

**Метод резолюций** предложен в 1930г. в докторской диссертации Эрбрана для доказательства теорем в формальных системах первого порядка.

Метод резолюций опирается на исчисление резольвент. Существует теорема, утверждающая, что вопрос о доказуемости произвольной формулы в исчислении предикатов сводится к вопросу о доказуемости пустого списка в исчислении резольвент. Поэтому доказательство того, что список формул в исчислении резольвент пуст, эквивалентно доказательству ложности формулы в исчислении предикатов.

Идея метода резолюций заключается в том, что доказательство истинности или ложности выдвинутого предположения, например:

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_N) \rightarrow B$$

ведется методом от противного. Для этого в исходное множество предложений включают аксиомы формальной системы и отрицание доказываемой гипотезы:

$$\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_N) \rightarrow B$$

Если в процессе доказательства возникает противоречие между отрицанием гипотезы и аксиомами, выражающееся в нахождении пустого списка (дизъюнкта), то выдвинутая гипотеза правильна.

Такое доказательство может быть получено на основании теоремы Эрбрана, гарантирующей, что существующее противоречие может быть всегда достигнуто за конечное число шагов, каковы бы ни были значения истинности, даваемые функциям, присутствующим в гипотезах и заключениях.

В методе резолюций множество предложений обычно рассматривается как составной предикат, содержащий несколько предикатов, соединенных логическими функциями и кванторами существования и общности. Так как одинаковые по смыслу предикаты могут иметь разный вид, то предложения преобразуются в клаузальную форму – разновидность конъюнктивной нормальной формы (КНФ), в которой удалены кванторы существования, всеобщности, символы импликации, равнозначности и др. Клаузальную форму называют сколемовской конъюнктивной формой.

В клаузальной форме вся исходная логическая формула представляется в виде множества предложений (клауз)  $C$ , называемых **клаузальным множеством**  $S$ :

$$S = (C_1) \wedge (C_2) \wedge \dots \wedge (C_k)$$

Любое предложение  $C$ , из которого образуется клаузальное множество  $S$ , является совокупностью атомарных предикатов или их отрицаний, соединенных символом дизъюнкции:

$$C_i = (P_{i1}) \vee (P_{i2}) \vee \dots \vee (P_{im})$$

Предикат или его отрицание называется **дизъюнктом**, литералом, атомом, атомарной формулой.

Сущность метода резолюций состоит в проверке, содержит или не содержит  $S$  пустое предложение  $C_i$ .

Предложение  $C_i$  является пустым, если не содержит никаких литер. Так как условием истинности  $S$  является истинность всех  $C_i$ , входящих в  $S$ , то ложность какого-либо  $C_i$ , заключающаяся в том, что множество  $(P_{i1} \dots P_{im})$ , образующее  $C_i$ , окажется пустым, указывает на ложность исходной логической формулы.

Если  $S$  содержит пустое предложение  $C_i$ , то  $S$  противоречиво (невыполнимо). Если предложение  $C_i$  не является пустым, то делается попытка вывода предложений  $C_{i+1}, C_{i+2}, \dots, C_{im}$  пока не будет получено пустое (что всегда будет иметь место для невыполнимого  $S$ ).

Для этого в двух предложениях, одно из которых состоит из одной литеры, а второе содержит произвольное число литер, находится **контрарная пара литер** (например  $P$  и  $\neg P$ ), которая вычеркивается, а из оставшихся частей формируется новое предложение (например из  $P$  и  $\neg P \vee Q$  выводится  $Q$ ).

Предложение  $C$ , вновь сформированное из имеющихся  $C_1$  и  $C_2$ , называется **резольвентой**  $C_1$  и  $C_2$ . Например:

$$C_1: P \vee \neg(Q) \vee \neg(R)$$

$$C_2: Q \vee P$$

$$C: P \vee \neg(R)$$

Резольвента

Если при выводе предложений получены два однолитерных дизъюнкта, образующих контрарную пару, то их резольвентой будет пустой дизъюнкт. Так как наличие пустого дизъюнкта означает, что  $S$  является ложным, то невыполнимость исходного утверждения, сформулированного в виде отрицания:

$$\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_N) \rightarrow B$$

доказывает истинность выдвинутого предположения:

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_N) \rightarrow B$$

Поскольку в логике предикатов в предложениях допускается наличие переменных, то для нахождения контрарных пар требуется введение операции унификации (подстановки константы вместо переменной в предикаты, имеющие одинаковые предикатные символы, но разные литеры). Алгоритм унификации разработали в 1966 г. Ж. Питра и независимо от него – Дж. Робинсон: чтобы унифицировать два различных выражения, отыскивается наиболее общий унификатор – НОУ (подстановка, при которой выражение с большей описательной мощностью согласуется с выражением, имеющим малую описательную мощность). Наличие этого алгоритма позволило реализовать метод резолюций Эрбрана в виде программы для ЭВМ. Итак, если требуется методом резолюций доказать истинность какого-либо логического утверждения, то отрицание этого утверждения преобразуется в клаузальную форму, по его предложениям выполняется поиск пустого предложения с использованием унификации и вывода резольвент. Невыполнимость отрицания подтверждает истинность рассматриваемого утверждения.

Метод резолюций получил широкое распространение из-за высокой эффективности машинной обработки. На его основе построен язык «Prolog». Однако человек в процессе рассуждений такой логикой не пользуется, и это дает основание для поиска более естественных для человеческого сознания процедур вывода заключений. Существенным недостатком метода резолюций является то, что он предназначен только для доказательства теорем. Он не пригоден для порождения новых предложений. К тому же, если предложение не является теоремой, резолюция может привести к построению бесконечного дерева решений.

**Пример:** вывод решения в логической модели на основе метода резолюций.

**Даны утверждения:**

- «Сократ – человек»;
- «Человек – это живое существо»;
- «Все живые существа смертны».

Требуется методом резолюций доказать утверждение «Сократ смертен».

**Решение:**

**Шаг 1.** Преобразуем высказывания в дизъюнктивную форму:

ПРЕДИКАТНАЯ ФОРМА	ДИЗЪЮНКТИВНАЯ ФОРМА
$\forall (X)(\text{Человек}(X) \rightarrow \text{Живое\_существо}(X))$	$\neg(\text{Человек}(X) \vee \neg \text{Живое\_существо}(X))$
$\text{Человек}(\text{Сократ})$	$\text{Человек}(\text{Сократ})$
$\forall (Y)(\text{Живое\_существо}(Y) \rightarrow \text{Смертно}(Y))$	$\neg(\text{Живое\_существо}(Y) \vee \neg \text{Смертно}(Y))$

**Шаг 2.** Запишем отрицание целевого выражения (требуемого вывода), т.е. «Сократ бессмертен»:

$\neg \text{Смертно}(\text{Сократ})$

**Шаг 3.** Составим конъюнкцию всех дизъюнктов (т. е. построим КНФ), включив в нее отрицание целевого выражения:

$$(\neg(\text{Человек}(X) \vee \neg \text{Живое\_существо}(X))) \wedge (\neg(\text{Живое\_существо}(Y) \vee \neg \text{Смертно}(Y))) \wedge (\text{Человек}(\text{Сократ})) \wedge (\neg \text{Смертно}(\text{Сократ}))$$

**Шаг 4.** В цикле проведем операцию поиска резольвент над каждой парой дизъюнктов:

1 ДИЗЪЮНКТ	2 ДИЗЪЮНКТ
$\neg(\text{Человек}(X) \vee \neg \text{Живое\_существо}(X))$	$\neg(\text{Живое\_существо}(Y) \vee \neg \text{Смертно}(Y))$
Резольвента: $\neg \text{Человек}(Y) \vee \text{Смертно}(Y)$	
$\neg \text{Человек}(Y) \vee \text{Смертно}(Y)$	$\text{Человек}(\text{Сократ})$
Резольвента: $\text{Смертно}(\text{Сократ})$	
$\text{Смертно}(\text{Сократ})$	$\neg \text{Смертно}(\text{Сократ})$

Получение пустого дизъюнкта означает, что высказывание «Сократ бессмертен» ложно, значит истинно высказывание «Сократ смертен».

В целом метод резолюций интересен благодаря простоте и системности, но применим только для ограниченного числа случаев (доказательство не должно иметь большую глубину, а число потенциальных резолюций не должно быть большим). Кроме метода резолюций и правил вывода существуют другие методы получения выводов в логике предикатов.