Система M/M/m с отказами. *B*-формула Эрланга

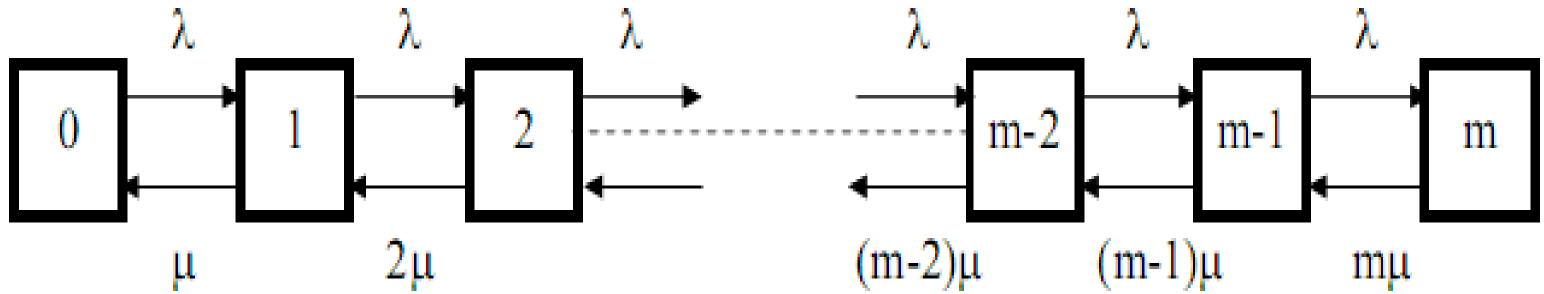
Условие работы системы таково:

если требование поступает в момент времени, когда все *m* приборов (каналов, линий, узлов и т.п.) заняты, то оно теряется.

В системе M/M/m с отказами очередь отсутствует и поэтому система имеет конечное множество состояний, число которых определяется числом приборов обслуживания *m*.

Описание функционирования системы, как и ранее, можно сделать в терминах процесса размножения и гибели при следующих параметрах:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda = \mathrm{const}, & k < m; \\ 0, & k \geq m; \end{cases} \qquad \mu_k = k\mu, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad \mu = \mathrm{const}.$$



Система M/M/m с отказами. *B*-формула Эрланга

Поток требований последовательно переводит систему из любого данного состояния в правое соседнее состояние с одной и той же интенсивностью λ.

Перевод системы из какого-либо данного состояния в левое соседнее состояние осуществляется за счет обслуживания требований и можно говорить об интенсивности потока обслуживаний, который уже зависит от исходного данного состояния.

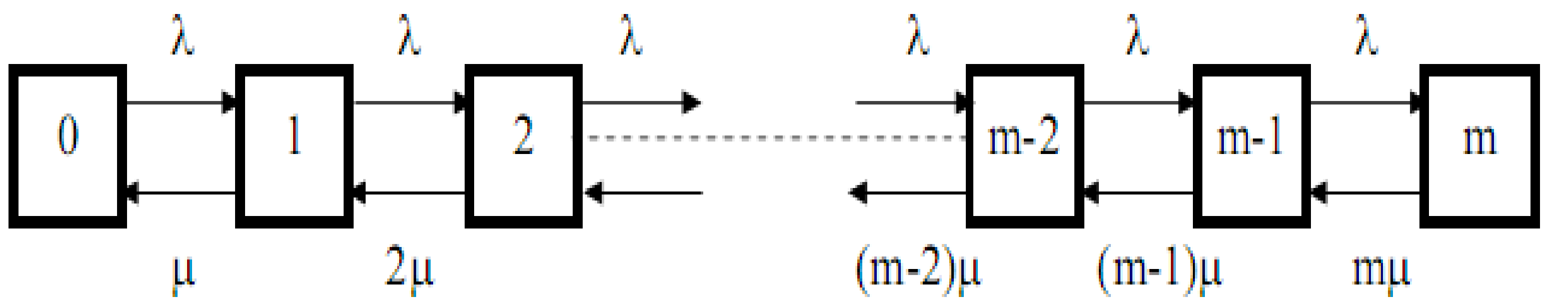
Если закончит обслуживание либо первый, либо второй канал, поэтому суммарная интенсивность их потоков обслуживания будет равна 2μ.

