В. Ф. Дьяченко, В. Г. Лазарев, Способ упрощения логических схем алгоритмов, учитывающий неиспользуемые наборы значений переменных, *Пробл. передачи информ.*, 1966, том 2, выпуск 3, 92–96

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том II *1966* *Вып. 3*

УДК 62-50

СПОСОБ УПРОЩЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ АЛГОРИТМОВ, УЧИТЫВАЮЩИЙ НЕИСПОЛЬЗУЕМЫЕ НАБОРЫ ЗНАЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ

В. Ф. Дьяченко, В. Г. Лазарев

Рассматривается способ упрощения логических схем алгоритмов (ЛСА), основанный на учете наборов значений переменных (логических условий), которые не встречаются при выполнении алгоритма. Способ упрощения ЛСА состоит в преобразовании недоопределенных формул перехода и получении общего решения, из которого выбирается частное решение в виде формулы перехода. Затем формулы перехода переводятся в ЛСА.

Учет неиспользуемых наборов позволяет сократить общее число логических условий и изменить порядок их проверки, что может в некоторых случаях привести к дополнительному объединению одинаковых выражений в ЛСА. Приведен пример упрощения ЛСА.

Алгоритм функционирования управляющего устройства удобно задавать на языке логических схем алгоритмов (ЛСА) [1]. При этом сложность управляющего устройства определяется числом членов ЛСА. Обычно первоначальная запись алгоритма функционирования на этом языке заметно отличается от оптимальной. Поэтому перед синтезом структуры управляющего устройства необходимо минимизировать заданную ЛСА. Однако известные методы упрощения ЛСА (см., например, [2, 3]) позволяют получить ЛСА с минимальным числом членов без учета того обстоятельства, что в процессе функционирования управляющего устройства (из-за практических соображений) не могут возникнуть некоторые из наборов значений логических условий. При этом следует отметить, что обычно для алгоритмов функционирования достаточно сложных управляющих устройств число невозникающих (неиспользуемых) наборов значений логических условий весьма велико и это число растет с ростом числа логических условий. В связи с этим можно ожидать, что учет таких неиспользуемых наборов при упрощении ЛСА может привести к значительно более простым ЛСА, чем при упрощении их известными методами [2, 3]. Вместе с тем, способ учета неиспользуемых наборов разработан применительно только к дополнительным логическим условиям, вводимым при объединении ЛСА [4, 5]. В работе [6] хотя и вводится понятие о равносильности логических схем лишь на используемых наборах значений логических условий, но также не дается способа учета неиспользуемых наборов их значений для упрощения ЛСА.

Ниже излагается способ упрощения ЛСА, позволяющий учитывать неиспользуемые наборы значений логических условий.

Пусть в ЛСА $\mathfrak{A}$ задано k независимых логических условий $p_1 \ldots, p_k$, из которых можно образовать 2^k наборов значений этих переменных $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{2^k}$, образующие различные последовательности:

$$\Delta_{s_1},\ \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}\ \Delta_{s_{m+1}}, \ldots \tag{1}$$

Допустимой последовательностью [2] значений наборов переменных $p_1 \ldots, p_k$ называется такая последовательность (1), в которой набор $\Delta_{s_{m+1}}$ либо совпадает с набором Δ_{s_m}, либо отличается от него только значениями переменных, которые могут быть изменены оператором A_m, выполняемым на наборе Δ_{s_m}.

Пусть некоторые из 2^k наборов значений переменных не могут встретиться в процессе выполнения алгоритма. Такие наборы, названные выше неиспользуемыми наборами, будем обозначать через $\delta_1, \ldots, \delta_r$, $r < 2^k$. Каждому неиспользуемому набору δ_t $(t = 1, 2, \ldots, r)$ однозначно сопоставим элементарную конъюнкцию [7] k_t из переменных $p_1, \ldots, p_k$, которую назовем *неиспользуемой* элементарной конъюнкцией.

