ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информационных технологий

Кафедра высшей математики

С.Л.Рычков

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Задания к типовому расчету.

Специальность 1003.00 —
«Электроснабжение»

Киров 2010

УДК 517.2

Элементы теории функций комплексного переменного и операционное исчисление. Задания к типовому расчету: спец. 1003.00/ С.Л.Рычков. — Киров, 2010. — 28 с.

Приводятся задания к типовым расчетам для студентов второго курса ЭТФ.

Авторская редакция.

Вариант 1

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{1}{1 + i\sqrt{3}}, \qquad n = 4.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^4 + 2z^2 + 2 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$|z - 2| < |z|.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = z - iz^2 + z^3.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \cos z, \qquad z_0 = \frac{\pi}{4} + 2i.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L (iz^2 - 2z)\,dz, \quad \text{где } L \text{ — линия, соединяющая точки } z_1 = i, z_2 = 1.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{z + 5}{z^2 + z - 2}, \qquad 1 < |z| < 2.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z + 1)^2}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2(z^2 + 9)}, \qquad L: \ |z - 2i| = 3.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \int\limits_0^t \tau e^{2\tau}\,d\tau.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + 9x = \sin 2t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -y + 4z, \\ z' = x - 4z, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \ y(0) = z(0) = 0.$$

Вариант 2

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = 1 - i, \qquad n = 6.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^8 + 2z^4 + 4 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$|z - 1| \leqslant 1.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = z^3 + 3iz.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{Ln} z, \qquad z_0 = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L \mathbf{Re}\, z\,dz, \quad \text{где } L \text{ — дуга параболы } y = 2x^2 \text{ от точки } z_1 = 0 \text{ до точки } z_2 = 1 + 2i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{3z - 5}{z^2 - 2z - 3}, \qquad 1 < |z| < 3.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \sin\frac{1}{z^2}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2(z^2+4)}, \qquad L:\ |z - i| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^3 e^{3\tau}\,d\tau.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + 4x = \cos t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = z + y - x, \\ y' = z + x - y, \\ z' = x + y + z, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = 0.$$

Вариант 3

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{1}{1 - i\sqrt{3}}, \qquad n = 8.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^8 + 2z^4 + 2 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$|z - 2| \geqslant |z - i|.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = 2\overline{z} + iz^3.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{ch} z, \qquad z_0 = \ln 3 + \pi i.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L \mathbf{Re}\, z\, dz, \quad \text{где } L \text{ — дуга параболы } y = x^2 \text{ от точки } z_1 = 0 \text{ до точки } z_2 = 2 + 4i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{2z - 9}{z^2 + z - 6}, \qquad 5 < |z - 2| < \infty.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2(2z - \pi)}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2(z^2 - 4)}, \qquad L: \ |z + 1| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \int\limits_0^t (t - \tau)^2 \sin\tau\, d\tau.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + 2x' = \cos t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - z, \\ z' = y + z, \end{cases} \qquad x(0) = 2, \ y(0) = 1, \ z(0) = 3.$$

Вариант 4

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \qquad n = 12.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^4 + 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$\mathbf{Im}\, z^{-1} = 2.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = \operatorname{ch} z^2.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \sin z, \qquad z_0 = \frac{\pi}{4} - 2i.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L \mathbf{Re}\, z\,dz, \quad \text{где } L \text{ — верхняя половина окружности } |z| = 1.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{z+5}{z^2+z-2}, \qquad 2 < |z| < \infty.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3+z^2-4z-4}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{z^2(z^2-1)}, \qquad L:\ |z-1| = \frac{3}{2}.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \frac{1-\cos t}{t}.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + 6x' + 9x = 10\sin t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = z - y, \\ y' = z - x, \\ z' = z + y - 2x, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = 0.$$

