Билет №1. Функции нескольких переменных. Область определения, основные понятия, линии уровня для функции двух переменных. Предел и непрерывность функции двух переменны.

Если каждому набору n переменных (x_0, x_1, x_2…x_n), принадлежащих некоторой D, ставится в соответствие по некоторому правилу определенное значение переменной Z, то говорят, что на множестве D заданна функция n переменных (ФНП).

Z=f(x_1, x_2,..,x_n)   D – область определения функции; соответствующее Z – множество значений.

Так как основные теоретические факты, сформулированы для функции двух переменных, справедливы и для n переменных, подробно рассмотрим функцию двух переменных. (ФДП)

Z=f(x,y)

Областью определения ФДП называют множество точек (x,y) плоскости для которых выражение f(x,y) имеет смысл.

Графиком функции ФДП, называют множество точек пространства для которых (x,y) принадлежит D   а, Z=f(x,y) где Z-третья координата.

Так как график ФДП некоторая поверхность в пространстве, построение графика не всегда возможно. Поэтому ограничиваются построением линий уровня. (Линия уровня ФДП – множество точек плоскости, для которых функция принимает постоянное значение)

Предел и непрерывность ФДП.

Окрестностью точки M_0(x_0, y_0), называют любой круг, содержащий эту точку. Как правило в качестве окрестности рассматривают круг с центром в M_0. Такое множество задается аналитически неравенством: $\sqrt{(X - X0)^2 + (Y - Y0)^2} < \delta$

Число A, называют пределом функции Z=f(x,y) если (∀ ξ>0)(каждая δ>0), такие что (∀ x,y(x не равно x_0, y не равно y_0) $\sqrt{(X - X0)^2 + (Y - Y0)^2} < \delta$

$|f(x,y) - A| < \xi \qquad \lim_{\substack{x \to x0 \\ y \to y0}} f(x,y) = A$

Предел функции в точке существует, если его значение не зависит от того каким путем M→M_0

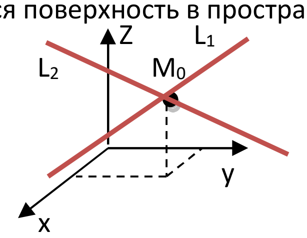
При вычислении приделов пользуются той же техникой и правилами, которые применялись при нахождении пределов функции одной переменной.

Функция Z=f(x,y) называют непрерывной в точке M_0(x_0,y_0), если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности, существует предел функции в этой точке, который совпадает со значение функции в этой точке. $\lim_{\substack{x \to x0 \\ y \to y0}} f(x,y) = f(x,y)$

У ФДП могут быть точки разрыва (точки, в которых нарушается непрерывность) и линии разрыва (состоят из точек разрыва. Если функция непрерывна в каждой точке замкнутой D, то она обладает свойствами, которые выполнялись для непрерывных функций одной переменной. Замкнутая D – это такая D, что она вместе с границей целиком содержится внутри некоторого круга радиуса R.

Билет №2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Пусть Z=f(x,y) дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$ некоторой D. Графиком данной функции является поверхность в пространстве.



$x=x_0$
$y=y_0$
$Z=f(x_0,y)$
$Z=f(x,y_0)$

Т.к. f(x,y) дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то получившиеся функции одной переменной также дифференцируемы в этой точке и можно провести касательные к графикам функций в точке M_0.

Построенные касательные l_1, l_2 принадлежат одной плоскости, называемой касательной плоскостью функции. Получим уравнение касательной плоскости:

$C\neq 0$ $\quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$Z-Z_0=A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)$, где $A_1=-A/C$ $\quad B_1=-B/C$

L_1: $y=y_0$; $Z=Z_0+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)$ касательная плоскость: $Z-Z_0=A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)$; $\rightarrow$ $A_1=f'_x(x_0,y_0)$

L_2: $x=x_0$; $Z=Z_0+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ $\quad y=y_0$; $Z=Z_0+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)$ $\quad B_1=f'_y(x_0,y_0)$

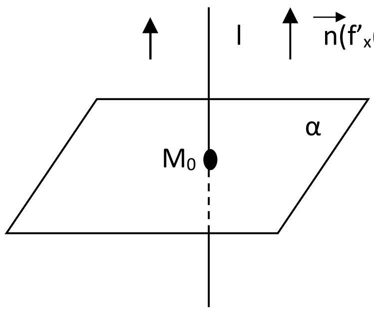
Вывод: уравнение касательной будет иметь следующий вид :

$Z-Z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$, тогда уравнение касательной на плоскости:

$$\boxed{f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(Z-Z_0)=0}$$

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости, проходящая, через точку касания называется нормалью к поверхности. Уравнение нормали получают из условия перпендикулярности этой прямой к касательной плоскости. Уравнение нормали:

$$\frac{x-x0}{f'x(x0,y0)}=\frac{y-y0}{f'y(x0,y0)}=\frac{Z-Z0}{-1}$$



$\vec{n}(f'_x(x_0,y_0);\ f'_y(x_0,y_0);-1)$

$\vec{n}\uparrow\uparrow l \Rightarrow \vec{n}$-напр.вектор

Билет №3. Частные производные, производные высших порядков.

Если придать приращение каждой переменой $(\Delta x, \Delta y)$, то соответствующее полное приращение функции будет иметь вид: $\Delta Z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

Если зафиксировать (предположить, что она постоянная) одну из переменных, то приращение получает только одна переменная и соответствующие приращения функции называют частными.

$\Delta_x Z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$ $\Delta_y Z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$

Если существует предел отношения частного приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к 0, то функция имеет частную производную по рассматриваемому аргументу.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x Z}{\Delta x} = Z' \text{по } x,$ $Z_x'=\delta Z/\delta x$, где δ-«де»

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y Z}{\Delta y} = Z' \text{по } y,$ $Z_y'=\delta Z/\delta y$

Так как при нахождении производной рассматривают частные приращения функции, то при нахождении частной производной предполагают, что одна из переменных фиксированная, тогда функция становится функцией одной переменой. Поэтому при нахождении производной применяют те же правила дифференцирования и таблицу производных одной переменной.

Так как производные первого порядка(частные) так же являются функциями, то можно найти производные от этих функций по переменной x и y. Найденные производные называют производными второго порядка. Аналогично могут быть найдены производные n-ого порядка. Производные порядок которых >2 называют производными высшего порядка.

$Z''_{xx}=(Z'_x)_x= \delta/\delta x* \delta Z/\delta x= \delta^2 Z/\delta x^2$; $Z''_{xx}= \delta^2 Z/\delta y^2$

$Z''_{xy}=(Z'_x)_y= \delta/\delta y* \delta Z/\delta x= \delta^2 Z/ \delta y \delta x$–смешанная производные; $Z''_{yx}= \delta^2 Z/\delta x \delta y$

Теорема Шварца: смешанные производные, отличающиеся только порядком дифференци-рования равны, если производные высших порядков непрерывны. $Z''_{xy}= Z''_{yx}$

Билет №4. Производная сложной и неявной функции.

Пусть Z=f(x,y) такова, что x,y так же являются функциями нескольких переменных, то теорема:

Если функция Z=f(x,y) дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, а функции x=x(t) и y=y(t) дифференцируемы в соответствующей точке t, то производную сложной функции можно найти по формуле: $\boxed{Z'_t=(\delta Z/\delta x)*(\delta x/\delta t)+(\delta Z/\delta y)*(\delta y/\delta t)}$ $Z'_t=Z'_x*x'_t+Z'_y*y'_t$

Доказательство: т.к. функция дифференцируема в точке (x,y) ее полное приращение имеет вид:

$\Delta Z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$

Если переменные x,y имеют приращение Δx,Δy эти приращения могут быть вызваны соответствующим приращением переменной t.

$$\frac{\Delta Z}{\Delta t}=A\frac{\Delta x}{\Delta t}+B\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$Z'_t=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Z}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}A\frac{\Delta x}{\Delta t}+\lim\limits_{\Delta t\to 0}B\frac{\Delta y}{\Delta t}+\lim\limits_{\Delta t\to 0}\alpha\frac{\Delta x}{\Delta t}+\lim\limits_{\Delta t\to 0}\beta\frac{\Delta y}{\Delta t}=Z'_x*x'_t+Z'_y*y'_t$ ЧТД.

Если функции x и y являются функциями двух переменных, то для функции Z можно найти частные производные по каждой из этих переменных пользуясь формулами аналогичными доказанной.

x=x(u,v) y=y(u,v) → δZ/δu= (δZ/δx)*(δx/δu)+ (δZ/δy)*(δy/δu)

δZ/δv= (δZ/δx)*(δx/δv)+ (δZ/δy)*(δy/δv)

Функция называется неявной, если из уравнения, задающего функцию нельзя выразить переменную Z через x и y. F(x,y,z)=0 . Дифференцируют уравнение, задающую функцию по переменной x и y.

y=const δF/δx=(δF/δx)* (δx/δx)+ (δF/δZ)* (δZ/δx)=0 ---> δZ/δx= $-(F'_x/F'_z)$

x=const δZ/δy= $-(F'_y/F'_z)$

Если функция одной переменной задана неявно, то ее производная может быть найдена с помощью формулы, которая следует из двух полученных : $y'_x=-(F'_x/F'_y)$

Билет №5. Полный дифференциал функции нескольких переменных, дифференциалы высших порядков.

Пусть $Z=f(x,y)$ определена в точке $M_0(x_0,y_0)$ и некоторой ее окрестности.

$Z=f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке M_0, если ее полное приращение может быть записано в виде: $\Delta Z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$,где α,β –бесконечно малые при $\Delta x\to0$, $\Delta y\to0$

Выражение $A\Delta x+B\Delta y$ называют главной частью полного приращения функции.

Главную часть полного приращения функции называют дифференциалом этой функции (полным).

$dZ= A\Delta x+B\Delta y= Adx+Bdy$ $\quad \Delta x=dx \quad \Delta y=dy$

Выясним как связаны A и B с частными производными функции. Пусть y=const, тогда $\Delta y=0$

$\Delta_x Z= A\Delta x+ \alpha\Delta x,$ $\quad \lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x Z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(A+\alpha)=A$ $\quad A=Z'_x$

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x Z}{\Delta x}=Z'_x$$

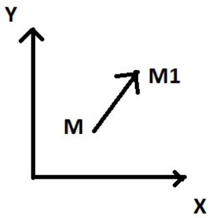
Аналогично можно доказать, что $B=Z'_y$ $\quad \boxed{dZ= Z'_x dx +Z'_y dy}$

Найдем дифференциал 2ого порядка, при этом dx и dy считаются постоянными:

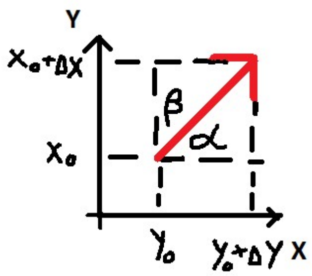
$d^2Z=d(dZ)=d(Z'_x dx +Z'_y dy)= (Z'_x dx +Z'_y dy)'_x dx+(Z'_x dx +Z'_y dy)'_y dy=Z''_{xx}dx^2+ Z''_{yx}dydx+Z''_{xy}dxdy+ Z''_{yy}dy^2= Z''_{xx}dx^2+2 Z''_{xy}dxdy+ Z''_{yy}dy^2$

Билет №6.Производная по направлению. Градиент.

