Ε.Μ.Π. Σχολή Η.Μ.&Μ.Υ. Σήματα και Συστήματα Ακαδ. έτος: 2019-2020

Ημερομηνία 22-12-2019 <u>***1η Σειρά Ασκήσεων***</u> Παραδοτέα: 15-01-2020

Οι λύσεις της πρώτης σειράς ασκήσεων θα παραδίδονται **<u>ηλεκτρονικά</u>** και **<u>θα υποβάλλονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο mycourses.ntua.gr</u>** (**<u>μέχρι και τις 15-01-2020</u>**). Αρκεί η χειρόγραφη επίλυση των ασκήσεων και η ηλεκτρονική υποβολή **<u>ενός μοναδικού αρχείου .pdf</u>** με σκαναρισμένα αντίγραφα όλων των σελίδων των χειρόγραφων λύσεων.

Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι **<u>ατομικές</u>**.

<u>Παρατήρηση</u>: Σε όλες τις ασκήσεις ισχύει: $a = AM \bmod 10 + 1$, όπου AM ο αριθμός μητρώου σας.

<u>Άσκηση 1.1.</u>

Δίδεται το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t) = \begin{cases} t+4a, & -4a \le t < -2a \\ -2a, & -2a \le t < a \\ -3t+5a, & a \le t < 3a \\ 4t-20a, & 3a \le t < 4a \\ -4t+18a, & 4a \le t < 6a \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$. Ζητείται να σχεδιαστεί το $x(t)$ και ακολούθως να σχεδιαστούν τα παρακάτω σήματα:

(α) $x_1(t) = x(t-2a)$

(β) $x_2(t) = x(-3t+a)$

(γ) $x_3(t) = -ax\left(\frac{t}{2}\right) - 5a$

(δ) $x_4(t) = x(-t+2a) - x(t-2a)$

Ζητείται να γίνουν αναλυτικά οι επιμέρους στοιχειώδεις μετατροπές του σήματος $x(t)$, ώστε να προκύψουν τα σήματα $x_i(t),\ i = 1,2,3,4$.

<u>Άσκηση 1.2.</u>

Δίδονται τα ακόλουθα σήματα:

(α) $x_1(t) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right]^{a \bmod 4} + \left[\sin\left(\frac{\pi}{5a}t\right)\right]^{4 - a \bmod 4} + \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2a}t\right)$

(β) $x_2(t) = \exp\left[j\frac{\pi}{a}t + 3\right] - \exp[ja\pi t - 7]$

(γ) $x_3[n] = \sum_{k=1}^{4} \exp\left(j \frac{\pi}{[k \bmod a]+1} n \right)$

(δ) $x_5[n] = \sin\left(\frac{a\pi}{2} + \frac{a\pi}{15} n^3 \right)$

Ζητείται να αποφανθείτε σχετικά με την περιοδικότητα ή όχι των σημάτων αυτών αιτιολογώντας επαρκώς τις απαντήσεις σας και για τις περιπτώσεις περιοδικών σημάτων, να υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδός τους.

<u>Άσκηση 1.3.</u>

Δίδονται οι αποκρίσεις $y(t)$ (ή $y[n]$) συστημάτων συνεχούς (ή διακριτού) χρόνου σε εισόδους $x(t)$ (ή $x[n]$), οι οποίες έχουν ως ακολούθως:

(α) $y(t) = \int_{-t}^{t} [a x(\tau) + a] d\tau$

(β) $y(t) = x(t+a) * u(t)$

(γ) $y[n] = \sum_{k=n-a}^{n+a} [x[ak]]$

(δ) $y[n] = x[n-a] \cdot x[a-n]$

Ζητείται να αποφανθείτε σχετικά με τη γραμμικότητα, το χρονικά αναλλοίωτο, τη μνήμη, την αιτιατότητα και την ευστάθεια (κατά την έννοια BIBO) ή όχι των συστημάτων αυτών αιτιολογώντας επαρκώς τις απαντήσεις σας.

<u>Άσκηση 1.4.</u>

Δίδονται τα παρακάτω σήματα:

$x[n] = (n \bmod 3 + 1)[u[n+a+2] - u[n+a-7]]$

$h_1[n] = \cos\left(\frac{a\pi}{4} n \right) \cdot u[n]$

$h_2[n] = n \cdot u[n + a \bmod 4] - n \cdot u[n + a \bmod 4 - 7] + \delta[n-a]$

$h_3[n] = \sum_{k=-n-a}^{n+a} (-1)^{a+k} \delta[k]$

$h_4[n] = b^n u[n]$, όπου $0 < b < 1$

$h_5[n] = h_3[n] * h_4[n]$

Αφού σχεδιαστούν τα δεδομένα σήματα $x[n]$ και $h_i[n]$, ζητείται να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν τα σήματα $y_i[n] = x[n] * h_i[n]$, $i = 1,2,3$, καθώς και το σήμα $h_5[n]$ χρησιμοποιώντας διαφορετική μέθοδο υπολογισμού για κάθε απαιτούμενη συνέλιξη.