Так, например, набору $\delta_t = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$, где σ_1 равно 0 или 1, соответствует неиспользуемая элементарная конъюнкция

$$k_t = p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \ldots p_k^{\sigma_k},$$

причем

$$p^\sigma = \begin{cases} p, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{p}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Определение 1. Допустимую последовательность наборов значений переменных $p_1, \ldots, p_k$ назовем частично допустимой, если эта последовательность не содержит в себе неиспользуемых наборов.

В [2] дано определение равносильности ЛСА. Здесь мы определим понятие квазиравносильности ЛСА, учитывающее неиспользуемые наборы значений переменных *.

Определение 2. ЛСА $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ назовем *квазиравносильными* (и обозначим $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}'$), если для любой частично допустимой последовательности наборов для $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ их значения [2] совпадают.

Процесс упрощения ЛСА с учетом неиспользуемых наборов значений логических условий удобно выполнять, перейдя предварительно к матричной схеме (МСА) [2], т. е. представив алгоритм функционирования в виде (2)

$$\begin{array}{c|cccccc} & A_1 & A_2 & \ldots & A_n & A_{n+1} \\ \hline A_0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \ldots & \alpha_{0n} & \alpha_{0n+1} \\ A_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \alpha_{1n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} & \alpha_{nn+1} \end{array} \tag{2}$$

или упрощенно в виде

$$\begin{array}{c|c} & A_j \\ \hline A_i & \alpha_{ij} \end{array}, \tag{3}$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ — операторы, а $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(p_1, \ldots, p_k)$ — логические функции от независимых логических переменных $(p_1, \ldots, p_k)$.

Известно [2], что если ЛСА $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ равносильны, то и соответствующие им матричные схемы алгоритмов (МСА) также равносильны и наоборот. Легко понять поэтому, что введя определение квазиравносильности МСА, аналогичное определение квазиравносильности ЛСА (определение 2) можно утверждать, что если ЛСА $\mathfrak{A}$ квазиравносильна ЛСА $\mathfrak{A}'$, то соответствующие им МСА $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ также квазиравносильны и наоборот. (Квазиравносильность МСА $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ также будем обозначать через $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}'$).

Обозначим теперь через γ_l логическую функцию, представляющую собой дизъюнкцию всех или любой части неиспользуемых элементарных конъюнкций $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Число таких функций равно $q = 2^r$. Очевидно, что для данной МСА при любом наборе Δ_i для частично допустимой последовательности наборов

$$\gamma_l(\Delta_i) \equiv 0, \quad (l = 1, 2, \ldots, q). \tag{4}$$

Поэтому можно утверждать, что если задана МСА $\mathfrak{A}$, то для любой частично допустимой последовательности наборов матрица

$$\mathfrak{A}' = \begin{array}{c|c} & A_j \\ \hline A_i & \alpha_{ij} \vee \gamma_t \end{array}, \tag{5}$$

согласно определению (2), квазиравносильна МСА $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}'$. Если же от МСА $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ перейти к ЛСА $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, соответственно, то ЛСА $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ будут также квазиравносильны. Заметим, что при $\gamma_l = 0$ МСА $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ и соответствующие им ЛСА не только квазиравносильны, но и равносильны.

Рассмотренные свойства МСА и ЛСА могут быть использованы для упрощения ЛСА.

По аналогии с [8] элементарные конъюнкции $k_t (t = 1, 2, \ldots, r)$, соответствующие неиспользуемые наборам, будем обозначать в виде $\frac{k_t}{0}$ или $\frac{\gamma_l}{0} = \bigvee_{t=1}^{r} \frac{k_t}{0}$, если $\gamma_l = \bigvee_{t=1}^{r} k_t$, где дробная черта трактуется как знак, указывающий на то, что может

* Аналогичное определение приведено в работе [6].

