1

1η Σειρά Ασκήσεων: Σήματα και Συστήματα

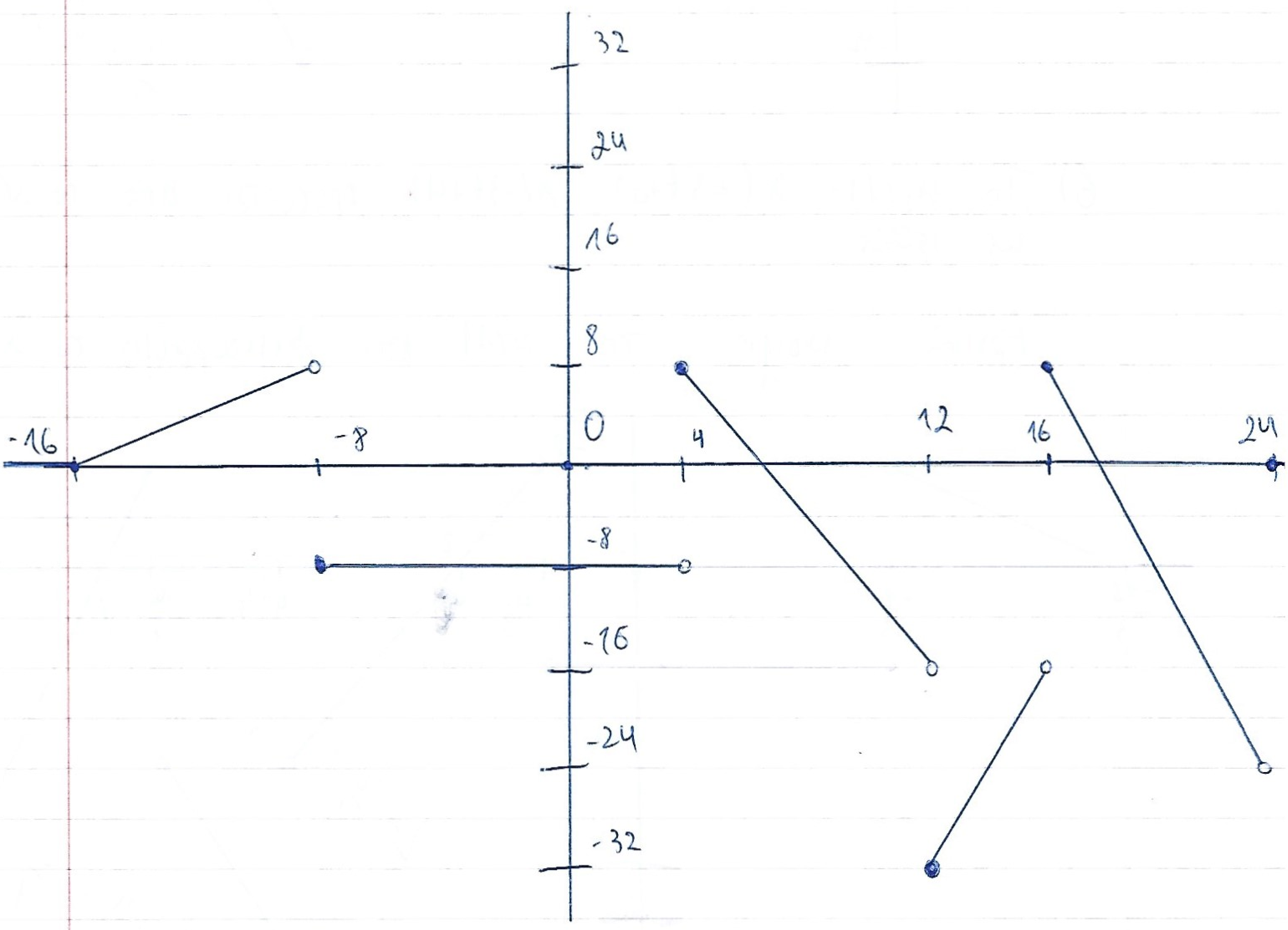
Γεώργιος Κυριακόπουλος - el18153 (a = 4)

Άσκηση 1.1:

$$x(t) = \begin{cases} t + 16 & , \quad -16 \le t < -8 \\ -8 & , \quad -8 \le t < 4 \\ -3t + 20 & , \quad 4 \le t < 12 \\ 4t - 80 & , \quad 12 \le t < 16 \\ -4t + 72 & , \quad 16 \le t < 24 \\ 0 & , \quad \text{αλλού} \end{cases}$$

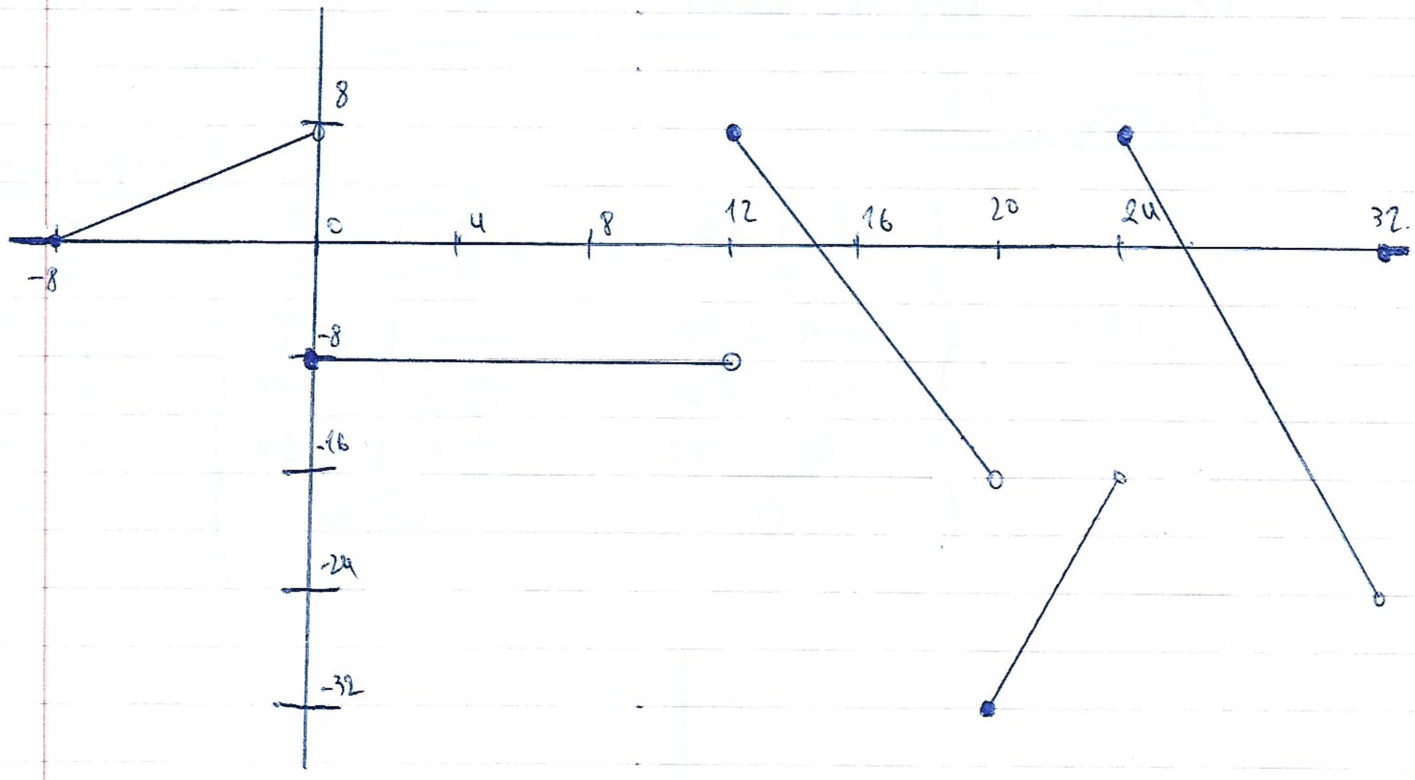
Τιμές στα άκρα:

0 , 8
-8 , -8
8 , -16
-32 , -16
8 , -24
0



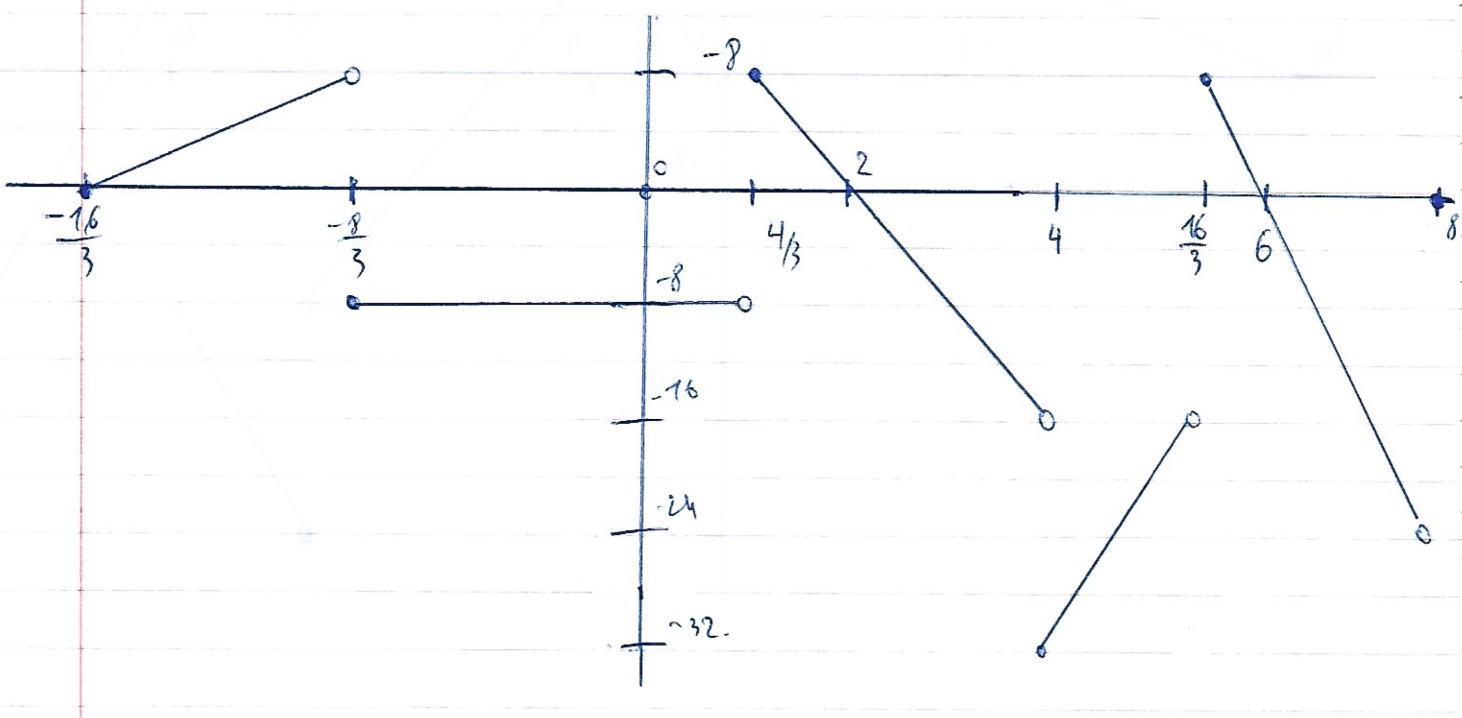
②

α) Το $x_1(t) = x(t-2a) = x(t-8)$ προκύπτει από το $x(t)$ με δεξιά μετατόπιση κατά 8 μονάδες.

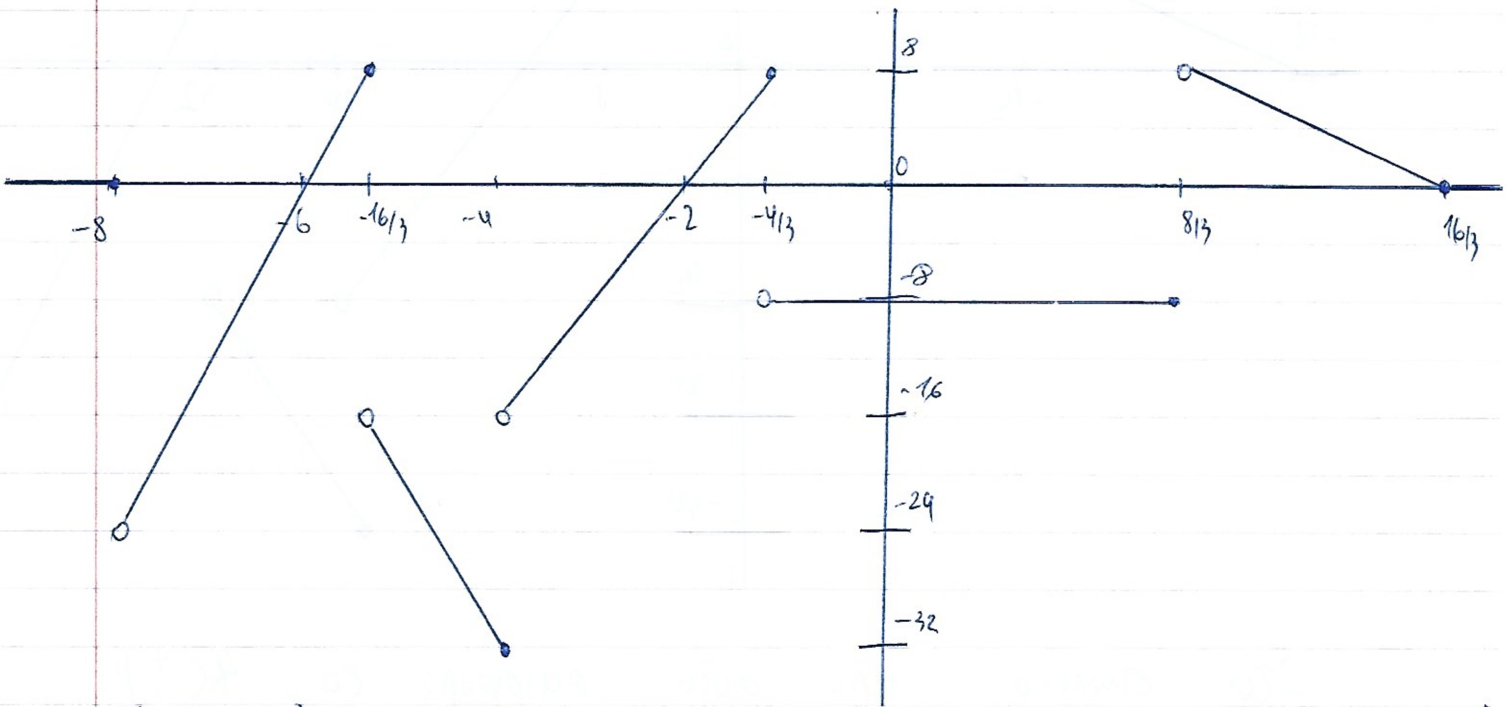


β) Το $x_2(t) = x(-3t+a) = x(-3t+4)$ προκύπτει από το $x(t)$ ως εξής:

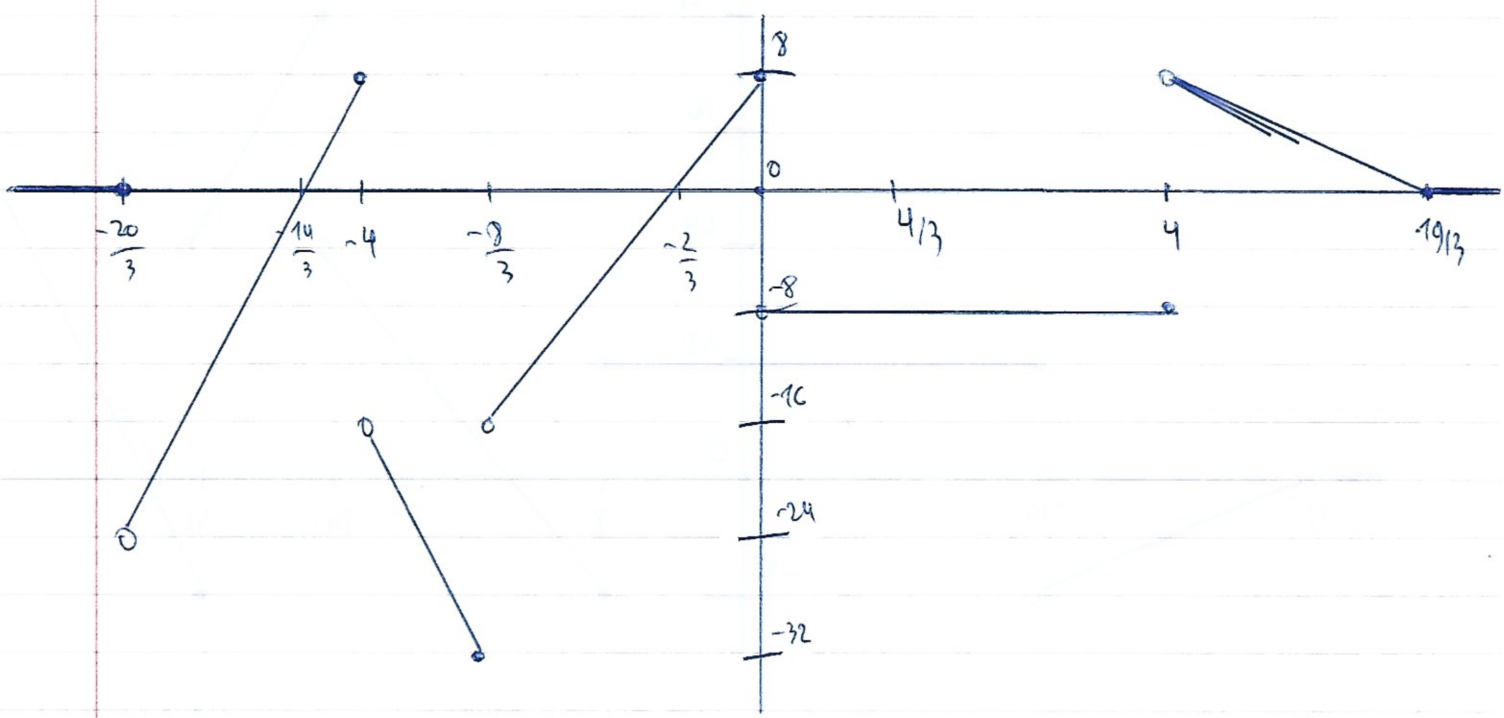
Αρχικά έχουμε το $x(t)$ και δημιουργούμε το $x(3t)$:



Στη συνέχεια παίρνουμε το $x(-3t)$:



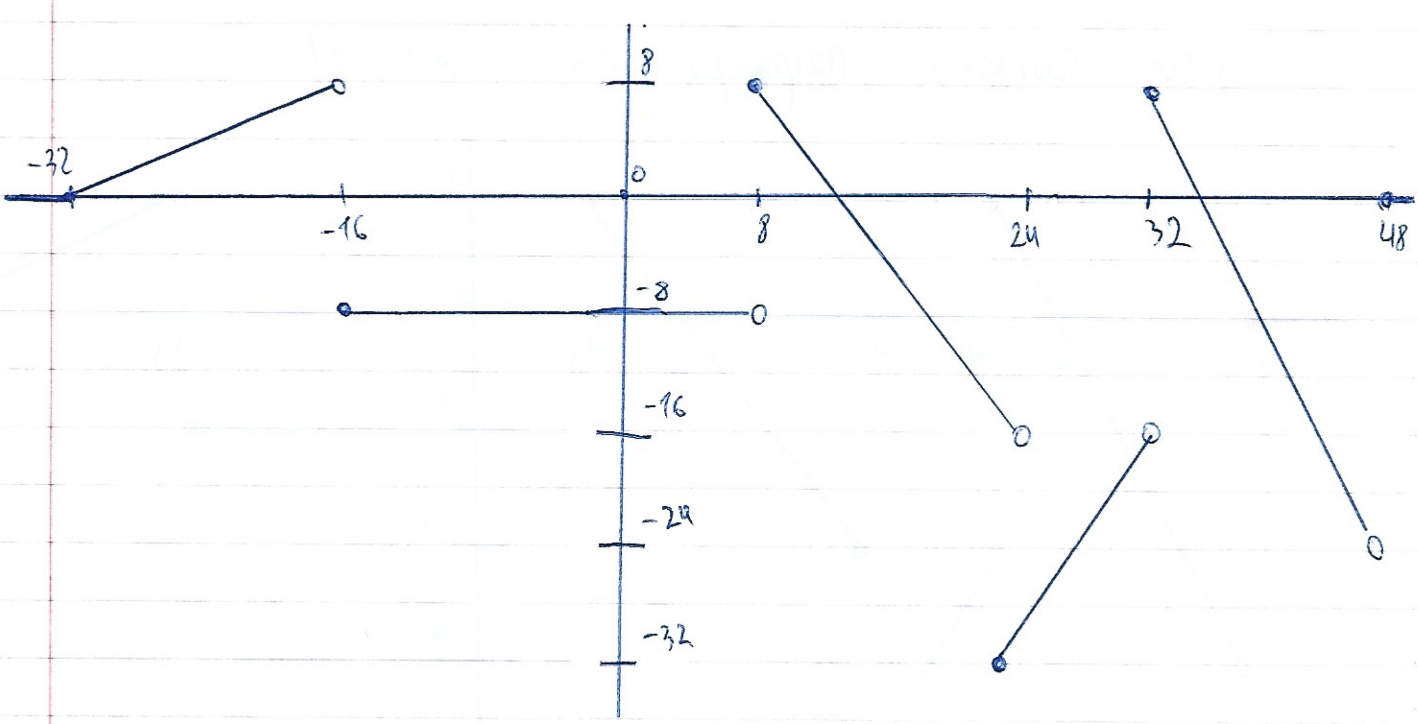
Και τέλος παίρνουμε το $x(-3t+4) = x_2(t) = x(-3(t-\frac{4}{3}))$



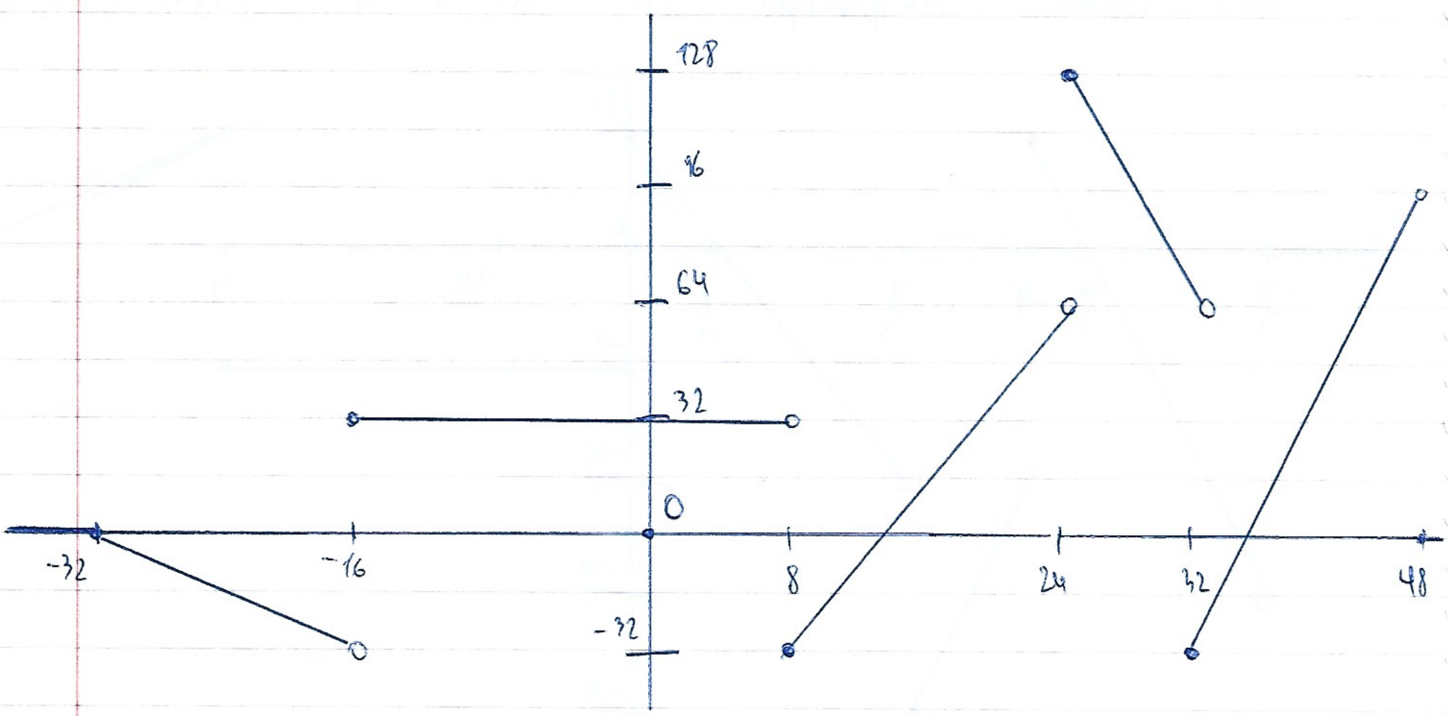
γ) Για το $x_3(t) = -a x(\frac{t}{2}) - 5a = -4x(\frac{t}{2}) - 20$ έχουμε τις εξής μετατροπές:

Αρχικά παίρνουμε το $x(t)$ και το κάνουμε $x(\frac{t}{2})$:

4.

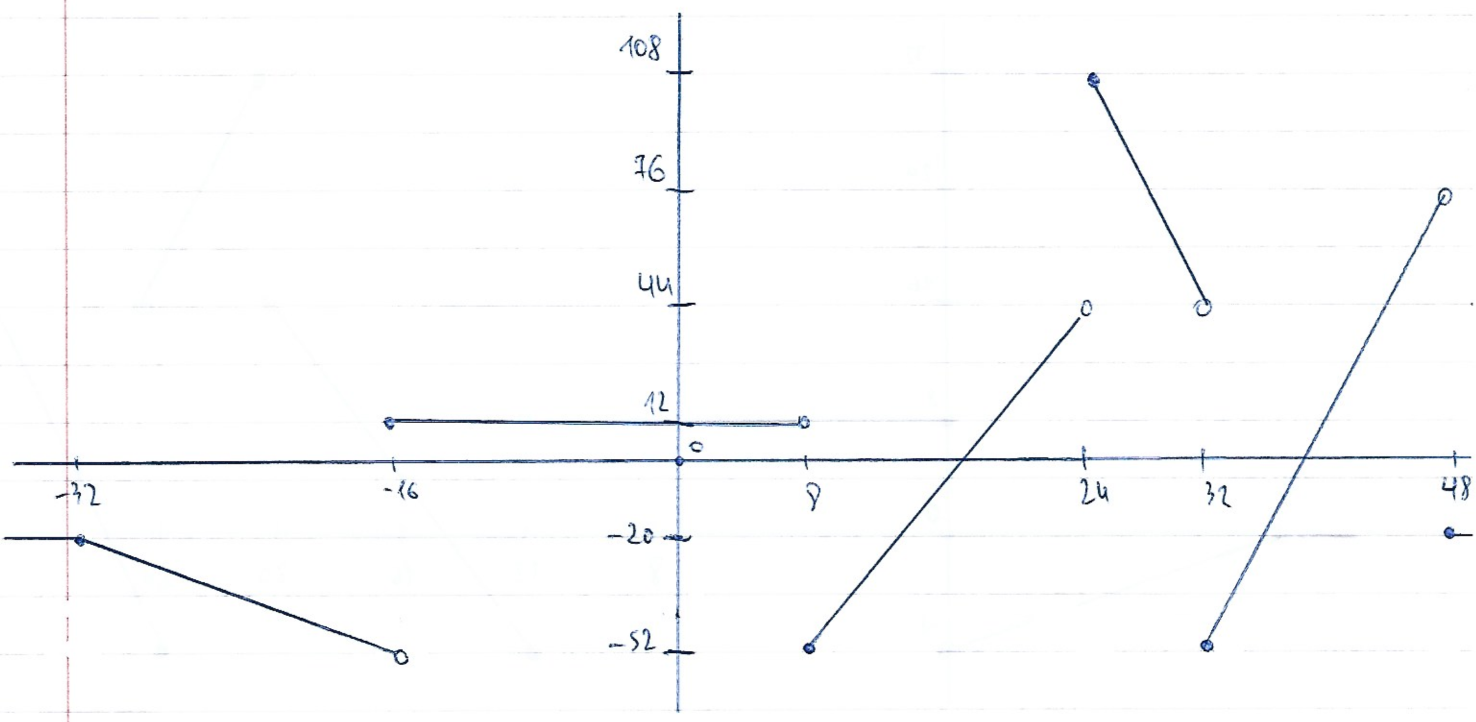


Στη συνέχεια από αυτό παίρνουμε το $-4x(\frac{t}{2})$:

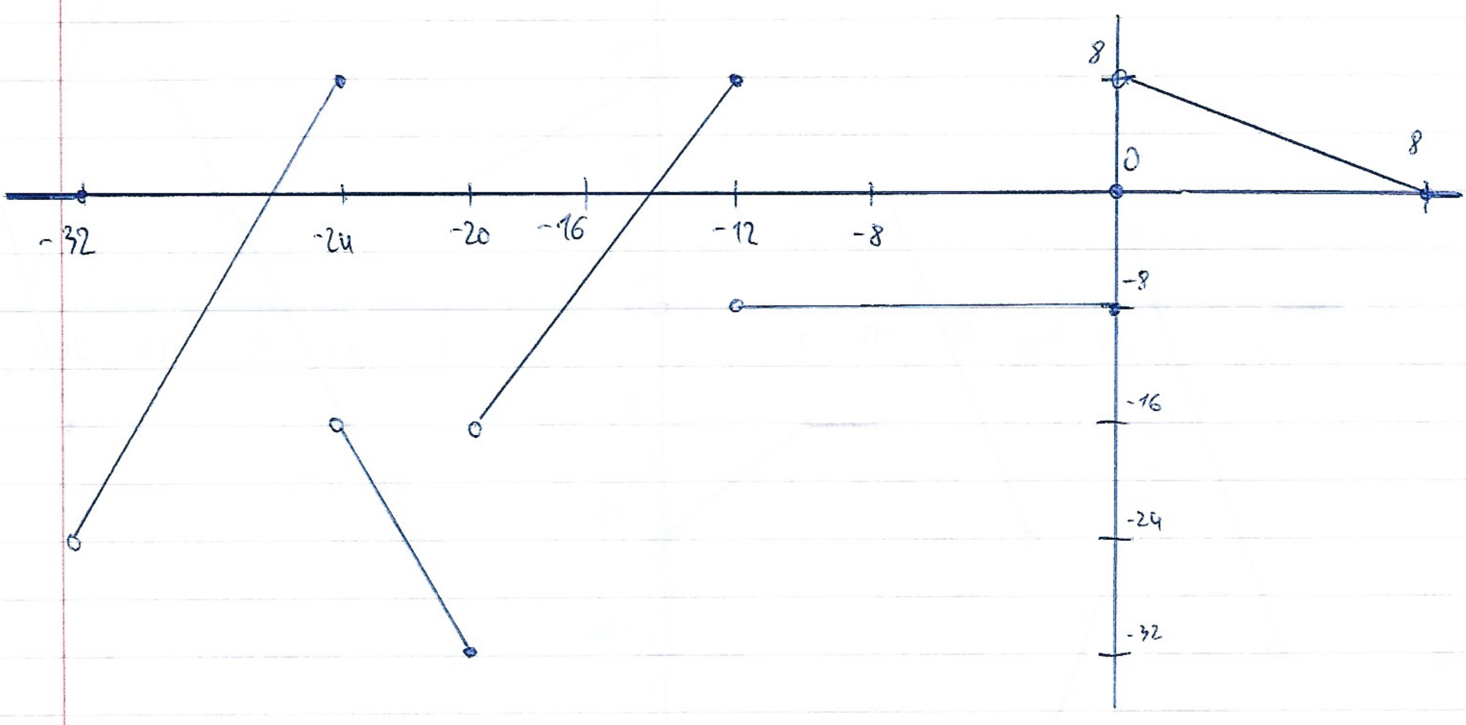


Τέλος παίρνουμε το $-4x(\frac{t}{2})-20 = x_3(t)$:

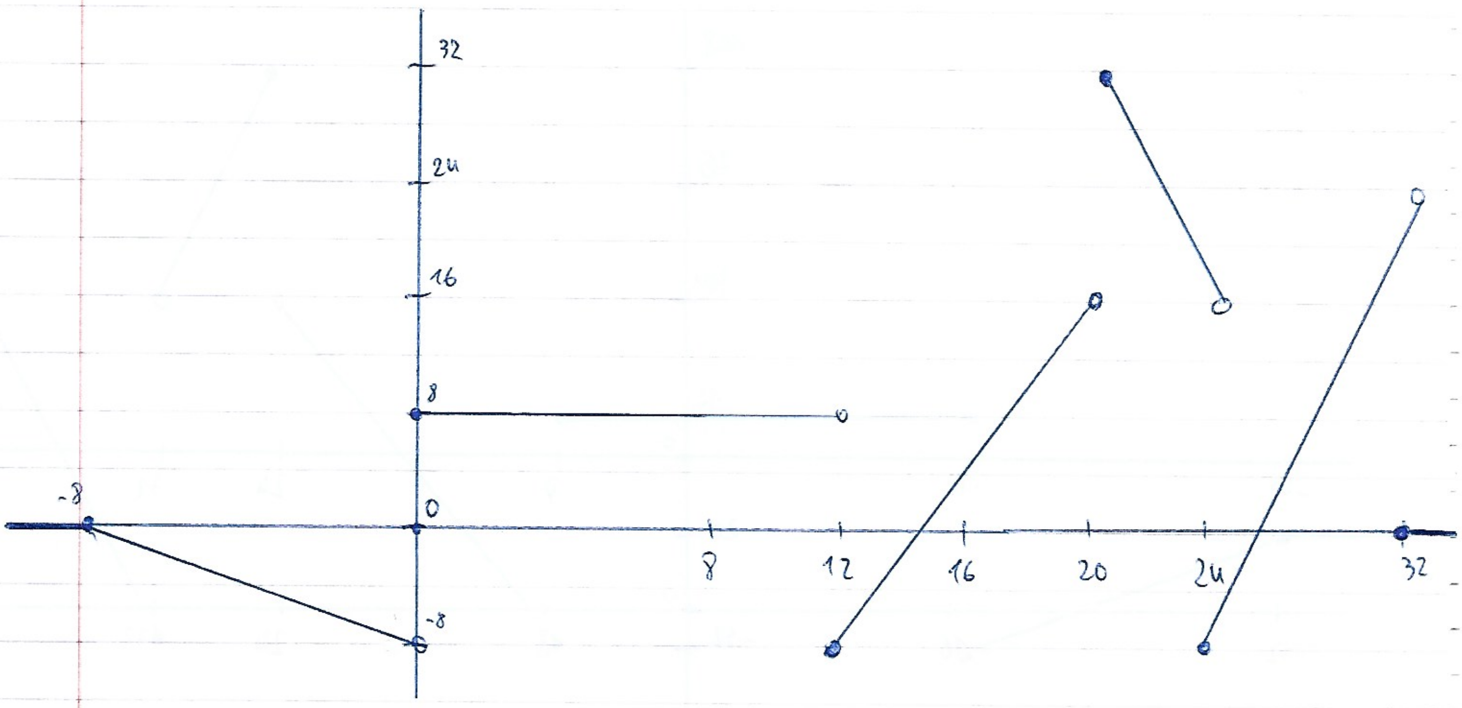
5



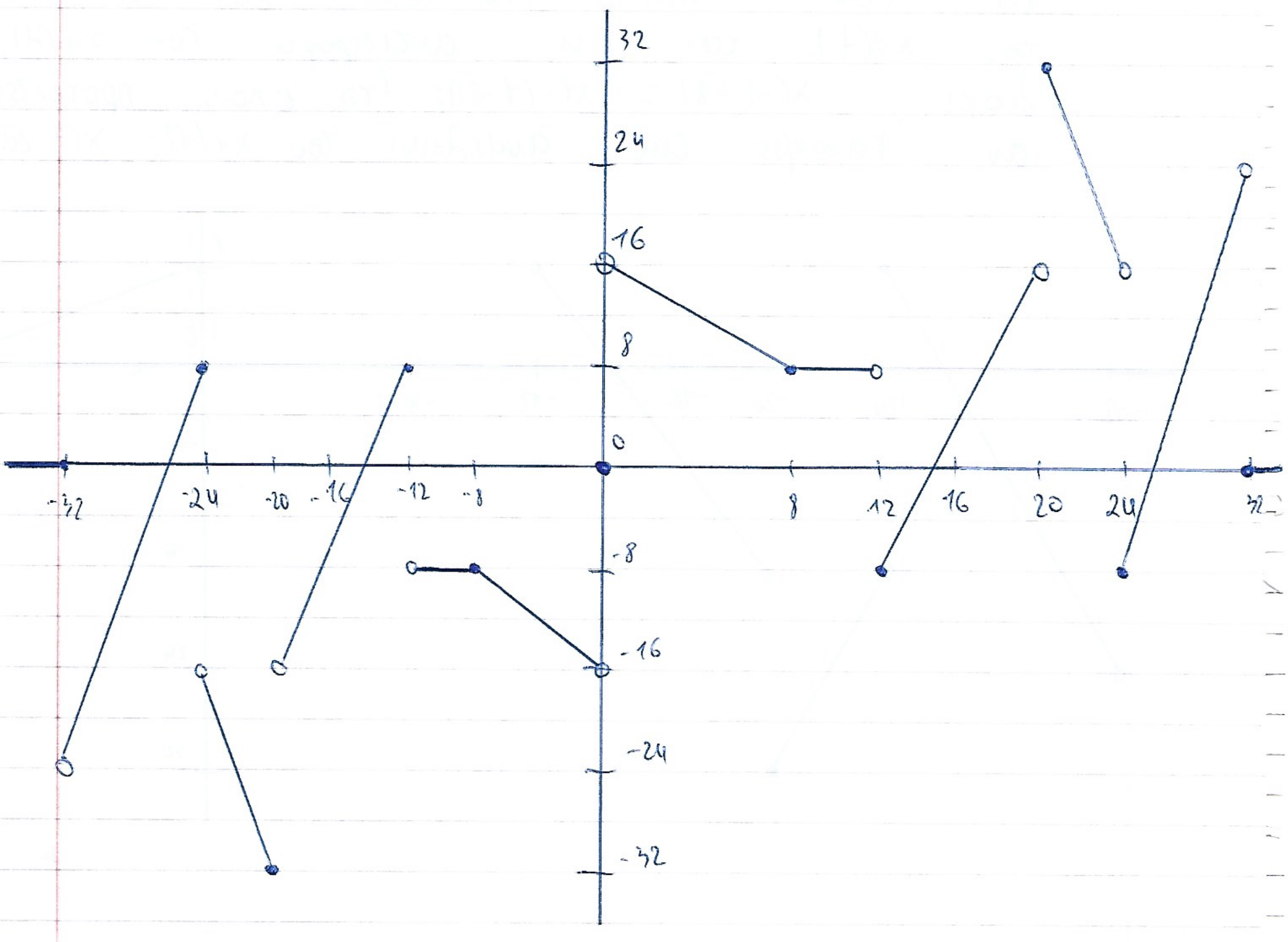
δ) Το $x_4(t) = x(-t+2a) - x(t-2a) = x(-t+8) - x(t-8)$ είναι το άθροισμα δύο σημάτων, του $x(-t+8)$ και του $-x(t-8)$, τα οποία είναι η ανάκλαση του $x_1(t)$ και η αντιστροφή του $x_1(t)$, διότι $x(-t+8) = x(-(t-8))$: (το οποίο προκύπτει αν κάνουμε την ανάκλαση του $x_1(t) = x(t-2a)$.)



6.



Και το $x_u(t)$ προκύπτει, όπως αποδείξαμε ως άθροισμα των δύο παραπάνω:



⑦

Άσκηση 1.2:

a) $x_1(t) = \sin^4\left(\frac{\pi t}{20}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\cdot \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \quad (1)$

• $\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\cdot \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi t}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{6}-\frac{\pi t}{8}\right)}{2} =$

$= \frac{\sin\frac{7\pi t}{24}}{2} - \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{24}\right)}{2}$

• $\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y \Rightarrow (2\sin^2 y)^2 = (1-\cos 2y)^2 \Rightarrow$

$4\sin^4 y = 1 + \cos^2 2y - 2\cos 2y \Rightarrow$

$\sin^4 y = 1/4 + \frac{\cos^2 2y}{4} - \frac{\cos 2y}{2} \Rightarrow$

$\sin^4 y = 1/4 + \frac{\cos 4y + 1}{8} - \frac{\cos 2y}{2} \Rightarrow$

$\sin^4\left(\frac{\pi t}{20}\right) = 1/4 + \frac{\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)+1}{8} - \frac{\cos\left(\frac{\pi t}{10}\right)}{2} \Rightarrow$

$\sin^4\left(\frac{\pi t}{20}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cdot\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi t}{10}\right)$

$(1) \Rightarrow x_1(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) + \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{7\pi t}{24}\right) - \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi t}{24}\right)$

Παραπάνω έχουμε ένα σήμα που αποτελεί υπέρθεση ημιτονικών σημάτων συνεχούς χρόνου με τις εξής περιόδους:

$T_{11} = \frac{2\pi}{\omega_{11}} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$, $T_{12} = \frac{2\pi}{\omega_{12}} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$

$T_{13} = \frac{2\pi}{\omega_{13}} = \frac{2\pi}{\frac{7\pi}{24}} = \frac{48}{7}$, $T_{14} = \frac{2\pi}{\omega_{14}} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{24}} = 48$

(8)

Άρα, η περίοδος του $x_1(t)$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παραπάνω περιόδων, εφόσον υπάρχει:

$$T_1 = lcm\{10, 20, \tfrac{48}{7}, 48\} = lcm\{10, 20, 48\} = 240$$

Επομένως, το x_1 είναι περιοδικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο 240s.

β). $x_2(t) = \exp[j\frac{\pi}{4}t + 3] - \exp[j4\pi \cdot t - 7]$.

Το παραπάνω σήμα αποτελεί υπέρθεση ημιτονικών σημάτων συνεχούς χρόνου με τις εξής περιόδους (δείχνεται εύκολα μέσω ταυτότητας Euler):

$$T_{21} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8 \quad , \quad T_{22} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

Άρα η περίοδος του $x_2(t)$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παραπάνω περιόδων, εφόσον υπάρχει:

$$T_2 = lcm\{8, \tfrac{1}{2}\} = 8$$

Επομένως, το x_2 είναι περιοδικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο 8s.

γ). $x_3[n] = \sum_{k=1}^{4} \exp\left(\frac{j\pi n}{[k\ mod\ a] + 1}\right) = \exp\left(\frac{j\pi n}{2}\right) + \exp\left(\frac{j\pi n}{3}\right) + \exp\left(\frac{j\pi n}{4}\right) + \exp(j\pi n)$

Έχουμε υπέρθεση ημιτονικών όρων με επιμέρους περιόδους:

$$\Omega_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow F_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4} \Rightarrow N_1 = 4.$$

$$\Omega_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow F_2 = \frac{\Omega_2}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{6} \Rightarrow N_2 = 6.$$

$$\Omega_3 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow F_3 = \frac{\Omega_3}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{8} \Rightarrow N_3 = 8$$

9

$\Omega_4 = \pi \Rightarrow f_4 = \frac{\Omega_4}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow N_4 = 2.$

Αφού οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες είναι ρητοί αριθμοί, τα επιμέρους ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου είναι περιοδικά και άρα η υπέρθεσή τους είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο ίση με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των θεμελιωδών περιόδων των επιμέρους ημιτονικών όρων:

$N = lcm\{4, 6, 8, 2\} = 24.$

δ) $x_5[n] = \sin\left(2\pi + \frac{4\pi}{15} n^3\right)$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό, όπου το $x_5[n]$ είναι περιοδικό, αν και μόνον αν υπάρχει $N \in \mathbb{Z}^+$:
$x_5[n+N] = x_5[n] \quad , \forall n \in \mathbb{Z}$:

$x_5[n+N] = x_5[n] \Rightarrow \sin\left[2\pi + \frac{4\pi}{15}(n+N)^3\right] = \sin\left(2\pi + \frac{4\pi}{15} n^3\right) \Rightarrow$

$\cancel{2\pi} + \frac{4\pi}{15}(\cancel{n^3} + 3n^2 \cdot N + 3n \cdot N^2 + N^3) = \cancel{2\pi} + \cancel{\frac{4\pi}{15} n^3} + 2k\pi \Rightarrow$

$\frac{4\cancel{\pi}}{15} \cdot 3n^2 \cdot N + \frac{4\cancel{\pi}}{15} \cdot 3n \cdot N^2 + \frac{4\pi}{15} \cdot N^3 = 2k\cancel{\pi} \Rightarrow$

$\frac{12}{15} n^2 \cdot N + \frac{12}{15} n \cdot N^2 + \frac{4N^3}{15} = 2k \Rightarrow$

$\frac{6}{15} \cdot n^2 \cdot N + \frac{6}{15} \cdot n \cdot N^2 + \frac{2N^3}{15} = k \quad , k \in \mathbb{Z}$

Πρέπει και οι τρεις προσθετέοι να είναι ακέραιοι $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$\frac{6}{15} \cdot n^2 \cdot N \in \mathbb{Z} \quad , \quad \frac{6}{15} \cdot n \cdot N^2 \in \mathbb{Z} \quad , \quad \frac{2}{15} \cdot N^3 \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$

$\frac{6}{15} \cdot N \in \mathbb{Z} \quad , \quad \frac{6}{15} \cdot N^2 \in \mathbb{Z} \quad , \quad \frac{2}{15} \cdot N^3 \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$

$N = \frac{5}{2} \cdot k \quad , \quad N = \left(\frac{5}{2}\right)^{1/2} \cdot k \quad , \quad N = \left(\frac{15}{2}\right)^{1/3} \cdot k.$

(10)

Ο πρώτος αριθμός που ανήκει στο $\mathbb{Z}$ για τον οποίο ισχύουν τα παραπάνω είναι το 15. Άρα, έχουμε θεμελιώδη περίοδο 15s και περιοδικό σήμα.

