ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и телекоммуникаций
Кафедра прикладной математики и информатики

М. В. Хохлова

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Часть I

Рекомендовано
Ученым советом ВятГУ
в качестве учебного пособия

Киров
2009

Печатается по решению редакционно-издательского совета Вятского государственного университета

УДК 517.53(07)
Х 862

Рецензент: кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой математики Вятского социально-экономического института А.И. Глушкова

Хохлова М.В. Теория функций комплексного переменного. Часть 1: учеб. пособие. – Киров: Изд-во ВятГУ, 2009. – 68 с.

Учебное пособие для студентов дневного отделения специальностей 071900, 210100, 201800, 200900 составлено в соответствии с программой по высшей математике и включает основные разделы по теме «Теория функций комплексного переменного». Каждый раздел содержит необходимые теоретические сведения, комментированный набор задач, решение которых позволяет усвоить основные понятия по теории функций комплексного переменного. Пособие снабжено большим количеством задач для самостоятельной работы. Может быть использовано студентами других специальностей.

Редактор Е. Г. Козвонина

Подписано в печать Усл.печ.л. 2.1
Бумага офсетная Печать копир Aficio 1022
Заказ № Тираж 53 Бесплатно.
Текст напечатан с оригинала-макета, представленного автором.

610000, г. Киров, ул. Московская, 36
Оформление обложки, изготовление – ПРИП ВятГУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ОПЕРАЦИИ С ЧИСЛАМИ 4
1.1. Основные понятия. Формы записи. Геометрическая интерпретация 4
1.2. Основные операции с числами 11
1.3. Множества и области на комплексной плоскости. Кривые на комплексной плоскости 21
1.4. Задачи для самостоятельной работы (по главе 1) 27
ГЛАВА 2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО 33
2.1. Определение функции комплексного переменного 33
2.2. Элементарные функции комплексного переменного. Основные понятия 39
2.3. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Понятие о конформном отображении 46
2.4. Задачи для самостоятельной работы (по главе 2) 59
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 66

ГЛАВА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ОПЕРАЦИИ С ЧИСЛАМИ

1.1. Основные понятия. Формы записи. Геометрическая интерпретация

Выражение вида $a+bi$, где a и b − упорядоченная пара вещественных чисел, называется **комплексным числом** $z=a+bi$ или $z=(a,b)$.

Число $i=(0,1)$ называется **мнимой единицей**:

$$i^2=-1.$$

Числа a и b называются соответственно действительной $a=\operatorname{Re} z$ и мнимой частью $b=\operatorname{Im} z$. Число вида $(a,0)$ отождествляется с вещественным числом a. Число $(0,b)$ называется чисто мнимым. Любое комплексное число можно представить в виде $z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+bi$.

Число $a-bi$ называется комплексно сопряженным числу $a+bi$ и обозначается $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$.

Комплексные числа $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$ **равны**, если $a=c$ и $b=d$.

Запись числа $z=a+bi$ называется **алгебраической формой** записи комплексного числа.

Комплексное число $z=a+bi$ можно изображать точкой на комплексной плоскости с прямоугольными координатами (a,b) или радиус-вектором этой точки. Ось абсцисс этой плоскости называется **действительной** осью, ось ординат – **мнимой** осью. Например, число $z=2+i$ изображается точкой (2, 1) на плоскости (X, У) (см. рис. 1). Следуя геометрической интерпретации, можно увидеть, что комплексные числа не сравниваются.

Суммой (разностью) двух комплексных чисел $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$ называется комплексное число:

$$z_1 \pm z_2 = (a \pm c, b \pm d).$$

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = (a, b)$ и $z_2 = (c, d)$ называется комплексное число:

$$z_1 \cdot z_2 = (ab - cd, ad + cb).$$

Частным от деления двух комплексных чисел $z_1 = (a, b)$ и $z_2 = (c, d)$ называется комплексное число:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right).$$

Полярные координаты $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ точки (a, b) (см. рис. 2) называются соответственно **модулем** и **аргументом** комплексного числа z и обозначаются $r = |z|, \quad \varphi = Arg\ z$.