Интенсивность обслуживания увеличивается, поскольку может освободиться любой из двух каналов обслуживания.

Таким образом, суммарный поток обслуживаний будет иметь интенсивность, кратную исходному данному состоянию.

Система M/M/m с отказами. *B*-формула Эрланга

Вероятности состояний цепи с учетом заданных параметров :



$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = p_0 \left[\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{3\mu} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda}{k\mu} \right] = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \cdot \frac{1}{k!}$$

$$\rho = \lambda / \mu$$

$$p_k = \begin{cases} p_0 \dfrac{\rho^k}{k!}, & k \le m; \\ 0, & k > m. \end{cases}$$

Система M/M/m с отказами. *B*-формула Эрланга

Вероятность определим по формуле

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{m}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda}{(i+1)\mu}} = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{m}\frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m}\frac{\rho^k}{k!}}.$$

Для случая *k* = *m* получается широко известная *B*-формулу Эрланга

$$p_m = \frac{\rho^m / m!}{\sum_{k=0}^{m}\rho^k / k!} = \frac{(\lambda/\mu)^m / m!}{\sum_{k=0}^{m}(\lambda/\mu)^k / k!}.$$

Вероятность описывает долю времени, когда все *m* приборов заняты.

Датский инженер А. К. Эрланга в 20-х гг. XX в. впервые исследовал систему обслуживания с отказами применительно к телефонной связи. Задачу анализа многоканальной системы с отказами в обслуживании называют еще *классической задачей Эрланга*.

Система M/M/m с отказами. *B*-формула Эрланга

Математическая модель системы M/M/m с отказами в виде дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса размножения и гибели с параметрами (4.38) будет иметь следующий вид:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_1(t) + \lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t),$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -(\lambda + 2\mu)P_2(t) + \lambda P_1(t) + 3\mu P_3(t),$$

....

$$\frac{dP_{m-1}(t)}{dt} = -[\lambda + (m-1)\mu]P_{m-1}(t) + \lambda P_{m-2}(t) + m\mu P_m(t),$$

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = \lambda P_{m-1}(t) - m\mu P_m(t).$$

Система M/M/m с отказами. *B*-формула Эрланга

Для решения системы задаются естественные начальные условия:

$$P_0(0)=1,\quad P_i(0)=0,\quad i=1,2,\ldots,m.$$

Вероятности $P_k(t),\quad k=\overline{1,m}$ характеризуют среднюю загрузку системы, и ее изменение с течением времени

Рассмотрим следующие характеристики системы M/M/m с отказами: вероятность отказа в обслуживании *ротк*, относительная пропускная способность *Q*,

абсолютная пропускная способность *A*,

среднее число занятых обслуживанием каналов *Nз*,

среднее число свободных каналов обслуживания *Nсв*, коэффициент занятости каналов обслуживанием *Кз*,

среднее время пребывания требования в системе *Тс,* среднее время простоя каналов обслуживания *Тпр*.

Система M/M/m с отказами. *B*-формула Эрланга

Требование, поступающее в систему, получает отказ в том случае, когда все каналы обслуживания заняты. Поэтому вероятность отказа в обслуживании $p_{отк}$ будет равна вероятности того, что заняты все *m* каналов.

$$p_{отк} = p_m = p_0 \frac{\rho^m}{m!} = \frac{\rho^m / m!}{\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!}},$$

$$\rho = \lambda / \mu$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{m} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu}} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!}}.$$

Система M/M/m с отказами. *B*-формула Эрланга

Относительная пропускная способность *Q* определяет долю обслуженных требований и соответственно *Q* — это вероятность того, что требование будет обслужено.

В системах с отказами требования или обслуживаются или получают отказ (очереди нет). Поэтому

$$Q + p_{отк} = 1, \quad \Rightarrow \quad Q = 1 - p_{отк} = 1 - p_0 \frac{\rho^m}{m!}.$$

Абсолютная пропускная способность *A* определяется как среднее число требований, обслуживаемых в единицу времени.