(11)

Άσκηση 1.3:

a) 1) $y(t) = \int_{-t}^{t} [a x(\tau) + a] d\tau = \int_{-t}^{t} [4\, x(\tau) + 4] d\tau$

Είσοδος $x_1(t) \to y_1(t) = \int_{-t}^{t} 4x_1(\tau) d\tau + 8t$

Είσοδος $x_2(t) \to y_2(t) = \int_{-t}^{t} 4x_2(\tau) d\tau + 8t$

Είσοδος $x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t). \to$

$y_3(t) = \int_{-t}^{t} 4[a x_1(\tau) + b\, x_2(\tau)] d\tau + 8t =$

$= a \int_{-t}^{t} 4x_1(\tau) d\tau + b \int_{-t}^{t} 4x_2(\tau) d\tau + 8t \neq a y_1(t) + b y_2(t).$

Άρα το σύστημα δεν είναι γραμμικό

2) Είσοδος $x_1(t) \to y_1(t) = \int_{-t}^{t} [4x_1(\tau) + 4] d\tau$

Είσοδος $x_2(t) = x_1(t - t_0) \to y_2(t) = \int_{-t}^{t} [4x_1(\tau - t_0) + 4] d\tau =$

$\overset{\tau - t_0 = \lambda}{=} \int_{-t-t_0}^{t-t_0} [4x_1(\lambda) + 4] d\lambda$

$y(t - t_0) = \int_{-t+t_0}^{t-t_0} [4x(\tau) + 4] d\tau \neq y_2(t).$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

12

3) Το σύστημα έχει μνήμη, αφού κρατάει όλες τις παρελθοντικές τιμές για να υπολογίσει την παρούσα, λόγω του ολοκληρώματος.

4) Το σύστημα είναι αιτιατό, αφού εξαρτάται από τιμές στο παρελθόν και στο παρόν, λόγω του ολοκληρώματος.

5) Έστω είσοδος $x(t)$, φραγμένη: $|x(t)| \leq M$

$$|y(t)| = \left|\int_{-t}^{t}(a\cdot x(\tau)+a)d\tau\right| \leq \left|\int_{-t}^{t}(a\cdot M+a)d\tau\right| =$$

$$= 4(M+1)\cdot\left|\int_{-t}^{t}dt\right| = 4(M+1)\cdot 2t$$

Το ολοκλήρωμα (η τιμή του) απειρίζεται για μεγάλα τ, επομένως το σύστημα δεν είναι ευσταθές κατά BIBO.

β) 1) Είσοδος $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t+4) * u(t)$.

Είσοδος $x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(t+4) * u(t)$

Είσοδος $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow$

$$y_3(t) = [a x_1(t+4) + b x_2(t+4)] * u(t) \overset{\text{επιμεριστική}}{\underset{\text{συνέλιξης}}{=}}$$

$$= a x_1(t+4) * u(t) + b x_2(t+4) * u(t) =$$
$$= a y_1(t) + b y_2(t)$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

2) Είσοδος $x_1(t) \to y_1(t) = x_1(t+4) * u(t)$

Είσοδος $x_2(t) = x_1(t-t_0) \to y_2(t) = x_1(t-t_0+4) * u(t)$

$y_1(t-t_0) = x_1(t-t_0+4) * u(t-t_0) \neq y_2(t)$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

3) Το σύστημα έχει μνήμη, καθώς χρειάζεται να αποθηκεύει την $x(t+4)$.

4) Το σύστημα είναι μη αιτιατό, αφού εξαρτάται και από μελλοντικές τιμές [$x(t+4)$].

5) Έστω είσοδος $x(t)$, φραγμένη: $|x(t)| \le M$

$$|y(t)| = |x(t+4) * u(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau+4)\cdot u(t-\tau)\cdot d\tau\right| \le$$

$$\le \left|\int_{-\infty}^{+\infty} M\, u(t-\tau)\, d\tau\right| = M\left|\int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)\,d\tau\right| \overset{t-\tau=\lambda}{=}$$

$$= M\left|\int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda)\,d\lambda\right| = M\left|\cancel{\int_{-\infty}^{0} u(\lambda)\,d\lambda} + \int_{0}^{+\infty} u(\lambda)\,d\lambda\right| \underset{u(\lambda)=1,\ \lambda\ge 0.}{\overset{u(\lambda)=0,\ \lambda<0}{=}}$$

$$= M\cdot[\lambda]_0^{+\infty}$$

Η τιμή αυτή απειρίζεται, επομένως το σύστημα δεν είναι ευσταθές κατά BIBO.

(14.)

γ) 1) Είσοδος $x1[n] \rightarrow y1[n] = \sum_{k=n-4}^{n+4} x1[4k]$

Είσοδος $x2[n] \rightarrow y2[n] = \sum_{k=n-4}^{n+4} x2[4k]$

Είσοδος $x3[n] = ax1[n] + bx2[n] \rightarrow$

$$y3[n] = \sum_{k=n-4}^{n+4} [ax1[4k] + bx2[4k]] = \sum_{k=n-4}^{n+4} ax1[4k] + \sum_{k=n-4}^{n+4} bx2[4k] =$$

$$= a \cdot \sum_{k=n-4}^{n+4} x1[4k] + b \sum_{k=n-4}^{n+4} x2[4k] = a \cdot y1[n] + b \cdot y2[n].$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό

2) Είσοδος $x1[n] \rightarrow y1[n] = \sum_{k=n-4}^{n+4} x1[4k]$

Είσοδος $x2[n] = x1[n-n_0] \rightarrow y2[n] = \sum_{k=n-4}^{n+4} x2[4k] =$

$$= \sum_{k=n-4}^{n+4} x1[4k-n_0] \underset{\lambda = k - \frac{n_0}{4}}{\overset{4k-n_0=\lambda}{=}} \sum_{k=n-4-\frac{n_0}{4}}^{n+4-\frac{n_0}{4}} x1[4\lambda]$$

$$y1[n-n_0] = \sum_{n-n_0-4}^{n-n_0+4} x1[4k] \neq y2[n]$$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

3) $\sum_{k=n-4}^{n+4} x1[4k] = x1[4(n-4)] + \dots + x1[4n] + \dots + x1[4(n+4)]$

Το σύστημα εξαρτάται από παρελθόν, παρόν και μέλλον, άρα έχει μνήμη.

4) Το σύστημα είναι μη αιτιατό, επειδή εξαρτάται από μελλοντικές τιμές.

5) Έστω είσοδος $x[n]$, φραγμένη : $|x[n]| \leq M$.

(15)

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=n-4}^{n+4} x[4k]\right| \le \sum_{k=n-4}^{n+4} |x[4k]| \le \sum_{k=n-4}^{n+4} M =$$
$$= (2\cdot 4+1)M = 9M < +\infty$$

Άρα το σύστημα είναι ευσταθές κατά BIBO.

δ) 1) Είσοδος $x_1[n] \to y_1[n] = x_1[n-4]\cdot x_1[4-n]$

Είσοδος $x_2[n] \to y_2[n] = x_2[n-4]\cdot x_2[4-n]$.

Είσοδος $x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n] \to$

$y_3[n] = x_3[n-4]\cdot x_3[4-n] = (a x_1[n-4] + b x_2[n-4])(a x_1[4-n] + b x_2[4-n])$

$a y_1[n] + b y_2[n] = a x_1[n-4]\cdot x_1[4-n] + b x_2[n-4]\cdot x_2[4-n]$
$\neq y_3[n]$.

Άρα το σύστημα είναι μη γραμμικό.

2) Είσοδος $x_1[n] \to y_1[n] = x_1[n-4]\cdot x_1[4-n]$

Είσοδος $x_2[n] = x_1[n-n_0] \to y_2[n] = x_2[n-4]\cdot x_2[4-n] =$

$= x_1[n-n_0-4]\cdot x_1[4-n-n_0]$

$y_1[n-n_0] = x_1[n-n_0-4]\cdot x_1[4-n+n_0] \neq y_2[n]$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

3) Το σύστημα έχει μνήμη, διότι $y[n] = x[n-4]\cdot x[-(n-4)]$.
Δηλαδή, χρειάζεται για $n\neq 4$ και την αντίστοιχη

παρελθοντική ή μελλοντική τιμή.

4) Το σύστημα είναι μη αιτιατό, γιατί εξαρτάται και από μελλοντικές τιμές.

5) Έστω είσοδος $x[n]$, φραγμένη : $|x[n]| \leq M$.

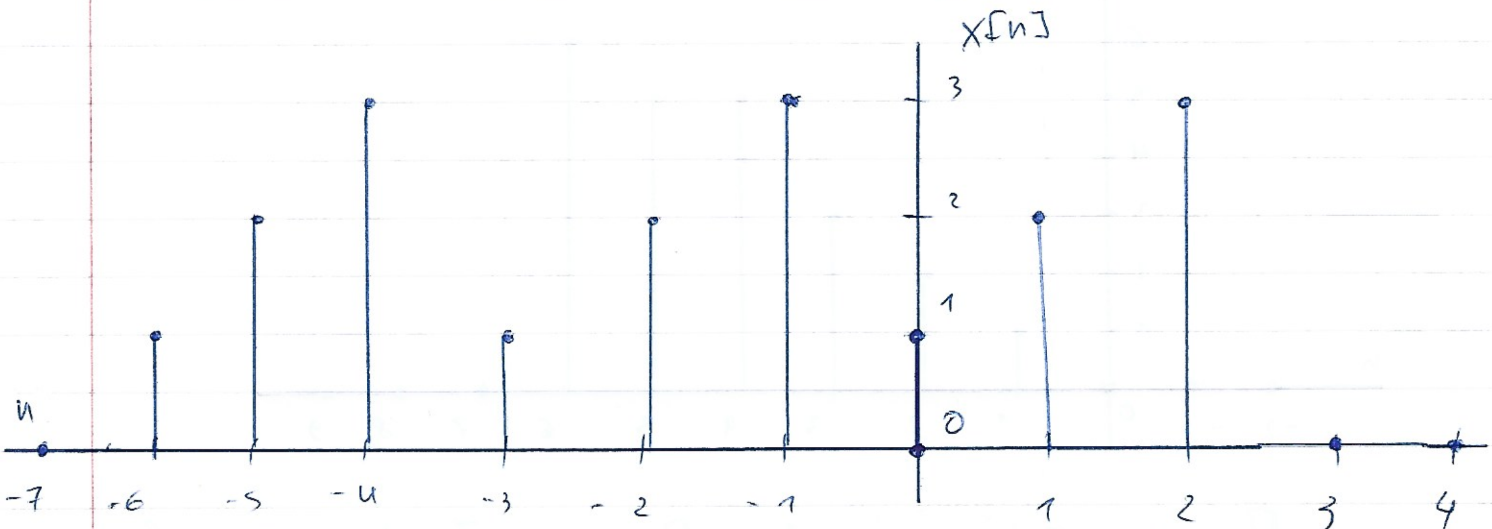
$|y[n]| = |x[n-4] \cdot x[4-n]| \leq M^2 < +\infty$.

Άρα το σύστημα είναι ευσταθές κατά BIBO.

(17)

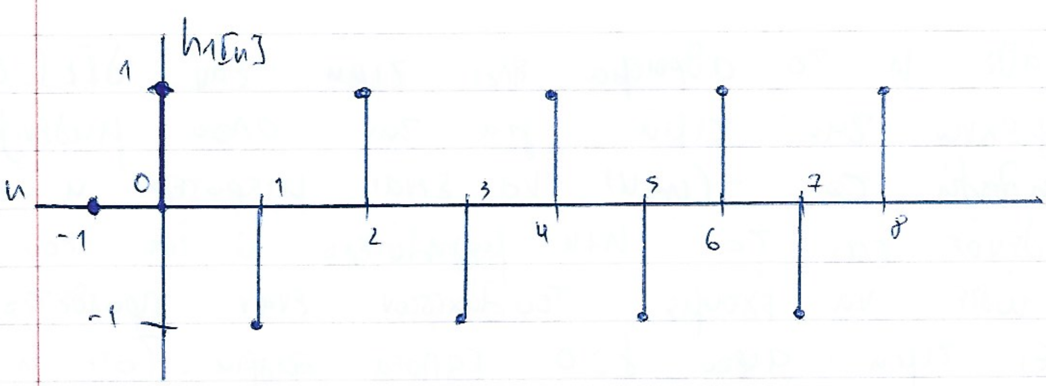
Άσκηση 1.4:

$x[n] = (n \bmod 3 + 1)\,[u[n+6] - u[n-3]]$



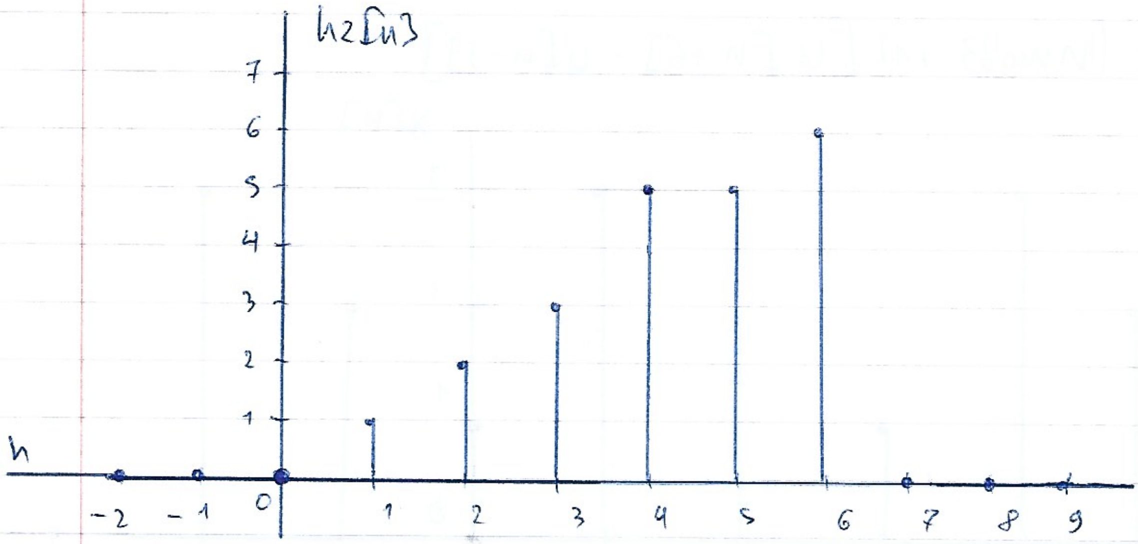
Το σήμα παίρνει τιμές για $n \geq -6$ και $n < 3$, λόγω των βηματικών.