Т.к. при нахождение частных производных приращение получает одна из переменных, то частные производные можно рассматривать как производные в направлении координатных осей.
Рассмотрим функцию Z=f(x, y) и найдём её приращение, если точка $M(x_0, y_0)$ перемещается в направлении $L(x_1, y_1)$ и переходит в точку $M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.
L параллельно OXY. В этом случае функция получит приращение называемое приращением в заданном направлении. Соответствующее приращение направления обозначается Δl.
$\Delta Z_l=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$
$\Delta L=|MM_1|$



Производной функции Z=f(x, y) в заданном направлении называется предел отношения соответствующего приращения функции к приращению направления L, когда ΔL→0. (Если данный предел существет)
$dZ/dL=\lim(\Delta Z_L/\Delta L)$ при $\Delta l \to 0$



$\Delta L=\mathrm{sqrt}(\Delta x^2 + \Delta y^2)$
Cos(альфа) и cos (бета) – направляющие косинусы MM_1. Найдём производную функции, используя формулы производной сложной функции для случая, когда переменные x и y зависят от одной l:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial l}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial l}$$

$$\frac{\partial x}{\partial l}=x'_l=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta l}=\cos\alpha$$

$$\frac{\partial y}{\partial l}=y'_l=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta l}=\cos\beta$$

$$\boxed{z'_l=z'_x\cdot\cos\alpha+z'_y\cdot\cos\beta}$$

Если $\vec{l}(x_1, y_1)$, то:

$$\cos\alpha=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

Знак производной функции в направлении данного вектора в указанной точке показывает, растёт или убывает функция в этом направлении. Модуль полученного числа показывает скорость роста или убывания функции.
Среди всех направлений можно выделить такое, в котором функция растёт быстрее всего.
Градиентом функции Z=f(x, y) в точке (x_0, y_0) называется вектор с координатами:
$z'_x(x_0;y_0),\ z'_y(x_0;y_0)$. Пусть вектор l(cosα, cosβ), надем:
dZ/dl=|gradZ|*|l|*cosγ Угол (γ) – угол между градиентом и вектором L.
Z'_l=|grad Z|*|l|*cosγ

Произведение будет наибольшим, если cosγ=1 =>γ=0 =>gradZ коллиниарен вектору l => производная в направлении градиента самая большая. Найдем формулу для производной функции в направлении градиента: $Z'_{gradZ}=|gradZ|^2$

Билет №7.Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия существования локального экстремума.

Z=f(x, y) определена в точке (x_0, y_0)и некоторой её окрестности.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой max(min) функции Z=f(x, y), если для любой точки $N(x_0, y_0)$,из окрестности данной точки, выполняется неравенство $f(x_0, y_0) >= f(x, y)$($f(x_0, y_0) <= f(x, y)$).

Точки максимума и минимума называют точками экстремума функции, а значения в этих точках экстремальными, т.к. неравенство, указанное в определении, выполняется для точек из окрестности точек экстремума, а радиус окрестности может быть небольшим, поэтому данные точки называются локальнымим экстремумами.

Необходимый признак экстремума: Если в точке$P_0(x_0;y_0)$ дифференцируемая функция$z=f(x;y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0,\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0.$$

Доказательство: Допустим, что функция z=f(x;y) имеет в точке$P_0(x_0;y_0)$ экстремум.

Согласно определению экстремума функция z=f(x;y) при постоянному=y_0, как функция одного x достигает экстремума при$x=x_0$.

Как известно, необходимым условием для этого является обращение в

нуль производной от функции$f(x;y_0)$, при$x=x_0$,

т. е.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0.$$

Аналогично функция z=f(x;y) при постоянном$x=x_0$,, как функция одного y, достигает экстремума при $y = y_0$. Значит,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0$$

Что и требовалось доказать.

Теорема (достаточные условия существования локального экстремума).Пусть $P_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка трижды дифференцируемой в $O_\delta(P_0)$ функции $z = f(x,y)$ и пусть

$$H(P_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0)\\ f''_{xy}(P_0) & f''_{yy}(P_0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2.$$

Тогда стационарная точка $P_0(x_0, y_0)$ является:

1) точкой локального максимума, если $H(P_0)>0$ и $f''_{xx}(x_0, y_0)<0$;

2) точкой локального минимума, если $H(P_0)>0$ и $f''_{xx}(x_0, y_0)>0$;

3) если $H(P_0)<0$, то стационарная точка $P_0(x_0, y_0)$ не является точкой локального экстремума функции.

Замечание. Если $H(P_0)=0$, то нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке P_0. В этом случае необходимо произвести дополнительные исследования знака функции $z = f(x,y)$ в $O_\delta(P_0)$.

Приращения Δx и Δy не могут равняться нулю одновременно, поскольку в подобном случае точка $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ совпала бы с точкой $P_0(x_0, y_0)$ и функция $z = f(x,y)$ не получила бы никакого приращения.

Билет №8.Условный экстремум функции нескольких переменных.

Пусть дана функция двух переменных Z=f(x, y), удовлетворяющая уравнению f(x, y)=0, которое называется уравнение связи.

M(x_0, y_0) называется точкой условного максимума (минимума), если она является внутренней точкой области определения функции и для всех точек N(x, y) принадлежит окрестности этой точки и удовлетворяющей уравнению связи, выполняется неравенство f(x_0, y_0) >=f(x, y) для max для Min (f(x_0, y_0) <=f(x, y)).

Существует два метода нахождения условных экстремумов:

1) Если из уравнения связи легко выразить какую-либо переменную, то получившееся выражение подставляют в уравнение функции, получают функцию одной переменной, которую исследуют на экстремум.
2) Метод Лагранжа. Вводится функция Лагранжа по следующей формуле:
   L(x, y, λ)=f(x, y) + λ***ф(x, y), где** λ – множитель Лагранжа.
   Функцию исследуют опираясь на теорему.

Теорема: Если x0, y0 являются точкой условного экстремумаZ=f(x, y), то существует такое число λ0, что точка (x0, y0, λ0) является точкой экстремума функции Лагранжа.

Для отыскания точек условного экстремума сначала решают систему из трёх уравнений:
$L'_x=0$
$L'_y=0$
$L'_\lambda=0$ $L'_\lambda=f(x,y)$
Для определения вида экстремума можно воспользоваться теоремой о «Достаточном условии существования локального экстремума». В уравнении функции Лагранжа подставляют найденное λ, получают функцию двух переменных, для которой можно применить теорему о «Достаточном условии существования локального экстремума».

Билет №9. Формула Тейлора для функции двух переменных.

Формула Тейлора. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 конечные производные до $(n+1)$ порядка включительно. Тогда для любой точки из этой окрестности имеет место формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}x_0}{n!}\cdot(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

$$c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0<\theta<1.$$

Условие справедливости: функция дифференцируема в x_0 и некоторой ее окрестности n+1 раз.

Данную формулу можно преобразовать и заменить на (здесь вместо x_0 написано t_0)

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \ldots$$

Пусть функция Z=f(x, y) дифференцируема в точке $M(x_0, y_0)$ и имеет в этой точке и некоторых её окрестностях все производные до n+1 включительно. Покажем, что для функции справедливо формула Тейлора, аналогично для функции двух переменных:

$\Delta f(x_0, y_0)=df(x_0, y_0) + 1/2!\ d^2f(x_0, y_0) + 1/3!\ d^3f(x_0, y_0) + \ldots$, где $\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$

Доказательство

Рассмотрим функцию двух переменных *f(x, y)*, имеющую в окрестности точки (x_0, y_0) непрерывные производные по $(n + 1)$-й порядок включительно. Зададим аргументам *x* и *y* некоторые приращения Δx и Δy и рассмотрим новую независимую переменную *t*:

$x = x_0 + t\cdot\Delta x,\ y = y_0 + t\cdot\Delta y$ $(0 \le t \le 1)$. Эти формулы задают прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Тогда вместо приращения $\Delta f(x_0, y_0)$ можно рассматривать приращение вспомогательной функции

$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, (4.4)

равное $\Delta F(0) = F(1) - F(0)$. Но $F(t)$ является функцией одной переменной *t*, следовательно, к ней применима формула (4.3). Получаем:

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!}d^2F(0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^nF(0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta)$$

Отметим, что при *линейной* замене переменных дифференциалы высших порядков обладают свойством инвариантности, то есть

$$d\ F(0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy = df(x_0, y_0),$$

$$d^2F(0) = f''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0, y_0)dy^2 = d^2f(x_0, y_0),$$

....

$$d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y).$$

Подставив эти выражения в (4.3), получим **формулу Тейлора для функции двух переменных**:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$$

, (4.5)

Билет №10. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области

Пусть функция Z=f(x, y) определена и непрерывна на области определения D, тогда функция достигает в этой области своего наибольшего и своего наименьшего значения, которые называются экстремумами функции. Для нахождения глобальных экстремумов функции пользуются следующим алгоритмом:

1) Найти критические точки функции, принадлежащие D и вычислить значение в этих точках.
2) Исследовать функцию на границе области D (из уравнения границы выражают какую-либо переменную, подставляют в функцию, идут в лес и исследуют получившуюся функцию одной переменной).
3) Из всех получившихся значений в предыдущих двух пунктах выбирают самое большое и самое маленькое.

Билет №11. Дифференциальные уравнения n-го порядка: основные определения.

Определение. Уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные различных порядков, называется *дифференциальным.*
Неизвестную функцию обычно обозначают y(x) или просто y, а ее производные - y', y" и т. д.

Определение. *Порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной, входящей в него.
Например, $x^2y' - y = 0$, $y' + \sin x = 0$ - уравнения первого порядка, а $y'' + 2y' + 5y = x$ - уравнение второго порядка.

Уравнение $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ называется дифференциальным уравнением n-го порядка.

В ДУ может не входить x или y, а также оно может зависеть только от одной производной

Определение. Функция y=φ(x), при подстановке которой в ДУ получается тождество, называется *частным решением ДУ*

Определение. Функция $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где C1,C2,…,Cn – некоторые числа , называется *общим решением ДУ n-го порядка*

*На*хождение частного решения при заданных начальных условиях называется задачей Коши.

$У(X_o)=У_o$, $y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$, $y'(X_0)=y'$

Билет №12. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, в полных дифференциалах, линейные, Бернулли.

Общий вид *дифференциального уравнения первого порядка* определяется выражением

$$F(x,\ y,\ y')=0.$$

Уравнение может не содержать в явном виде *x* и *y,* но обязательно содержит y'.

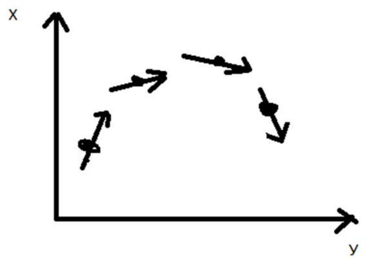
Если уравнение можно записать в виде

$$y'=f(x,y),$$

то получим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной.

Т.к. y’ равна tg угла наклона касательной, то данное выражение устанавливает связь между точками с координатами (x,y) и углом наклона касательной, проведенной в этой точке к интегральной кривой. Поэтому говорят, что уравнение ниже задает поле направления

$$y'=f(x,y),$$



Кривые, во всех точках которых направление поля одинаково – направлены одинаково

ДУ первого порядка может быть преобразовано к следующему виду: $y' = \frac{dy}{dx}$

P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0

ДУ первого порядка может быть найдено в явном и неявном виде

Общие решения ДУ 1 порядка удовлетворяют следующим условиям:

1)Функция y=φ(x,C) является решением ДУ при любом фиксированном значении C

2) Кого бы не было начального условия, найдется единственное значение C, удовлетворяющее этому условию.

ДУ с разделяющимися переменными

Опр: Если ур-е P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, функции P и Q могут быть представлены в виде произведений $P(x,y)=P_1(x)*P_2(y)$ и $Q(x,y)=Q_1(x)*Q_2(y)$, то данное ур-е называется ур-ем с разделяющимися переменными.

