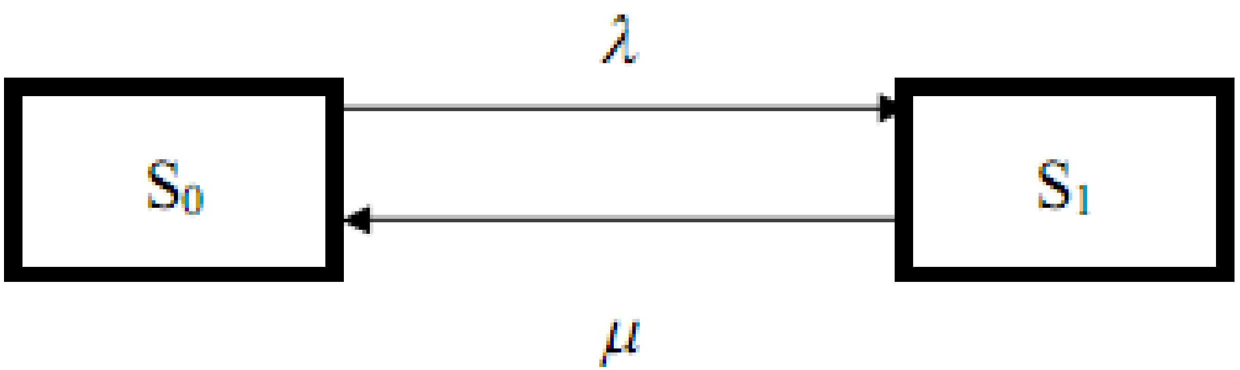
Система М/М/1 с отказами

Проанализируем систему обслуживания М/М/1 для случая, когда требование, заставшее систему занятой, сразу же покидает ее.

Для любого момента времени *t*≥0 система оказывается либо в состоянии *S0* (канал свободен), либо в состоянии *S1* (канал занят).

Переход из *S1* в *S0* осуществляется, как только очередное обслуживание завершится.

Переход из *S0* в *S1* связан с появлением требования и немедленным началом его обслуживания.



Изменение состояний во времени для системы М/М/1 с отказами может быть найдено из решения дифференциальных уравнений процесса размножения и гибели

Система M/M/1 с отказами

Из нормировочного условия $P_0(0)=1, \quad P_1(0)=0.$

$$P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

$$P_1(t)=1-P_0(t)=1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}=$$

$$=\frac{\lambda+\mu-\mu-\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda+\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right].$$

$$P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right].$$

Стационарный режим работы системы M/M/1 с отказами

$$t \to \infty$$

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \qquad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

вероятность отказа равна

$$P_{отк} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\mu(1 + \lambda / \mu)} = \frac{\rho}{1 + \rho}.$$

***Относительная пропускная способность* системы** с отказами — это вероятность того, что требование (заявка), поступившее в систему, будет обслужено.

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda + \mu - \lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\mu(1 + \lambda / \mu)} = \frac{1}{1 + \rho}.$$

Абсолютная пропускная способность, т.е. число заявок, обслуживаемых в единицу времени :

$$A = \lambda Q = \frac{\lambda}{1 + \rho}.$$

Операционные характеристики системы M/M/1 с отказами

Для системы M/M/1 с отказами интерес представляют следующие операционные характеристики (для стационарного режима):

- ***вероятность отказа в обслуживании*** $P_{отк}$ ***(характеризует долю требований, получающих отказ) ,***
- ***относительная пропускная способность Q,***
- ***абсолютная пропускная способность A.***

Требование, поступающее в систему, получает отказ в том случае, когда прибор (канал) обслуживания занят, т. е. когда в системе уже находится одно требование, а сама система пребывает в состоянии ***S1***.

Операционные характеристики системы M/M/1 с отказами

Вероятность пребывания в системе одного требования определяется

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Поэтому вероятность отказа равна

$$P_{отк} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\mu(1 + \lambda / \mu)} = \frac{\rho}{1 + \rho}.$$

Относительная пропускная способность системы с отказами — это вероятность того, что требование (заявка), поступившее в систему, будет обслужено.

Операционные характеристики системы M/M/1 с отказами

Для системы M/M/1 с отказами полная группа событий образуется из вероятности обслуживания требований и вероятности отказа. Поэтому

$$Q = 1 - P_{omk} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda + \mu - \lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\mu(1 + \lambda / \mu)} = \frac{1}{1 + \rho}.$$

Для потоков, у которых большие значения интенсивностей (λ»μ), вероятность отказа системы стремится к единице, а относительная пропускная способность падает до нуля.

Операционные характеристики системы M/M/1 с отказами

Абсолютная пропускная способность системы с отказами — это среднее число требований, обслуженных в единицу времени.

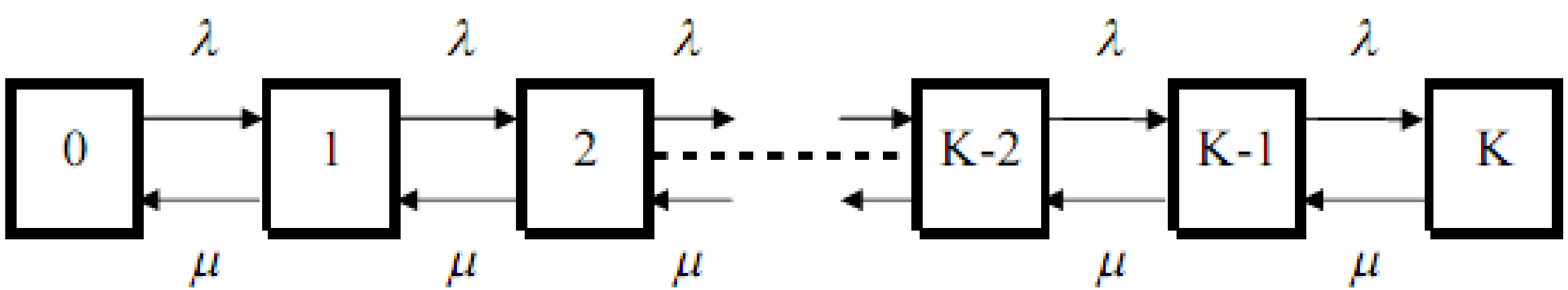
Число требований, поступающих в систему в единицу времени, характеризуется ***величиной интенсивности λ,*** а вероятность обслуживания ***есть относительная пропускная способность***.