В системе обслуживаются те требования, которые поступают в нее с интенсивностью λ.

Средняя доля пришедших требований и обслуживаемых системой определяется как относительная пропускная способность *Q* системы.

Поэтому величину абсолютной пропускной способности системы определяется в виде

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - p_0 \frac{\rho^m}{m!} \right).$$

Система M/M/m с отказами. *B*-формула Эрланга

Среднее число занятых обслуживанием каналов *Nз* определяется как математическое ожидание дискретной случайной величины:

$$N_з = \sum_{k=0}^{m} kp_k = \sum_{k=1}^{m} kp_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{kp_0\rho^k}{k!} = \sum_{k=1}^{m} \frac{p_0\rho^k}{(k-1)!} = \rho \sum_{k=1}^{m} \frac{p_0\rho^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \{k-1 = j, \quad k=1,\ j=0, \quad k=m,\ j=m-1\} = \rho \sum_{j=0}^{m-1} \frac{p_0\rho^j}{j!}.$$

Сумма в последнем выражении определяет собой вероятность того, что в системе будет не более (m–1) требований. Если к этой сумме добавить вероятность нахождения в системе точно m требований, то получим полную группу событий и, следовательно:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{p_0\rho^j}{j!} + \frac{p_0\rho^m}{m!} = 1, \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=0}^{m-1} \frac{p_0\rho^j}{j!} = 1 - \frac{p_0\rho^m}{m!}.$$

Система M/M/m с отказами. *B*-формула Эрланга

В итоге

$$N_з = \rho\left(1 - \frac{p_0\rho^m}{m!}\right).$$

Среднее число свободных каналов обслуживания ***Nсв*** определяется как разность между общим числом каналов системы и средним числом занятых обслуживанием каналов:

$$N_{св} = m - N_з = m - \rho\left(1 - \frac{p_0\rho^m}{m!}\right).$$

Коэффициент занятости каналов обслуживанием ***Кз*** определяется отношением среднего числа занятых каналов к их общему числу:

$$K_з = \frac{N_з}{m} = \frac{\rho}{m}\left(1 - \frac{p_0\rho^m}{m!}\right).$$

Система M/M/m с отказами. *B*-формула Эрланга

Среднее время ***Тс*** пребывания требования в системе M/M/m с отказами определятся по формуле Литтла:

$$N_з = \lambda T_c, \quad \Rightarrow \quad T_c = \frac{N_з}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0\rho^m}{m!}\right) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{p_0\rho^m}{m!}\right).$$

Среднее время простоя каналов обслуживания ***Тпр*** определяется как:

$$N_{св} = \lambda T_{пр}, \quad \Rightarrow \quad T_{пр} = \frac{N_{св}}{\lambda} = \frac{m}{\lambda} - \frac{\rho}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0\rho^m}{m!}\right) = \frac{m}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{p_0\rho^m}{m!}\right),$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!}}.$$

Пример анализа автоматической телефонной станции как системы массового обслуживания с отказами

Условие примера.
Автоматическая телефонная станция (АТС) обеспечивает не более 97 переговоров одновременно.
Средняя продолжительность разговора равна 1 мин, а вызовы поступают в среднем через каждые 0.5 *с*.
Рассматривая такую АТС как многоканальную систему обслуживания с отказами и простейшим входным потоком, определить:
вероятность отказа ***ротк***;

относительную пропускную способность ***Q***;

абсолютную пропускную способность ***A***;

среднее число занятых каналов ***Nз***;

среднее время ***Tср*** пребывания вызова на станции с учетом того, что разговор может и не состояться.

Характеристики рассматриваемой СМО:
число каналов обслуживания $m = 97$;
интенсивность входного потока $\lambda = 1/0.5 = 2$ *с*–1;
интенсивность обслуживания $\mu = 1/60 = 0.01667$ *с*–1;
приведенная плотность потока заявок $\rho = \lambda/\mu = 2/(1/60) = 120$.