Метод решения:

$P_1(x)*P_2(y)dx+Q_1(x)*Q_2(y)dy=0$

$\frac{P1(x)dx}{Q1(x)}+\frac{Q2(y)dy}{P2(y)}=0$

Интегрируются обе части ур-я

$\int \frac{P1(x)dx}{Q1(x)}+\int \frac{Q2(y)dy}{P2(y)}=\int 0$

$\varphi(x)+\delta(y)=C$

Замечания:
1)При делении ур-я м.б. потеряны некоторые решения. Поэтому следует подстановкой проверить, сущ. ли функции, удовлетворяющие данным равенствам и если они не входят в общее решение, до добавить их к решениям
2) ДУ с разд. переменными могут быть записаны в виде
$y'=f_1(x)*f_2(y)$
3)В самом простом случае ДУ с р.п. может иметь $y'=f(x)$. В этом случае решается интегрированием
$y=\int f(x)dx=\varphi(x)+C$\

Пример:
1) $(y+xy)dx+(x-xy)=0$
$y(1+x)dx+x(1-y)dy=0$ |: $(x\cdot y)$
$\int(\frac{1+x}{x})dx+\int(\frac{1-y}{y})=\int 0$
$\int(\frac{1}{x}+1)dx+\int(\frac{1}{y}-1)dy=c$
$\ln|x|+x+\ln|y|-y=c$
$\ln|xy|+x-y=c$
Частные случаи :
$y=0$, $x=0$ -решения
Ур-я вида $y'=f(ax+by+C)$ могут быть приведены к ур-ям с р.п. с помощью замены
$U=ax+by+c$ ($b\neq 0$)
$U'=a+by'$
$y'=\frac{u'-a}{b}$
$\frac{u'-a}{b}=f(u)$ - ур-е с р.п.
Ур-е вида $y'=f(\frac{a1x+b1y+c1}{a2x+b2y+c2})$ тоже можно, но только если $a_1b_2=b_1a_2$
$(x+2y)y'=1$
$U=x+2y$, $u'=1+2y'$
$y'=\frac{u'-1}{2}$
$u\times\frac{u'-1}{2}=1$
$u\cdot u'-u=2$
$u\cdot\frac{du}{dx}=2+u$ $|\cdot dx$
$u\cdot du=(2+u)dx$ $|\div(2+u)$
$\int\frac{u\cdot du}{2+u}=\int dx$
$\int\frac{(u+2)-2}{2+u}du=x+c$

$\int(1+\frac{2}{2+u})du = x + c$
u+ln$|2+u| = x + c$
x+2y+ln$|2+x+2y| = c$
Однородные ДУ первого порядка
Определение:
Функция f(X,У) называется однородной функцией n-ого порядка если выполняется равенство:
f(λx; λy)=λ^nf(x,y)
Пример:
f(x,y)=x^2+3xy-y^2
f(λx; λy)=$\lambda^2 x^2$+3λx·λy-$\lambda^2 y^2$=$\lambda^2(x^2$+3xy-y^2)= λ^2f(x,y)
n=2- однородная функции 2 порядка
Определение 2:
Если уравнение P(x,y)+Q(x,y)dy P и Q являются однородными функциями однородного порядка, то такое уравнение называет однородными.
Уравнение указанное в определении может быть преобразовано к виду
Y= f(x,y), где a(ч,н)- однообразная функции нулевого порядка.
f(λx, λy)=f(x,y)
Тогда данное уравнение преобразовано к следующему виду:
y'=f($\frac{x}{x}$;$\frac{y}{x}$)=f(1;y/x)= φ(y/x)
Метод решения:
y/x=u, где u=u(x)
y= ux, y'=u'x+u
u'x+u=φ(u), y'=φ(y/x)
$\frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u \mid \cdot dx$
xdu=(φ(u)-u)dx |: (x(φ(u)-u))
$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}$=$\int\frac{dx}{x}$
h(u)=ln$|x| + c$
h(y/x)=ln$|x \cdot c|$
Пример:
y'=$\frac{x+y}{x-y}$
f(x,y)=$\frac{x+y}{x-y}$
f(λx, λy)= $\frac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x-\lambda y}$=$\frac{x+y}{x-y}$= f(x,y)· λ^0
λ^0=1
y'=$\frac{(x+y)\div x}{(x-y)\div x}$=$\frac{1+y/x}{1-y/x}$
y/x=u, y=ux, y'=u'x+u
u'x+u=$\frac{1+u}{1-u}$
$\frac{du}{dx}x$ =$\frac{1+u}{1-u} - u$ |·dx

xdu=$\frac{1+u-u+u^2}{1-u}$dx |: (x·$\frac{1+u^2}{1-u}$)

$\int\frac{1+u}{1-u^2}$du=$\int\frac{dx}{x}$

$\int\frac{du}{1+u^2}$ - $\int\frac{udu}{1+u^2}$=$\ln|cx|$

arctgU-$\frac{1}{2}\ln(1+u^2)$=$\ln(cx)$

arctg$^{y}/_{x}$-$\frac{1}{2}\ln(1+\frac{y^2}{x^2})$)=$\ln(cx)$

arctg$^{y}/_{x}$=$\ln|cx|$+$\ln\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}$

5.Линейные однородные уравнения 1ого порядка.

Опред. Уравнение вида y'+p(x)y=g(x), где p(x) и g(x)- функции переменной x

Линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка – это уравнение вида y'+p(x)y=0

Существует 2 метода решения линейных уровнений1 метод- Бернулли (замены переменных)

y=u$\cdot$v(u=u(x) ,v=v(x))

u'v+uv'+p(x)uv=g(x)

u'v+u(v'+p(x)v)=g(x)

1)v'+p(x)v=0

$\frac{dv}{dx}$+p(x)v=0 | $\cdot\frac{dx}{v}$

$\int\frac{dv}{v}$+∫p(x)dx=∫0

$\ln v$+φ(x)=0

$\ln v$=-φ(x)

V=$e^{-4(x)}$

2) $e^{-4(x)}$=g(x)

u'=g(x) $e^{4(x)}$

u=∫g(x) $e^{4(x)}dx$

u=h(x)+c

Ответ: y=(h(x)+c)$\cdot$ $e^{-4(x)}$

Пример.

y'+2xy=2x

y=uv

u'v+uv'+2xuv=2x

u'v+u(v'+2xv)=2x

1)v'+2xv=0

$\frac{dv}{dx}$+2xv=0 |: $\frac{dx}{v}$

$\int\frac{dv}{v}$+∫2xdx=∫0

$\ln v$+x^2=0

$\ln v$=x^2

V=e^{-x^2}

2 метод –Лагранжа (вариации производной постоянной)

y'+p(x)=0

$\frac{dv}{dx}$+p(x)y=0 |$\frac{dx}{y}$

∫$\frac{dx}{y}$ + ∫p(x)= ∫0

$\ln y$+φ(x)=c

$\ln y$= e-φ(x)

y=$e^{c-\varphi(x)}$= e^c $\cdot$ $e^{-\varphi(x)}$

Суть метода вариации в том, что С находят как функцию переменной

Х

c=c(x), y=c(x)$e^{-4(x)}$

c'(x)$\cdot$ +c(x$\cdot$) c(x)$\cdot$ e +c(x)$\cdot$(-φ(x))'+p(x)$\cdot$c(x) $e^{-4(x)}$+c(x)=g(x)

Полученное уравнение преобразовывают в процессе выражения содерж С(x) уничтожаются. В полученном уравн выраж С(x) и интегрируя, находят С(x).

Пример:

y'+2xy=2x

y'+2xy=0

$\frac{dy}{dx}$+2xy=0 | $\cdot\frac{dx}{y}$

∫$\frac{dy}{y}$+∫2xdx=∫0

$\ln y$ +x^2=c

y=e^{c-x2}=c(x)$\cdot$$e^{-x^2}$

Замечание: Некоторые уравнения с помощью преобразования сводятся к линейным уравнениям, в которых функцией является переменная x, а аргументом переменной y

УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Уравнения вида y'+p(X)y=g(x)y^x

(αεR ,α≠0, α≠1), p(x) и g(x) не прерывны на Д называется уравн-ем Бернулли

Пример:

y'+$\frac{2y}{x}$=xy^2

y=uv

u’v=uv’+$\frac{2uv}{x}$= xu^2v^2

u’v=u(v’+$\frac{2v}{x}$)= xu^2v^2

1)v’+$\frac{2\mathrm{v}}{x}$=0

$\frac{dv}{dx}$+$\frac{2v}{x}$=0 |:$\frac{dx}{v}$

∫$\frac{dv}{v}$+∫$\frac{2dx}{x}$=∫0

$\ln v$+2$\ln x$=0

$\ln v$=-2$\ln x$

Билет № 13. ДУ высших порядков, допускающих понижение порядка

$y^{(n)}=f(x)$

Порядок данного уравнения понижают последовательным интегрированием до тех пор, пока в левой части ур-я не получат y

Интегрировать приходится столько раз, каков порядок ур-я

1. $y^{(n-1)}=\int f(x)dx=\varphi_1(x)+C$

$y=\varphi_n(x)+\frac{C_1x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{C_2x^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+C_n$

Пример:

$y^{IV}=\sin2x$

$y^{III}=\int sin2xdx-0.5cos2x+C_1$

$y^{II}=\int(-0.5cos2x+C_1)dx=-0.25\sin2x+C_1x+C_2$

$y'=\int(-0.25sin2x+C_1x+C_2)dx=0.125\cos2x+0.5C_1x^2+C_2x+C_3$

$y=\frac{1}{16}\sin2x+\frac{C_1x^3}{6}+0.5C_2x^2+C_3x+C_4$

2. $y^{II}=f(x,y')$

В данном уравнении нет искомой функции

$y'=Z(x)$; $y''=Z'(x)$

$Z'(x)=f(x,Z(x))$ -> $Z(x)=\varphi_1(x,C_1)$

$y'=\varphi_1(x,C_1)$

$y=\int \varphi1(x,C1)dx=\varphi_2(x,C_1)+C_2$

Пример:

$x^2y''+xy'=1$

$y'=Z$; $y''=Z'$

$x^2Z'+xZ=1$ | $:x^2$

$Z'+\frac{Z}{x}=\frac{1}{x^2}$ – Линейное ДУ первого порядка

3. $y''=f(y,y')$

В уравнении отсутствует независимая переменная x

$y'=Z(y)$, $y''=Z'(y)*y'=Z'(y)*Z(y)$

$Z'(y)*Z(y)=f(y,y')$

$Z(y)=\varphi_1(y,C_1)$

$y'=\varphi_1(y,C_1)$ – Уравнение с раздел-ся переменными

$y=\varphi_2(x,C_2,C_1)$

Пример: $y''+2yy'=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=-4$

$y'=z$, $y''=z'\text{-}z$

$z'*z+zy*z=0$ | $:z\neq0$ (z=0 не является решением)

$z'+2y=0$ $\qquad$ $y'=0$ ->$y=C$

$z'=-2y$

$z=\int -2ydy=-y^2+C_1$

$y'=-y^2+C_1$ -> $-4=-4+C_1$; $C_1=0$

$y'=-y^2$

$\frac{dy}{dx}=-y^2$ $\qquad$ | $*dx$

$dy=-y^2dx$ | $:(-y^2)$

$\int -\frac{dy}{y^2}=\int dx$; $\frac{1}{y}=x+C_2$; $0.5=0+C_2$ ->$\frac{1}{y}=x+0.5$

УРАВНЕНИЯ ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Дифференциальное уравнение вида P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 называется уравнением в полных дифференциалах, если существует такая функция двух переменных u(x,y) с непрерывными частными производными, что справедливо выражение du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy.