$h_1[n] = \cos(\pi n) \cdot u[n]$.



Το σήμα παίρνει τιμές για $n \geq 0$ και συνεχίζεται επ' άπειρον με την ίδια λογική (1 για άρτιο, -1 για περιττό).

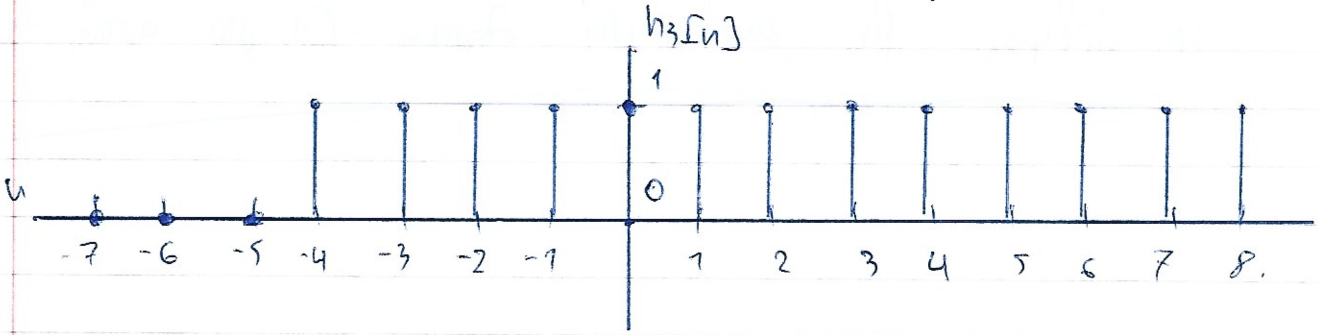
$h_2[n] = n\cdot(u[n] - u[n-7]) + \delta[n-4]$



Παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 7 λόγω των βηματικών και έχει +1 για n=4 λόγω της δ.

$$h_3[n] = \sum_{k=-n-4}^{n+4} (-1)^{4+k}\cdot\delta[k] = \sum_{k=-(n+4)}^{n+4} (-1)^{4+k}\cdot\delta[k]$$

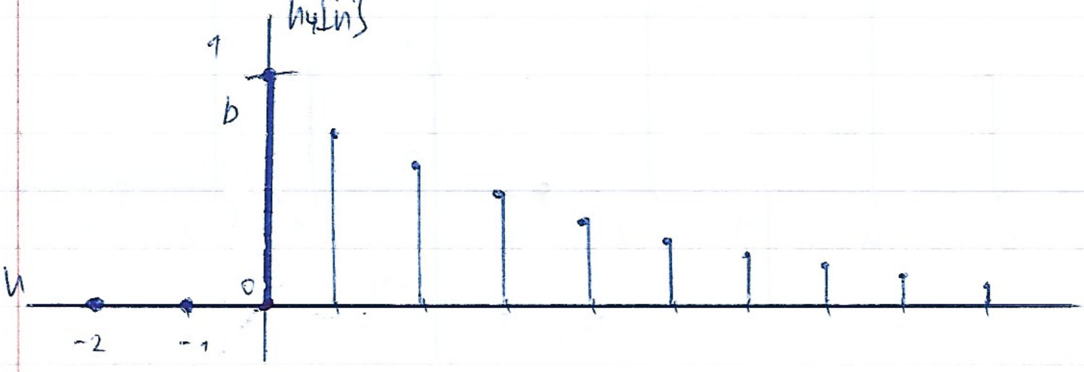
Για κάθε n το άθροισμα έχει τιμή εάν $k=0$, άρα ψάχνω την τιμή για την οποία μηδενίζει το k. Θέλω δηλαδή το $-(n+4)$ να είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός και το $n+4$ μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός, ώστε να έχουμε έναν προσθετέο που έχει τιμή αφού $k=0$ κάποια στιγμή. Τότε η τιμή θα είναι σταθερή για όλα και ίση με $(-1)^{4+k} = (-1)^{4+0} = 1$. Αυτό συμβαίνει εδώ για $n \geq -4$.



(19)

$h_1[n] = b^n \cdot u[n] \quad , \quad 0 < b < 1.$

Εχουμε ένα σήμα με φθινουσες τιμές, αφού $0<b<1$.



Επίσης, έχει τιμές για $n \geq 0$ λόγω της βηματικής.

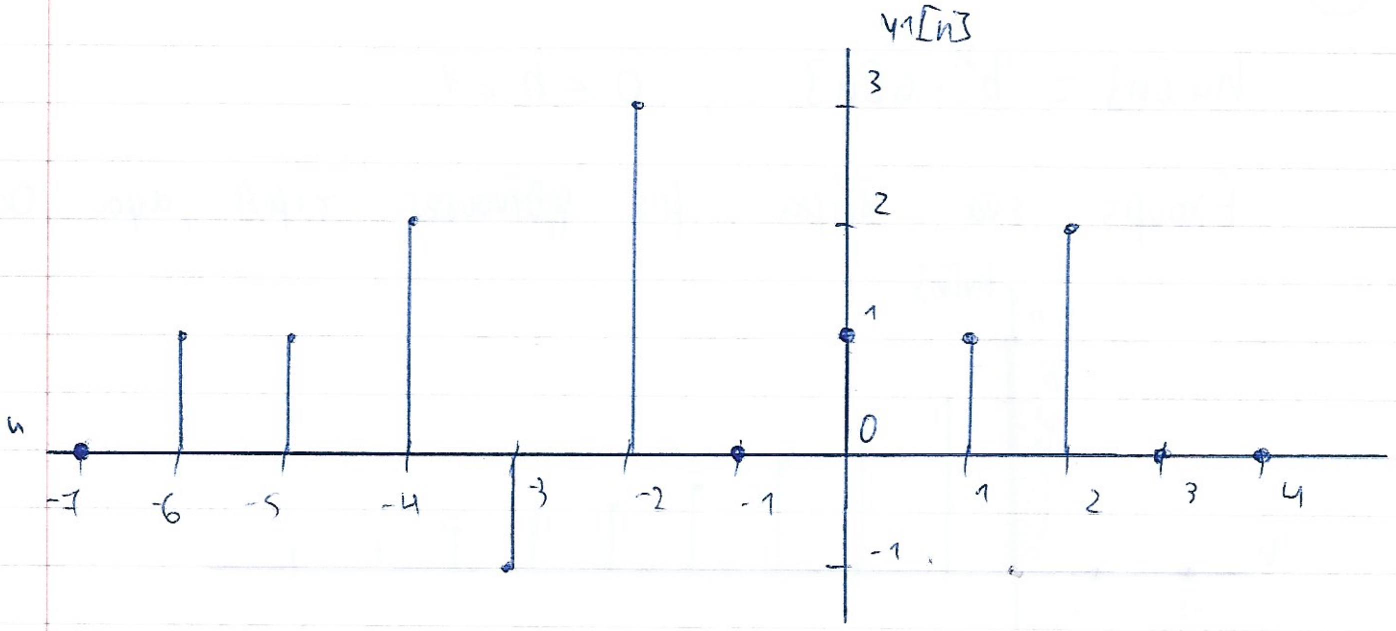
$$y_1[n] = x[n] * h_1[n] = (n \bmod 3 + 1)\left(u[n+6] - u[n-3]\right) * \cos(\pi n) \cdot u[n]$$

$$= \left(\delta[n+6] + 2\delta[n+5] + 3\delta[n+4] + \delta[n+3] + 2\delta[n+2] + 3\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]\right) * h_1[n] =$$

$$= h_1[n+6] + 2h_1[n+5] + 3h_1[n+4] + h_1[n+3] + 2h_1[n+2] + 3h_1[n+1] + h_1[n] + 2h_1[n-1] + 3h_1[n-2]$$

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$h_1[n+6]$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
$2h_1[n+5]$	0	2	-2	2	-2	2	-2	2	-2
$3h_1[n+4]$	0	0	3	-3	3	-3	3	-3	3
$h_1[n+3]$	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1
$2h_1[n+2]$	0	0	0	0	2	-2	2	-2	2
$3h_1[n+1]$	0	0	0	0	0	3	-3	3	-3
$h_1[n]$	0	0	0	0	0	0	1	-1	1
$2h_1[n-1]$	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
$3h_1[n-2]$	0	0	0	0	0	0	0	0	3
$y_1[n]$	1	1	2	-1	3	0	1	1	2

20



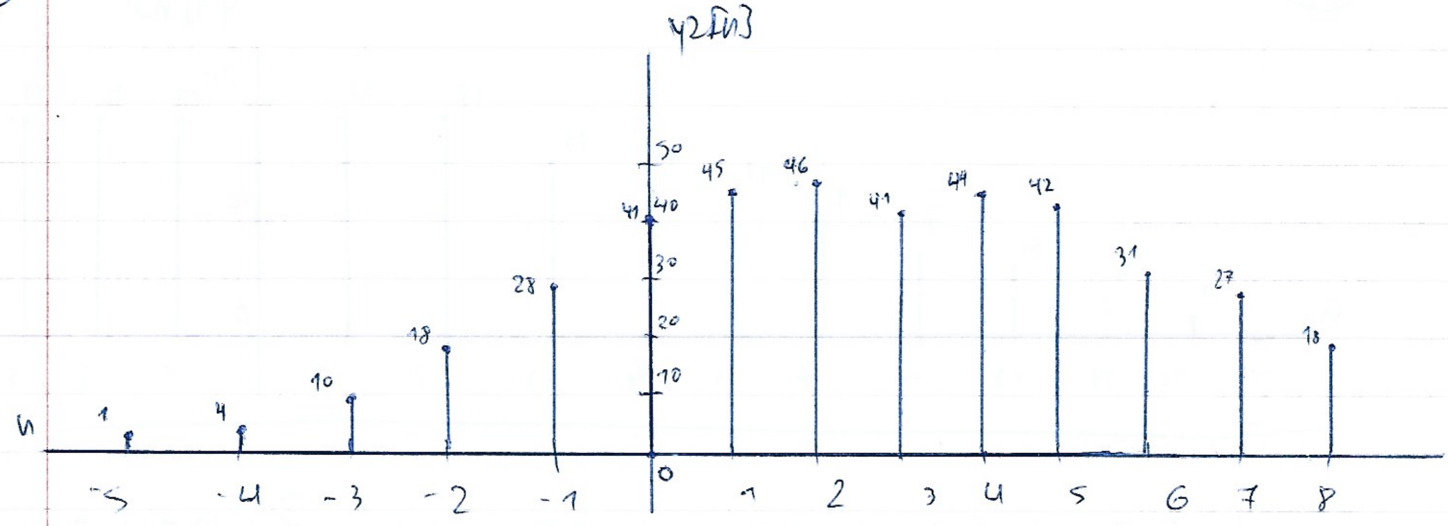
$$y_1[n] = \cos[(n+6)\cdot\pi]\cdot u(n+6) + 2\cdot\cos[(n+5)\cdot\pi]\cdot u(n+5) + 3\cos[(n+4)\cdot\pi]\cdot u(n+4) + \cos[(n+3)\cdot\pi]\cdot u(n+3) + 2\cos[(n+2)\cdot\pi]\cdot u(n+2) + 3\cos[(n+1)\pi]\cdot u(n+1) + \cos(n\cdot\pi)\cdot u(n) + 2\cos[(n-1)\cdot\pi]\cdot u(n-1) + 3\cos[(n-2)\cdot\pi]\cdot u(n-2)$$

$$y_2[n] = x[n] * h_2[n]$$

h[n] \ x[n]		x[-6]	x[-5]	x[-4]	x[-3]	x[-2]	x[-1]	x[0]	x[1]	x[2]
		1	2	3	1	2	3	1	2	3
h[1]	1	1	2	3	1	2	3	1	2	3
h[2]	2	2	4	6	2	4	6	2	4	6
h[3]	3	3	6	9	3	6	9	3	6	9
h[4]	5	5	10	15	5	10	15	5	10	15
h[5]	5	5	10	15	5	10	15	5	10	15
h[6]	6	6	12	18	6	12	18	6	12	18

$$y_2[n] = [1, 4, 10, 18, 28, \underline{41}, 45, 46, 41, 44, 42, 31, 27, 18]^T$$

21



$$y_3[n] = x[n] * h_3[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]\cdot h_3[n-k] \overset{x[k]\neq 0}{=}$$

$$= \sum_{-6}^{2} x[k]\cdot h_3[n-k] \quad (1)$$ (Αν $x[k]=0$ μηδενίζει η y_3)

Η h_3 γράφεται εύκολα ως $h_3[n] = u[n+4]$ (2)

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad y_3[n] = \sum_{-6}^{2} x[k]\cdot u[n-k+4].$$

Για να έχει μη μηδενική τιμή η y_3, θέλουμε $n-k+4 \geq 0$ για τουλάχιστον ένα k.