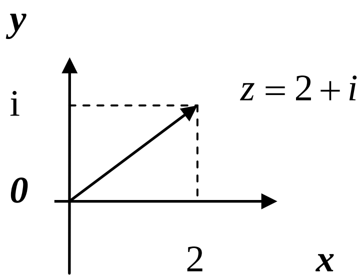


Рис. 1

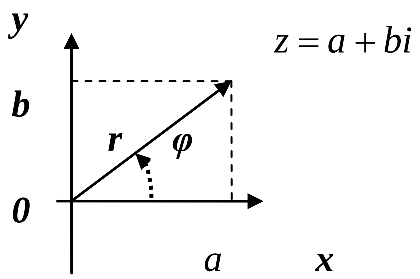


Рис. 2

Используя связь декартовых и полярных координат для $a = r\cos\varphi$ и $b = r\sin\varphi$, получают **тригонометрическую форму** записи любого, отличного от нуля, комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. (1)

Формулы для обратного соотношения:

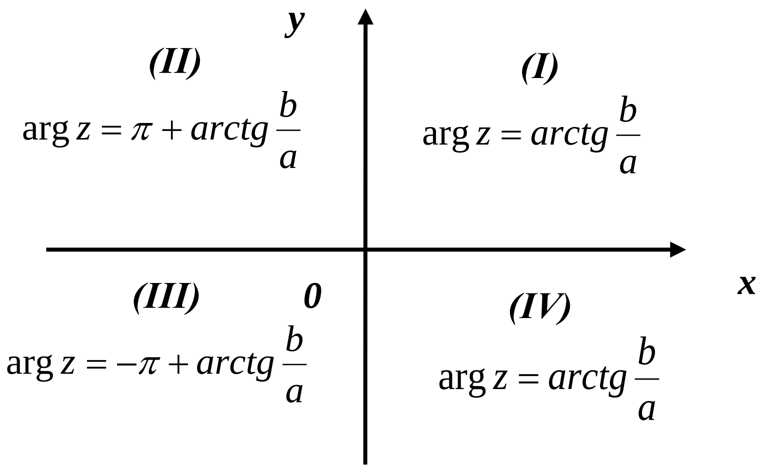
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad tg\ Arg\ z = tg\varphi = \frac{b}{a}. \qquad (2)$$

Величина $Arg\ z$ многозначна (это следует из неоднозначности задания величины угла φ для данной точки) и определена с точностью до целого числа, кратного 2π:

$$Arg\ z = \arg z + 2k\pi, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где $\arg z$ – это главное значение аргумента, лежащее в интервале $(-\pi; \pi]$, т.е. $-\pi < \arg z \le \pi$. Следовательно, для главного значения аргумента будут справедливы следующие соотношения по координатным четвертям (см. рис. 3).

В дальнейшем под аргументом φ комплексного числа следует понимать $\arg z$ – главное значение аргумента.



(3)

Рис. 3

Синус и косинус аргумента, учитывая местоположение точки z, можно также найти по формулам:

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

С помощью **формулы Эйлера**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{4}$$

можно перейти к **показательной форме** тригонометрического числа:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}. \tag{5}$$

Задача 1. Представить комплексные числа $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ и $z_2 = -3 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. 1) Числа $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ и $z_2 = -3 + i\sqrt{3}$ представлены в алгебраической форме $z = a + ib$, где $a_1 = 1$, $b_1 = -\sqrt{3}$ и $a_2 = -3$, $b_2 = \sqrt{3}$. Числа изображают на комплексной плоскости (см. рис. 4):

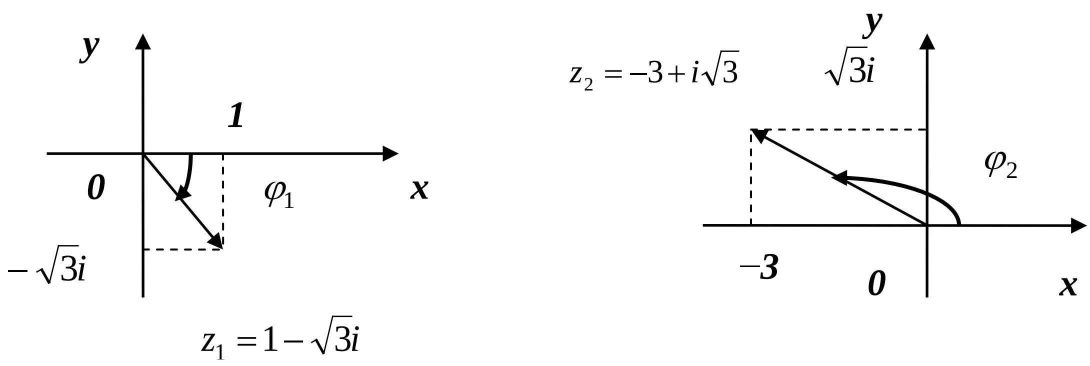


Рис. 4

2) Находят модуль и аргумент числа $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ по формулам (2) и (3):