Поэтому

$$A = \lambda Q = \frac{\lambda}{1+\rho}.$$

Система M/M/1/K: конечный накопитель

Произведем анализ системы M/M/1/K, т. е. системы, для которой ограничено число ожидающих требований или ограничен объем накопителя (ограничена длина очереди). В обозначении системы буква ***K*** указывает на то, что в системе могут находиться самое большее ***K*** требований, включая требование, находящееся в приборе обслуживания. Если поступает ***K***+1 требование, то оно покидает систему.



В произвольный момент времени система M/M/1/K оказывается в одном из состояний 0 (канал обслуживания свободен, очереди нет), 1 (канал обслуживания занят, очереди нет), 2 (канал обслуживания занят, в очереди одно требование), …, ***K*** (канал обслуживания занят, в очереди ***K***–1 требований).

Система M/M/1/K: конечный накопитель

Для такой системы устанавливаются следующие параметры процесса размножения и гибели:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda = const, & k < K; \\ 0, & k \geq K; \end{cases}$$

$$\mu_k = \mu = const, \quad k = \overrightarrow{1, K}.$$

Как и в случае системы M/M/1 с неограниченной очередью стационарные вероятности состояний могут быть определены по следующим формулам

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \underbrace{\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda}{\mu}}_{k} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k = p_0 \rho^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, K;$$

Система M/M/1/K: конечный накопитель

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{K}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{K}\rho^k}.$$

В выражении сумма представляет собой сумму конечной геометрической прогрессии.

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}.$$

Кроме того, имеет место $p_k = 0, \quad k > K.$

Система M/M/1/K: конечный накопитель

Вероятности состояний для системы с удалением заблокированных вызовов (K = 1):

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\rho} = \dfrac{1}{1+\lambda/\mu}, & k = 0; \\ \dfrac{\rho}{1+\rho} = \dfrac{\lambda/\mu}{1+\lambda/\mu}, & k = 1 = K; \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

В системе с удалением заблокированных вызовов может находиться только одно требование.

Требования, которые попытаются поступить в систему, когда она находится в состоянии обслуживания, будут из системы удалены.

Вероятность поступления в систему больше одного требования равна нулю.

Система M/M/1/K: конечный накопитель

Средняя длинна очереди определяется как математическое ожидание дискретной случайной величины с возможными значениями 1, 2, …, ***K***–1, ***K*** — допустимое число требований в системе (в очереди и в обслуживающем приборе).

$$N_q = \sum_{k=2}^{K} (k-1) p_k = \sum_{k=1}^{K} k p_{k+1} = p_0 \rho \sum_{k=1}^{K} k \rho^k .$$

Сумма может быть найдена по формуле конечной геометрической прогрессии .

$$N_q = \frac{\rho^2 \left[1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1} \right]}{\left(1-\rho^{K+1}\right)(1-\rho)} .$$

Система M/M/1/K: конечный накопитель

Вероятность наличия очереди или вероятность попадания в очередь равна

$$P_q = \frac{\rho^2\left(1-\rho^{K-1}\right)}{\left(1-\rho^{K+1}\right)}.$$

Вероятность отказа в обслуживании определяется в том случае, когда в системе одно требование находится в обслуживающем приборе и ***K***–1 требований в накопителе (в очереди):

$$P_{отк} = p_K = p_0 \rho^K, \qquad p_0 = \frac{1-\rho}{\left(1-\rho^{K+1}\right)}.$$

Система M/M/1/K: конечный накопитель

Зная вероятность отказа, можно определить относительную пропускную способность ***q*** системы M/M/1/K:

$$q = 1 - P_{отк} = 1 - p_0\rho^K = 1 - \frac{(1-\rho)\rho^K}{\left(1-\rho^{K+1}\right)} = \frac{1-\rho^{K+1}-\rho^K+\rho^{K+1}}{\left(1-\rho^{K+1}\right)} = \frac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}.$$

По известной относительной пропускной способности вычисляется абсолютная пропускная способность ***Q*** системы M/M/1/K:

$$Q = \lambda q = \lambda(1-P_{отк}) = \frac{\lambda\left(1-\rho^K\right)}{\left(1-\rho^{K+1}\right)}.$$

Система M/M/1/K: конечный накопитель

Определим такую операционную характеристику системы M/M/1/K как среднее время пребывания одного требования в очереди. Оно может быть определена как математическое ожидание случайной дискретной величины с известным распределением вероятностей

$$p_1, p_2, \dots, p_K \qquad \rho = \lambda / \mu$$

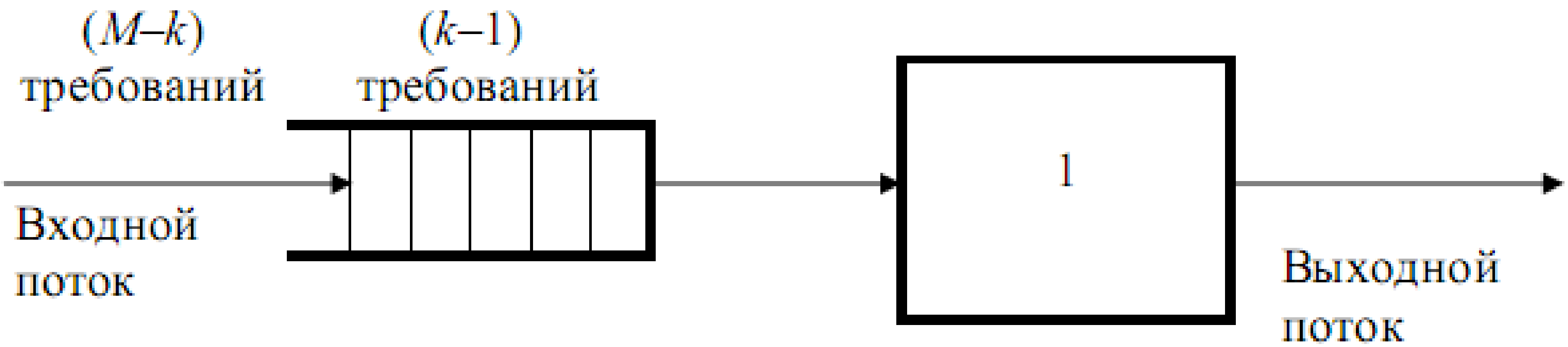
$$T_q = \frac{\rho\left[1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}\right]}{\mu\left(1-\rho^{K+1}\right)(1-\rho)}.$$

Система M/M/1//M с конечным числом источников нагрузки

Для рассмотренных ранее систем предполагалось, что входной поток может поставлять бесконечное число требований или как говорят, является с бесконечным числом источников нагрузки. В обозначении системы M/M/1//M последняя справа буква ***M*** означает, что входной поток требований создается конечной группой возможных требований

Система состоит из очереди и одного прибора обслуживания.
Из всего ***M*** числа требований часть может находиться в очереди и одно требование в обслуживающем приборе.
В частности, если в системе находятся ***k*** требований (очередь плюс прибор обслуживания), то ***M–k*** требований находятся в числе поступающих.
При этом, когда требование находится в группе поступающих, то момент времени его поступления в систему является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному (показательному) закону (первая слева буква ***M*** в обозначении системы) со средним значением $1/\lambda$.
Обслуживание в системе также происходит по экспоненциальному закону (вторая буква ***M*** в обозначении системы) со средним значением, равным $1/\mu$.

