МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Вятский государственный университет»
Факультет автоматики и вычислительной техники
Кафедра электронных вычислительных машин

Отчет
Лабораторная работа №3 по дисциплине
«Исследование операций»
Вариант 2

Выполнил студент группы ИВТ-32 ________________________/Рзаев А. Э./
Проверил преподаватель ____________________________/Коржавина А. С./

Киров 2017

1 Цель работы

Целью лабораторной работы является получение навыков решения задач линейного программирования (ЗЛП) методом Гомори.

2 Задание

Решить ЗЛП методов ветвей и границ и методом Гомори:

$f(x) = x_2 \to max$

$x_1 - 2x_2 \leq 0$

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 + x_2 \leq 1{,}5$

$x_1, x_2 \geq 0,$ целые

3 Практическая часть

Решим симплекс-методом следующую задачу.

$f(x) = x_2 \to max$

$x_1 - 2x_2 \leq 0$

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 + x_2 \leq 1{,}5$

$x_1, x_2 \geq 0$

Переход к канонической форме

$f(x) = x_2 \to max$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

$-x_1 + x_2 + x_4 = 1$

$x_1 + x_2 + \mathrm{x}_5 = 1{,}5$

$x_j \geq 0, j = 1..2$

Поиск максимума

Найдем начальное БР. x_1, x_2 – свободные переменные, значит:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 1$$
$$x_5 = 1{,}5$$

Заполним таблицу 1 для отображения хода вычислений и рассчитаем относительные оценки.

Таблица 1 – поиск максимума

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	БР/$\overline{a_{ir}}$
x_3	0	1	-2	1	0	0	-
x_4	1	-1	**1**	0	1	0	**1**
x_5	3/2	1	1	0	0	1	3/2
$f(X_0)$	0	0	**-1**	0	0	0	

Текущий опорный план не оптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты. В качестве разрешающего столбца можем выбрать столбец x_2. Берем первый столбец и анализируем его коэффициенты, они положительны, значит переменная x_2 вводится в число базисных. Для определения переменной, выводимой из базиса, находим наименьшее из неотрицательных отношений $\frac{\text{БР}}{\overline{a_{ir}}} = 1$, значит x_4 выводится из базиса.

Новое БР отображено в таблице 2

Таблица 2 – поиск максимума

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	БР/$\overline{a_{ir}}$
x_3	2	-1	0	1	2	0	-
x_2	1	-1	1	0	1	0	-
x_5	½	**2**	0	0	-1	1	**¼**
$f(X_1)$	1	**-1**	0	0	1	0	

Текущий опорный план не оптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты. В качестве разрешающего столбца можем выбрать столбец x_1. Берем первый столбец и анализируем его коэффициенты, они положительны, значит переменная x_1 вводится в число базисных. Для определения переменной, выводимой из базиса, находим наименьшее из неотрицательных отношений $\frac{\text{БР}}{\overline{a_{ir}}} = 1/4$, значит x_5 выводится из базиса.

Новое БР отображено в таблице 3

Таблица 3 – поиск максимума

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	БР/$\overline{a_{ir}}$
x_3	9/4	0	0	1	3/2	1/2	
x_2	5/4	0	1	0	1/2	1/2	
x_1	1/4	1	0	0	-1/2	1/2	
$f(X_2)$	5/4	0	0	0	1/2	1/2	

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи, значит решение $x_1 = 1/4$, $x_2 = 5/4$ является оптимальным, но нецелочисленным.

Наибольшей нецелочисленной координатой с наибольшей дробной частью оказаласьx_2. Выписываем из таблицы 2 уравнение, соответствующее ей.

$\mathrm{x}_2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{x}_4 + \frac{1}{2}\,\mathrm{x}_5 = \frac{5}{4}$, или $\mathrm{x}_2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{x}_4 - \frac{1}{2}\mathrm{x}_5$

Обозначим за x_2' переменную, которая принимает только целочисленные значения. Получаем $\mathrm{x}_2' = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{x}_4' - \frac{1}{2}\mathrm{x}_5'$. Так как x_2' целое число можем записать $\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{x}_4' - \frac{1}{2}\mathrm{x}_5' = int.$

Если прибавить к каждому из слагаемых целочисленных значений, то равенство не изменится, получаем

$$\left(\frac{5}{4} \pm int\right) - \left(\frac{1}{2} \pm int\right)x_4' - \left(\frac{1}{2} \pm int\right)x_5' = int$$

Подставим вместо каждого int максимальное положительное целое значение, чтобы выражение в каждой скобке оставалось положительным. Таким образом получаем $\frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}, \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$. Подставим получившиеся значения вместо скобок. Получим $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_4' - \frac{1}{2}x_5' = int.$

Так как x_2' и x_4' положительные числа, то можем записать новое ограничение $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \le 0$, коэффициенты которого введем дополнительной строкой в оптимальную симплексную таблицу.

Поскольку двойственный симплекс-метод используется для поиска минимума целевой функции, делаем преобразование F(x) = -F(x).

Таблица 4 – поиск максимума

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	БР/$\overline{a_{ir}}$
x_3	9/4	0	0	1	3/2	1/2	0	
x_2	5/4	0	1	0	1/2	1/2	0	
x_1	1/4	1	0	0	-1/2	1/2	0	
x_6	-1/4	0	0	0	-1/2	**-1/2**	1	
$f(X_0)$	-5/4	0	0	0	-1/2	**-1/2**	0	

Среди отрицательных значений базисных переменных выбираем наибольший по модулю. Ведущей будет 4-ая строка, а переменную x_6 следует вывести из базиса, а переменную x_5 необходимо ввести в базис.