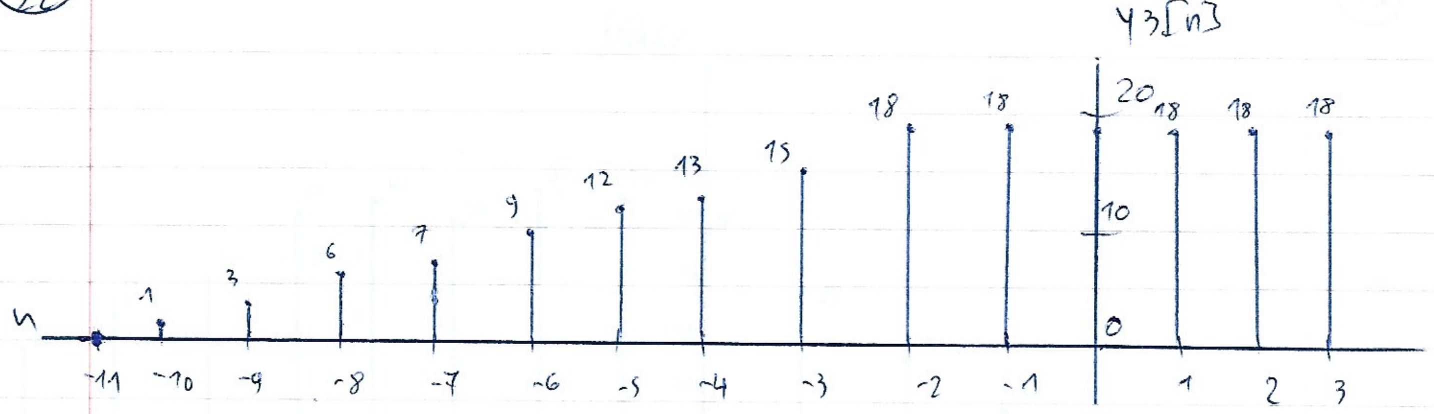
$-6 \leq k \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -k \leq 6 \Rightarrow n+2 \leq n-k+4 \leq n+10$, $n-k+4 \geq 0$

Άρα $n+10 \geq 0 \Rightarrow \boxed{n \geq -10.}$

Όταν $\boxed{n \geq -2} \Rightarrow n+4 \geq 2$ και η μέγιστη τιμή του k είναι 2. Άρα $n+4-k \geq 0$ για κάθε k.
Άρα μετά το $n=-2$ η y_3 έχει σταθερή τιμή.

$$y_3[n] = \begin{cases} \sum_{-6}^{2} x[k]\cdot u[n-k+4], & n < -2. \\ \sum_{-6}^{2} x[k], & n \geq -2. \end{cases}$$

$y_3[-10]=1$, $y_3[-9]=3$, $y_3[-8]=6$, $y_3[-7]=7$, $y_3[\ ]=9$, $y_3[-5]=12$,
$y_3[-4]=13$, $y_3[-3]=1$, $y_3[-2]=18$, $y_3[n]=18$, $n \geq -2$.



$$h_5[n] = h_3[n] * h_4[n] = h_4[n] * h_3[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} h_4[k]\cdot h_3[n-k] =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} b^k \cdot u[k]\cdot u[n-k+4] \overset{u[k]\neq 0}{=} \sum_{0}^{+\infty} b^k \cdot u[k]\cdot u[n-k+4]$$

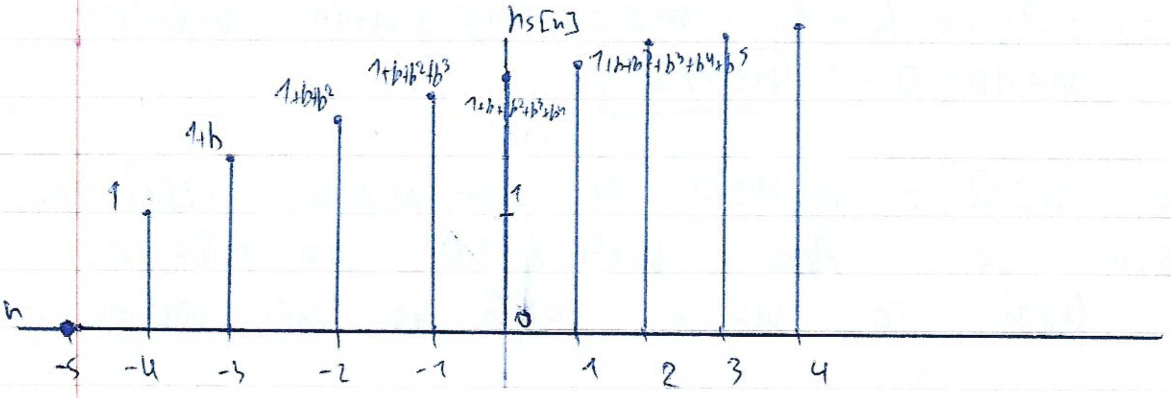
Έχουμε: $k \geq 0 \Rightarrow -k \leq 0 \Rightarrow n+4-k \leq n+4$, $n+4-k \geq 0$

Άρα: $n+4 \geq 0 \Rightarrow \boxed{n \geq -4}$, ώστε να έχουμε τουλάχιστον έναν όρο στο άθροισμα, το οποίο για κάθε επιπλέον n αυξάνεται κατά ένα όρο.

$$h_5[n] = \sum_{0}^{+\infty} b^k \cdot u[k]\cdot u[n-k+4]$$

$h_5[-4] = b^0 = 1$, $h_5[-3] = 1+b$, $h_5[-2] = 1+b+b^2$

$h_5[-1] = 1+b+b^2+b^3$, $h_5[0] = 1+b+b^2+b^3+b^4$, $h_5[1] = 1+b+b^2+b^3+b^4+b^5 \dots$



$$\lim_{n\to+\infty} h_5[n] = \frac{1-b^{b}}{1-b}$$

23

Άσκηση 1.5:

$x(t) = a\cdot u(at+10) - a\cdot u(at-10) + \delta(t-a) =$
$= 4\cdot u(4t+10) - 4\cdot u(4t-10) + \delta(t-4) = 4[u(4t+10) - u(4t-10)] + \delta(t-4)$

$h_1(t) = 2a\cdot u(t+a) - 2a u(t+a-5) = 8\cdot u(t+4) - 8u(t-1) = 8[u(t+4) - u(t-1)]$
$h_2(t) = u(t+2) - u(t-2)$

$y_1(t) = x(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h_1(t-\tau)\,d\tau =$

$= 32\int_{-\infty}^{+\infty} [u(4\tau+10) - u(4\tau-10)]\cdot[u(t-\tau+4) - u(t-\tau-1)]\,d\tau + 8\delta(t-4) * [u(t+4) - u(t-1)] \Rightarrow$

$y_1(t) = 32\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} [u(t-\tau+4) - u(t-\tau-1)]\,d\tau + 8[u(t) - u(t-5)] \Rightarrow$

$y_1(t) = 32\,y_{11}(t) + 8\,y_{12}(t)$

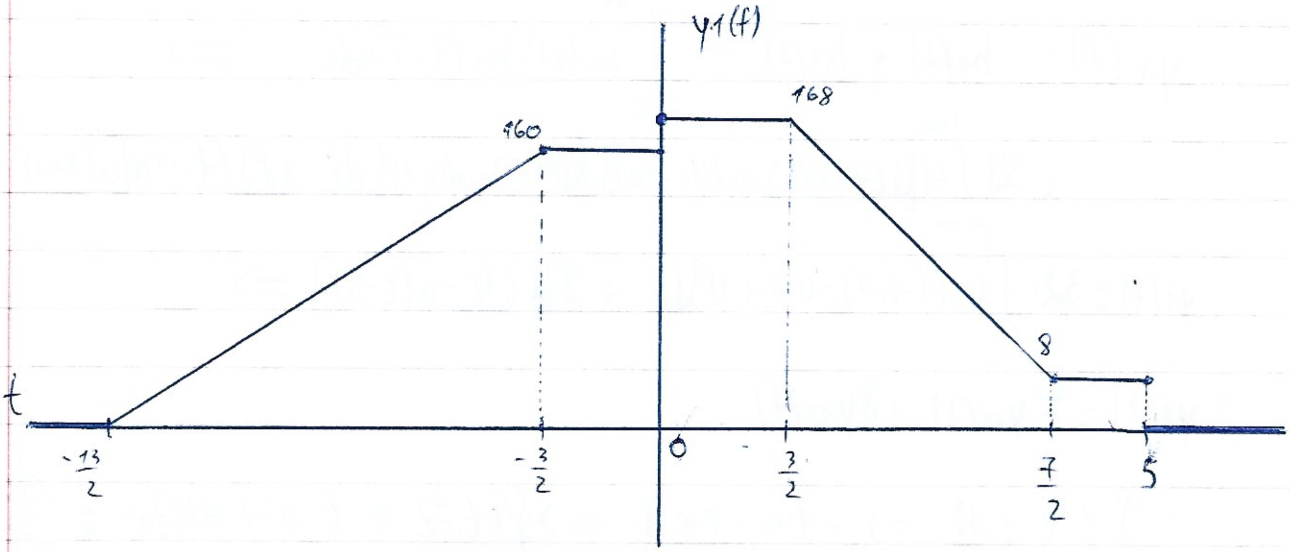
$-\frac{5}{2} \le \tau \le \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2} \le -\tau \le \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} t-\frac{3}{2} \le t-\tau+4 \le t+\frac{13}{2} & : \frac{3}{2}, -\frac{13}{2} \\ t-\frac{7}{2} \le t-\tau-1 \le t+\frac{3}{2} & : \frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \end{cases}$

- $t < -\frac{13}{2}$: $y_{11}(t) = 0$
- $-\frac{13}{2} \le t < -\frac{3}{2}$: $y_{11}(t) = \int_{-\frac{5}{2}}^{t+4} d\tau = [\tau]_{-\frac{5}{2}}^{t+4} = t+4+\frac{5}{2} = t+\frac{13}{2}$
- $-\frac{3}{2} \le t < \frac{3}{2}$: $y_{11}(t) = \int_{t-1}^{t+4} d\tau = [\tau]_{t-1}^{t+4} = t+4-t+1 = 5$
- $\frac{3}{2} \le t < \frac{7}{2}$: $y_{11}(t) = \int_{t-1}^{\frac{5}{2}} d\tau = [\tau]_{t-1}^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - t + 1 = \frac{7}{2} - t$
- $t \ge \frac{7}{2}$: $y_{11}(t) = 0$.

Και για y_2 έχουμε:

- $t < 0$: $y_{12}(t) = 0$
- $0 \le t < 5$: $y_{12}(t) = 1$
- $t \ge 5$: $y_{12}(t) = 0$

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 , & t < -\frac{13}{2} \\ 32t + 208 , & -\frac{13}{2} \leq t < -\frac{3}{2} \\ 160 , & -\frac{3}{2} \leq t < 0 \\ 168 , & 0 \leq t < \frac{3}{2} \\ -32t + 120 , & \frac{3}{2} \leq t < \frac{7}{2} \\ 8 , & \frac{7}{2} \leq t < 5 \\ 0 , & t \geq 5 \end{cases}$$



$$y_2(t) = y_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * y_1(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau) \cdot y_1(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(\tau+2) - u(\tau-2)] \cdot y_1(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_{-2}^{+2} y_1(t-\tau)d\tau \overset{t-\tau=s}{=} \int_{t-2}^{t+2} y_1(s)ds$$

- $t+2 < -\frac{13}{2} \Rightarrow t < -\frac{17}{2}$: $y_2(t) = 0$.
- $\left.\begin{matrix} t+2 < -\frac{13}{2}+4 \Rightarrow t < -\frac{9}{2} \\ t-2 > -\frac{13}{2}-4 \Rightarrow t > -\frac{17}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow -\frac{17}{2} \leq t < -\frac{9}{2}$; $y_2(t) = 32\int_{-\frac{13}{2}}^{t+2} (s + \frac{13}{2})ds$
- $\left.\begin{matrix} t+2 < -\frac{3}{2} \Rightarrow t < -\frac{7}{2} \\ t-2 > -\frac{13}{2} \Rightarrow t > -\frac{9}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow -\frac{9}{2} \leq t < -\frac{7}{2}$: $y_2(t) = 32\int_{t-2}^{t+2} (s + \frac{13}{2})ds$

(25)

- $\left.\begin{array}{l} t+2<0 \Rightarrow t<-2 \\ t-2>-\frac{3}{2}-4 \Rightarrow t>-\frac{7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{7}{2}\le t<-2: \quad y_2(t)=32\int_{t-2}^{-\frac{3}{2}}\left(s+\frac{13}{2}\right)ds+160\int_{-\frac{3}{2}}^{t+2}ds$

- $\left.\begin{array}{l} t+2<\frac{3}{2} \Rightarrow t<-\frac{1}{2} \\ t-2>0-4 \Rightarrow t>-2 \end{array}\right\} \Rightarrow -2\le t<-\frac{1}{2}: \quad y_2(t)=32\int_{t-2}^{-\frac{3}{2}}\left(s+\frac{13}{2}\right)ds+240+80\int_{0}^{t+2}ds$

- $\left.\begin{array}{l} t+2<\frac{5}{2} \Rightarrow t<\frac{1}{2} \\ t-2>\frac{3}{2}-4 \Rightarrow t>-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2}\le t<\frac{1}{2}: \quad y_2(t)=32\int_{t-2}^{-\frac{3}{2}}\left(s+\frac{13}{2}\right)ds+492-32\int_{\frac{3}{2}}^{t+2}\left(s-\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\right)ds$

- $\left.\begin{array}{l} t+2<\frac{7}{2} \Rightarrow t<\frac{3}{2} \\ t-2>\frac{5}{2}-4 \Rightarrow t>\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\le t<\frac{3}{2}: \quad y_2(t)=160(-t+2)+252-32\int_{\frac{3}{2}}^{t+2}\left(s-\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\right)ds$

- $\left.\begin{array}{l} t+2<4 \Rightarrow t<2 \\ t-2>\frac{7}{2}-4 \Rightarrow t>\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2}\le t<2: \quad y_2(t)=160(-t+2)+428+8\int_{\frac{7}{2}}^{t+2}ds$

- $\left.\begin{array}{l} t+2<5 \Rightarrow t<3 \\ t-2>4-4 \Rightarrow t>2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\le t<3: \quad y_2(t)=168\left(\frac{3}{2}-t+2\right)+176+8\left(t-\frac{3}{2}\right)$

- $\left.\begin{array}{l} t+2<\frac{11}{2} \Rightarrow t<\frac{7}{2} \\ t-2>5-4 \Rightarrow t>3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\le t<\frac{7}{2}: \quad y_2(t)=168\left(\frac{3}{2}-t+2\right)+188$

- $\left.\begin{array}{l} t+2<\frac{15}{2} \Rightarrow t<\frac{11}{2} \\ t-2>\frac{11}{2}-4 \Rightarrow t>\frac{7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{7}{2}\le t<\frac{11}{2}: \quad y_2(t)=12-32\int_{t-2}^{\frac{7}{2}}\left(s-\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\right)ds$