Теорема: Если в ур-нии P(x)dx+Q(x,y)dy=0 функ-ии
P и Q, а также их частные производные P'y и Q'xнепрерывны в некоторой области Д, то для того чтобы левая часть уравнения была полным дифф лин функцией необходимо и достаточно выполнить следующие равенства: P'y=Q'
Необходимость:
Пусть P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dF(x,y)
Py=Qx
Из условия $\begin{matrix} P(x,y) = F'x| & F''xy = P'y \\ Q(x,y) = F'y| & F''yx = Q'x \end{matrix}$
P'y=Q'x
Метод решения:
Решение уравнения находят как функцию F(x,y)=0
1)F_x(x,y)=P(x,y) ->F(x,y)=∫P(x,y)dx=f(x,y)+h(y)
2)F_y(x,y)=Q(x,Y)
f(x,y)+h(y)y=Q(x,y)->h(y)
(2xy-5)dx+($3y^2+x^2$)dx=0
P(x,y)=2xy-5 ; P'y=2x
Q(x,y)=$3y^2+x^2$ Q_x=2x''
1)F(x,y)=∫(2xy-5)dx=x^2y-5x+h(y)
2)(x^2y-5x+h(y))$_y$=$3y^2+x^2$
x^2+h'(y)=3y+x^2
h(y)=∫3^2dy=y^3+C
F(x,y)=x^2y-5x+y^3+C
Отв: x^2y-5x+y^3+C=0

Билет №14. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Понятие линейно независимых функций. Определитель Вронского.

$y''+a_1(x)y'+ a_2(x)y=0$

Определение: Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называют линейно независимыми на (a; b), если равенство $C_1y_1(x)+ C_2y_2(x)=0$ выполняется тогда и только тогда, когда $C_1=C_2=0$.

В противном случае (хотя бы одно значение C_1 или $C_2 \neq 0$) функции называют линейно зависимыми.

Из определения следует, что, если функции линейно зависимы, то они пропорциональны, т.е. для всех $x\in(a; b)$ выполняется $y_1/y_2=const$.

Для определения линейно (не)/зависимости системы функций вводят специальное понятие, называемое определитель Вронского (вронскиан).

Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ дифференцируемы на (a; b), то вронскиан на данном интервале равен 0.

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$$

Теорема: Если дифференцируемые функции$y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на (a; b),то вронскиан на данном интервале равен 0.

Доказательство:

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы $\Rightarrow C_1=C_2=0$, если $C_1\neq0$ или $C_2\neq0$.

Пусть $C_1\neq0 \Rightarrow y_1(x)= -(C_2/C_1)y_2(x)$

$$W(x)=\begin{vmatrix} -(C_2/C_1)y_2(x) & y_2(x) \\ -(C_2/C_1)y'_2(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = -(C_2/C_1)y_2y'_2 +(C_2/C_1)y_2y'_2=0$$

Теорема: Если дифференцируемые функции$y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно не зависимы на (a; b),то вронскиан для этой функции не равен 0.

Из теорем следует, что вронскиан не равен 0 ни для каких $x\in(a; b)$тогда и только тогда, когда функции являются линейно независимыми.

Билет №15. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Теоремы о структуре решения линейных однородных дифференциальных уравнений.

$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$

Теорема 1: Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются частными решениями ЛОДУ 2-ого порядка, то и функция $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, также является решением данного уравнения.

Доказательство:

$(C_1y_1(x) + C_2y_2(x))'' + a_1(x)(C_1y_1(x) + C_2y_2(x))' + a_2(x)(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)) = 0$

$C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x) + a_1(x)C_1y_1'(x) + a_1C_2y_2'(x) + a_2(x)C_1y_1(x) + a_2C_2y_2(x) = 0$

$C_1(y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)) + C_2(y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2y_2(x)) = 0$

$(y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)) = 0$ – поусловию

$(y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)) = 0$ – поусловию

$0=0 \Rightarrow y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ – является решением

Из теоремы следует, что, если y_1 и y_2 решения уравнения, то и y_1+y_2; Cy_1; Cy_2 также являются решением.

Определение: Фундаментальной системой решений ЛОДУ 2-ого порядка называется совокупность любых двух линейно независимых решений этого уравнения.

Теорема 2 (структура общего решения ЛОДУ 2-ого порядка): Если 2 частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ 2-ого порядка на (a; b) образуют фундаментальную систему решений, то общее решение уравнения имеет вид:

$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Доказательство:

В теореме 1 доказано, что функция $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$является решением данного уравнения.

Требуется доказать, что она является общим с помощью начальных условий:

$y(x_0) = y_0$

$y'(x_0) = y'_0$

и найти единственное частное решение данного уравнения.

Подставим начальные условия в уравнение.

Получим систему двух уравнений в которой неизвестные C_1и C_2.

$$\begin{cases} y_0 = C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) \\ y_0 = C_1y'_1(x_0) + C_2y'_2(x_0) \end{cases}$$

Покажем, что существует единственное решение.

$$\triangle = W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

$C_1 = \triangle_1/\triangle$

$C_2 = \triangle_2/\triangle$

Т.к. $\triangle \neq 0$, то C_1и C_2 существуют и единственные.

Билет №16. Нахождение решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

$y''+py'+qy=0$, ри $q\in R$.

Теорема 1: Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются частными решениями ЛОДУ 2-ого порядка, то и функция $y= C_1y_1(x)+ C_2y_2(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, также является решением данного уравнения.

Доказательство:

$(C_1y_1(x)+ C_2y_2(x))''+ a_1(x)(C_1y_1(x)+ C_2y_2(x))'+ a_2(x)(C_1y_1(x)+ C_2y_2(x))=0$

$C_1y_1''(x)+ C_2y_2''(x)+a_1(x)C_1y_1'(x)+ a_1C_2y_2'(x)+ a_2(x)C_1y_1(x)+ a_2C_2y_2(x)=0$

$C_1(y_1''(x) +a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)) + C_2(y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2y_2(x))=0$

$(y_1''(x) +a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x))=0$ – поусловию

$(y_2''(x) +a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x))=0$ – поусловию

$0=0 \Rightarrow y= C_1y_1(x)+ C_2y_2(x)$ – является решением

Из теоремы следует, что, если y_1 и y_2 решения уравнения, то и y_1+y_2; Cy_1; Cy_2 также являются решением.

Определение: Фундаментальной системой решений ЛОДУ 2-ого порядка называется совокупность любых двух линейно независимых решений этого уравнения.

Теорема 2 (структура общего решения ЛОДУ 2-ого порядка): Если 2 частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ 2-ого порядка на $(a; b)$ образуют фундаментальную систему решений, то общее решение уравнения имеет вид:

$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Доказательство:

В теореме 1 доказано, что функция $y= C_1y_1(x)+ C_2y_2(x)$является решением данного уравнения.

Требуется доказать, что она является общим с помощью начальных условий:

$y(x_0)=y_0$

$y'(x_0)=y'_0$

и найти единственное частное решение данного уравнения.

Подставим начальные условия в уравнение.

Получим систему двух уравнений в которой неизвестные C_1и C_2.

$$\begin{cases} y_0=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0) \\ y_0= C_1y'_1(x_0)+C_2y'_2(x_0) \end{cases}$$

Покажем, что существует единственное решение.

$\triangle=W(x_0)=|y_1(x_0)\ \ y_2(x_0)|\neq0$

$|y'_1(x_0)\ y'_2(x_0)|$

$C_1=\triangle_1/\triangle$

$C_2=\triangle_2/\triangle$

Т.к. $\triangle\neq0$, то C_1и C_2 существуют и единственные.

Значит, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения уравнения.

Исходя из теоремы, будем искать решение в виде $y=e^{kx}$, $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$.

$k^2e^{kx}+pke^{kx} + qe^{kx} =0$

$k^2+pk + q=0$ – характеристическое уравнение ($y=1$, $y'=k$, $y''=k^2$).

В зависимости от того какие решения имеет хакрактеристическое уравнение, находятся решения исходного уравнения.

3 случая:

1) k_1и k_2 – 2 различных действительных корня уравнения.
   $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$
   Докажем, что данные решения линейно независимые.
   $W(x)=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix} = e^{k_1x} * k_2e^{k_2x} – e^{k_2x} * k_1e^{k_1x} = e^{(k_1 - k_2)}*(k_2-k_1)\neq0$
   $y=C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
2) $k_1=k_2$ (в уравнении 2 совпадающих действительных корня).
   $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=xe^{k_1x}$
   Докажем, что y_2 – решение уравнения.
   $y'_2=e^{k_1x}+xk_1e^{k_1x}=e^{k_1x}(1+xk_1)$
   $y''_2=k_1e^{k_1x}(1+xk_1)+k_1e^{k_1x} =e^{k_1x}(2k_1+xk^2_1)$
   $e^{k_1x}(2k_1+xk^2_1)+pe^{k_1x}(1+xk_1)+qxe^{k_1x}=0$
   $2k_1+xk^2_1+p+pxk_1+qx=0$
   $(k^2_1+p+pk_1+q)x+(2k_1+p)=0$
   $k^2_1+p+pk_1+q=0$ – т.к. k_1 – кореньуравнения.
   Т.к. $k_1=k_2$ – корни уравнения, то по т. Виета $k_1+k_2=–p$
   $2k_1+p=0$ =>y_2является решением уравнения.
   Покажем, что y_1 и y_2 – линейно независимые.
   $W(x)=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & xe^{k_1x} \\ k_1e^{k_1x} & e^{k_1x}(1+xk_1) \end{vmatrix} = e^{2k_1x}(1+xk_1) – e^{2k_1x}k_1x\neq0$
   $y=C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$
3) В уравнении 2 различных комплексно сопряженных корня.
   $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$
   $y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}$, $y_2=e^{(\alpha–\beta i)x}$
   Преобразуем полученные формулы, пользуясь формулой Эйлера.
   $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$
   $y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}= e^{\alpha x}e^{\beta ix}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$
   $y_2=e^{(\alpha–\beta i)x}= e^{\alpha x}e^{–\beta ix}=e^{\alpha x}(\cos\beta x–i\sin\beta x)$
   По теореме 1 линейная комбинация частных решений уравнения также является его частным решением.
   Найдем линейные комбинации $y_1(x)$ и $y_2(x)$.
   $\overline{y_1}=(y_1+ y_2)/2= e^{\alpha x}\cos\beta x$

$y_2=(y_1–y_2)/2i= e^{\alpha x}\sin\beta x$

Покажем, что y_1и y_2 – линейно не независимы.

$W(x)=| e^{\alpha x}\cos\beta x e^{\alpha x}\sin\beta x \quad |=e^{2\alpha x}(\alpha\cos\beta x\sin\beta x+\beta\cos^2\beta x–$

$|\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x–\beta e^{\alpha x}\sin\beta x \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x|$

$–\alpha\sin\beta x\cos\beta x+\beta\sin^2\beta x)=\beta\neq 0$

$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

ЛОДУ n-огопорядка с постоянными коэффициентами:

$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+ p_2(x)y^{(n-2)}+…+ p_n(x)y=0$,

где $p_1…p_n$– действительные числа.

Решение уравнения ищутся в виде $y=e^{kx}$. Подставим данную функцию в уравнение и, преобразуя его, получают характеристическое уравнение, соответствующее данному.

$k^n+p_1k^{n-1} +…+p_n=0$

Замечание: Если в полученном уравнении kодин раз является корнем, то его называют простым.

Если число kmраз является корнем, то корень называют кратным, m-кратность.

1) k_1, $k_2…k_n$– простые корни характеристического уравнения.
   $y=C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_2x}+…+ C_ne^{k_nx}$
2) В характеристическом уравнении все корни действительные, но не все простые, тогда каждому простому корнюRсоответствует решение e^{kx}, а каждому кратному корню кратности m (m>1) соответствует mрешений вида: e^{kx}, xe^{kx}, $x^2e^{kx}…x^{m-1}e^{kx}$
3) В уравнении имеются комплексно сопряженные корни, среди которых имеются кратные.
   Тогда каждой паре простых корней $\alpha\pm\beta i$ соответствует 2 частных решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.
   Каждой паре кратных корней кратности mсоответствует 2mрешений:
   $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x… x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$
   $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x… x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Билет №17. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений высших порядков.