Система M/M/1//M с конечным числом источников нагрузки



Для системы с ***M*** источниками нагрузки все поступающие требования действуют независимо друг от друга. В этом случае, если в системе находятся ***k*** требований, то ***M–k*** требований находятся в числе поступающих, и тогда общая интенсивность поступления требований будет равна

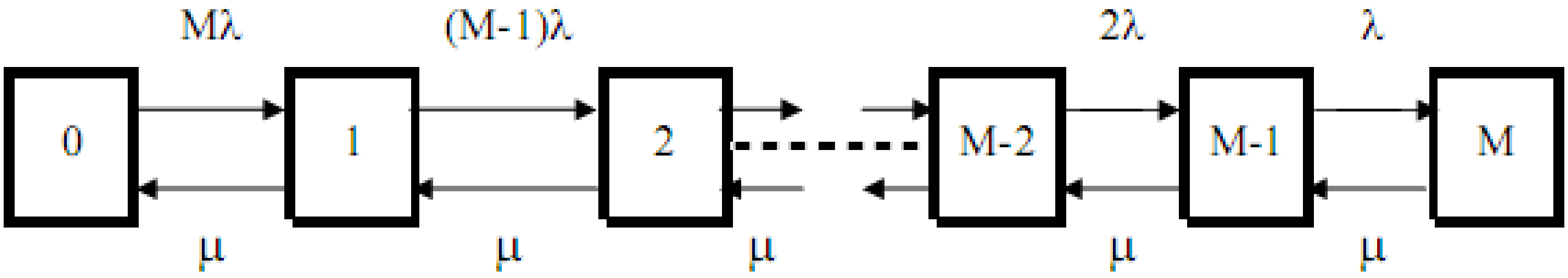
$$\lambda(M-k).$$

Система M/M/1//M с конечным числом источников нагрузки

Для моделирования такой системы может быть использован процесс размножения и гибели со следующими параметрами:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda(M-k), & 0 \le k \le M; \\ 0, & k > M; \end{cases}$$

$$\mu_k = \mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$



Граф состояний системы M/M/1//M

Система M/M/1//M с конечным числом источников нагрузки

В стационарном режиме вероятности состояний находятся по общей формуле процесса размножения и гибели с учетом заданных интенсивностей :

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda(M-i)}{\mu}, \qquad 0 \le k \le M.$$

Более компактна запись с использованием факториалов и с учетом того, что $\lambda/\mu = \rho$:

$$p_k = p_0 \rho^k \frac{M!}{(M-k)!}, \qquad 0 \le k \le M.$$

Система M/M/1//M с конечным числом источников нагрузки

Вероятность p_0 определяется из нормировочного условия:

$$\sum_{k=0}^{M} p_k = 1, \quad \sum_{k=0}^{M} p_0 \rho^k \frac{M!}{(M-k)!} = 1, \quad p_0 \sum_{k=0}^{M} \rho^k \frac{M!}{(M-k)!} = 1, \quad p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{M} \rho^k \frac{M!}{(M-k)!}}.$$

Требование, поступающее в систему, получает отказ в том случае, когда все места в очереди заняты (***M***-1) и один прибор обслуживает. Это означает, что в системе находится ***M*** требований. Поэтому

$$P_{отк} = p_M = p_0 \rho^M \frac{M!}{(M-M)!} = \frac{\rho^M M!}{\left[\sum_{k=0}^{M} \frac{M!}{(M-k)!} \right]}.$$

Система M/M/1//M с конечным числом источников нагрузки

Относительная пропускная способность определяет долю обслуженных требований.

$$P_{обс} + P_{отк} = 1, \quad P_{обс} = 1 - P_{отк}.$$

$$Q_M = P_{обс} = 1 - P_{отк}.$$

Абсолютная пропускная способность — это среднее число требований, поступающих в прибор обслуживания в единицу времени:

$$A_M = \lambda Q_M = \lambda(1 - P_{отк}).$$

Система M/M/1//M с конечным числом источников нагрузки

Система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -M\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -[(M-k)\lambda + \mu]P_k(t) + (M-k+1)\lambda P_{k-1}(t) + \mu P_{k+1}(t),$$

$$\frac{dP_M(t)}{dt} = \lambda P_{M-1}(t) - \mu P_M. \qquad \boldsymbol{k = \overline{1, M-1},}$$

$$\sum_{k=0}^{M} P_k(t) = 1.$$

Система M/M/1//M с конечным числом источников нагрузки

Дифференциальное уравнение математического ожидания числа требований в системе M/M/1//M.

$$\frac{d\overline{N}(t)}{dt} = (\lambda M - \mu) - \lambda \overline{N}(t) + \mu P_0(t).$$

В начальный момент времени математическое ожидание как среднее количество требований равно нулю, т. е.

$$P_0(0) = 1, \quad \Rightarrow \quad \overline{N}(0) = 0.$$

Поэтому систему уравнений в общем случае можно решить численными методами

Система M/M/1//M с конечным числом источников нагрузки

Пример **по определению временной зависимости математического ожидания в системе M/M/1//M.**

Пусть для системы M/M/1//7 значения интенсивностей поступления и обслуживания требований равны
λ = 1,98, μ = 6.086.
Начальные условия - естественные

$$P_0(0)=1; \quad P_k(0)=0, \quad k=\overrightarrow{1, M},$$

Система M/M/1//M с конечным числом источников нагрузки

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -M\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = (M-1+1)\lambda P_0(t) - [(M-1)\lambda + \mu]P_1(t) + \mu P_2(t),$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = (M-2+1)\lambda P_1(t) - [(M-2)\lambda + \mu]P_2(t) + \mu P_3(t),$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = (M-3+1)\lambda P_2(t) - [(M-3)\lambda + \mu]P_3(t) + \mu P_4(t),$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = (M-4+1)\lambda P_3(t) - [(M-4)\lambda + \mu]P_4(t) + \mu P_5(t),$$