$$r_1 = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \qquad tg\varphi_1 = \frac{-\sqrt{3}}{1}.$$

Так как число находится в IV квадранте, то главное значение аргумента

$$\varphi_1 = \arg z = arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \qquad Argz = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

В итоге по формулам (1) и (5) получают $z_1 = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$ в тригонометрической форме и $z_1 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ в показательной форме.

3) Находят модуль и аргумент числа $z_2 = -3 + i\sqrt{3}$ по формулам (2) и (3):

$$r_2 = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}, \qquad tg\varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{-3}.$$

Число находится во II четверти, тогда

$$\arg z = \varphi_2 = \pi + arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \qquad Argz = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

В итоге, используя формулы (1) и (5), получают запись числа в тригонометрической $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$ и в показательной форме $z_2 = 2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

Геометрическая интерпретация комплексного числа и тангенс аргумента позволяют быстро и точно определить главное значение аргумента рассматриваемого числа.

Задача 2. Представить число $z = \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Число $z = \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$ представлено не в тригонометрической форме по формуле (1), а в алгебраической форме

$$z = a + ib,$$

где $a = \cos\frac{\pi}{7}$ и $b = -\sin\frac{\pi}{7}$ (IV четверть).

Модуль и аргумент числа находят по формулам (2) и (3):

$$r = \sqrt{(\cos\frac{\pi}{7})^2 + (-\sin\frac{\pi}{7})^2} = 1 \qquad \varphi = \arg z = arctg\left(\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}\right) = arctg(-tg\frac{\pi}{7}) = -\frac{\pi}{7}.$$

В итоге получают запись числа в тригонометрической $z = (\cos(-\frac{\pi}{7}) + i\sin(-\frac{\pi}{7}))$ и в показательной форме $z = e^{-i\frac{\pi}{7}}$.

Задача 3. Доказать, что $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ исходя из геометрического представления комплексных чисел.

Решение. Устанавливают зависимость между модулями $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1+z_2|$. Изображают с помощью векторов комплексные числа z_1, z_2, z_1+z_2 (см. рис. 5).

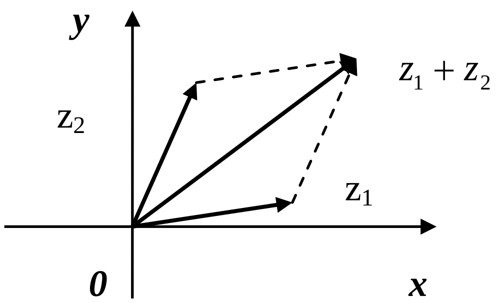


Рис. 5

Тогда $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1+z_2|$ − соответственно модули построенных векторов. Из соотношения между сторонами треугольников заключают, что $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Задача 4. Найти множества точек на плоскости комплексного переменного z , которые определяются следующими условиями:

а) $|z| = 1$; б) $1 < \operatorname{Re} z \le 3$; в) $\arg z = \dfrac{\pi}{6}$;

г) $\operatorname{Re} z = 2$; д) $\operatorname{Im} z \ge -1$.

Решение. а) Условие $|z| = 1$ эквивалентно уравнению $r = 1$ и задает окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 6).

б) Условие $1 < \operatorname{Re} z \le 3$ или $1 < x \le 3$ задает бесконечную вертикальную полосу между прямыми $x = 1$ и $x = 3$, включая правую прямую $x = 3$ (рис. 7).

в) Условие $\arg z = \dfrac{\pi}{6}$ задает луч, который направлен из начала координат под углом $\dfrac{\pi}{6}$ к положительному направлению оси OX (рис. 8).