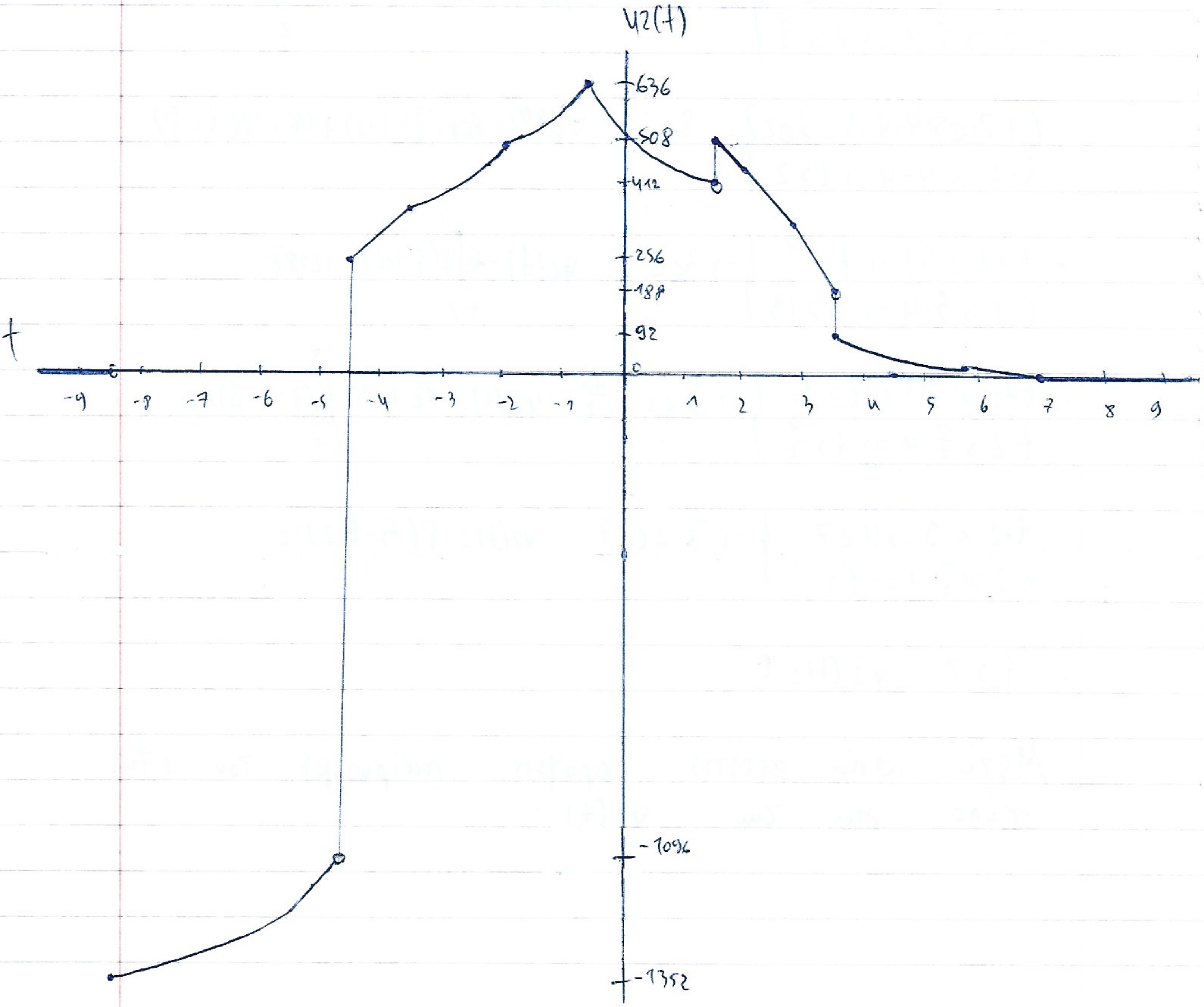
- $\left.\begin{array}{l} t+2<9 \Rightarrow t<7 \\ t-2>\frac{15}{2}-4 \Rightarrow t>\frac{11}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{11}{2}\le t<7: \quad y_2(t)=8(5-t+2)$

- $t\ge 7: \quad y_2(t)=0.$

Μετά απο αρκετές πράξεις παίρνουμε τον εξής τύπο για την $y_2(t)$:

(26)

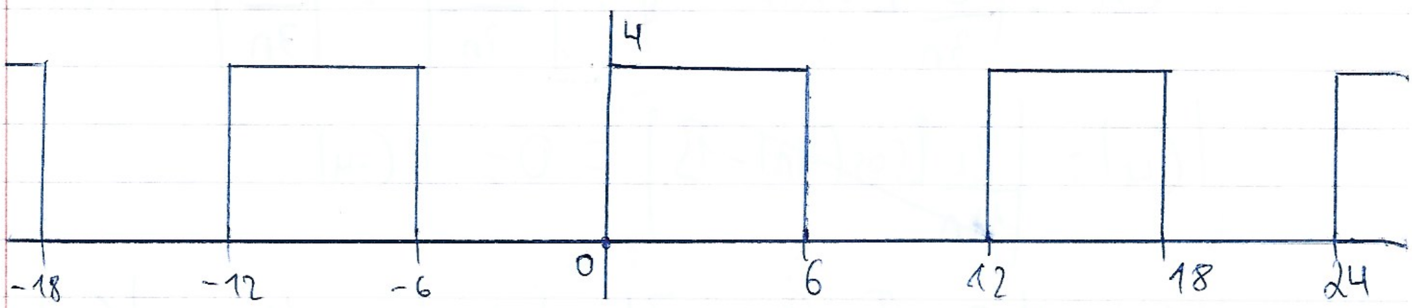
$$
y_2(t) = \begin{cases}
0 , & t < -\frac{17}{2} \text{ και } t \geq 7 . \\
16t^2 + 272t - 196 , & -\frac{17}{2} \leq t < -\frac{9}{2} \\
128t + 832 , & -\frac{9}{2} \leq t < -\frac{7}{2} \\
-16t^2 + 16t + 636 , & -\frac{7}{2} \leq t < -2 \\
-16t^2 + 24t + 652 , & -2 \leq t < -\frac{1}{2} \\
-32t^2 - 88t + 600 , & -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\
-16t^2 - 104t + 604 , & \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{2} \\
-152t + 736 , & \frac{3}{2} \leq t < 2 \\
-160t + 752 , & 2 \leq t < 3 \\
-168t + 776 , & 3 \leq t < \frac{7}{2} \\
16t^2 - 184t + 540 , & \frac{7}{2} \leq t < \frac{11}{2} \\
-8t + 56 , & \frac{11}{2} \leq t < 7
\end{cases}
$$



Άσκηση 1.6:

a) $T = 2a + 4 = 12.$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}.$

$$x(t) = \begin{cases} 4, & 0 \le t \le 6 \\ 0, & -a-2 < t < 0 \end{cases}$$



$$C_m = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-jm\frac{\pi}{6}t}dt = \cancel{\frac{1}{12}\int_{-6}^{0} 0\cdot e^{-jm\frac{\pi}{6}t}dt} + \frac{1}{12}\int_0^6 4\cdot e^{-jm\frac{\pi}{6}t}\cdot dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 e^{-jm\frac{\pi}{6}t}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-jm\frac{\pi}{6}}\cdot\left[e^{-jm\frac{\pi}{6}t}\right]_0^6 =$$

$$= \frac{2j}{m\pi}\left(e^{-jm\pi} - 1\right) = \frac{2j}{m\pi}\left[\cos(-m\pi) + \cancel{j\sin(-m\pi)} - 1\right] =$$

$$= \frac{2j}{m\pi}\left[\cos(-m\pi) - 1\right] = \frac{2j}{m\pi}\left[\cos(m\pi) - 1\right]$$

Μιγαδική σειρά Fourier του σήματος $x(t)$:

$$x(t) = 2 + \sum_{\substack{m=-\infty \\ \neq 0}}^{+\infty} \frac{2j}{m\pi}\left[\cos(m\pi) - 1\right]\cdot e^{jm\frac{\pi}{6}t}\cdot dt$$

$$\left(C_0 = \cancel{\frac{1}{12}\int_{-6}^{0} x(t)dt} + \frac{1}{12}\int_0^6 x(t)dt = \frac{1}{12}\int_0^6 4dt = \frac{1}{12}\left[4t\right]_0^6 = \frac{1}{12}\cdot 24 = 2 \right)$$

$$|C_1| = \left|\frac{2i}{\pi}\cdot(-2)\right| = \left|-\frac{4i}{\pi}\right| = \frac{4}{\pi} = |C_{-1}|$$

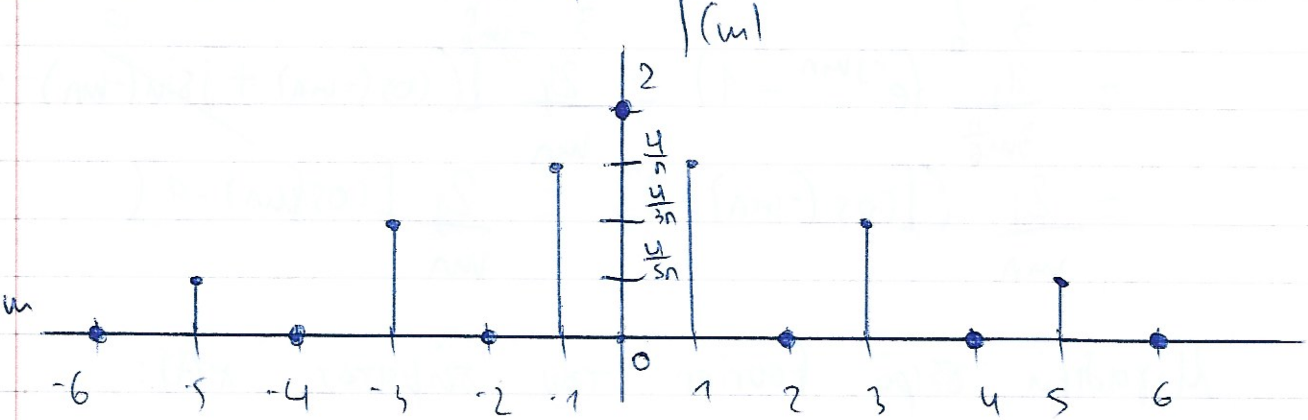
$$|C_2| = \left|\frac{2i}{2\pi}\left[\cos(2\pi)-1\right]\right| = \left|\cancel{\frac{i}{\pi}\,0}\right| = 0 = |C_{-2}|.$$

$$|C_3| = \left|\frac{2i}{3\pi}\left[\cos(3\pi)-1\right]\right| = \left|\frac{-4i}{3\pi}\right| = \frac{4}{3\pi} = |C_{-3}|$$

$$|C_4| = \left|\cancel{\frac{2i}{4\pi}\left[\cos(4\pi)-1\right]}\right| = 0 = |C_{-4}|.$$

$$|C_5| = \left|\frac{2i}{5\pi}\left[\cos(5\pi)-1\right]\right| = \left|\frac{-4i}{5\pi}\right| = \frac{4}{5\pi} = |C_{-5}|$$

$$|C_6| = \left|\cancel{\frac{2i}{6\pi}\left[\cos(6\pi)-1\right]}\right| = 0 = |C_{-6}|.$$



Γενικά έχουμε
$$|C_m| = \begin{cases} 0 & , \ m \bmod 2 = 0, \ m \neq 0. \\ \frac{4}{m\pi} & , \ m \bmod 2 = 1 \\ 2 & , \ m = 0 \end{cases}$$

β). $$\frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot y^*(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_T \left(\sum_m C_m^x e^{jm\omega_0 t}\right)\left(\sum_n (C_n^y)^* e^{-jn\omega_0 t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_m \sum_n C_m^x \cdot (C_n^y)^* \int_T e^{j\omega_0(m-n)t}\,dt \overset{m=n}{=}$$

(29)

$$= \frac{1}{T} \sum_m \sum_m C_m^x \cdot (C_m^y)^* \, [t]_0^T = \frac{1}{\cancel{T}} \sum_m \sum_m C_m^x \cdot (C_m^y)^* \cdot \cancel{T} =$$

$$= \sum_m \left[C_m^x \cdot (C_m^y)^* \right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[C_m^x \cdot (C_m^y)^* \right]$$

γ) $x_1(t) = 2\cos(10\pi t + 0{,}6\pi)$
$x_2(t) = 0{,}5\cos(10\pi t + 0{,}3\pi)$
$x_3(t) = 4\sin(10\pi t - 0{,}8\pi) = 4\cos(10\pi t - 1{,}3\pi)$

$\mathring{X}_1 = 2 \angle 108^\circ = -0{,}62 + 1{,}90j$
$\mathring{X}_2 = 0{,}5 \angle 54^\circ = 0{,}29 + 0{,}40j$
$\mathring{X}_3 = 4 \angle -234^\circ = 4 \angle 126^\circ = -2{,}35 + 3{,}24j$

$\mathring{X} = \mathring{X}_1 + \mathring{X}_2 + \mathring{X}_3 = -2{,}68 + 5{,}54j = 6{,}15 \angle 115{,}82^\circ$

Άρα $x(t) = 6{,}15\cos(10\pi t + 0{,}643\pi)$

$A = 6{,}15$, $\omega_0 = 10\pi$, $\varphi = 0{,}643\pi$.

30

31

Άσκηση 1.7:

α) $x_1(t) = t \cdot e^{at} \cdot \sin(at) \cdot u(-t)$

$x_1(-t) = -t \cdot e^{-at} \cdot \sin(-at) \cdot u(t) = t \cdot e^{-at} \cdot \sin(at) \cdot u(t)$

$x_1(-t) = t \cdot z(t)$

$z(t) = e^{-at} \cdot \sin(at) \cdot u(t) \xleftrightarrow{F.T.} \dfrac{a}{(a+jw)^2 + a^2} = Z(w)$

$x_1(-w) = j \dfrac{d}{dw} Z(w) = j \dfrac{(a+jw)(-2aj)}{[(a+jw)^2 + a^2]^2} =$

$= \dfrac{2a(a+jw)}{[(a+jw)^2 + a^2]^2} \Rightarrow$

$X_1(w) = \dfrac{2a(a-jw)}{[(a-jw)^2 + a^2]^2} \Rightarrow \boxed{X_1(w) = \dfrac{8(4-jw)}{[(4-jw)^2 + 16]^2}}$

β) $x_2(t) = \dfrac{t}{a^2+t^2} = t \cdot \dfrac{1}{a^2+t^2} = t \cdot z(t)$

$Z(w) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+a^2} \cdot e^{-jwt} \, dt = \frac{\pi}{a} \cdot e^{-a|w|}$

$X_2(w) = j \dfrac{d}{dw} Z(w) = j \dfrac{\pi}{a} \cdot e^{-a|w|} (-a) \cdot \operatorname{sgn}(w) \Rightarrow$

$X_2(w) = -j\pi \cdot e^{-a|w|} \cdot \operatorname{sgn}(w) \Rightarrow \boxed{X_2(w) = -j\pi \cdot e^{-4|w|} \cdot \operatorname{sgn}(w)}$

γ) $x_3(t) = a \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{t}{4a}\right) * [\delta(t+2a) + 2\delta(t) + \delta(t-2a)]$

$x_3(t) = y(t) * z(t)$

$Y(w) = a \cdot 4a \cdot \operatorname{sinc}(2a \cdot w) = 4a^2 \cdot \operatorname{sinc}(2a \cdot w)$

(32)

$$Z(\omega) = e^{2aj\omega} \cdot 1 + 2 + e^{-2aj\omega} \cdot 1 = e^{2aj\omega} + 2 + e^{-2aj\omega}$$

$$X_3(\omega) = Y(\omega) \cdot Z(\omega) = 4a^2 \cdot \text{sinc}(2a\omega) \cdot (e^{2aj\omega} + 2 + e^{-2aj\omega}) \Rightarrow$$

$$\boxed{X_3(\omega) = 64 \,\text{sinc}(8\omega) \cdot (e^{8j\omega} + 2 + e^{-8j\omega})}$$

δ). $$X_4(\omega) = \frac{a+j\omega}{4a^2 + (a+j\omega)^2} = \frac{a+j\omega}{(2a)^2 + (a+j\omega)^2}$$

$$u(t)\, e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{FT} \frac{a+j\omega}{\omega_0^2 + (a+j\omega)^2}, \quad a > 0$$

$$x_4(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_4(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, dt, \quad \text{ενώ} \quad X_4(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_4(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

Άρα έχουμε ότι $x_4(t) = u(t) \cdot e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 t) \Rightarrow$

$$\boxed{x_4(t) = u(t) \cdot e^{-4t} \cdot \cos(8t)}$$

ε). $$X_5(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-at} \cdot u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{(a+j\omega)^n}, \quad \text{για} \quad \text{Re}\{a\} > 0$$

$$x_5(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-at} \cdot u(t) \Rightarrow \boxed{x_5(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-4t} \cdot u(t)}$$