Вариант 5

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = -2 + 2i; \qquad n = 5.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$2\,\mathbf{Im}\,z + \mathbf{Re}\,z^2 = 5.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = \sin z^2.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = z^{1-i}, \qquad z_0 = i.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L \mathbf{Re}\,z\,dz, \quad \text{где } L \text{ — верхняя половина окружности } |z-2| = 1.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2}, \qquad 1 < |z+3| < 2.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = z^2 e^{1/z}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{z+3}{(z^2-1)(z-3)^2}, \qquad L:\ |z-2| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \int\limits_0^t \cos(t-\tau)e^{3\tau}\,d\tau.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + 4x = \sin 2t, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = -2x + y + z, \\ y' = -4x + 3y + z, \\ z' = -4x + 2y + 2z, \end{cases} \qquad x(0) = 0,\ y(0) = 2,\ z(0) = 1.$$

Вариант 6

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = 1 - i\sqrt{3}; \qquad n = 8.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^6 - 4z^3 + 8 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$|z-2| + |z+2| = 6.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = \cos z^2.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = ze^z, \qquad z_0 = 2 + \pi i.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L \mathbf{Re}\, z\,dz, \quad \text{где } L \text{ — дуга параболы } y = 3x^2 \text{ от точки } z_1 = 1 + 3i \text{ до точки } z_2 = 3 + 27i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{3z-5}{z^2-2z-3}, \qquad 1 < |z-2| < 3.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z^3(z-1)}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{z+3}{z^4-4z^2}, \qquad L: \ |z+1| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \frac{e^{2t}\sin 3t}{t}.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + 4x = 2\cos 2t, \qquad x(0) = 0, \ x'(0) = 4.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \ y(0) = z(0) = 0.$$

Вариант 7

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{2}{1-i}; \qquad n = 6.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$|z-2| - |z+2| = 2.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = \operatorname{sh} z^2.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \cos z, \qquad z_0 = \frac{\pi}{6} + 3i.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L \mathbf{Re}\, z\, dz, \quad \text{где } L \text{ — дуга параболы } y = \frac{x^2}{2} \text{ от точки } z_1 = 2+2i \text{ до точки } z_2 = 4+8i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{z+5}{z^2+z-2}, \qquad 1 < |z+1| < 2.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2(z-1)}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch} z^2}{z^3+4z}, \qquad L: \ |z-i| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \int\limits_0^t \sin(t-\tau)e^{2\tau}\, d\tau.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + x = 2\cos t, \qquad x(0) = 1, \ x'(0) = 0.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = -4x + 4y + z, \\ z' = -4x + 2y + 3z, \end{cases} \qquad x(0) = 0, \ y(0) = 1, \ z(0) = 0.$$

Вариант 8

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = 2 - 2i; \qquad n = 6.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^8 + z^4 + 1 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$\mathbf{Re}\, z + \mathbf{Im}\, z < 1.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = z \sin z.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{ch} z, \qquad z_0 = \ln 2 + \frac{\pi}{4}\, i.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\, dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L z e^z\, dz \text{ — от точки } z_1 = 1 \text{ до точки } z_2 = 2i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{2z - 9}{z^2 + z - 6}, \qquad 2 < |z| < 3.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{z}{\cos 2z}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\, dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{(z^2 + 4)^2}, \qquad L: \ |z - 2i| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \operatorname{sh} t \sin 2t.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + 3x' + 2x = \cos 2t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3.$$

Вариант 9

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{4}{-1+i\sqrt{3}}; \qquad n = 10.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^8 + 4z^4 + 8 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$|z| = 2\,\mathbf{Re}\,z + 3.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = z\cos z.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{sh} z, \qquad z_0 = \ln 2 + \frac{\pi}{3}\,i.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L |z|\,dz, \quad \text{где } L \text{ — верхняя половина окружности } |z| = 2.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2}, \qquad 4 < |z-3| < 5.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4-16}, \qquad L: \ |z-1+i| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^2 e^{2\tau}\,d\tau.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + 4x' + 4x = 2\sin 2t, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = -1.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = z + 1, \\ y' = z + 2y - 2x, \\ z' = 3z - 2x - 1, \end{cases} \qquad x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ z(0) = 0.$$