$y^{(n)}+a_n(x)y^{(n-1)}+ a_{n-1}(x)y^{(n-2)}+\ldots+ a_0(x)y=0$

1) Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)\ldots y_n(x)$ являются частными решениями ЛОДУ n-ого порядка, то и функция $y= C_1y_1(x)+ C_2y_2(x)+\ldots+ C_ny_n(x)$, где C_1, $C_2\ldots C_n$– произвольные постоянные, является решением данного уравнения.

2) Функции $y_1(x)$, $y_2(x)\ldots y_n(x)$ называют линейно независимыми на (a; b), если равенство $C_1y_1(x)+ C_2y_2(x)+\ldots+ C_ny_n(x)=0$ выполняется тогда и только тогда, когда $C_1=C_2=\ldots=C_n=0$.

В противном случае (хотя бы одно значение $C_i\neq0$ $(i=1\ldots n)$) функции называют линейно зависимыми.

3) Определитель Вронского для уравнений n-ого порядка имеет вид:

W(x)=| $y_1(x)$ $y_2(x)\ldots y_n(x)$|

|$y'_1(x)$ $y'_2(x)\ldots y'_n(x)$|

| …|

|$y^{n-1}{}_1(x)$ $y^{n-1}{}_2(x)$ … $y^{n-1}{}_n(x)$|

4) Если $y_1(x)$, $y_2(x)\ldots y_n(x)$ – частные решенияЛОДУ n-ого порядка на (a; b) образуют фундаментальную систему решенийтогда и только тогда, когда для всех хиз этого интервала вронскиан равен 0.

5) Общее решение уравнения имеет вид:

$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+ C_ny_n(x)$, где C_1, $C_2\ldots C_n$– произвольные постоянные, $y_1(x)$, $y_2(x)\ldots y_n(x)$ – линейно независимые решения уравнения, образующие фундаментальную систему решений.

ЛОДУ n-огопорядка с постоянными коэффициентами:

$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+ p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+ p_n(x)y=0$

где $p_1\ldots p_n$– действительные числа.

Решение уравнения ищутся в виде $y=e^{kx}$. Подставим данную функцию в уравнение и, преобразуя его, получают характеристическое уравнение, соответствующее данному.

$k^n+p_1k^{n-1} +\ldots+p_n=0$

Замечание: Если в полученном уравнении kодин раз является корнем, то его называют простым.

Если число kmраз является корнем, то корень называют кратным, m-кратность.

1) k_1, $k_2\ldots k_n$– простые корни характеристического уравнения.

$y=C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_2x}+\ldots+ C_ne^{k_nx}$

2) В характеристическом уравнении все корни действительные, но не все простые, тогда каждому простому корнюRсоответствует решение e^{kx}, а каждому кратному корню кратности m (m>1) соответствует mрешений вида: e^{kx}, xe^{kx}, $x^2e^{kx}\ldots x^{m-1}e^{kx}$

3) В уравнении имеются комплексно сопряженные корни, среди которых имеются кратные.

Тогда каждой паре простых корней $\alpha\pm\beta i$ соответствует 2 частных решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Каждой паре кратных корней кратности mсоответствует 2mрешений:

$e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x\ldots$ $x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x\ldots$ $x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Билет №18. **Структура общего решения ЛНДУ второго порядка.**

$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ – ЛНДУ

$a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – непрерывные на отрезке(a,b) ф-ии

$Y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ – ЛОДУ соответствующее данному неоднородному

Теорема 1. Если Y – общее решение ЛОДУ соответствующего ЛНДУ, а $\bar{Y}$ - частное решение ЛНДУ, то общее решение ЛНДУ находится как сумма двух данных решений $y= Y+\bar{Y}$

Доказательство:

1) Докажем, что $y= Y+\bar{Y}$ является решением ЛНДУ. Подставим данное решение в уравнение и убедимся, что получится тождество.

   $(Y+\bar{Y})'' + a_1(x)(Y+\bar{Y})'+a_2(x)(Y+\bar{Y})=f(x)$

   $Y''+ \bar{Y}''+ a_1(x)Y'+ a_1(x) \bar{Y}'+ a_2(x)Y+ a_2(x) \bar{Y}=f(x)$

   $\underbrace{Y'' + a_1(x)Y'+ a_2(x)Y}_{=0,\ \text{т.к.}}+ \underbrace{\bar{Y}'' +a_1(x) \bar{Y}'+ a_2(x) \bar{Y}}_{=f(x),\ \text{т.к.}}=f(x)$

   У – решение ЛОДУ $\bar{Y}$ - решение ЛНДУ

   $f(x)=f(x)$

2) Докажем, что любое частное решение ЛНДУ удовлетворяющее н.у. $y(x_0)=y_0$,, $y'(x_0)=y'_0$, может быть получено из данного общего единственным образом.

   $y= Y+\bar{Y}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+ \bar{Y}$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ.

   Покажем, что существуют единственные значения C_1 и C_2, удовлетворяющие н.у. Для этого составим систему 2х уравнений.

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+ \bar{Y}(x_0)=y_0 \\ C_1y'_1(x_0)+C_2y'_2(x_0)+ \bar{Y}'(x_0)=y'_0 \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} =W(x_0)\neq 0$, следовательно система имеет единственное решение

Билет №19. **Решение ЛНДУ второго порядка методом вариации произвольных постоянных.**

Пусть дано ЛНДУ $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$. Общее решение такого уравнения $y=У+\bar{Y}$.
Пусть $У= C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$
Суть метода вариаций (метода Лагранжа) состоит в том, что $\bar{Y}$ ищут как сумму вида
$\bar{Y}= C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$
$\bar{Y}'= C'_1y_1+ C_1y'_1+C'_2y_2+C_2y'_2$
Пусть $C'_1y_1+C'_2y_2=0$, тогда $\bar{Y}'=C_1y'_1+C_2y'_2$
$\bar{Y}''= C'_1y'_1+ C_1y''_1+C'_2y'_2+C_2y''_2$
Подставим 2ю первую и искомые функции в исходное уравнение
$C'_1y'_1+ C_1y''_1+C'_2y'_2+C_2y''_2+a_1(x)C_1y'_1+ a_1(x)C_2y'_2+ a_2(x)C_1y_1+ a_2(x)C_2y_2=f(x)$
$C_1\underbrace{(y''_1 +a_1(x)y'_1 +a_2(x)y_1)}_{=0}+C_2\underbrace{(y''_2 +a_1(x)y'_2 +a_2(x)y_2)}_{=0}+(C'_1y'_1+ C'_2y'_2)=f(x)$
$C'_1y'_1+ C'_2y'_2=f(x)$

$$\begin{cases} C'_1y_1+ C'_2y_2=0 \\ C'_1y'_1+ C'_2y'_2=f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C'_1=\varphi_1(x) \\ C'_2=\varphi_2(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1=S\varphi_1(x)dx \\ C_2=S\varphi_2(x)dx \end{cases}$$

$\bar{Y}=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$

Билет №20. **Решение ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.**

$y''+py'+qy=f(x)$, p и q – числа

В том случае f(x) имеет определенный вид. $\bar{Y}$ можно найти как функцию определенного вида, который зависит от f(x).

Рассмотрим 2 вида функций:

1) $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n.
   $\bar{Y}= e^{\alpha x}Q_n(x)x^r$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неизвестными коэффициентами, r – кратность корня a характеристического уравнения (сколько из a является корнями харак-кого ур-я)
   Неизвестный коэффициент $Q_n(x)$ находят методов неопределенных коэффициентов: функцию $\bar{Y}$ подставляют в исходное уравнение, преобразуют левую часть и составляют систему, уравнивая коэффициенты перед соответственными степенями x в левой и правой частях уравнения.
   В уравнениях 2 порядка r может быть равна 0 (α не является корнем), r может быть = 1 (α один раз корень), r может быть =2 (α 2 раза корень)
2) $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x +Q_m(x)\sin\beta x)$
   $\bar{Y}= e^{\alpha x}(M_l(x)\cos\beta x +N_l(x)\sin\beta x)$
   l- max {n;m}
   $M_l(x)$ и $N_l(x)$ – многочлены степени l с неизвестными коэффициентами, r – кратнось корня $\alpha+\beta i$ характеристического уравнения.

Замечание:

1) $P_n(x)$ может быть ≡0 или $Q_m(x)$ может быть ≡0
2) В уравнении 2 порядка кратность корня $\alpha+\beta i$ может быть = 0 или 1.

Билет №21. Нахождение частного решения ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим теперь решение некоторых типов линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (9)$$

где *p, q* — постоянные действительные числа, *f(x)* — известная непрерывная функция в интервале (a; b). По теореме 2 (п. 1) для нахождения общего решения уравнения (9) надо знать общее решение *Y* соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = = 0$ (для этого используются результаты п. 2 настоящего параграфа) и частное решение *z* уравнения (9).

Вид частного решения уравнения (9) зависит от вида правой части этого уравнения. Рассмотрим некоторые случаи.

а) $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ (a_2 Ф 0). Если *q Ф* 0, то частное решение уравнения (9) ищем также в форме квадратного трехчлена: $z = A_2x^2 + A_1x + A_0$, где A_2, A_1, и A_0 — неопределенные коэффициенты. Отсюда $z' = 2A_2x + A_1, z'' = 2A_2$. подставляя эти выражения в уравнение (9), в котором $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, получим тождество:

$A_2qx^2 + (2Ap + A_1q)x + 2A_2 + Ap + A_0q = a_2x^2 + a_1x + a_0$, *откуда*

$$A_2q = a_2,\ 2A\text{^} + A_1q = a_v\ 2A_2 + A\text{^}p + A_0q = a_0. \qquad (10)$$

Так как *q Ф* 0, то из равенства (10) для коэффициентов A_2, A_1 и A_0 получаются определенные числовые значения. Тем самым частное решение *z* будет вполне определено. Если $q = 0$, то частное решение *z* уравнения (9) ищем в виде $z = x(A_2x^2 + A_1x + A_0)$, когда 0 — однократный корень характеристического уравнения (8), и в виде $z = x^2(A_2x^2 + A_1x + A_0)$, когда 0 — двукратный корень характеристического уравнения (8). Аналогично обстоит дело, если f(x) — многочлен P(x) произвольной степени.

Пример 1. Решить уравнение $y'' + y' = 2x + 1$. Имеем:

$$k^2 + k = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = -1, Y = C_1 + C_2e^{-x}.$$

Так как 0 — однократный корень характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z = x(A_1x + A_0)$. Далее решаем, как и в случае а): $z' = 2A_1x + A_0$, $z'' = 2A_{1(}\ 2A_1 + 2\text{^}_1x + A_0 = 2x + 1$, $A_1 = 1$,

$$A_0 = -1,\ z = x^2 - x,\ y = C_1 + C_2e^{-x} + x^2 - x.$$

б) $f(x) = ae^{bx}$(*a Ф* 0). Частное решение ищем в виде $z = Ae^{bx}$, где *A* — неопределенный коэффициент. Отсюда $z' = Abe^{bx}$, $z'' = = Ab^2e^{bx}$. Подставляя эти выражения в уравнение (9), в котором $f(x) = ae^{bx}$, после сокращения на e^{bx} будем иметь$A(b^2 + pb + q) = a$. Отсюда видно, что если *b* не является корнем характеристического уравнения, то

$$z = -\frac{ae^{bx}}{b^2 + pb + q}$$

Если *b* — корень характеристического уравнения, то частное решение уравнения (9) ищем в виде $z = Axe^{bx}$, когда *b* — однократный корень, и в виде $z = Ax^2e^{bx}$, когда *b* — двукратный корень. Аналогично будет, если $f(x) = P(x)e^{bx}$.