быть взято любое из выражений, стоящих по обе стороны этой черты, т. е. либо k_t либо 0. Выражение

$$\hat{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} \vee \frac{k_1}{0} \vee \frac{k_2}{0} \vee \ldots \vee \frac{k_r}{0} \tag{6}$$

является недоопределенной функцией и иногда его называют общим решением [8].

Из общего решения путем выбора различных неиспользуемых элементарных конъюнкций можно получить все возможные решения (частные решения). МСА называется недетерминированной [5] и обозначается $\hat{\mathfrak{A}}$, если не выполняются условия ортогональности, хотя бы для одной пары элементов строки МСА, т. е. $\alpha_{iq}\alpha_{it} \not\equiv 0$, $q \neq t$ или, если хотя бы для одной строки матрицы $\bigvee_{q=1}^{n+1} \alpha_{iq} \not\equiv 1$. Легко видеть, что МСА (5) $\mathfrak{A}'$ вообще говоря, может быть и недетерминированной, если $\gamma_l \neq 0$.

В работе [3] приведено правило перехода от МСА к ЛСА с помощью формул перехода. Формула перехода для оператора называется недоопределенной [5], если функция $\hat{\alpha}_{ij}$ является недоопределенной. Следовательно, в отличие от [3], здесь, как и в работе [5], по недетерминированной МСА составляются вначале недоопределенные формулы перехода, затем они переводятся в формулы перехода, после чего процесс построения ЛСА совпадает с процессом, описанным в работе [3]. Из недоопределенных формул перехода (общих решений) можно получить частные решения — формулы перехода. Из общих решений необходимо выбирать те из них, которые дают минимальное число логических переменных (логических условий) и максимальное число равносильных подформул [3] в одной и той же или разных формулах перехода. Объединение равносильных подформул приводит к сокращению общего числа логических условий в ЛСА.

При преобразовании формул перехода, в частности при приведении их по некоторой переменной [9] и вынесении переменных за скобки, могут встретиться выражения вида $p_{i_1}(A_k \vee p_{i_2} \ldots p_{i_m} A_j)$. Если $p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_m} = \gamma_s$, то для любой частично допустимой последовательности наборов справедлива следующая равносильность:

$$p_{i_1}(A_k \vee p_{i_2} \ldots p_{i_m} A_j) = p_{i_1} A_k.$$

Процесс упрощения ЛСА, учитывающий неиспользуемые наборы значений переменных, сводится к следующему:

1. Заданную ЛСА записываем в виде равносильной МСА.

2. Элемент МСА α_{ij} ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n, n+1$) представляем в дизъюнктивной нормальной форме $\alpha_{ij} = k_{t_1} \vee k_{t_2} \vee \ldots \vee k_{t_m}$.

Если $k_{t_\tau} = \gamma_s$ ($1 \leqslant s \leqslant q$; $1 \leqslant j \leqslant n+1$; $\tau = 1, 2, \ldots, m$), то элементарную конъюнкцию k_{t_τ} переводим в неиспользуемую, записывая ее в МСА в виде $\frac{k_{t_\tau}}{0}$.

3. Переходим от преобразованной таким образом МСА к недоопределенным формулам перехода

$$A_i \to \hat{\alpha}_{i1} A_1 \vee \hat{\alpha}_{i2} A_2 \vee \ldots \vee \hat{\alpha}_{i\,n+1} A_{n+1}, \tag{7}$$

где

$$\hat{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} \vee \frac{k_1}{0} \vee \frac{k_2}{0} \vee \ldots \vee \frac{k_r}{0}$$

и k_t — неиспользуемые конъюнкции.

4. Производим преобразования и упрощения недоопределенных формул перехода и получаем общее решение для каждой формулы перехода.

5. Выбираем частные решения для каждой формулы перехода.

6. Переводим формулы перехода в ЛСА.