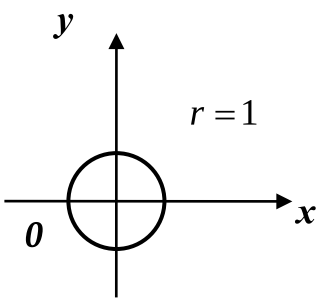


Рис. 6

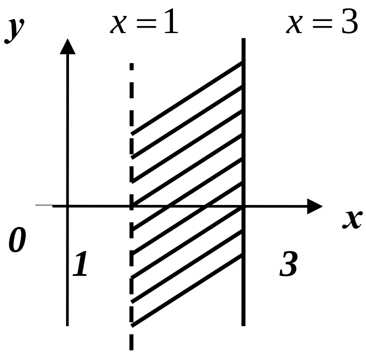


Рис. 7

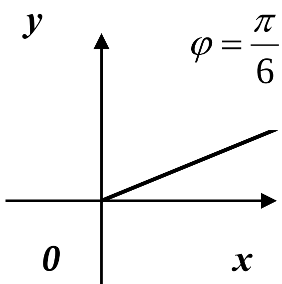


Рис. 8

г) Условие $\operatorname{Re} z = 2$ эквивалентно уравнению $x = 2$ и задает прямую, параллельную мнимой оси ОУ (рис. 9).

д) Условие $\operatorname{Im} z \geq -1$ или $y \geq -1$ задает полуплоскость, расположенную выше прямой $y = -1$, включая эту прямую (рис. 10).

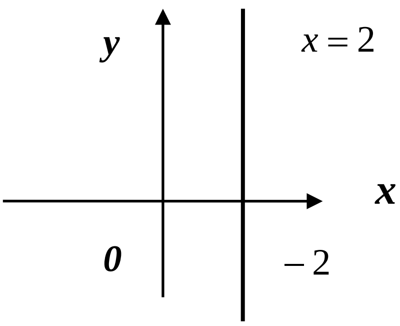


Рис. 9

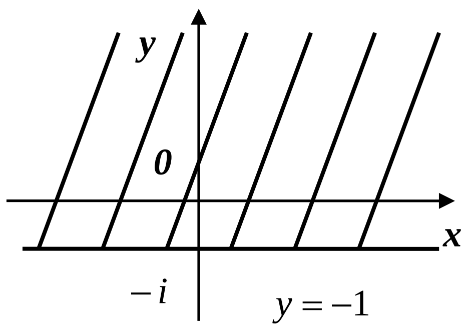


Рис. 10

1.2. Основные операции с числами

Для комплексных чисел определены следующие основные операции: **сложение** (вычитание), **умножение**, **деление** (см. § 1.1), **возведение в целую степень** комплексного числа, **извлечение корня** целой положительной степени.

При выполнении этих действий следует помнить, что форма записи комплексного числа определяет формулы, по которым осуществляются данные операции, и диктует целесообразность их применения (см. табл. 1).

Таблица 1

Выполнение действия	Сложение (вычитание)	Умножение (деление)	Возведение в степень	Извлечение корня
в алгебраической форме	+	+	—	—
в тригонометрической форме	—	+	+	+
в показательной форме	—	+	+	+

Для выполнения действий над комплексными числами $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$, записанными **в алгебраической форме**, используются следующие формулы:

сложение: $$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i; \qquad (6)$$

вычитание: $$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i; \qquad (7)$$

умножение: $$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \qquad (8)$$

Формула умножения получается при перемножении одного комплексного числа на другое по обычным правилам алгебры (при условии $i^2 = -1$).

Деление:

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}. \qquad (9)$$

Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. Деление на нуль не определено. При делении комплексных чисел числитель и знаменатель следует умножить на число $\bar{z}$, сопряженное знаменателю.

Для выполнения действий над комплексными числами $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, записанными в **тригонометрической форме** используются следующие формулы.

Умножение:

$$(r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1))(r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2))=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \qquad (10)$$

Деление:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_1(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \qquad (11)$$

Возведение в n-ю степень (для целой степени n комплексного числа)**:**

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (12)$$

При $r=1$ получается **формула Муавра**:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \qquad (13)$$

Извлечение корня для **целой положительной** степени **n** комплексного числа (не равного нулю) осуществляется по формуле

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$$k = \overline{0, n-1}, \qquad k \in N\,. \tag{14}$$

При этом имеется n различных значений корня. Соответствующие им точки лежат на одной окружности $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат и делят ее на n равных частей. Аргументы двух последовательных чисел отличаются на $\frac{2\pi}{n}$.