Вариант 10

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = -1 + i; \qquad n = 5.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^8 + 4z^4 + 16 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$1 < |z - i| < 3.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = z \operatorname{sh} z.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = i^z, \qquad z_0 = 1 + i.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L |z|\,dz, \quad \text{где } L \text{ — нижняя половина окружности } |z| = 2.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{z+5}{z^2 + z - 2}, \qquad 2 < |z - 3| < 5.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}, \qquad L: \ |z - 2i| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \int\limits_0^t \cos^2 2\tau \, d\tau.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + 2x' + x = t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 2z, \\ y' = 3y - 2z, \\ z' = 2x + 3y - 3z, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 1.$$

Вариант 11

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = 3 + i\sqrt{3}; \qquad n = 8.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^4 - 2z^2 + 4 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$|z - 1| + |z - 3| < 4.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = z \operatorname{ch} z.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{Ln} z, \qquad z_0 = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L |z|\,dz, \quad \text{где } L \text{ — отрезок прямой от точки } z_1 = 0 \text{ до точки } z_2 = 2 - i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{3z - 5}{z^2 - 2z - 3}, \qquad 1 < |z + 2| < 5.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = e^{1/z^2}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 9)^2}, \qquad L:\ |z + 3i| = 3.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \int\limits_0^t \sin^2 3\tau\,d\tau.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + x' - 2x = e^t, \qquad x(0) = -1,\ x'(0) = 0.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = 2x + 4y - 4z, \\ y' = 6y - 4z, \\ z' = 4x + 6y - 6z, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = -1.$$

Вариант 12

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = -\sqrt{3} + i; \qquad n = 8.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^6 + z^3 + \frac{1}{2} = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$|z+1| + |z-3| = 8.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = ze^z.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \cos z, \qquad z_0 = -\frac{\pi}{3} + i\ln 2.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L |z|\,dz, \quad \text{где } L \text{ — отрезок прямой от точки } z_1 = 0 \text{ до точки } z_2 = 2-2i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2}, \qquad 2 < |z-1| < 3.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{1}{1-\cos z}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2(z^2-4)}, \qquad L:\ |z-1| = \frac{5}{2}.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + 9x = e^{3t}, \qquad x(0) = x'(0) = 1.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = z + y - x, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y + z, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = 0.$$

Вариант 13

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{2}{-\sqrt{3}+i}; \qquad n = 4.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^8 - 4z^4 + 8 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$2 < |z - 1 + 2i| < 4.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = ze^{2z}.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = z^{2-i}, \qquad z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L z\mathbf{Re}\,z\,dz, \quad \text{где } L \text{ — верхняя половина окружности } |z| = 2.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{z+5}{z^2+z-2}, \qquad 0 < |z+2| < 3.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{z}{1-\sin z}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z^4 - 1}, \qquad L: \ |z - 1 - i| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + x' = 4\sin^2 t, \qquad x(0) = 0, \ x'(0) = -1.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \end{cases} \qquad x(0) = -1, \ y(0) = 0, \ z(0) = 1.$$

Вариант 14

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{1}{-1+i}; \qquad n = 7.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^6 + \sqrt{3}z^3 + 1 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$1 < |z + 3 - 2i| < 3.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = ie^z + z.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = z^{2i}, \qquad z_0 = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L z\mathbf{Re}\,z\,dz, \quad \text{где } L \text{ — дуга окружности } |z| = 2\ (\mathbf{Re}\,z > 0, \mathbf{Im}\,z > 0).$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{3z-5}{z^2-2z-3}, \qquad 4 < |z+1| < \infty.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}, \qquad L:\ |z| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = t\cos^2 t.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + x' - 2x = e^{-t}, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = -1.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' - 2y = \cos t, \end{cases} \qquad x(0) = 0,\ y(0) = 0.$$