Пример анализа автоматической телефонной станции как системы массового обслуживания с отказами

Вероятности состояний системы с отказами в стационарном режиме:

$$p_k = p_0 \frac{\rho^k}{k!}, \quad k = \overline{1,97}\,; \quad p_0 = \left(\sum_{k=0}^{97} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1},$$

где — p_k

вероятность того, что в системе будет точно ***k*** вызовов, — p_0 вероятность того, что в системе не будет вызовов.

Принимаемые допущения:
При больших значениях ***m*** (***m*** > 20) полагают:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}, \qquad k = \overline{1, m}\,.$$

Пример анализа автоматической телефонной станции как системы массового обслуживания с отказами

При больших значениях приведенной плотности потока ρ (больше 20) применяется формула:

$$\sum_{k=0}^{i} \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} \approx 0.5 + \Phi\left(\frac{i + 0.5 - \rho}{\sqrt{\rho}}\right),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

Функция Лапласа или интеграл вероятности. Функция Лапласа может быть найдена как решение следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad \Phi(0) = 0.$$

Величина R1 может быть вычислена также по следующему выражению:

$$R1 = \sum_{k=0}^{97} \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} \approx 0.5 + \varPhi\left(\frac{97 + 0.5 - 120}{\sqrt{120}}\right) = 0.5 + \varPhi(-2.054) = 0.5 - \varPhi(2.54) =$$

$$= 0.5 - 0.48 = 0.02.$$

Расчет вероятностей состояний может производиться в виде

$$p_k = \frac{R(k,\rho) - R(k-1,\rho)}{R(m,\rho)}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Пример анализа автоматической телефонной станции как системы массового обслуживания с отказами

Относительная пропускная способность, где вероятность отказа равна вероятности занятости всех каналов .:

$$Q = 1 - p_{отк} = 1 - p_m,$$

С использованием функции Лапласа:

$$p_m = \frac{R(m,\rho) - R(m-1,\rho)}{R(m,\rho)} = 1 - \frac{R(m-1,\rho)}{R(m,\rho)} = 1 - \frac{R(96,120)}{R(97,120)},$$

$$R(96,120) = 0.5 + \Phi\left(\frac{96 + 0.5 - 120}{\sqrt{120}}\right) = 0.5 + \Phi(-2.1452) = 0.5 - \Phi\left(2.1452\right) =$$

$$= 0.5 - 0.484 = 0.016.$$

Таким образом, вероятность отказа и относительная пропускная способность равны

$$p_m = p_{отк} = 1 - \frac{0.016}{0.02} = 1 - 0.8 = 0.2;$$

$$Q = 1 - p_m = 1 - p_{отк} = 1 - 0.2 = 0.8.$$

Абсолютная пропускная способность ***A*** ***(вызовы/с.)***:

$$A = \lambda \cdot Q = 2 \cdot 0.8 = 1.6$$

Среднее число занятых каналов ***Nз.*** Величина Nср может быть определена как отношение абсолютной производительности A системы (среднее число вызовов, обслуженных в единицу времени) к интенсивности обслуживания μ (среднее число вызовов, обслуживаемых в единицу времени одним каналом):

$$N_з = \frac{A}{\mu} = \frac{1.6}{1/60} = 96. \quad \left\{ N_{cp} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda Q}{\mu} = \rho Q \right\}$$

Среднее время ***Тср*** пребывания вызова на станции с учетом того, что разговор может и не состояться