Таблица 5 – поиск максимума

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	БР/$\overline{a_{ir}}$
x_3	2	0	0	1	1	0	1	
x_2	1	0	1	0	0	0	1	
x_1	0	1	0	0	-1	0	1	
x_5	1/2	0	0	0	1	1	-2	
$f(X_1)$	-1	0	0	0	0	0	-1	

Решение получилось целочисленным. Нет необходимости применять метод Гомори. Оптимальный целочисленный план можно записать так:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, f(X) = 1$$

6 Проверка решения

Проверка решения была выполнена с помощью сервиса math.semestr.ru.

На следующих рисунках представлено решение методом Гомори.

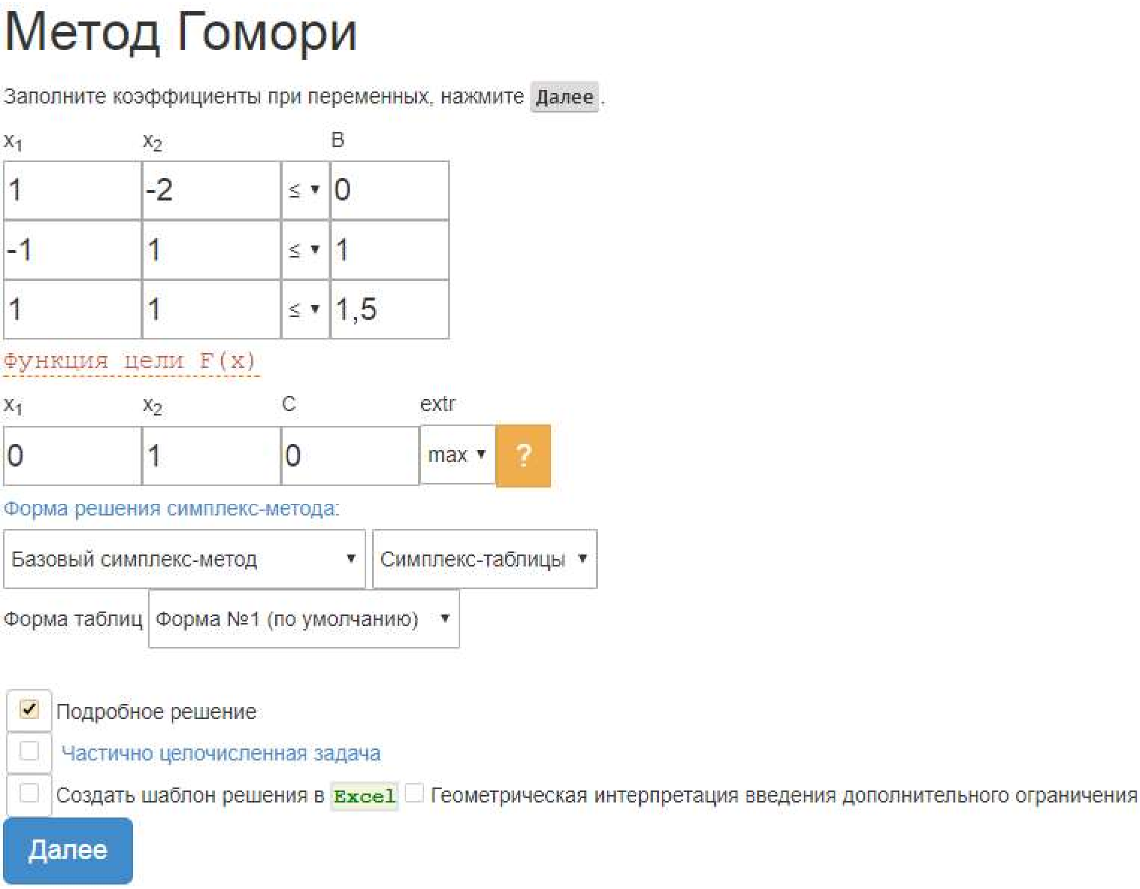

Рисунок 1 – Занесение начальных данных

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$2\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$0-(0 \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$0-(0 \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$1-(0 \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$0-(1 \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$0-(0 \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$1-(0 \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$0-(0 \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$0-(1 \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$1-(0 \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$0-(0 \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$0-(0 \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$0-(1 \cdot \frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{4} : -\frac{1}{2}$	$0 : -\frac{1}{2}$	$0 : -\frac{1}{2}$	$0 : -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} : -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} : -\frac{1}{2}$	$1 : -\frac{1}{2}$
$-1\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$0-(0 \cdot -\frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$0-(0 \cdot -\frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$0-(0 \cdot -\frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$	$0-(1 \cdot -\frac{1}{2}):-\frac{1}{2}$

Решение получилось целочисленным. Нет необходимости применять метод Гомори.

Оптимальный целочисленный план можно записать так:

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$F(X) = 1 \cdot 1 = 1$

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

Метод Гомори

Рисунок 2 – Полученное решение

7 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были получены навыки по решению задач линейного программирования методом ветвей и границ и методом Гомори. Более простым и точным оказался метод ветвей и границ, так как в этом методе выполняются более простые преобразования, недостатком этого метода является множество итераций и большие объемы вычислений.