Пример. 2. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 2e^x$. Имеем: $k^2 - 2k + 1 = 0$, $k_x = k_2 = 1$, $Y = (C_1 + C_2x)e^x$. Так как в данном уравнении $b = 1$ — корень кратности 2 характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z = = Ax^2e^x$. Далее имеем:

$$z' = Ax(x + 2)e^x,\ z'' = A(x^2 + 4x + 2)e^x,$$

$$Ae^x(x^2 + 4x + 2) - 2\ Axe^x(x + 2) + A\ x^2e^x = 2e^x,\ A = 1,\ z = x^2e^x,\ y = (C_1 + C_2x)e^x + x^2e^x.$$

в) $f(x) = a \cos wx + b \sin wx$ (*a* и *b* не нули одновременно). В этом случае частное решение *z* ищем также в форме тригонометрического двучлена

$$z = A \cos wx + B \sin wx,$$

гдеА и *B* — неопределенные коэффициенты. Отсюда $z' = -Aw \sin wx + + Bw \cos wx$, $z'' = -Aw^2$ tos wx $- Bw^2 \sin wx$. Подставляя эти выражения в уравнение (9), в котором $f(x) = a \cos wx + b \sin wx$, получим:

$$(-Aw^2 + Bpw + Aq)\cos wx + (-Bw^2 - Apw + Bq)\sin wx =$$
$$= a \cos wx + b \sin wx.$$

Так как последнее равенство представляет собой тождество, то коэффициенты при $\cos wx$ и $\sin wx$ в левой и правой частях этого равенства должны быть соответственно равны друг другу. Поэтому

$$A(q - w^2) + Bpw = a, \qquad -Apw + B(q - w^2) = b.$$

Эти уравнения определяют коэффициенты A и B, кроме случая, когда $p = 0$, $q = w^2$ (или когда $\pm wi$ — корни характеристического уравнения). В последнем случае частное решение уравнения (9) ищем в виде $z = x(A \cos wx + B \sin wx)$.

Пример 3. Решить уравнение $y'' + y = \cos x$. Имеем: $k^2 + 1 = 0$, $k_1 = i$, $k_2 = -i$, $Y= C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Так как $\pm i$ — корни характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z = x(A \cos x + B \sin x)$. Далее имеем:

$$z' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x,)\ z'' = -2A\sin x + B\cos x - x(A\cos x + B\sin x),$$
$$-2A\sin x + B\cos x = \cos x,\ A = 0,\ B = 1/2,\ z = (x/2)\sin x,\ y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (x/2)\sin x.$$

Билет №22. Системы диф. ур.

Определение 1 .

Системой диф уравнений называют совокупность ДУ, каждое из которых содержит независимую переменную x, искомую функцию y и производные искомых функций.

$$\begin{cases} F_1(x,y_1,y_1'\dots y_1^{(n)})=0 \\ \dots \\ F_n(x,y_n,y_n'\dots y_n^{(n)})=0 \end{cases}$$

Определение 2.

Если в системе ДУ первого порядка каждое уравнение разрешимо относительно производной искомых функций, то такую систему называют нормальной системой ДУ 1 порядка.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dy1}}{dx} = f1(x, y1, y2 \dots yn) \\ \dots \\ \frac{\mathrm{dyn}}{dx} = fn(x, y1, y2 \dots yn) \end{cases}$$

Определение 3.

Если функции $f_i(x,y1,y2\dots yn)$ и их частные производные найденные по переменной y_i непрерывны в некоторой области Д (n+1) мерного пространства, то для каждой точки $M(x0,y_1^0\dots y_n^0)$ принадлежащей Д, существует ед. решение системы удовлетворяющие начальным условиям.

Общее решение системы ДУ представляет собой совокупность функций вида

y1=f1(x,c1,c2,c3…cn)   c-произвольные постоянный

…

yn=fn(x,c1,c2,c3…cn)

<u>Существуют два основных типа систем дифференциальных уравнений:</u>

– Линейные однородные системы дифференциальных уравнений
– Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений

<u>И два основных способа решения системы дифференциальных уравнений:</u>

– Метод исключения. Суть метода состоит в том, что в ходе решения система ДУ сводится к одному дифференциальному уравнению.

– С помощью характеристического уравнения (так называемый метод Эйлера).

Билет №23. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости.

Глава 10. РЯДЫ

10.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1. Основные понятия. Пусть дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Определение 1. Символ

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

называется *числовым рядом* или просто *рядом*, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами* ряда. Вместо (1), пользуясь знаком суммы, пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Суммы конечного числа членов ряда (1) $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \ldots$ называются *частными* суммами (или *отрезками*) ряда (1).

Рассмотрим последовательность

$$S_1, S_2, S_3 \ldots, S_n, \ldots \tag{2}$$

Определение 2. Если существует предел $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$, то ряд (1) называют *сходящимся*, а число S — *суммой* этого ряда. В этом случае пишут:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если последовательность (2) не имеет предела, то ряд (1) называется *расходящимся*. Расходящийся ряд суммы не имеет.

Пример 1. Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии $1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, \ldots$.

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots. \tag{3}$$

Если $q \neq 1$, то, как известно,

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^{n-1} \cdot q - 1}{q - 1}$$

или

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

При $|q| < 1$ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1-q}$, т. е. ряд (3) при $|q| < 1$ сходится и сумма его равна $\frac{1}{1-q}$.

При $q = 1$ получаем ряд

то погрешность уменьшается с ростом m. Следовательно, абсолютная величина остатка

$$|r_m| = |S - S_m|$$

будет как угодно мала, если только число m взято достаточно большим. Таким образом, мы всегда имеем возможность подсчитать приближенно сумму сходящегося ряда, взяв достаточно большое число первых его членов.

Однако большую трудность представляет выяснение величины возникающей ошибки, т. е. оценки $|r_m|$. Задача состоит в том, чтобы по данному $\varepsilon > 0$ найти такое (наименьшее) m, чтобы выполнялось неравенство $|r_m| < \varepsilon$. В дальнейшем (см. п. 4) мы покажем, как иногда можно оценить величину ошибки и тем самым устанавливать, сколько нужно брать первых членов ряда для получения его суммы с требуемой точностью.

Заметим, что полученное выше соотношение (7) выражает следующая теорема.

Теорема 2. *Предел суммы r_m m-го остатка сходящегося ряда* (1) *при $m \to \infty$ равен нулю.*

Теорема 3 (необходимый признак сходимости ряда). *Общий член a_n сходящегося ряда* (1) *стремится к нулю при неограниченном возрастании n*, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится. Имеем $a_n = S_n - S_{n-1}$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие 2. *Если общий член a_n ряда* (1) *при $n \to \infty$ не стремится к нулю, то этот ряд расходится.*

Пример 1. Для ряда (3), у которого $|q| \geq 1$, имеем $|q|^{n-1} \geq 1$ для $n = 1, 2, \ldots$, т. е. q^{n-1} не стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому такой ряд расходится.

Примечание. 1. Отметим, что условие (8) не является достаточным для сходимости ряда. Действительно, для ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \tag{9}$$

называемого *гармоническим* рядом,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Однако этот ряд расходится, что можно установить рассуждениями от противного. Предположим, что ряд (9) сходится и его сумма равна S. Тогда

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots .$$

Следовательно, $S_n = n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. ряд (3) при $q = 1$ расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \tag{4}$$

Очевидно,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Следовательно, ряд (4) сходится и его сумма равна 1.

2. Основные свойства рядов. Если в ряде (1) отбросить конечное число первых членов, например m членов, то получим ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots, \tag{5}$$

который называется *m-ым остатком* ряда (1).

Теорема 1. *Ряд* (5) *сходится* (*или расходится*) *одновременно с рядом* (1).

Доказательство. Обозначим

$$S_k' = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k},$$

Имеем

$$S_k' = S_{m+k} - S_m. \tag{6}$$

Отсюда видно, что существование или отсутствие предела при $k \to \infty$ частичной суммы одного ряда влечет за собой существование или отсутствие предела частичной суммы другого ряда. Теорема доказана.

Следствие 1. *При исследовании ряда на сходимость можно игнорировать конечное число его первых членов.*

Пусть ряд (1) сходится. Тогда, согласно теореме 1, сходится и ряд (5), значит, существует его сумма. Обозначим ее через r_m. Перейдя к пределу в (6) при $k \to \infty$, получим:

$$r_m = S - S_m;$$

r_m есть та погрешность, которую мы допускаем, если вместо суммы S сходящегося ряда (1) берем сумму m первых его членов. Так как

$$\lim_{m\to\infty} r_m = \lim_{m\to\infty} (S - S_m) = S - S = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0,$$

что противоречит неравенству

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, гармонический ряд расходится.

Теорема 4. *Если ряд* (1) *сходится и его сумма равна* S, *то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}ca_n, \tag{10}$$

где c — произвольное число, также сходится и его сумма равна cS.

Доказательство. Пусть S_n и σ_n — частичные суммы соответственно рядов (1) и (10). Тогда

$$\sigma_n=ca_1+ca_2+\ldots+ca_n=c(a_1+a_2+\ldots+a_n)=cS_n.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=c\lim_{n\to\infty}S_n=cS.$$

Теорема доказана.

Пример 2. С учетом примера 1 (п. 1) на основании теоремы 4 заключаем, что при $|q|<1$ ряд

$$c+cq+cq^2+\ldots+cq^{n-1}+\ldots,$$

где c — любое число, сходится.

Теорема 5. *Если ряд* (1) *и ряд*

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots \tag{11}$$

сходятся и их суммы соответственно равны S *и* σ, *то и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) \tag{12}$$

сходится и его сумма равна S + σ.

Доказательство. Пусть S_n, σ_n и τ_n — частичные суммы соответственно рядов (1), (11) и (12). Тогда

$$\tau_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)=$$
$$=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n)=S_n+\sigma_n.$$

Отсюда с учетом теоремы 4 о пределах (7.5, п. 1)

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n=\lim_{n\to\infty}(S_n+\sigma_n)=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}\sigma_n=S+\sigma.$$

Примечание 2. При условии теоремы 5 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$$

также сходится и его сумма равна $S - \sigma$.

Наконец, заметим (см. [8]), что если ряд (1) сходится и имеет сумму S, то члены его можно любым образом сгруппировать скобками (однако не переставляя их), например,

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \dots ,$$

образуя новый ряд, члены которого равны суммам чисел, стоящих в скобках. Новый ряд будет сходящимся, и притом к S.

Однако раскрытие скобок в сходящемся ряде не всегда возможно. Так, ряд

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots$$

сходится, а ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots \tag{13}$$

расходится (общий член ряда (13) не стремится к нулю).

Билет №24. Достаточные признаки сходимости: первый и второй признак сравнения, признаки Даламбера и Коши.

Общий признак сравнения:

Пусть даны 2 ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, и $a_n \le b_n$, тогда

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots; \qquad (U)$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots . \qquad (V)$$

Пусть члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряда:

$$u_1 \leqslant v_1, \; u_2 \leqslant v_2, \; u_3 \leqslant v_3, \; \dots, \; u_n \leqslant v_n, \; \dots, \qquad (18)$$

Доказательство. Обозначим через S_n и δ_n соответственно n-е частичные суммы первого и второго рядов:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n, \quad \delta_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n.$$

Из неравенств (18) следует, что $S_n \leqslant \delta_n$. Так как второй ряд (V) сходится, то существует $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta$. При этом, поскольку члены ряда положительны, очевидно, что $\delta_n < \delta$, а следовательно, и $S_n < \delta$. Таким образом, частичные суммы ряда (U) ограничены и, следовательно, ряд (U) сходится, причем его сумма не превосходит суммы ряда (V), как это следует из неравенства $S_n < \delta$.