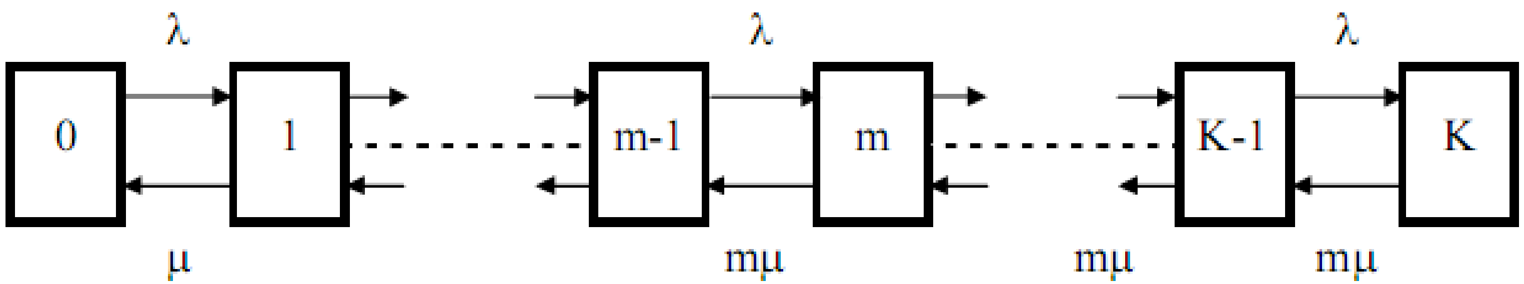
Значение ***Тср*** вычислим по формуле Литтла:

$$N_з = \lambda T_{ср}; \quad \Rightarrow \quad T_{ср} = \frac{N_з}{\lambda} = \frac{96}{2} = 48 \ (с).$$

Система M/M/m/K с конечным накопителем

Рассматриваемая система имеет ограниченное число мест ожидания в очереди и m параллельно работающих приборов (каналов).
Общее число требований, находящихся на обслуживании и в очереди, составляет величину ***K***.
Входящий поток требований пуассоновский, обслуживание осуществляется по экспоненциальному закону.
Если очередное требование приходит, когда система занята (заняты все каналы обслуживания плюс накопитель), то оно получает отказ в обслуживании и сразу покидает систему.
Для описания работы системы M/M/m/K применим процесс размножения и гибели со следующими параметрами:

$$\lambda_k = \lambda = const, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1;$$
$$\mu_k = k\mu, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$
$$\mu_k = m\mu, \quad m \le k \le K, \quad \mu = const.$$



Система M/M/m/K с конечным накопителем

Для случая, когда состояние системы не превышает значения ***m***, определим:

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = p_0 \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda}{k\mu} = p_0 \frac{\rho^k}{k!},$$

Для дальнейшего расчета, когда возникает очередь в системе, применим мнемоническое правило: на границе раздела двух состояний потоки вероятностей равны между собой.

Для границы между состоянием ***m*** и состоянием ***m***+1:

$$\lambda p_m = m\mu p_{m+1}, \quad p_{m+1} = \frac{\lambda p_m}{m\mu} = \frac{\rho p_m}{m} = \frac{\rho p_0 \rho^m}{m m!} = \frac{p_0 \rho^{m+1}}{m m!},$$

Система M/M/m/K с конечным накопителем

Для границы состояний ***m***+1 и ***m***+2

$$\lambda p_{m+1} = m\mu p_{m+2}, \quad p_{m+2} = \frac{\lambda p_{m+1}}{m\mu} = \frac{\rho p_0 \rho^{m+1}}{m\,m\,m!} = \frac{p_0 \rho^{m+2}}{m^2\, m!}$$

И продолжая аналогичные расчеты, можно получить (где не $m+k$ превышает допустимой величины ***K***.)

$$p_{m+k} = \frac{p_0 \rho^{m+k}}{m^k\, m!}, \quad 0 \le k \le (K-m),$$

С учетом стационарные вероятности системы M/M/m/K равны

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{p_0 \rho^k}{k!}, & k \le m, \\ \dfrac{p_0 \rho^k}{m^{k-m}\, m!}, & m \le k \le K. \end{cases}$$

Система M/M/m/K с конечным накопителем

Вероятность находится из нормировочного условия, используя

$$\sum_{k=0}^{K} p_k = 1, \quad \sum_{k=0}^{m} p_k + \sum_{k=m+1}^{K} p_k = 1, \quad \sum_{k=0}^{m} \frac{p_0 \rho^k}{k!} + \sum_{k=1}^{K-m} \frac{p_0 \rho^{m+k}}{m^k m!} = 1,$$

$$p_0 \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \sum_{k=1}^{K-m} \frac{\rho^k}{m^k} \right] = 1, \quad p_0 = \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \sum_{k=1}^{K-m} \left(\frac{\rho}{m} \right)^k \right]}.$$