Задача 5. Доказать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Решение. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Сопряженными им числами будут $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$ и $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$.

Левая часть равенства $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, поэтому $\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$.

Правая часть $\overline{z_1} + \overline{z_2} = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$.

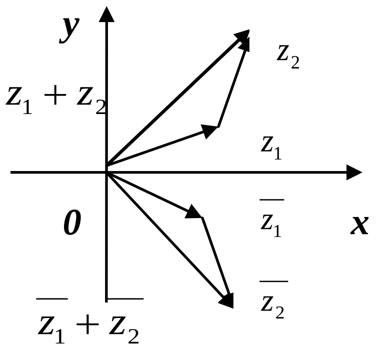


Рис. 11

Отсюда следует, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. Геометрическая интерпретация обеих частей равенства также доказывает его справедливость (см. рис. 11).

Задача 6. Найти произведение и частное для комплексных чисел $1 + i$ и $\sqrt{3} - i$. Вычислить $(1+i)^6$ и $\sqrt[4]{\sqrt{3} - i}$.

Решение. 1) Произведение и частное комплексных чисел можно выполнить в алгебраической форме.

Произведение:

$$(1+i)\cdot(\sqrt{3}-i)=1\cdot\sqrt{3}-i^2+i(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1).$$

Полученное число можно представить и в тригонометрической форме. Находят модуль и аргумент комплексного числа:

$$r=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2};$$

$$tg\varphi=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1)}=\frac{3+1-2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}.$$

Так как число находится в I четверти, то

$$(1+i)\cdot(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{2}(\cos arctg(2-\sqrt{3})+i\sin arctg(2-\sqrt{3})). \qquad (15)$$

Частное:

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(1+i)\cdot(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)\cdot(\sqrt{3}+i)}=\frac{\sqrt{3}+i^2+i(\sqrt{3}+1)}{3+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{\sqrt{3}+1}{4}.$$

В тригонометрической форме это число (оно также находится в I четверти) будет иметь вид $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos arctg(2+\sqrt{3})+i\sin arctg(2+\sqrt{3})\right)$, (16)

так как $r^2=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$, $\quad tg\varphi=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$.

2) Произведение и частное комплексных чисел можно выполнить также в тригонометрической форме. Для этого числа $1+i$ и $\sqrt{3}-i$ надо представить в тригонометрической форме.

$z=1+i$ (I четверть)	$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$	$\varphi=\frac{\pi}{4}$	$z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$,

(17)

$z=\sqrt{3}-i$ (IV четверть)	$r=\sqrt{3+1}=2$	$\varphi=-\frac{\pi}{6}$	$z=2(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))$.

Произведение:

$$(1+i)\cdot(\sqrt{3}-i)=2\cdot\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{-\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{-\pi}{6})\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

где $\arg\big((1+i)\cdot(\sqrt{3}-i)\big)=\frac{\pi}{12}$.

Используя тригонометрические формулы, следует отметить, что

$$tg\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{3}.$$

Это совпадает с формулой (15).

Частное:

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{-\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{-\pi}{6})\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right),$$

где $\arg\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)=\frac{5\pi}{12}$, и $tg\frac{5\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{\sin\frac{5\pi}{6}}=\frac{1-\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2+\sqrt{3}$.

Это соответствует результату, полученному в формуле (16).

Следовательно, результат произведения или частного не зависит от формы представления комплексных чисел. Выбор той или иной формы для выполнения операции определяется индивидуально решающим, хотя для чисел с «табличными» аргументами проще будет записать тригонометрическую форму и затем выполнять действие.