Предельный признак сравнения:

Если даны 2 положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, и существует конечный,

не равный 0 предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ (A<>0), то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера:

Пусть дан положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$ (D – число или ∞), тогда

1) Если D<1, то ряд сходится

2) Если D>1, то ряд расходится

3) Если D=1, то ряд или сходится, или расходится (признак не дает ответа).

Доказательство. а) Пусть $\rho < 1$. Покажем, что ряд сходится. Действительно, так как

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

то на основании определения предела для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое N, зависящее от ε, что для всех членов ряда, номер

Билет №25. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда.

Числовой ряд называется знакочередующимся, если в нем положительные и отрицательные члены ряда чередуются.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n = -1+2-3+4-5+6-7+\dots$$

Признак Лейбница:

Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине модуля n-ого члена ряда =0, то ряд сходится и его сумма – это число S∈ $(0,a_1)$.

1) $|a_1|\geq|a_2|\geq|a_3|\geq\dots$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=0$

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму четного числа членов ряда

$$S_{2m}=u_1-u_2+u_3-u_4+\dots+u_{2m-1}-u_{2m}.$$

Сгруппируем члены попарно:

$$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\dots+(u_{2m-1}-u_{2m}).$$

Так как по условию абсолютные величины членов ряда убывают, то все разности в скобках положительны и, следовательно, сумма S_{2m} положительна и возрастает при увеличении m.

Запишем теперь S_{2m}, группируя члены иным образом:

$$S_{2m}=u_1-[(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\dots+(u_{2m-2}-u_{2m-1})+u_{2m}].$$

Сумма в квадратных скобках будет также положительной. Поэтому для любого значения m $S_{2m}<u_1$. Таким образом, последовательность четных частичных сумм S_{2m} возрастает с увеличением m, оставаясь при этом ограниченной. Следовательно, S_{2m} имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S$. При этом, так как $S_{2m}<u_1$, то ясно, что $S\leqslant u_1$.

Рассмотрим теперь сумму нечетного числа членов:

$$S_{2m+1}=S_{2m}+u_{2m+1}.$$

При $m\longrightarrow\infty$ имеем

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}(S_{2m}+u_{2m+1})=\lim_{m\to\infty}S_{2m}+\lim_{m\to\infty}u_{2m+1}=S,$$

так как по условию $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ и, следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty}u_{2m+1}=0$.

Таким образом, частичные суммы как четного, так и нечетного числа членов имеют общий предел S. Это означает, что вообще $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, т. е. ряд сходится. При этом, как видно из доказательства, сумма ряда S не превосходит первого члена ряда.

Ряды, для которых выполняется признак Лейбница, называют рядами Лейбницевского типа.

Для знакочередующихся рядов наиболее просто оценивается погрешность, если заменить ряд суммой n первых членов ряда.

Теорема 3. *Если знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, то его n-й остаток по абсолютной величине не превосходит первого из отброшенных членов.*

Доказательство. Пусть ряд

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots$$

сходится по признаку Лейбница. Тогда n-й остаток ряда

$$r_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\ldots)$$

сам является суммой знакочередующегося ряда. На основании признака Лейбница остаток r_n по абсолютной величине должен быть не больше первого члена ряда, т. е.

$$|r_n|\leqslant u_{n+1}. \tag{55}$$

Если требуется найти сумму ряда с заданной погрешностью, то требуемое число членов ряда находят из условия:

$|a_{n+1}| \leq \varepsilon$

Билет №26. Знакопеременные ряды. Исследование на сходимость.

Числовой ряд называется знакопеременным, если в нем есть положительные и отрицательные члены, но они не чередуются.

В качестве примера знакопеременного ряда приведем ряд

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}-\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^2}+\ldots$$

При **исследовании знакопеременных рядов** на сходимость пользуются теоремой:

Если сходится ряд, составленный из модулей членов знакопеременного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (37)$$

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|, \qquad (38)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (37) и (38):

$$\frac{u_1+|u_1|}{2}+\frac{u_2+|u_2|}{2}+\ldots+\frac{u_n+|u_n|}{2}+\ldots. \qquad (39)$$

Имеем:

при $u_n>0$ $u_n=|u_n|$ и $\frac{u_n+|u_n|}{2}=\frac{|u_n|+|u_n|}{2}=|u_n|$;

при $u_n<0$ $|u_n|=-u_n$ и $\frac{u_n+|u_n|}{2}=\frac{u_n+(-u_n)}{2}=0$.

Таким образом, члены ряда (39) либо равны членам сходящегося ряда (38), либо меньше их. Поэтому ряд (39) сходится на основании признака сравнения (см. п. 5, теорему 1 и сноску на стр. 501).

Умножив все члены сходящегося ряда (38) на $\frac{1}{2}$, получим сходящийся ряд

$$\frac{|u_1|}{2}+\frac{|u_2|}{2}+\ldots+\frac{|u_n|}{2}+\ldots \tag{40}$$

(см. п. 3, теорема 1). Рассмотрим теперь ряд, являющийся разностью сходящихся рядов (39) и (40)

$$\left(\frac{u_1+|u_1|}{2}-\frac{|u_1|}{2}\right)+\left(\frac{u_2+|u_2|}{2}-\frac{|u_2|}{2}\right)+ \\ +\ldots+\left(\frac{u_n+|u_n|}{2}-\frac{|u_n|}{2}\right)+\ldots$$

Этот ряд сходится на основании теоремы 2 п. 3.

Но ряд (37) получается из последнего ряда умножением всех его членов на 2:

$$2\cdot\left[\frac{u_n+|u_n|}{2}-\frac{|u_n|}{2}\right]=2\cdot\frac{u_n}{2}=u_n.$$

Следовательно, ряд (37) также сходится (п. 3, теорема 1).

(Пояснение к доказательству

п.3, теорема1:

Теорема 1. *Если ряд*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{8}$$

сходится и имеет сумму S, *то ряд*

$$au_1+au_2+au_3+\ldots+au_n+\ldots, \tag{9}$$

где a *заданное число, также сходится и его сумма равна* aS.

п.3, теорема2:

Теорема 2. *Если ряды*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{10}$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots \tag{11}$$

сходятся и имеют соответственно суммы S и $\overline{S}$, *то ряд*

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+\ldots+(u_n+v_n)+\ldots, \tag{12}$$

получающийся почленным сложением данных рядов, также сходится и имеет сумму $S+\overline{S}$.

)

Замечание: Если ряд, составленный из модулей, расходится, то знакопеременный ряд м.б. как сходящимся, так и расходящимся.

Определение. *Знакопеременный ряд* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов* $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$

Определение. *Знакопеременный ряд* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ *называется неабсолютно сходящимся, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов* $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$, *расходится.*

Билет №27. Абсолютно сходящиеся и условно сходящиеся ряды. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Определение 1:

Числовой ряд называется знакопеременным, если в нем есть положительные и отрицательные члены, но они не чередуются.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0...$$

При исследовании знакопеременных рядов на сходимость пользуются теоремой:

Теорема:

Если сходится ряд составленный из модулей членов знакопеременного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Доказательство: Дан знакопеременны ряд

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда

$$|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ...$$

Найдем сумму этих рядов

$$(a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + ... + (a_n + |a_n|) + ...$$

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$$

По условию $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится $\to \sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ - сходится

$a_n + |a_n| \le 2|a_n| \to \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ - сходится (по признаку сравнения)

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

Замечание: если ряд составленный из модуле расходится, то знакопеременный ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n}{3}$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{\pi n}{3}}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \sin \frac{\pi n}{3} \right|}{n^3}$ - положительный ряд

Сравним с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ - сходится

$\frac{\left| \sin \frac{\pi n}{3} \right|}{n^3} \le \frac{1}{n^3} \rightarrow$ ряд сходится $\rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{3}}{n^3}$ сходится

Определение 2:

Знакопеременные и знакочередующиеся ряды называются абсолютно сходящимися, если сходится сам ряд и ряд, составленный из модулей членов данного ряда.

Определение 3:

Знакопеременные и знакочередующиеся ряды называют условно сходящимися, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из модулей - расходится.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$ - знакочередующийся ряд , сходится из предыдущего примера.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2n+3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$ - расходится, гармонический ряд

$\downarrow$

Значит, ряд сходится условно

<u>Свойства абсолютно сходящегося ряда</u>

1)Если ряд сходится абсолютно, то члены рядов можно переставлять произвольным образом. Получим такой же абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.

2)Абсолютно сходящиеся ряды можно складывать и вычитать почленно. Сумма полученного ряда $S = S_1 \pm S_2$

3) Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать. Сумма полученного ряда $S = S_1 * S_2$

$a_1 в_1 + (a_1 в_2 + a_2 в_1) + (a_1 в_3 + a_2 в_2 + a_3 в_1) + \ldots$

Условно сходящиеся ряды рассмотренными свойствами не обладают.

Билет №28. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда.

Функциональные ряды. Основные понятия.

Определение1: Функциональным называется ряд членами, которого являются функции, зависящие от одной переменной.

$$U_1(x)+U_2(x)+U_3(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$$

Если подставить вместо x в функциональный ряд число x_0, то получим числовой ряд, который может сходиться или расходиться.

Если числовой ряд сходится, то x_0 называется точкой сходимости ряда.

Если числовой ряд расходится, то x_0 называется точкой расходимости ряда.

Пример:

$x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$

$x=\frac{1}{5}\to\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots$ - сходится $\to x=\frac{1}{5}$ - точка сходимости

$x=3\to 3+9+27+\ldots$ - расходится $\to$x=3 – точка расходимости

Определение 2: Множество всех точек сходимости ряда называется областью сходимости данного ряда.

Для ряда $x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$ - область сходимости (-1;1)

Частичная сумма функционального ряда так же является функцией

$$f(x)=S_n(x)+U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)$$

Говорят, что функциональный ряд сходится и функции S_x на области сходимости данного ряда, если область сходимости совпадает с областью сходимости функции

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ область сходимости ряда (-1;1)

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots x^n + \ldots$, $x \in$ (-1;1) $\quad f(x) = \frac{1}{1-x}$

Так как функциональный ряд сходится к $f(x)$ только на области сходимости, важно правильно находить эту область.

Для нахождения области сходимости рассмотрим ряд, состоящий из модулей членов данного ряда, и исследуем полученный ряд на сходимость с помощью признака сходимости положит числовых рядов.

Пример:

$\ln x + \ln^2 x + \ln\ x + \ldots \ln^n x \ldots$

$U_n(x) = \ln^n x$; $\qquad U_{n+1}(x) = \ln^{n+1} x$

Пределы при $n \to \infty$

$\lim \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} = \lim \left| \frac{\ln^{n+1}(x)}{\ln^n(x)} \right| = \lim \left| \ln x \right| = \left| \ln x \right|$, если $\left| \ln x \right|$ <1 $\to$ ряд сходится

-1< $\ln$ x <1, $\frac{1}{e} < x < e$

$\left(\frac{1}{e}; e \right)$ - область сходимости

при $x = \frac{1}{e}$: $\ln \frac{1}{e} + \ln^2 \frac{1}{e} + \ln^3 \frac{1}{e} + \ldots. =$ - 1 + 1 - 1+…-расходится(по призн. Лейб.)

при $x = e$: 1 + 1+1… - расходится

Билет №29. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область, интервал и радиус сходимости степенного ряда

Определение:

Степенным рядом называется ряд вида $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Если $(x - x_0)$ заменить на y , то получим более простой степенной ряд

$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + ... + a_n y^n$

В дальнейшем рассматривают такие степенные ряды.

При исследовании степенных рядов важно уметь находить область сходимости степенного ряда. При решении этой задачи важную роль играет теорема Абеля.