Άσκηση 1.5.

Δίδεται Γραμμικό και Χρονικά Αναλλοίωτο σύστημα S_1 με κρουστική απόκριση $h_1(t) = 2au(t+a) - 2au(t+a-5)$, το οποίο συνδέεται σε σειρά με Γραμμικό και Χρονικά Αναλλοίωτο σύστημα S_2 που έχει κρουστική απόκριση $h_2(t) = u(t+2) - u(t-2)$. Στην είσοδο του συστήματος S_1 εφαρμόζεται διέγερση $x(t) = a \cdot u(at+10) - a \cdot u(at-10) + \delta(t-a)$. Ζητείται να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν τα σήματα εξόδου $y_1(t)$ και $y_2(t)$ των συστημάτων S_1 και S_2 αντιστοίχως.

Άσκηση 1.6.

(α) Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $x(t)$, το οποίο έχει θεμελιώδη περίοδο $T = 2a + 4$ και για το οποίο ισχύει: $x(t) = \begin{cases} a, & 0 \le t \le a+2 \\ 0, & -a-2 < t < 0 \end{cases}$. Αφού σχεδιαστεί το σήμα στο πεδίο του χρόνου, να υπολογιστούν οι συντελεστές c_m του αναπτύγματος του σήματος αυτού σε μιγαδική σειρά Fourier και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $|c_m|$.

(β) Έστω περιοδικά σήματα $x(t)$ και $y(t)$ με θεμελιώδεις περιόδους T, τα οποία έχουν συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier ίσους με c_m^x και c_m^y αντιστοίχως. Να αποδειχθεί το ακόλουθο:

$$\frac{1}{T}\int_T \left[x(t) \cdot y^*(t)\right] dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[c_m^x \cdot \left(c_m^y\right)^*\right]$$

(γ) Δίνονται τρία σήματα συνεχούς χρόνου: $x_1(t) = 2\cos(10\pi t + 0.6\pi)$, $x_2(t) = 0{,}5\cos(10\pi t + 0.3\pi)$ και $x_3(t) = 4\sin(10\pi t - 0.8\pi)$. Ζητείται να υπολογιστεί το άθροισμά τους $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ και να εκφραστεί στην μορφή $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, υπολογίζοντας τα A, ω_0, φ, χρησιμοποιώντας φασισθέτες (phasors).

Άσκηση 1.7.

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier των παρακάτω σημάτων συνεχούς χρόνου:

(α) $x_1(t) = t \cdot e^{at} \cdot \sin(at) \cdot u(-t)$

(β) $x_2(t)=\dfrac{t}{a^2+t^2}$

(γ) $x_3(t)=a\cdot rect\left(\dfrac{t}{4a}\right)*\left[\delta(t+2a)+2\delta(t)+\delta(t-2a)\right]$

Ακολούθως, υπολογίστε τα σήματα συνεχούς χρόνου, τα οποία αντιστοιχούν στους παρακάτω μετασχηματισμούς Fourier:

(δ) $X_4(\omega)=\dfrac{a+j\omega}{4a^2+(a+j\omega)^2}$

(ε) $X_5(\omega)=\dfrac{1}{(a+j\omega)^n}$, $n\in Z^+$

(στ) $X_6(\omega)=\dfrac{11a}{-3\omega^2+j13a\omega+4a^2}$

<u>Άσκηση 1.8.</u>

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier (DTFT) των παρακάτω σημάτων διακριτού χρόνου:

(α) $x_1[n]=n\cdot 3^{-|n-a|}$

(β) $x_2[n]=\sum_{k=-N}^{N}(N+1-|k|)\cdot\delta[k]$, $N=4a$

Ακολούθως, υπολογίστε τα σήματα διακριτού χρόνου, τα οποία αντιστοιχούν στους παρακάτω μετασχηματισμούς Fourier (DTFT):

(γ) $X_3(\Omega)=|\sin(\Omega)|$

(δ) $X_4(\Omega)=\begin{cases} a, & \dfrac{1}{(a\bmod 3)+2}<|\Omega|<1 \\ 0, & |\Omega|\le\dfrac{1}{(a\bmod 3)+2}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ 1\le|\Omega|\le\pi \end{cases}$