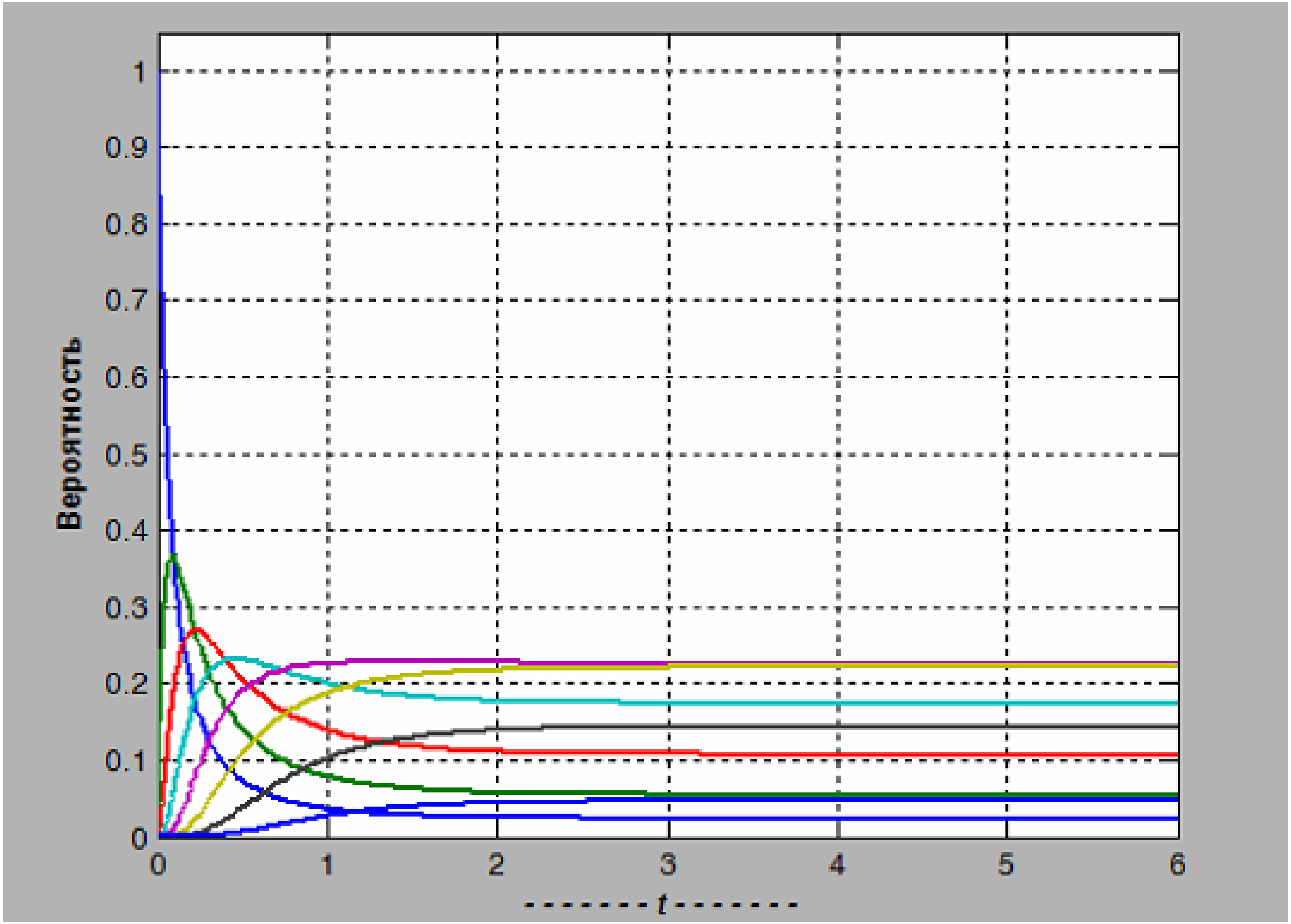
$$\frac{dP_5(t)}{dt} = (M-5+1)\lambda P_4(t) - [(M-5)\lambda + \mu]P_5(t) + \mu P_6(t),$$

$$\frac{dP_6(t)}{dt} = (M-6+1)\lambda P_5(t) - [(M-6)\lambda + \mu]P_6(t) + \mu P_7(t),$$