3) Возведение в шестую степень, следуя целесообразности выполнения той или иной операции (см. табл. 1), необходимо выполнять, представив $1+i$ в

тригонометрической форме. Данная форма числа была получена в преобразованиях (17):

$$1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}).$$

Для возведения в шестую степень используют формулу (12) при $n=6$:

$$(1+i)^6=(\sqrt{2})^6(\cos 6\cdot\frac{\pi}{4}+i\sin 6\cdot\frac{\pi}{4})=8\cdot(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})=8\cdot(0+i(-1))=-8i.$$

4) Извлечение корня выполняется для числа, записанного также в тригонометрической форме. Используют преобразования, полученные в формулах (17):

$$\sqrt{3}-i=2\cdot(\cos(\frac{-\pi}{6})+i\sin(\frac{-\pi}{6})).$$

По формуле (14) для $n=4$ получают

$$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{2(\cos(\frac{-\pi}{6})+i\sin(\frac{-\pi}{6}))}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}\right), \text{ где } k=\overline{0,3}.$$

В данное выражение подставляют необходимые значения k.

При $k=0$

$$z_1=\sqrt[4]{2(\cos(\frac{-\pi}{6})+i\sin(\frac{-\pi}{6}))}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}}{4}\right)==\sqrt[4]{2}\left(\cos(\frac{-\pi}{24})+i\sin(\frac{-\pi}{24})\right).$$

При $k=1$

$$z_2=\sqrt[4]{2(\cos(\frac{-\pi}{6})+i\sin(\frac{-\pi}{6}))}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{24}+i\sin\frac{11\pi}{24}\right).$$

При $k=2$

$$z_3 = \sqrt[4]{2(\cos(\frac{-\pi}{6}) + i\sin(\frac{-\pi}{6}))} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+4\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+4\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2}(\cos\left(\frac{23\pi}{24}) + i\sin(\frac{23\pi}{24}\right).$$

При $k = 3$

$$z_4 = \sqrt[4]{2(\cos(\frac{-\pi}{6}) + i\sin(\frac{-\pi}{6}))} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+6\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+6\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{24} + i\sin\frac{35\pi}{24}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos 1\frac{11}{24}\pi + i\sin 1\frac{11}{24}\pi\right).$$

Полученные корни z_1, z_2, z_3, z_4 (рис. 12) являются вершинами правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса $r = \sqrt[4]{2}$ с центром в начале координат.

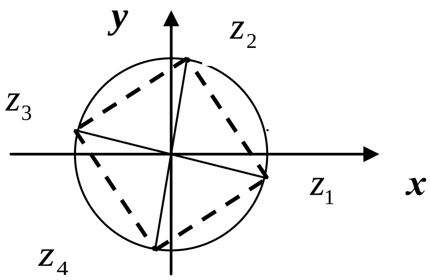


Рис. 12

Задача 7. Найти $\sqrt[5]{\dfrac{1-i}{-\sqrt{3}+i}}$.

Решение. Находят модули и аргументы чисел:

$$|1-i| = \sqrt{2}, \qquad \arg(1-i) = \frac{-\pi}{4};$$

$$|-\sqrt{3}+i| = 2, \qquad \arg(-\sqrt{3}+i) = \frac{5\pi}{6}.$$

Записывают в тригонометрической форме:

$$1-i=\sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4})),\qquad -\sqrt{3}+i=2(\cos(\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{5\pi}{6}))\,.$$

Аргументы чисел − табличные, деление выполняют по формуле (11). Извлекают корень по формуле (14):

$$\sqrt[5]{\frac{1-i}{-\sqrt{3}+i}}=\sqrt[5]{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6})\right)}=\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(\frac{-13\pi}{12})+i\sin(\frac{-13\pi}{12})\right)}=$$

$$=\sqrt[10]{\frac{1}{2}}\left(\cos(\frac{\frac{11\pi}{12}+2\pi k}{5})+i\sin(\frac{\frac{11\pi}{12}+2\pi k}{5})\right),\ k=\overline{0,4}\,.$$

Главное значение аргумента $\frac{-13\pi}{12}$ заменяют на $\frac{11\pi}{12}$, что соответствует тому же главному значению аргумента и удовлетворяет его ограничениям $(-\pi<\varphi\le\pi)$.