Вариант 15

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{12}{3 + i\sqrt{3}}; \qquad n = 4.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^8 - 2z^4 + 2 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$|z| = 2\,\mathbf{Im}\,z + 3.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = \frac{1}{z} + 2\overline{z}.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{th} z, \qquad z_0 = \ln 2 + \frac{\pi}{3}\,i.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L z\mathbf{Re}\,z\,dz, \quad \text{где } L \text{ — дуга окружности } |z| = 1\ (\mathbf{Re}\,z > 0, \mathbf{Im}\,z < 0).$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{z+5}{z^2 + z - 2}, \qquad 3 < |z+2| < \infty.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z-1)}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+4)^2}, \qquad L: \ |z + 2i| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = e^{2t}\sin^2 t.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + x = 1, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} 2x' + 3x + y = e^t, \\ 2y' + 3y + x = 0, \end{cases} \qquad x(0) = 0,\ y(0) = 0.$$

Вариант 16

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{4}{\sqrt{3}+i}; \qquad n = 10.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^6 - 28z^3 + 27 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$|z-i| + |z+i| = 4.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = \frac{1}{z} + z^2.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{Ln} z, \qquad z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{3}.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L \overline{z}\,\mathbf{Re}\,z\,dz, \quad \text{где } L \text{ — дуга окружности } |z| = 1\ (\mathbf{Re}\,z < 0, \mathbf{Im}\,z > 0).$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2}, \qquad 2 < |z| < \infty.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{\sin(z+1)}{z^2(z+1)}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+9)^2}, \qquad L:\ |z-3i| = 3.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = t\sin^2 t.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + 4x' = 2e^{2t}, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = 3 - 2y, \\ y' = 2x - 2t, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 1.$$

Вариант 17

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{1+i}{3}; \qquad n = 7.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^6 - 2\sqrt{3}z^3 + 4 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$\mathbf{Im}\, z^2 = 2.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = i + 2z + iz^2.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{tg} z, \qquad z_0 = \frac{\pi}{4} + i\ln 2.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L |z|\overline{z}\,dz, \quad \text{где } L \text{ — дуга окружности } |z| = 1 \ (\mathbf{Re}\, z < 0, \text{ начало в точке } z = 1).$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{z+5}{z^2+z-2}, \qquad 1 < |z-2| < 4.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\, e^z.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4-16}, \qquad L: \ |z+1+i| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \frac{e^{2t} - \cos 3t}{t}.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + x = \sin t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = 3x + y + e^t, \\ y' = x + 3y - e^t, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \ y(0) = 1.$$

Вариант 18

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{4}{1+i}; \qquad n = 6.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^4 + 4\sqrt{3}z^2 + 16 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$\mathbf{Re}\, z^2 < 4.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = 1 + 3iz + 2z^2.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{ch} z, \qquad z_0 = 2\ln 2 + i.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L |z|\overline{z}\,dz, \quad \text{где } L \text{ — замкнутый контур, состоящий из верхней}$$
$$\text{полуокружности } |z| = 1 \text{ и отрезка прямой } y = 0, -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{3z-5}{z^2-2z-3}, \qquad 0 < |z-3| < 4.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z(z-\pi)}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3 - z}, \qquad L: \left|z - \frac{1}{2}\right| = 1.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = e^{3t}\cos^2 t.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + 5x' = 1, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t, \\ y' = -x - 2y + \sin t, \end{cases} \qquad x(0) = -4,\ y(0) = 1.$$