$$p_0 = \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \sum_{k=1}^{K-m} \left(\frac{\rho}{m} \right)^k \right]} = \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m \rho}{m! m} \sum_{k=0}^{K-1-m} \left(\frac{\rho}{m} \right)^k \right]} =$$

$$= \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{m+1}}{m m!} \cdot \frac{1-(\rho/m)^{K-m}}{1-(\rho/m)} \right]} = \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{m+1}}{m!(m-\rho)} \left(1 - \left(\frac{\rho}{m} \right)^{K-m} \right) \right]}$$

Операционные характеристики системы M/M/m/K

$$p_{отк} = \frac{p_0 \rho^K}{m^{K-m} m!} = \frac{p_0 \rho^{m+S}}{m^S m!},$$

где ***S*** — допустимая длина очереди

Относительная пропускная способность

$$Q = 1 - p_{отк} = 1 - \frac{p_0 \rho^{m+S}}{m^S m!}.$$

Абсолютная пропускная способность ***A***:

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{p_0 \rho^{m+S}}{m^S m!} \right).$$

Вероятность наличия очереди равна:

$$p_q = \frac{p_0 \rho^m \rho}{m!} \cdot \frac{1-(\rho/m)^S}{1-(\rho/m)} = \frac{p_0 \rho^{m+1}}{m!(m-\rho)} \left[1 - \left(\frac{\rho}{m} \right)^S \right].$$

Операционные характеристики системы M/M/m/K

Вероятность того, что все каналы обслуживания заняты.

$$p_{зан} = \sum_{k=m}^{m+S} p_k = \sum_{k=0}^{S} \frac{p_0 \rho^{m+k}}{m^k m!} = \frac{p_0 \rho^m}{m!} \sum_{k=0}^{S} \left(\frac{\rho}{m} \right)^k .$$

$$p_{зан} = \frac{p_0 \rho^m}{m!} \left(\frac{1-(\rho/m)^{S+1}}{1-(\rho/m)} \right) = \frac{p_0 \rho^m}{m!} \left(\frac{m-\rho(\rho/m)^S}{(m-\rho)} \right)$$

Вероятность того, что в системе будет не более ***k*** требований:

$0 \le k \le m$

$m \le k \le K$

$$p_1(\le k) = \sum_{i=0}^{k} p_i = \sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i!} p_0,$$

$$p_2(\le k) = \frac{p_0 \rho^{m+1}}{m!m} \cdot \frac{1-(\rho/m)^K}{1-(\rho/m)} = \frac{p_0 \rho^{m+1}}{m!\,(m-\rho)} \left(1 - \left(\frac{\rho}{m} \right)^K \right).$$

Операционные характеристики системы M/M/m/K

Если требуется вычислить вероятность того, что в системе будет не менее **_k_** требований, то

$$0 \le k \le m \quad p_1(\ge k) + p_1(\le k) = 1, \quad \Rightarrow \quad p_1(\ge k) = 1 - p_1(\le k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} \frac{p_0 \rho^i}{i!}$$

Среднее число требований в системе определяется как математическое ожидание случайной дискретной величины:

$$N_{cp} = \sum_{k=0}^{K} k p_k = \sum_{k=0}^{m} k \frac{p_0 \rho^k}{k!} + \sum_{k=1}^{K-m} k \frac{p_0 \rho^{m+k}}{m! m^k} = p_0 \sum_{k=1}^{m} \frac{\rho^k}{(k-1)!} + \frac{p_0 \rho^m}{m!} \sum_{k=1}^{K-m} k \left(\frac{\rho}{m}\right)^k =$$

$$= p_0 \rho \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{p_0 \rho^m}{m!} \sum_{k=1}^{K-m} k \left(\frac{\rho}{m}\right)^k$$

$$N_{cp} = p_0 \left(\rho \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!} \cdot \frac{1 - (S+1)\left(\frac{\rho}{m}\right)^S + S\left(\frac{\rho}{m}\right)^{S+1}}{(m-\rho)^2} \right)$$