Рассмотрим пример. Пусть задана следующая ЛСА *:

$$\mathfrak{A} \equiv A_0 p_1 \overset{1}{\uparrow} \overset{10}{\downarrow} A_1 p_1 \overset{3}{\uparrow} \bar{p}_2 \overset{4}{\uparrow} p_3 \overset{5}{\uparrow} \overset{2}{\downarrow} A_3 \omega \overset{11}{\uparrow} \overset{1}{\downarrow} p_2 \overset{2}{\uparrow} \omega \overset{6}{\uparrow} \overset{4}{\downarrow} p_3 \overset{6}{\uparrow} \omega \overset{10}{\uparrow} \overset{11}{\downarrow} p_2 \overset{2}{\uparrow} \bar{p}_1 \overset{10}{\uparrow} \overset{6}{\downarrow} A_2$$

$$p_1 \overset{5}{\uparrow} \bar{p}_2 \overset{3}{\uparrow} \overset{5}{\downarrow} A_4 p_1 \overset{3}{\uparrow} \bar{p}_2 \overset{3}{\uparrow} \bar{p}_3 \overset{2}{\uparrow} \overset{3}{\downarrow} A_5$$

и неиспользуемые наборы значений переменных (101) и (100), которым соответствуют следующие неиспользуемые элементарные конъюнкции: $\frac{k_1}{0} = \frac{p_1 \bar{p}_2 p_3}{0}$, $\frac{k_2}{0} = \frac{p_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3}{0}$.

* Знак $\equiv$ означает графическое тождество. Заметим, что данная ЛСА известными методами (например, [2, 3]), не учитывающими неиспользуемых наборов, не упрощается.

Отсюда $\gamma_1 = p_1\bar{p}_2p_3$, $\gamma_2 = p_1,\bar{p}_2\bar{p}_3$, $\gamma_3 = p_1\bar{p}_2$. ЛСА $\mathfrak{A}$ соответствует следующая равносильная МСА:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_0	p_1	$\bar{p}_1p_2$	$\bar{p}_1\bar{p}_2$	0	0
A_1	$p_1p_2p_3$	$p_1p_2\bar{p}_3$	$p_1\bar{p}_2p_3$	$p_1\bar{p}_2\bar{p}_3$	$\bar{p}_1$
A_2	0	0	0	$\bar{p}_1\vee p_1\bar{p}_2$	p_1p_2
A_3	p_1p_2	$\bar{p}_1p_2$	$\bar{p}_2$	0	0
A_4	0	0	$p_1\bar{p}_2p_3$	0	$\overline{p_1\bar{p}_2p_3}$

Элементы МСА $\alpha_{13} = \alpha_{43} = p_1\bar{p}_2p_3 = \gamma_1$ $\alpha_{14} = p_1\bar{p}_2\bar{p}_3 = \gamma_2$ и конъюнкцию $p_1\bar{p}_2 = \gamma_3$ из α_{24} переводим в неиспользуемые конъюнкции, записывая их в МСА в виде $\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}$ $\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}$ и $\frac{p_1\bar{p}_2}{0}$:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_0	p_1	$\bar{p}_1p_2$	$\bar{p}_1\bar{p}_2$	0	0
A_1	$p_1p_2p_3$	$p_1p_2\bar{p}$	$\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}$	$\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}$	$\bar{p}_1$
A_2	0	0	0	$\bar{p}_1\vee\frac{p_1\bar{p}_2}{0}$	p_1p_2
A_3	p_1p_2	p_1p_2	$\bar{p}_2$	0	0
A_4	0	0	$\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}$	0	$\overline{p_1\bar{p}_2p_3}$

(8)