α) $$X_6(\omega) = \frac{11a}{-3\omega^2 + j13a\omega + 4a^2} \overset{a=4}{=} \frac{44}{3(j\omega)^2 + 52(j\omega) + 64} = \frac{44}{3\left(j\omega + \frac{4}{3}\right)(j\omega + 16)} =$$

$$= \frac{1}{j\omega + \frac{4}{3}} - \frac{1}{j\omega + 16} = X_{61}(\omega) - X_{62}(\omega).$$

$$e^{-at} \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}, \quad Re\{a\} > 0$$

$x_{61}(t) = e^{-\frac{4}{3}t} \cdot u(t)$ και $x_{62}(t) = e^{-16t} \cdot u(t).$

$$x_6(t) = e^{-\frac{4}{3}t} \cdot u(t) - e^{-16t} \cdot u(t) \Rightarrow \boxed{x_6(t) = u(t)\left[e^{-\frac{4}{3}t} - e^{-16t}\right]}$$

Άσκηση 1.8:

α) $x_1[n] = n\cdot 3^{-|n-a|} = n\cdot 3^{-|n-4|}$

$$a^{|n|} \leftrightarrow \frac{1-a^2}{1-2a\cos(\Omega)+a^2} \quad , \text{ για } |a|<1$$

$$3^{-|n|} = \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} \leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{9}}{1-\frac{2}{3}\cdot\cos(\Omega)+\frac{1}{9}} = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos(\Omega)} = \frac{8}{10-6\cos(\Omega)}$$

$$x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0}\cdot X(\Omega)$$

$$3^{-|n-4|} \leftrightarrow e^{-4j\Omega}\cdot\frac{4}{5-3\cos(\Omega)}$$

$$n\cdot x[n] \leftrightarrow j\frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$$

$$X_1(\Omega) = j\frac{d}{d\Omega}\left(e^{-4j\Omega}\frac{4}{5-3\cos(\Omega)}\right) = 4j\left\{\frac{e^{-4j\Omega}\cdot(-4j)\cdot[5-3\cos(\Omega)] - e^{-4j\Omega}\cdot 3\sin(\Omega)}{[5-3\cos(\Omega)]^2}\right\} \Rightarrow$$

$$X_1(\Omega) = \frac{16e^{-4j\Omega} - 12j\sin(\Omega)\cdot e^{-4j\Omega}}{[5-4\cos(\Omega)]^2} \Rightarrow \boxed{X_1(\Omega) = e^{-4j\Omega}\cdot\frac{[16-j12\sin(\Omega)]}{[5-4\cos(\Omega)]^2}}$$

b) $x_2[n] = \sum_{k=-N}^{N}(N+1-|k|)\cdot\delta[k] \quad , N=4a \overset{a=4}{\Rightarrow}$

$$x_2[n] = \sum_{-16}^{16}(17-|k|)\cdot\delta[k] \overset{\delta[k]=0}{\underset{k\neq 0}{=}} 17$$

$$X_2(\Omega) = 17\cdot 2\pi\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-2\pi k) \Rightarrow \boxed{X_2(\Omega) = 34\pi\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-2\pi k)}$$

γ) $X_3(\theta) = |\sin\theta|$

$$x_3[n] = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|\sin\theta|\cdot e^{j\theta n}\cdot d\theta = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\sin\theta\cdot e^{j\theta n}\cdot d\theta + \int_{0}^{\pi}\sin\theta\cdot e^{j\theta n}\cdot d\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\pi}\sin\theta\cdot e^{j\theta n}\cdot d\theta - \int_{-\pi}^{0}\sin\theta\cdot e^{j\theta n}\cdot d\theta\right)$$

$$I = \int \sin(x)\cdot e^{jnx}\cdot dx = \frac{e^{jnx}}{jn}\cdot\sin(x) - \int\frac{e^{jnx}}{jn}\cos(x)\,dx =$$

$$= \frac{e^{jnx}\cdot\sin(x)}{jn} - \left(\frac{e^{jnx}\cdot\cos(x)}{(jn)^2} + \int\frac{e^{jnx}\cdot\sin(x)}{(jn)^2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{e^{jnx}\cdot\sin(x)}{jn} - \frac{e^{jnx}\cdot\cos(x)}{(jn)^2} - \frac{1}{(jn)^2}\cdot\int e^{jnx}\cdot\sin(x)\,dx \Rightarrow$$

$$I\left(1+\frac{1}{(jn)^2}\right) = \frac{e^{jnx}\cdot\sin(x)}{jn} - \frac{e^{jnx}\cdot\cos(x)}{(jn)^2} \quad 1+\frac{1}{(jn)^2} = \frac{n^2-1}{n^2} \Rightarrow$$

$$I = \frac{n^2}{n^2-1}\cdot\frac{e^{jnx}\cdot\sin(x)}{jn} - \frac{n^2}{n^2-1}\cdot\frac{e^{jnx}\cdot\cos(x)}{-n^2} \Rightarrow$$

$$I = \frac{n^2}{n^2-1}\cdot\frac{e^{jnx}\cdot\sin(x)}{jn} + \frac{1}{n^2-1}\cdot e^{jnx}\cdot\cos(x) \Rightarrow$$

$$I = \frac{n}{j(n^2-1)}\,e^{jnx}\cdot\sin(x) + \frac{1}{n^2-1}\,e^{jnx}\cdot\cos(x) \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{n^2-1}\cdot e^{jnx}\left[\frac{n}{j}\cdot\sin(x) + \cos(x)\right] = \frac{1}{n^2-1}\cdot e^{jnx}\left[\cos(x) - jn\sin(x)\right].$$

$$x_3[n] = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n^2-1}e^{jn\pi}[\cos(\pi) - jn\cancel{\sin(\pi)}^{0}] - \frac{1}{n^2-1}\cdot e^{jn0}[\cos(0) - jn\cancel{\sin(0)}^{0}] - \frac{1}{n^2-1}e^{jn0}[\cos(0) - jn\cancel{\sin(0)}^{0}] + \frac{1}{n^2-1}\cdot e^{-jn\pi}[\cos(-\pi) - jn\cancel{\sin(-\pi)}^{0}]\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{n^2-1}\left(-e^{j\pi n} - e^{jn0} - e^{jn0} - e^{-j\pi n}\right) = \frac{-1}{2\pi(n^2-1)}\left[2 + 2\cos(\pi n)\right] \overset{\cos(\pi n) = (-1)^n}{=}$$

$$= \frac{-1-(-1)^n}{\pi(n^2-1)} = \frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)}$$

(37)

δ) $X_4(\Omega) = \begin{cases} 4, & \frac{1}{3} < |\Omega| < 1 \\ 0, & |\Omega| \leq \frac{1}{3} \text{ και } 1 \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$

$X_{41}(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq 1 \\ 0, & 1 < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$, $x_{41}[n] = \frac{\sin(n)}{\pi n}$

$X_{42}(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \frac{1}{3} \\ 0, & \frac{1}{3} < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$, $x_{42}[n] = \frac{\sin(\frac{n}{3})}{\pi n}$.

$X_4(\Omega) = 4 \cdot X_{41}(\Omega) - 4 X_{42}(\Omega) = 4[X_{41}(\Omega) - X_{42}(\Omega)]$.

$x_4[n] = 4[x_{41}[n] - x_{42}[n]] = 4\left[\frac{\sin(n)}{\pi n} - \frac{\sin(\frac{n}{3})}{\pi n}\right] \Rightarrow$

$$\boxed{x_4[n] = \frac{4}{\pi n}\left[\sin(n) - \sin\left(\frac{n}{3}\right)\right]}$$

ε). i) $6y[n] - 5y[n-1] + y[n-2] = 6x[n]. \xleftrightarrow{DTFT}$

$6Y[\Omega] - 5Y[\Omega] \cdot e^{-j\Omega} + Y[\Omega] \cdot e^{-2j\Omega} = 6X[\Omega] \Rightarrow$

$Y[\Omega][6 - 5e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}] = 6X[\Omega] \Rightarrow$

$$\frac{Y[\Omega]}{X[\Omega]} = \boxed{H[\Omega] = \frac{6}{6 - 5e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}}}$$

ii). $H[\Omega] = \frac{6}{6 - 5e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}} = \frac{6}{6 - 5e^{-j\Omega} + (e^{-j\Omega})^2} = \frac{6}{e^{-j\Omega} - 3} - \frac{6}{e^{-j\Omega} - 2} =$

$= \frac{2}{\frac{1}{3} e^{-j\Omega} - 1} - \frac{3}{\frac{1}{2} e^{-j\Omega} - 1} = -2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\Omega}} + 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} \Longrightarrow$

38

$$\Rightarrow \boxed{h[n] = -2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^n\cdot u[n] + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\cdot u[n].}$$

$$\left(a^n\cdot u[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-a\cdot e^{-j\Omega}} \quad , |a|<1. \right)$$

iii) $x_1[n] = \delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n-1] \Rightarrow X_1(\Omega) = 1 - \frac{1}{3}\cdot e^{-j\Omega}$

$$Y_1(\Omega) = X_1(\Omega)\cdot H(\Omega) = \left(-2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}} + 3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\right)\left(1-\frac{e^{-j\Omega}}{3}\right) =$$

$$= H(\Omega) - \frac{1}{3}\cdot H(\Omega)\cdot e^{-j\Omega} \Rightarrow.$$

$\boxed{y_1[n] = h[n] - \frac{1}{3}\cdot h[n-1].}$, όπου $h[n]$ η $h[n]$ του ii)

iv) $x_2[n] = e^{j\pi n}$ (ιδιοσυνάρτηση για $\Omega = \pi$).

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\cdot e^{j\pi(n-k)} \quad \text{(συνελικτικό άθροισμα).}$$

$$y_2[n] = e^{j\pi n}\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\cdot e^{-j\pi k} \quad , \text{ όπου } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\cdot e^{-j\pi k} = H(\pi)$$

Άρα $y_2[n] = e^{j\pi n}\cdot H(\pi) = e^{j\pi n}\left[\frac{6}{e^{-j\pi}-3} - \frac{6}{e^{-j\pi}-2.}\right] \overset{e^{-j\pi}=-1}{\Rightarrow}$

$$y_2[n] = \left(e^{j\pi}\right)^n\left[\frac{6}{-4} - \frac{6}{-3}\right] \overset{e^{j\pi}=-1}{\Rightarrow} \boxed{y_2[n] = \frac{(-1)^n}{2.}}$$

Άσκηση 1.9:

α) $$2y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 2\cdot\frac{d^2}{dt^2}\cdot y(t) = x(t) - \frac{d}{dx}\cdot x(t)$$

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n \cdot X(\omega)$$

$$2Y(\omega) + 5\cdot(j\omega)\cdot Y(\omega) + 2(j\omega)^2\cdot Y(\omega) = X(\omega) - (j\omega)\cdot X(\omega) \Rightarrow$$

$$Y(\omega)\left[2+5(j\omega)+2(j\omega)^2\right] = X(\omega)\left[1-(j\omega)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{1-(j\omega)}{2+5(j\omega)+2(j\omega)^2}$$

β). $$H(\omega) = \frac{1-(j\omega)}{2+5(j\omega)+2(j\omega)^2} = \frac{1-(j\omega)}{2(j\omega+\frac{1}{2})(j\omega+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} - \frac{1}{j\omega+2}$$

$$e^{-at}\cdot u(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j\omega}$$ και $H(\omega) = H_1(\omega) - H_2(\omega)$.

$$H_1(\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot u(t) = h_1(t)$$

$$H_2(\omega) = \frac{1}{j\omega+2} \longleftrightarrow e^{-2t}\cdot u(t) = h_2(t)$$

$$h(t) = h_1(t) - h_2(t) = \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot u(t) - e^{-2t}\cdot u(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{h(t) = u(t)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{t}{2}} - e^{-2t}\right]}$$

γ) $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$

$$y(t) = e^{-3t} \cdot u(t-1) = \frac{e^{-3t+3} \cdot u(t-1)}{e^3} = \frac{1}{e^3} \cdot e^{-3(t-1)} \cdot u(t-1)$$

$$z(t) = \frac{1}{e^3} \cdot e^{-3t} \cdot u(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{e^3} \cdot \frac{1}{3+j\omega} = Z(\omega)$$

$$z(t-1) = y(t) \longleftrightarrow e^{-j\omega} \cdot Z(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{e^3} \cdot \frac{1}{3+j\omega} = e^{-3-j\omega} \cdot \frac{1}{3+j\omega} \Rightarrow$$

$$Y(\omega) = e^{-(3+j\omega)} \cdot \frac{1}{3+j\omega}$$

$$X(\omega) = \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} = \frac{e^{-(3+j\omega)}}{3+j\omega} \cdot \frac{2+5j\omega+2(j\omega)^2}{1-j\omega} =$$

$$= 2e^{-3} \cdot e^{-j\omega} \cdot \frac{2+5j\omega+2(j\omega)^2}{3-2j\omega-(j\omega)^2} =$$

$$= 2e^{-3} \cdot e^{-j\omega} \cdot \left(\frac{j+8}{3-2j\omega-(j\omega)^2} - 2 \right) = 2e^{-3} \cdot e^{-j\omega} \left(\frac{\frac{5}{4}}{j\omega+3} - \frac{\frac{9}{4}}{j\omega-1} - 2 \right) =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot e^{-3} \cdot e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega+3} - \frac{9}{2} \cdot e^{-3} \cdot e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega-1} - 4 \cdot e^{-3} \cdot e^{-j\omega} =$$

$$= X_1(\omega) - X_2(\omega) - X_3(\omega).$$

$$X_1(\omega) = \frac{5}{2} \cdot e^{-3} \cdot e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega+3} \overset{F.T.^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{5}{2} \cdot e^{-3} \cdot e^{-3(t-1)} u(t-1) = x_1(t)$$

$$X_2(\omega) = \frac{9}{2} \cdot e^{-3} \cdot e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega-1} \overset{F.T.^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{9}{2} \cdot e^{-3} (-e^{t-1}) \cdot u(-t+1) = x_2(t) \quad (a<0 \to 1.7.a)$$

$$X_3(\omega) = 4e^{-3} \cdot e^{-j\omega} \overset{F.T.^{-1}}{\longleftrightarrow} 4 \cdot e^{-3} \cdot \delta(t-1) = x_3(t)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot e^{-3} \cdot e^{-3(t-1)} \cdot u(t-1) + \frac{9}{2} \cdot e^{-3} \cdot e^{t-1} \cdot u(-t+1) - 4 \cdot e^{-3} \cdot \delta(t-1) =$$

$$= e^{-3} \left[\frac{5}{2} \cdot e^{-3(t-1)} \cdot u(t-1) + \frac{9}{2} \cdot e^{t-1} \cdot u(-t+1) - 4\delta(t-1) \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = \frac{5}{2} \cdot e^{-3t} \cdot u(t-1) + \frac{9}{2} \cdot e^{t-4} \cdot u(-t+1) - 4 \cdot e^{-3} \cdot \delta(t-1)}$$