$$\frac{dP_7(t)}{dt} = \lambda P_6(t) - \mu P_7(t),$$

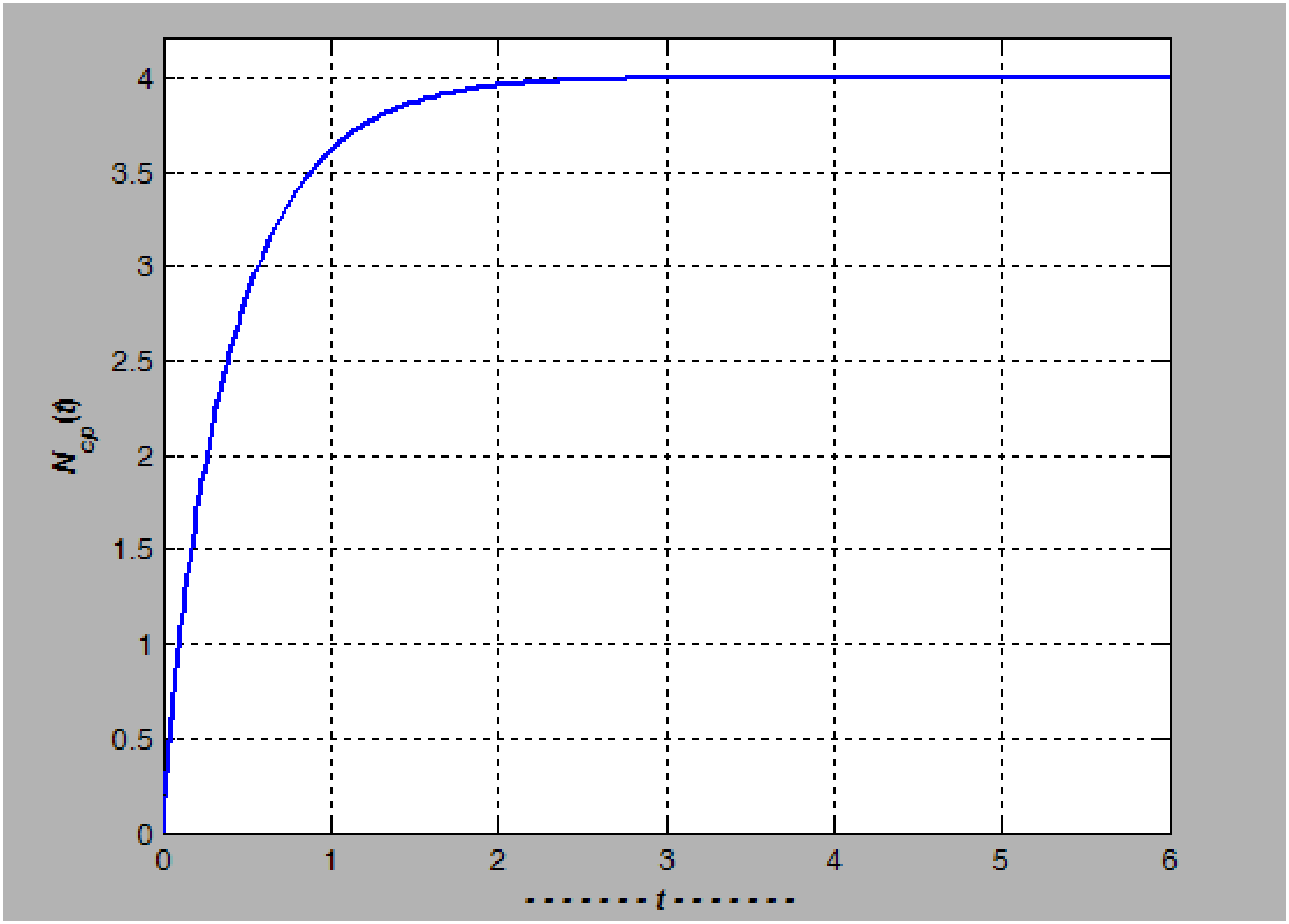
$$\frac{d\overline{N}(t)}{dt} = \mu P_0(t) - \lambda \overline{N}(t) + (M\lambda - \mu).$$

Система M/M/1//M с конечным числом источников нагрузки



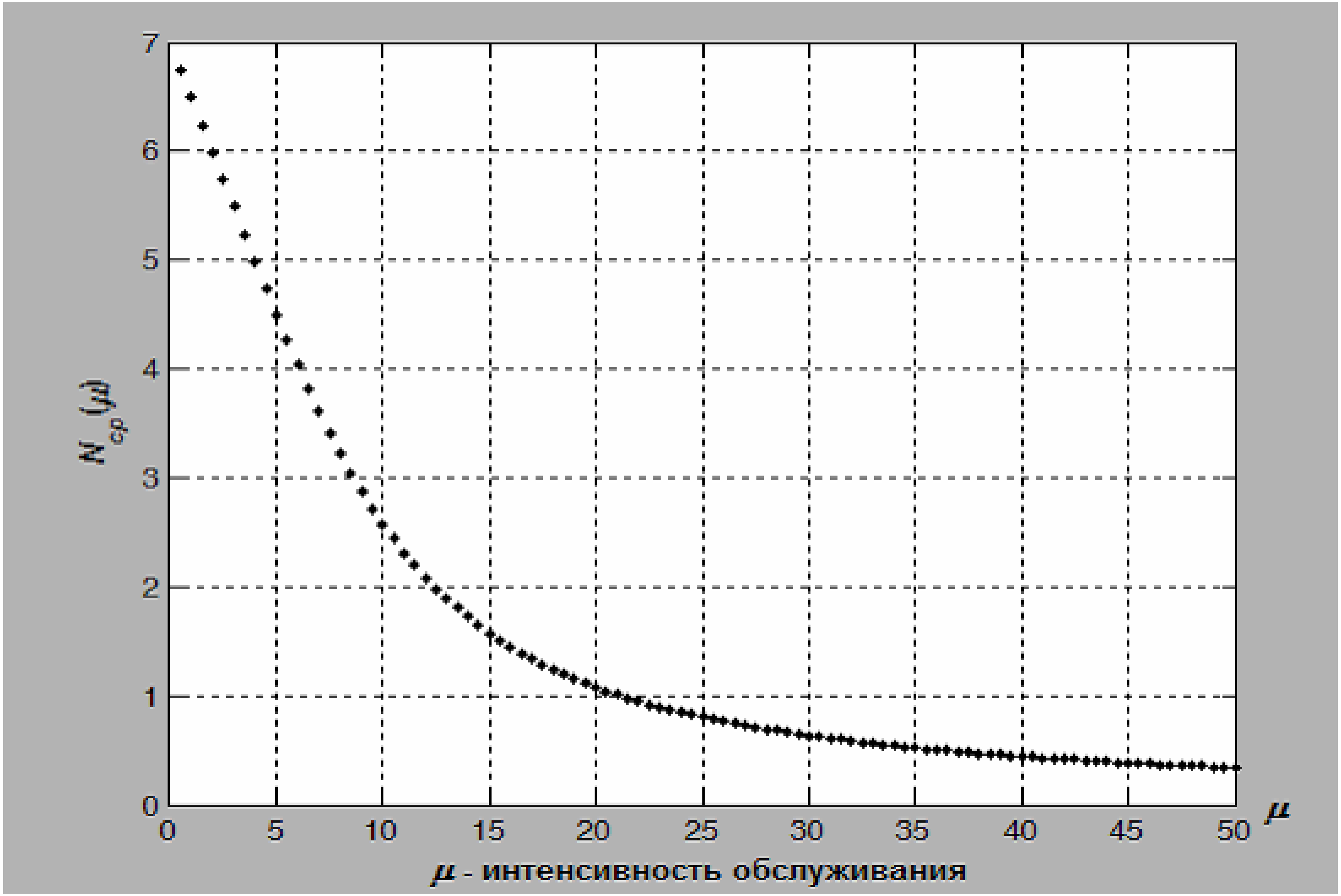
Зависимость вероятностей состояний системы M/M/1//7 от времени