Из (8) с учетом (7) образуем недоопределенные формулы перехода:

$$A_0 \rightarrow \left(p_1\vee\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_1\vee\left(\bar{p}_1p_2\vee\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_2\vee\left(\bar{p}_1\bar{p}_2\vee\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_3;$$

$$A_1 \rightarrow \left(p_1p_2p_3\vee\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_1\vee\left(p_1p_2\bar{p}_3\vee\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_2\vee$$
$$\vee\left(\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_3\vee\left(\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_4\vee\left(\bar{p}_1\vee\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_5;$$

$$A_2 \rightarrow \left(p_1\vee\frac{p_1\bar{p}_2}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_4\vee\left(p_1p_2\vee\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_5;$$

$$A_3 \rightarrow \left(p_1p_2\vee\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_1\vee\left(\bar{p}_1p_2\vee\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_2\vee$$
$$\vee\left(\bar{p}_2\vee\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_3;$$

$$A_4 \rightarrow \left(\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_3\vee\left(\overline{p_1\bar{p}_2p_3}\vee\frac{p_1\bar{p}_2p_3}{0}\vee\frac{p_1\bar{p}_2\bar{p}_3}{0}\right)A_5.$$

После преобразований [8] выражений, заключенных в круглые скобки, получим недоопределенные формулы (общие решения).

Из общих решений формул перехода для операторов A_1, A_2 и A_4 выбираем частные решения [8], дающие минимальные решения. Общие решения формул перехода для операторов A_0 и A_3 не позволяют уменьшить число логических переменных. Однако из этих решений можно выбрать такие, которые равны друг другу и при окончательном построении ЛСА их можно будет объединить.

Окончательно получаем следующие формулы перехода:

$$A_0 \rightarrow p_1A_1\vee\bar{p}_1(p_2A_2\vee\bar{p}_2A_3);$$

$$A_1 \rightarrow p_1(p_3A_1\vee\bar{p}_3A_2)\vee\bar{p}_1A_5;$$

$$A_2 \rightarrow \bar{p}_1A_4\vee p_1A_5;$$

$$A_3 \rightarrow p_1A_1\vee\bar{p}_1(p_2A_2\vee\bar{p}_2A_3);$$

$$A_4 \rightarrow A_5.$$

От этой системы формул перехода, используя методику, изложенную в [3], можно перейти к ЛСА $\mathfrak{A}'$, квазиравносильной заданной ЛСА $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}' \equiv A_0 p_1 \overset{1}{\uparrow} \overset{4}{\downarrow} A_1 \overset{6}{\downarrow} p_1 \overset{3}{\uparrow} \bar{p}_3 \overset{4}{\uparrow} \omega \overset{7}{\uparrow} \overset{2}{\downarrow} A_3 \omega \overset{6}{\uparrow} \overset{1}{\downarrow} p_2 \overset{2}{\uparrow} \overset{7}{\downarrow} A_2 \bar{p}_1 \overset{5}{\uparrow} A_4 \overset{3,5}{\downarrow} A_5.$$

Полученная ЛСА содержит на восемь вхождений логических условий меньше, чем заданная ЛСА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. А. О некоторых общих вопросах кибернетики. Сб. «Проблемы кибернетики». М., Физматгиз, 1958, *1*, 5—22.
2. Янов Ю. И. О логических схемах алгоритмов. Сб. «Проблемы кибернетики». М., Физматгиз, 1958, *1*, 75—127.
3. Дьяченко В. Ф. Преобразование логических схем алгоритмов. Сб. «Принципы построения сетей и систем управления». М., «Наука», 1964, 35—47.
4. Лазарев В. Г., Пийль Е. И. Способ объединения алгоритмов. Сб. тр. НИИТС. Л., 1962, *10*, 52—63.
5. Лазарев В. Г. О синтезе микропрограммных автоматов. Проблемы передачи информации, 1965, 1, *2*, 63—78.
6. Rutledge J. D. On Ianov's Program Schemata. J. of the Assoc. for Comp. Mach., 1964, 11, *1*, 1—9.
7. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике. Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. М., Изд-во АН СССР, 1958, 51, 5—142.
8. Рогинский В. Н. Элементы структурного синтеза релейных схем управления. М., Изд-во АН СССР, 1959.
9. Дьяченко В. Ф. Построение граф-схем алгоритмов. Сб. «Проблемы передачи информации». М., Изд-во АН СССР, 1962, *12*, 53—69.

Поступила в редакцию
21 июля 1965 г.