n]$

(γ) $x[n] = (\frac{1}{3})^n \cos(n\omega_0) u[n]$

(δ) $x[n] = -(2)^n u[-n-1]$

(ε) $x[n] = [(\frac{1}{2})^n + (\frac{3}{4})^n] u[n-10]$

Άσκηση 4

Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ για κάθεναν από τους ακόλουθους μετασχηματισμούς $\mathcal{Z}$ και τις αντίστοιχες περιοχές σύγκλισης:

(α) $X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-z^{-2})}, \quad |z| > 1$

(β) $X(z) = \log(1 - \frac{1}{2}z^{-1}), \quad |z| > \frac{1}{2}$

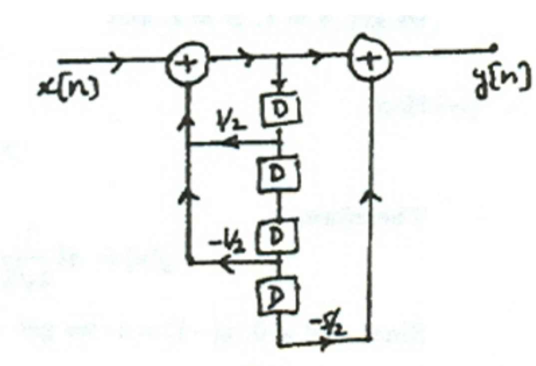
(γ) $X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$

(δ) $X(z) = \frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}, \quad |z| > 2$

(ε) $X(z) = \frac{3-\frac{5}{6}z^{-}1}{(1-1/4z^{-}1)(1-1/3z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{3}$

Άσκηση 5

Θεωρείστε την παρακάτω διαγραμματική παράσταση ενός συστήματος.



1. Βρείτε τη συνάρτηση που συσχετίζει το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της εισόδου $x[n]$ και της εξόδου $y[n]$.
2. Γράψτε την εξίσωση διαφορών του συστήματος.

Άσκηση 6

Για τα σήματα διακριτού χρόνου $x[n]$ υπολογίστε τον Διακριτού-Χρόνου Fourier Μετ/σμό τους:

(α) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} u[-n-2]$

(β) $x[n] = (n+1)\left(\frac{1}{7}\right)^{n} u[n]$

Αντίστοιχα, υπολογίστε τα σήματα $x[n]$ από τους αντίστοιχους Διακριτού-Χρόνου Μετ/σμούς Fourier (DTFT) τους $X(\Omega)$:

(γ) $X(\Omega) = \begin{cases} -j, & 0 < \Omega \leq \pi \\ j, & -\pi \leq \Omega \leq 0 \end{cases}$

(δ) $X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta\left(\Omega - \frac{\pi k}{2}\right)$

Άσκηση 7

Ερώτημα 7(α)

Βρείτε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) της ακολουθίας:

$$x(n) = \cos(n\Omega_0), 0 \leq n \leq N-1 \tag{2}$$

Συγκρίνετε τις τιμές των συντελεστών DFT $X[k]$ όταν $\Omega_0 = 2\pi k_0/N$ με τις αντίστοιχες τιμές όταν $\Omega_0 \neq 2\pi k_0/N$. Εξηγείστε τη διαφορά, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση μεταξύ $X[k]$ και του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) $X(\Omega)$.

Ερώτημα 7(β)

Να υπολογιστεί ο DFT N-σημείων των παρακάτω σημάτων:

(α) $x[n] = 4 + \cos^2(\frac{2\pi n}{N})$, όπου $n = 0, 1, ..., N-1$

(β) $x[n] = a^n$, όπου $0 \leq n < N$

(γ) $x[n] = u[n] - u[n - n_0]$, όπου $0 < n_0 < N$