(ε) Δίδεται ένα αιτιατό, Γραμμικό και Χρονικά Αναλλοίωτο σύστημα διακριτού χρόνου, το οποίο περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

$$6y[n]-5y[n-1]+y[n-2]=6x[n]$$

όπου $x[n]$ το σήμα που εφαρμόζεται στην είσοδό του και $y[n]$ το σήμα που παρατηρείται στην έξοδό του. Ζητείται να υπολογιστούν τα ακόλουθα: (i) η απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ του συστήματος αυτού, (ii) η απόκριση μοναδιαίου παλμού $h[n]$ αυτού, (iii) η έξοδος $y_1[n]$ αυτού όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί είσοδος $x_1[n]=\delta[n]-\dfrac{1}{3}\delta[n-1]$ και (iv) η έξοδος $y_2[n]$ αυτού όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί είσοδος $x_2[n]=e^{j\pi n}$.

Άσκηση 1.9.

(α) Δίδεται Γραμμικό και Χρονικά Αναλλοίωτο σύστημα συνεχούς χρόνου, με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$, το οποίο περιγράφεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$2y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+2\frac{d^2}{dt^2}y(t)=x(t)-\frac{d}{dt}x(t).$$

Ζητείται να εκτελεστούν τα ακόλουθα:

(α) υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας $H(\omega)$ του συστήματος $H(\omega)=\dfrac{1-j\omega}{2+5j\omega+2(j\omega)^2}$,

(β) υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του συστήματος και

(γ) υπολογισμός του σήματος $x(t)$ που πρέπει να εφαρμοστεί στην είσοδο του συστήματος, ώστε να έχουμε απόκριση $y(t)=e^{-3t}u(t-1)$.

Άσκηση 1.10.

(α) Δίδονται τα ακόλουθα σήματα συνεχούς χρόνου: $x_1(t)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{a+2}t\right)}{\pi t}$ και $x_2(t)=\left[\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{a+3}t\right)}{\pi t}\right]^2$. Να υπολογιστεί η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα, ώστε να είναι δυνατή η ανακατασκευή αυτών βάσει των δειγμάτων τους και να σχεδιαστούν τα φάσματά αυτών: (i) $x_1(t)+x_2(t)$, (ii) $x_1(t)\cdot x_2(t)$ και (iii) $[x_1(t)]^2*[x_1(t)\cdot x_2(t)]$. Τέλος, σχεδιάστε σύστημα, το οποίο κάνει δειγματοληψία του σήματος εισόδου του $x_1(t)+x_2(t)$ και το μετατρέπει σε σήμα $x_d[n]=x_1(nT_S)+x_2(nT_S)$ διακριτού χρόνου, θεωρώντας ότι η δειγματοληψία γίνεται με την ελάχιστη συχνότητα που επιτρέπει την ανακατασκευή αυτού του σήματος εισόδου.

(β) Έστω ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου, το οποίο έχει απόκριση συχνότητας $H_d(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\left(u(\Omega+\pi)+u\left(\Omega+\dfrac{\pi}{a+1}\right)-u\left(\Omega-\dfrac{\pi}{a+1}\right)-u(\Omega-\pi)\right)*\delta(\Omega-2k\pi)\right]$. Στο σύστημα αυτό εφαρμόζεται σήμα εισόδου $x_d[n]$, το οποίο έχει προκύψει από δειγματοληψία του σήματος $x_c(t)$ συνεχούς χρόνου που έχει φάσμα βαθυπερατό τριγωνικό παλμό εύρους ζώνης $(a+1)\cdot W$ και μοναδιαίου πλάτους, οπότε παράγεται σήμα εξόδου $y_d[n]$. Ζητούνται τα ακόλουθα: (i) να σχεδιαστεί η απόκριση συχνότητας $H_d(\Omega)$ και να υπολογιστεί η απόκριση μοναδιαίου παλμού $h_d[n]$ αυτού, (ii) να υπολογιστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T_s}$, η οποία επιτρέπει την ανακατασκευή του σήματος $x_c(t)$ και (iii) να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν τα **φάσματα** των σημάτων: $x_c(t)$, $x_s(t) = x_c(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$, $x_d[n] = x_c(nT_s)$, $y_d[n]$ και να σημειωθούν στους άξονες οι τιμές των κρίσιμων σημείων. Να επεξηγηθεί πώς προκύπτουν τα φάσματα αυτών.

Σε όλα τα παραπάνω ερωτήματα να γίνουν αναλυτικά οι υπολογισμοί και να αιτιολογηθεί η εργασία και τα αποτελέσματά σας.