Вариант 19

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = -3 - i\sqrt{3}; \qquad n = 10.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^8 - 4z^4 + 16 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$\mathbf{Re}\,\frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = \frac{2i}{z} + \frac{z^2}{2}.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = e^{z^2}, \qquad z_0 = \frac{1}{4} + \pi i.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L \overline{z}\,\mathbf{Im}\,z\,dz, \quad \text{где } L \text{ — отрезок прямой от точки } z_1 = 0 \text{ до точки } z_2 = 1 + i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{2z - 9}{z^2 + z - 6}, \qquad 2 < |z + 1| < 3.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{z + 2}{z^3 + 2z^2 + z + 2}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{z^4 + 4z^2}, \qquad L: \ |z + i| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \sin 3t \cos t.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + x = e^{-t} + 2, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = x - 2y + e^t, \\ y' = x + 4y - e^{2t}, \end{cases} \qquad x(0) = \frac{1}{2}, \ y(0) = -\frac{3}{2}.$$

Вариант 20

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{\sqrt{3} - i}{2}; \qquad n = 8.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^8 - z^4 + \frac{1}{2} = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$|z - 1| < |z + 2i|.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = z|z|.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{th} z, \qquad z_0 = \ln 3 + \frac{\pi}{4}\, i.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\, dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L \overline{z}\, dz, \quad \text{где } L \text{ — ломаная с вершинами в точках } z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 2 + i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{2z - 9}{z^2 + z - 6}, \qquad 0 < |z - 2| < 5.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{1}{\cos z}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\, dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z^4 - 1}, \qquad L: \ |z - 1 + i| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \operatorname{sh} 2t \cos 4t.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + 4x = \sin t, \qquad x(0) = x'(0) = 1.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 16te^t, \\ y' = 2x - 2y, \end{cases} \qquad x(0) = -11, \ y(0) = -5.$$

Вариант 21

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = -\frac{1}{\sqrt{3}} + i; \qquad n = 10.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^6 - 2z^3 + 2 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$\mathbf{Im}\, \frac{1}{z+1} = 1.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = ze^{iz}.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \sin z, \qquad z_0 = -2 + i \ln 2.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\, dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L \overline{z}\, dz, \quad \text{где } L \text{ — отрезок прямой от точки } z_1 = 2 - i \text{ до точки } z_2 = -1 + 5i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2 + 3z + 2}, \qquad 3 < |z-2| < 4.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\, dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{z+3}{z^4 - 4z^2}, \qquad L:\ |z-1| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \operatorname{ch} 2t \sin 3t.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' - 9x = 2 - t, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x - 5\sin t, \end{cases} \qquad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$$

Вариант 22

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\, i; \qquad n = 4.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^6 - z^3 + \frac{1}{2} = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$\mathbf{Re}\,\frac{1}{z+1} = 1.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = \sin 2z + z.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{sh} z, \qquad z_0 = 2 + i\frac{\pi}{4}.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L \overline{z}\,\mathbf{Im}\, z\,dz, \quad \text{где } L \text{ — ломаная с вершинами в точках } z_1 = 1, z_2 = 1 + i, z_3 = i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{3z-5}{z^2 - 2z - 3}, \qquad 4 < |z - 3| < \infty.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+9)^2}, \qquad L:\ |z + 3i| = 3.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = e^{2t} \sin 2t \cos 4t.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' - x' - 6x = 2, \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = 2 - 2y, \\ y' = 2x - 4t, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 1.$$

Вариант 23

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = -4 + 4i; \qquad n = 6.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^6 - 4\sqrt{3}z^3 + 16 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$1 \leqslant |z + 2 - 3i| < 4.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = ize^z.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{tg} z, \qquad z_0 = \frac{\pi}{6} - i\ln 3.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L (z+1)\overline{z}\,dz, \quad \text{где } L \text{ — отрезок прямой от точки } z_1 = 0 \text{ до точки } z_2 = -1 - 2i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{2z - 9}{z^2 + z - 6}, \qquad 1 < |z - 3| < 6.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{\operatorname{th} z}{z(z+1)}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 - 16}, \qquad L: \ |z - 1 - i| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \int\limits_0^t (t - \tau)\sin 2\tau\,d\tau.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' - 9x = -e^{-t}, \qquad x(0) = x'(0) = 1.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = -2y + 3t, \\ y' = 2x + 4, \end{cases} \qquad x(0) = 2, \ y(0) = 3.$$