Теорема Абеля

Пусть дан степенной ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$, тогда если существует отличная от 0 точка сходимости данного ряда x_0, то ряд сходится для всех x удовлетворяющих неравенству

$|x| < |x_0|$.

Если x_0 точка расходимости, то ряд расходится и для всех x $|x| > |x_0|$.

Доказательство:

1) Пусть x_0 точка сходимости ряда. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ n – сходится.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ - сходится. n

По необходимому признаку сходимости предел при $x \to \infty$ $\lim |a_n x_0^n| = 0 \Rightarrow$ последовательность, имеющая предел ограничена, т.е.

$(\exists M > 0)(\forall n \in M)(|a_n x_0^n| \le M)$

Рассмотрим $|a_n x^n| = \left|a_n x^n \frac{x_0^n}{x_0^n}\right| = \left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$, если $|x| < |x_0|$, то $\frac{|x|}{|x_0|} < 1$

$$\frac{|x|}{|x_0|} = \mathrm{q}$$

$\left|a_n\ x_0^n\ \right| \le \mathrm{M\,q^n}\ ,\ 0 < \mathrm{q} < 1\ ,\ \left|a_n\ x_0^n\ \right|$ - положительный ряд, $\mathrm{M\,q^n}$ - положительный ряд.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{M\,q^n}$ - сходится (геометрическая прогрессия с q<1)

По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{a}_n x^n$ - сходится, если $|x| < |x_0| \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится.

2) Пусть x_0 - точка расходимости ряда. Предположим, что $|x_1| < |x_0|$ и при $x = x_1$ - ряд сходится $\Rightarrow$ по доказанному в пункте 1 ряд сходится для x удовлетворяющим неравенству $|x| < |x_1| \to$ при $x = x_0$ ряд сходится – противоречит с условием.

Вывод: предположение неверно и ряд расходится для $|x| > |x_0|$

<u>Радиус сходимости и область сходимости степенного ряда</u>

Из теоремы Абеля следует, что существует точка сходимости и точка расходимости ряда. Все точки сходимости $\in$ области сходимости ряда, которая может иметь вид :

$((-\mathrm{R},\mathrm{R}),[-\mathrm{R},\mathrm{R}],[-\mathrm{R},\mathrm{R}),(-\mathrm{R},\mathrm{R}])$, R – радиус сходимости ряда

При нахождении радиуса пользуются формулой $\mathrm{R} = \lim \frac{\mathrm{a}_n}{\mathrm{a}_{n+1}}$ (предел при $\mathrm{n} \to \infty$)

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Доказательство:

Рассмотрим степенной ряд составленный из модулей $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{a}_n x^n$. Применим для данного

положительного ряда признак Даламбера

пределы при $\mathrm{n} \to \infty$

$$\mathrm{L} = \lim \left|\frac{\mathrm{a}_{n+1} x^{n+1}}{\mathrm{a}_n x^n}\right| = |x| \lim \left|\frac{\mathrm{a}_{n+1}}{\mathrm{a}_n}\right|.$$

если L<1 $\to$ ряд сходится

$$|x| < \frac{1}{\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$;

$$|x| < \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$,где

$$\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$$

Частные случаи:

1)Если R=0, то ряд сходится в x=0

2)Если $R = \infty$, то ряд сходится на $(-\infty. +\infty)$

<u>Схема нахождения области сходимости</u>

1) Найти R по формуле. Если $R \neq 0$ и $R \neq \infty$, то перейти к пункту 2.
2) X=R и X= - R исследуют полученные числовые ряды на сходимость.
3) Записывают область сходимости ряда с учетом полученных результатов.

Пример:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n * 2^n}$$

Пределы при $n \to \infty$

1) $R = \lim\left|\frac{(n+1) * 2^{n+1}}{n * 2^n}\right| = \lim\left|\frac{2n+2}{n}\right| = 2 \to (-2;2)$ - область сходимости

2)x = 2 , $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n * 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – сходится (гармонический ряд)

X = -2, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n * 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - знакочередующийся ряд

$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} ....;$ $\lim\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = 0 \to$ ряд сходится

Ответ: $x \in [-2;2)$ - область сходимости

Билет № 30. Свойство степенного ряда на интервале сходимости.

1.Если степенной ряд на области сходимости сходиться к фун. F(x), то данная функция является непрерывной на области сходимости ряда.

2.Если даны 2 степенных ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ с радиусами сходимости R_1 и R_2, то их можно почленно складывать, вычитать и умножать при этом радиус сходимости полученного ряда >= меньшего из чисел R_1 и R_2.

3.Пусть на области сходимости степенной ряд сходиться к функции f(x), т е имеет место равенство $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ на области сходимости, тогда данное равенство можно почленно проинтегрировать на любом отрезке, условной сходимости в области сходимости ряда.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1 x dx + \int_a^b a_2 x^2 dx + \ldots, [a;b] \in \text{области сходимости}$$

Используя данное свойство сходимости получать разложение в степенные ряды для элементарных функций.

1) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+..+x^n+\ldots$, (1)

$X \in (-1;1)$

Заменим в данном равенстве x=-x.

$\frac{1}{1-x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n$. (2)

Проинтегрируем полученное равенство на интервале [0;x], где x<1.

$\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\int_0^x dx-\int_0^x xdx+\int_0^x x^2dx+\ldots+\int_0^x(-1)^n x^n dx+\ldots$

$\mathrm{Ln}(1+x)= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\ldots$, $X \in (-1;1]$

Заменим в формуле (2) x на x^2. Получим

$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots$

Проинтегрируем на [0;x], где x<1.

$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x dx-\int_0^x x^2dx+\int_0^x x^4dx-\ldots+\int_0^x(-1)^n x^{2n}dx$

$\mathrm{Arctg}\ x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$, $X \in [-1;1]$

4. Если функция f(x) может быть разложена в ряд $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ на области сходимости то данное равенство можно почленно дифференцировать, при этом полученный степенной ряд имеет тот же R, что и исходный ряд и сходиться к производной функции

$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$

Билет №31. Ряды Тейлора, Маклорена.

Пусть $f(x)$ – дифференцируемая бесконечное число раз функция в окрестности точки $x=a$, т. е. имеет производные любых порядков.

Определение 1. *Рядом Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* $x=a$ *называется степенной ряд*

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad . (1)$$

В частном случае при $a=0$ ряд (1) называется *рядом Маклорена* :

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad . (2)$$

Возникает вопрос: в каких случаях ряд Тейлора для дифференцированной бесконечное число раз функции $f(x)$ в окрестности точки $x=a$ совпадает с функцией $f(x)$?

Возможны случаи, когда ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится, однако его сумма не равна $f(x)$.

Приведем достаточное условие сходимости ряда Тейлора функции $f(x)$ к этой функции.

Теорема 1:

если в интервале $(a-R;a+R)$ *функция* $f(x)$ *имеет производные любого порядка и все они по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом, т. е.* $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M\,(n=1,2,\ldots)$, *то ряд Тейлора этой функции сходится к* $f(x)$ *для любого х из этого интервала* $(a-R;a+R)$, *т. е. имеет место равенство*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n,\quad x\in(a-R;a+R) \quad .$$

Для выяснения выполнения этого равенства на концах интервала сходимости требуются отдельные исследования.

Следует отметить, что если функция разлагается в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора (Маклорена) этой функции, причем это разложение единственно.

4. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена

1. $f(x)=e^x$. Для этой функции $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=e^0=1, n=1,2,\ldots$.

По формуле (3.2) составим ряд Маклорена данной функции:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad . (3.3)$$

Найдем радиус сходимости ряда (3.3) по формуле (1.3):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n(n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty.$$

Следовательно, ряд (3.3) сходится при любом значении $x\in(-\infty;+\infty)$.

Все производные функции e^x на любом отрезке $[-a;a]$ ограничены, т. е.

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x\le M=e^a,\quad n=1,2,\ldots.$$

Поэтому, согласно теореме 3.1, имеет место разложение

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty). \quad (3.4)$$

2. $f(x)=\sin x$. Для этой функции $f^{(n)}(x)=\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(n)}(0)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $n=1,2,\ldots$.

Отсюда следует, что при $x=0$ производные четного порядка равны нулю, а производные нечетного порядка чередуют знак с плюса на минус.

По формуле (3.2) составим ряд Маклорена:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots.$$

При любом фиксированном значении этот ряд сходится как знакочередующийся по признаку Лейбница. При этом

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1\quad \forall\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Поэтому, согласно теореме 3.1, имеет место разложение

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty). \quad (3.5)$$

3. $f(x)=\cos x$. Воспользуемся разложением (3.5) в ряд Маклорена функции $\sin x$ и свойством 2 о дифференцировании степенного ряда. Имеем

$$\cos x=(\sin x)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)'= \quad (3.6)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2n+1)\cdot x^{2n}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}=$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Поскольку при почленном дифференцировании интервал сходимости степенного ряда не изменяется, то разложение (3.6) имеет место при любом $x \in (-\infty; +\infty)$.

Приведем без доказательства разложения других элементарных функций в ряды Маклорена.

4. $$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad x \in (-1;1)$$ – *биномиальный ряд* (α – любое действительное число).

Если $\alpha = n$ – положительное целое число, то получаем *бином Ньютона* :

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}x^m + \ldots + x^n.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \; x \in (-1;1)$$ – *логарифмический ряд* .

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \; x \in (-1;1).$$

Билет №32. Приложения степенных рядов

Степенные ряды являются мощным вычислительным средством. С их помощью можно, например, вычислять приближенные значения функций, приближенно вычислять некоторые «неберущиеся» определенные интегралы.

Пример 1. Вычислить значение $e^{0.2}$ с точностью до 0,0001. Согласно формуле

$$e^{\mathrm{x}} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

имеем:

$$e^{0.2} = 1 + 0.2 + \frac{0.2^2}{2!} + \frac{0.2^3}{3!} + \frac{0.2^4}{4!} + \cdots$$

Оценим погрешность, получаемую при отбрасывании всех членов этого ряда, начиная с пятого:

$$r_4 = \frac{0.2^4}{4!} + \frac{0.2^5}{5!} + \frac{0.2^6}{6!} + \cdots = \frac{0.2^4}{4!}\left(1 + \frac{0.2}{5} + \frac{0.2}{5 \times 6} + \cdots\right) < \frac{0.2^4}{4!}\left(1 + \frac{0.2}{5} + \left(\frac{0.2}{5}\right)^2 + \cdots\right) =$$
$$= \frac{0.0016}{24} \times \frac{1}{1 - \frac{0.2}{5}} < 0.0001$$

Значит, с точностью до 0,0001 имеем:

$$e^{0.2} \approx 1 + 0.2 + \frac{0.2^2}{2!} + \frac{0.2^3}{3!} = 1.2 + \frac{0.04}{2} + \frac{0.008}{6} \approx 1.2213$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-x^2} dx$ с точностью до 0,0001. Заменяя *x* на $-x^2$ в формуле

$$r_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

получим:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Подставим этот ряд под знак данного интеграла и произведем почленное интегрирование, получаем:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} dx - \int_0^{\frac{1}{4}} x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} x^4 dx - \frac{1}{3!}\int_0^{\frac{1}{4}} x^6 dx + \cdots = 0.25 - \frac{1}{3 \times 4^3} + \frac{1}{10 \times 4^5} - \frac{1}{42 \times 4^7} + \cdots$$

Это знакочередующийся ряд, удовлетворяющий теореме Лейбница. Так как

$$\frac{1}{10 \times 4^5} = \frac{1}{10240} < 0.0001 = 0.0001$$

то для получения нужной точности достаточно взять первые два члена ряда:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-x^2} dx \approx 0.25 - \frac{1}{3 \times 4^3} \approx 0.25 - 0.0052 = 0.2448$$