Система M/M/1//M с конечным числом источников нагрузки



Зависимость среднего количества требований
в системе M/M/1//7 от времени

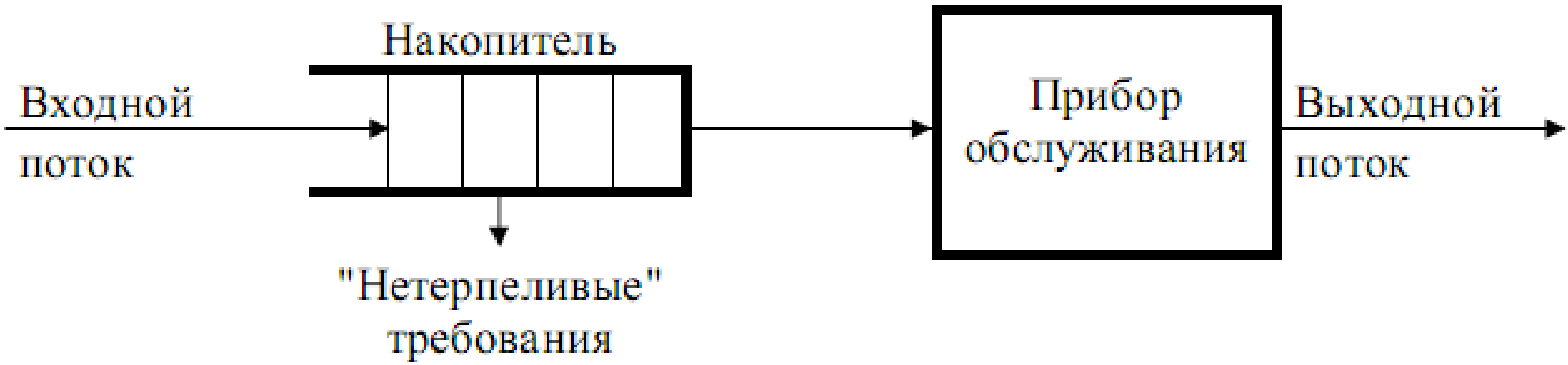
Система M/M/1//M с конечным числом источников нагрузки



Зависимость среднего числа требований от интенсивности обслуживания в системе M/M/1//7

Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания

Рассмотрим функционирование системы M/M/1, когда на длину очереди нет ограничений, но время пребывания требований в очереди конечно и случайно. В этом случае требования с ограниченным временем ожидания начала обслуживания называют "нетерпеливыми" требованиями. Структура системы массового обслуживания M/M/1 с "нетерпеливыми"



Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания

Условия работы системы:

1. Если в момент поступления требования прибор обслуживания свободен, то требование сразу начинает обслуживаться;

2. Если прибор обслуживания занят, то поступившее требование становится в очередь;

3. Если в момент освобождения прибора обслуживания имеется хотя бы одно требование в накопителе (в очереди), то первое из них по очереди сразу поступает на обслуживание;

4. В приборе обслуживания может находиться только одно требование;

5. Обслуживание не прерывается;

Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания

6. По окончании обслуживания требование покидает систему

7. Очередь в накопителе упорядочена естественным образом, т. е. по дисциплине FIFO

8. Требования могут покидать систему до начала обслуживания. Время ожидания в очереди "нетерпеливых" требований носит случайный характер

9. Интервалы времени между моментом прихода и ухода "нетерпеливых" требований распределены по экспоненциальному закону

10 Множество состояний системы бесконечно, т. е. нет ограничений на величину очереди.

Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания

Время ожидания будет случайным и распределенным по экспоненциальному закону с плотностью вероятности

$$h(t) = \upsilon e^{-\upsilon t}, \quad t > 0.$$

λ интенсивность поступления требований в систему

μ интенсивность обслуживания требований

υ интенсивность ухода "нетерпеливых" требований.

Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания

Возможные состояния системы

E0 — прибор обслуживания не занят (очереди нет),
E1 — прибор обслуживания занят (очереди нет),
E1+1 — прибор обслуживания занят, одно требование стоит в очереди,
E1+2 — прибор обслуживания занят, два требования стоят в очереди,
………………………………………………………………………
E1+s — прибор обслуживания занят, s требований стоят в очереди,
………………………………………………………………………

По условиям работы системы число требований в очереди может быть бесконечно большим и поэтому рассматриваемая система имеет бесконечное множество состояний.

Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания

Можно записать систему бесконечного числа дифференциальных уравнений для вероятностей состояний вида (в общем случае, стоящие в уравнениях системы интенсивности могут быть и переменными). ***s*** — длина очереди:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_1(t) + \lambda P_0(t) + (\mu + \upsilon)P_2(t),$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -(\lambda + \mu + \upsilon)P_2(t) + \lambda P_1(t) + (\mu + 2\upsilon)P_3(t),$$

....

$$\frac{dP_{1+s}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu + s\upsilon)P_{1+s}(t) + \lambda P_{1+s-1}(t) + [\mu + (s+1)\upsilon]P_{1+s+1}(t),$$

....

Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания

В случае существования стационарного режима в системе M/M/1 с ограниченным временем ожидания в очереди система будет иметь установившееся решение. Это решение может быть получено из соответствующей системы алгебраических уравнений

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1,$$

$$0 = -(\lambda + \mu) p_1 + \lambda p_0 + (\mu + \upsilon) p_2,$$

$$0 = -(\lambda + \mu + \upsilon) p_2 + \lambda p_1 + (\mu + 2\upsilon) p_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = -(\lambda + \mu + s\upsilon) p_{1+s} + \lambda p_{1+s-1} + [\mu + (s+1)\upsilon] p_{1+s+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания

Учитывая закономерность в определении вероятностей состояний, можно получить для любого **s** ≥ 1, где **s** — длина очереди:

$$p_{1+s} = \frac{\lambda^{1+s} p_0}{\mu \prod_{i=1}^{s} (\mu + i\upsilon)}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1, \quad p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1, \quad p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^{1+s} p_0}{\mu \prod_{i=1}^{s} (\mu + i\upsilon)} = 1,$$

Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания

Вероятность того, что требование покинет систему не обслуженным. $P_н$

$$P_н = \frac{\beta}{\rho} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s\rho^{1+s} p_0}{\prod_{i=1}^{s}(1+i\beta)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\frac{\beta}{\rho} s\rho^{1+s} p_0}{\prod_{i=1}^{s}(1+i\beta)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta s\rho^{s} p_0}{\prod_{i=1}^{s}(1+i\beta)}.$$

$$\frac{\frac{\upsilon}{\mu}}{\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\beta}{\rho} = \frac{\upsilon}{\lambda}.$$

Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания

Относительная пропускная способность

$$Q = 1 - P_н = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta s \rho^s p_0}{\prod_{i=1}^{s}(1 + i\beta)}.$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda Q = \lambda(1 - P_н) = \lambda \left[1 - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta s \rho^s p_0}{\prod_{i=1}^{s}(1 + i\beta)} \right].$$

Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания

Пример моделирования системы M/M/1/8 с ограниченным временем ожидания

Пусть исходными параметрами системы будут:

$$\lambda = 2, \quad \mu = 1.5, \quad \upsilon = 1.2.$$

Используя общую форму систем дифференциальных уравнений и учитывая конечное число состояний 9, получим систему уравнений для рассматриваемого случая:

Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_1(t) + \lambda P_0(t) + (\mu + \upsilon)P_2(t),$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -(\lambda + \mu + \upsilon)P_2(t) + \lambda P_1(t) + (\mu + 2\upsilon)P_3(t),$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -(\lambda + \mu + 2\upsilon)P_3(t) + \lambda P_2(t) + (\mu + 3\upsilon)P_4(t),$$

Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = -(\lambda + \mu + 3\upsilon)P_4(t) + \lambda P_3(t) + (\mu + 4\upsilon)P_5(t),$$

$$\frac{dP_5(t)}{dt} = -(\lambda + \mu + 4\upsilon)P_5(t) + \lambda P_4(t) + (\mu + 5\upsilon)P_6(t),$$

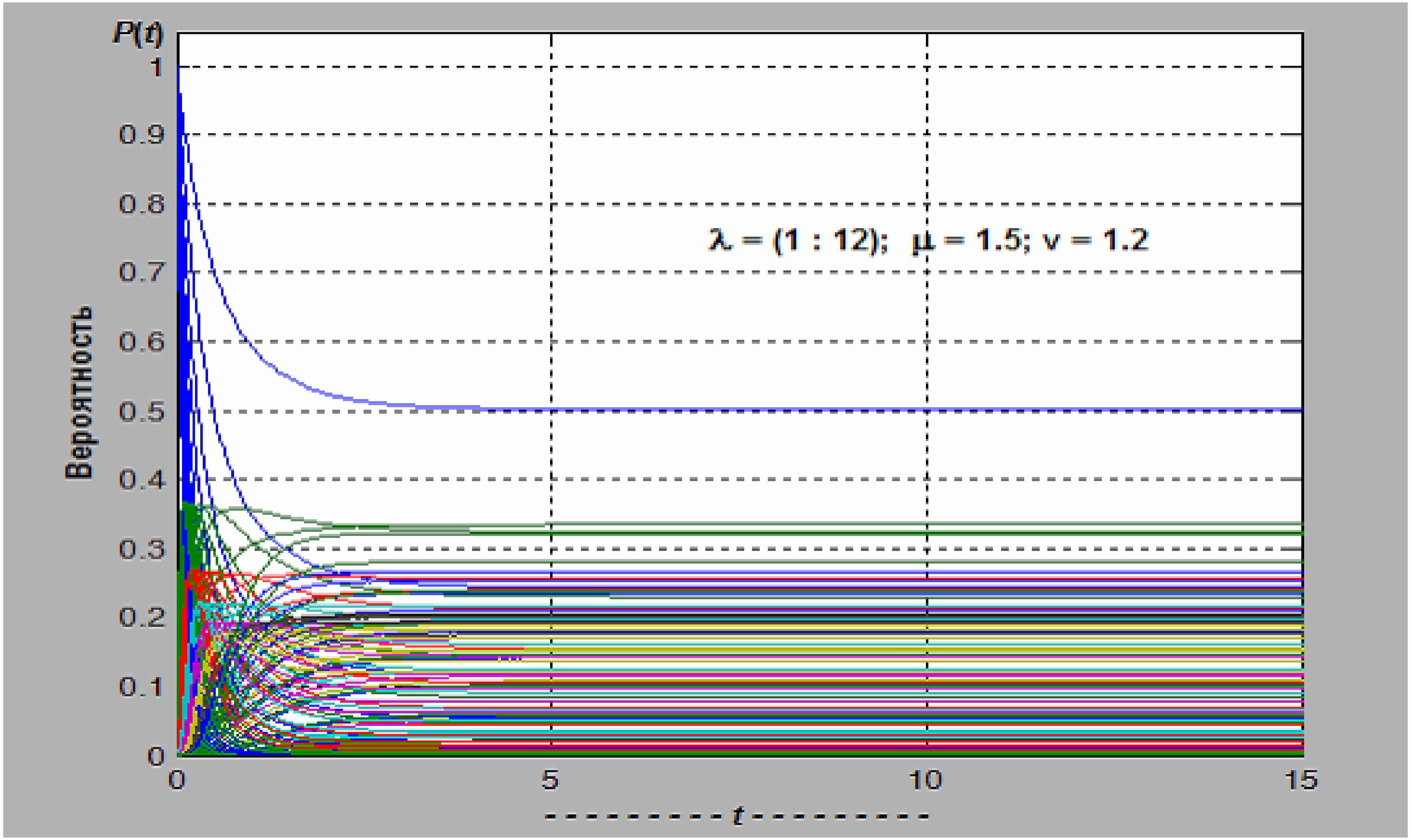
$$\frac{dP_6(t)}{dt} = -(\lambda + \mu + 5\upsilon)P_6(t) + \lambda P_5(t) + (\mu + 6\upsilon)P_7(t),$$

$$\frac{dP_7(t)}{dt} = -(\lambda + \mu + 6\upsilon)P_7(t) + \lambda P_6(t) + (\mu + 7\upsilon)P_8(t),$$