Вариант 24

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\,i; \qquad n = 6.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^8 - z^4 + 1 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$|z| < |z - 1|.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = iz \sin iz.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = z^{1-2i}, \qquad z_0 = \frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2}.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L (z+1)\overline{z}\,dz, \quad \text{где } L \text{ — окружность } |z| = 1.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{3z - 5}{z^2 - 2z - 3}, \qquad 2 < |z + 3| < 6.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{1}{e^{2z} - 1}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z^4 - 1}, \qquad L: \ |z + 1 - i| = 2.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \cos 2t \cos 4t.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + x' = 2, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} 4x' - y' = -3x + \sin t, \\ \qquad\ x' = -y + \cos t, \end{cases} \qquad x(0) = 2, \ y(0) = -1.$$

Вариант 25

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{-3}{1+i}; \qquad n = 5.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^8 - \sqrt{3}z^4 + 1 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$2\,\mathbf{Re}\,z + \mathbf{Re}\,z^2 < 3.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = \frac{i}{z} + z^3.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{sh} z, \qquad z_0 = 3 - i\frac{\pi}{3}.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L \overline{z}\,\mathbf{Im}\,z\,dz, \quad \text{где } L \text{ — дуга окружности } |z| = 1,$$
$$\mathbf{Re}\,z > 0, \mathbf{Im}\,z < 0, \text{ начало в точке } z = -i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2}, \qquad 1 < |z| < 2.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = e^{\frac{z}{z+1}}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^2(z^2+9)}, \qquad L: \ |z+2i| = 3.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \int\limits_0^t e^{t-\tau}\cos 2\tau\,d\tau.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' - 2x' - 3x = e^t, \qquad x(0) = 0, \ x'(0) = 1.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = -x - y + \sin t, \\ y' = -x - y, \end{cases} \qquad x(0) = 0, \ y(0) = 0.$$

Вариант 26

1. Представить число z в тригонометрической и показательной формах, найти z^n.

$$z = \frac{3}{-1 - i\sqrt{3}}; \qquad n = 8.$$

2. Найти все корни уравнения, изобразить эти корни на комплексной плоскости.

$$z^8 - 2z^4 + 4 = 0.$$

3. Какие линии или область в плоскости переменного $\mathcal{Z}$ определяются следующими условиями? Начертить эти линии (области).

$$\mathbf{Im}\, z^2 + 2\,\mathbf{Re}\, z = 1.$$

4. Используя условия Коши–Римана, проверить, является ли функция аналитической.

$$f(z) = z^2 + z + \frac{1}{z}.$$

5. Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

$$f(z) = \operatorname{tg} z, \qquad z_0 = \frac{\pi}{3} - i\ln 3.$$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ по заданной кривой.

$$\int\limits_L z\,\mathbf{Im}\, z\,dz, \quad \text{где } L \text{ — отрезок прямой от точки } z_1 = 1 + 2i \text{ до точки } z_2 = 2 + 4i.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$f(z) = \frac{2z - 9}{z^2 + z - 6}, \qquad 1 < |z + 2| < 4.$$

8. Найти особые точки функции $w = f(z)$ и выяснить их характер.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)^3}.$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$, применяя основную теорему о вычетах.

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{z^2(z^2 - 1)}, \qquad L: \ |z + 1| = \frac{3}{2}.$$

10. Найти изображение по Лапласу функции.

$$f(t) = \operatorname{ch} t \cos 2t.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию, используя операционное исчисление.

$$x'' + x' = e^{-t}, \qquad x(0) = x'(0) = 1.$$

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям, используя операционное исчисление.

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 2y - x - 4\sin t, \end{cases} \qquad x(0) = 2, \ y(0) = 0.$$