$$\frac{dP_8(t)}{dt} = \lambda P_7(t) - (\mu + 7\upsilon)P_8(t).$$

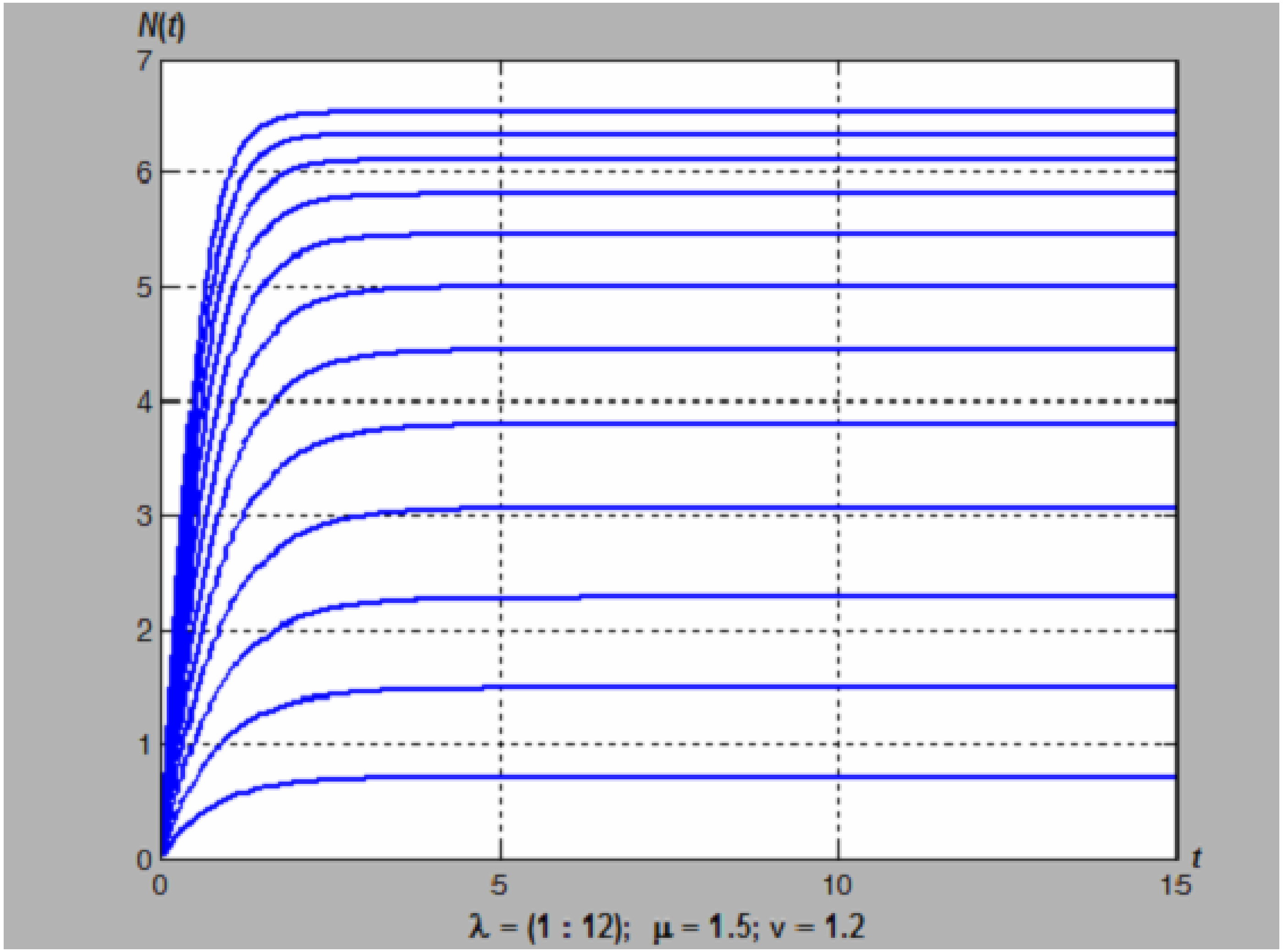
$$P_0(0) = 1, \quad P_k(0) = 0, \quad k = \overrightarrow{1, 8}.$$

Система M/M/1 с ограниченным временем ожидания



Вероятности состояний системы M/M/1/8 с нетерпеливыми требованиями при изменении интенсивности λ поступления требований

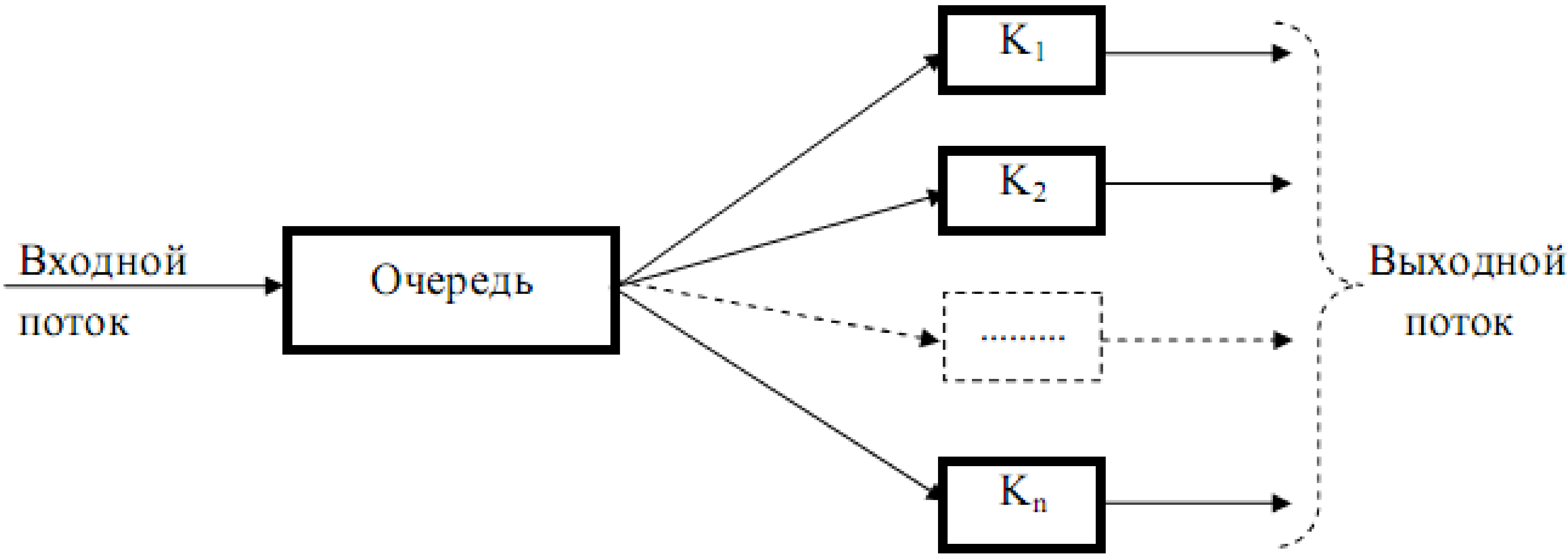
Система М/М/1 с ограниченным временем ожидания



Временная диаграмма среднего количества требований
в системе при изменении интенсивности λ поступления требований

МНОГОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ

МНОГОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ



Система M/M/∞ с немедленным обслуживанием

систему с бесконечным числом обслуживающих приборов, которые можно интерпретировать как наличие одного немедленно обслуживающего прибора, у которого интенсивность обслуживания растет линейно с ростом числа ожидающих требований

$$\lambda_k = \lambda = const, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\mu_k = k\mu, \quad \mu = const, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$