В итоге получают все пять значений корня:

$k=0$ $\qquad z_1=\sqrt[10]{\frac{1}{2}}\left(\cos(\frac{11\pi}{60})+i\sin(\frac{11\pi}{60})\right);$

$k=1$ $\qquad z_2=\sqrt[10]{\frac{1}{2}}\left(\cos(\frac{7\pi}{12})+i\sin(\frac{7\pi}{12})\right);$

$k=2$ $\qquad z_3=\sqrt[10]{\frac{1}{2}}\left(\cos(\frac{59\pi}{60})+i\sin(\frac{59\pi}{60})\right);$

$k=3$ $\qquad z_4=\sqrt[10]{\frac{1}{2}}\left(\cos(\frac{83\pi}{60})+i\sin(\frac{83\pi}{60})\right);$

$k=4$ $\qquad z_5=\sqrt[10]{\frac{1}{2}}\left(\cos(\frac{107\pi}{60})+i\sin(\frac{107\pi}{60})\right).$

Задача 8. Решить уравнения: а) $z^4-1=0$; $\qquad$ б) $z^6-4z^3+8=0$.

Решение. а) Задача равносильна задаче нахождения всех значений корня четвертой степени из числа $z=1$. Определяют модуль и аргумент числа: $r=1,\ \varphi=0$. Представляют число в тригонометрической форме $z=1=1(\cos 0+i\sin 0)$.

По формуле (14) при $k=\overline{0,3}$ находят все значения корня:

$$\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1(\cos 0+i\sin 0)}=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{2\pi k}{4}+i\sin\frac{2\pi k}{4}\right)=\left(\cos\frac{2\pi k}{4}+i\sin\frac{2\pi k}{4}\right).$$

Выписывают все полученные значения:

$k=0$ $\qquad z_1=(\cos 0+i\sin 0)=1;$

$k=1$ $\qquad z_2=(\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4})=1\cdot i=i;$

$k=2$ $\qquad z_3=(\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4})=1\cdot(-1)=-1;$

$k=3$ $\qquad z_4=(\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4})=1\cdot(-i)=-i.$

Полученные корни $1,\ i,\ -1,\ -i$ являются вершинами квадрата (рис. 13), вписанного в окружность радиуса $R=\sqrt[4]{r}=1$.

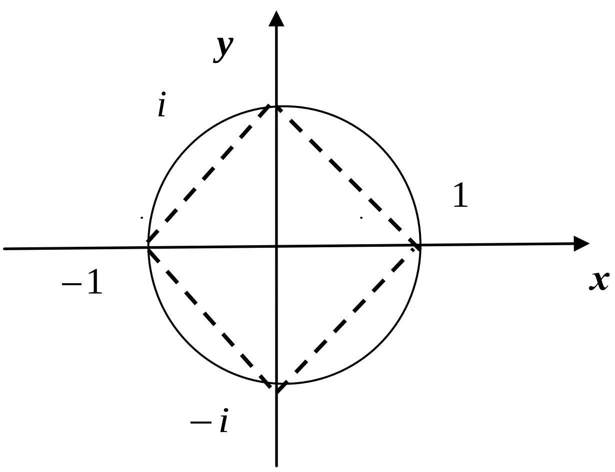


Рис. 13

б) С помощью подстановки $z^3 = t$ сводят данное уравнение к квадратному: $t^2 - 4t + 8 = 0$. Решив его, получают $z^3 = t = 2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm 2i$. Остается найти $\sqrt[3]{2+2i}$ и $\sqrt[3]{2-2i}$.

Находят модули и аргументы комплексных чисел:

$$|2+2i| = \sqrt{8} = \sqrt{2^3}; \quad \arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}; \quad |2-2i| = \sqrt{8} = \sqrt{2^3}; \quad \arg(2-2i) = -\frac{\pi}{4}.$$

По формуле (14) получают

$$z_{1,2,3} = \sqrt[3]{2+2i} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3})\right),$$

$$z_{4,5,6} = \sqrt[3]{2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}\left(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4})\right)} = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\frac{-\pi}{4} + 2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{-\pi}{4} + 2k\pi}{3})\right),$$

$$k = \overline{0, 2}.$$

Последовательно подставляя $k = 0, 1, 2$, получают все корни данного уравнения:

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}); \qquad z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4});$$

$$z_3 = \sqrt{2}(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}); \qquad z_4 = \sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{12}) + i\sin(\frac{-\pi}{12}));$$

$$z_5 = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}); \qquad z_6 = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}).$$

1.3. Множества и области на комплексной плоскости. Кривые на комплексной плоскости

Окрестностью точки z_0 называется множество точек *z*, удаленных от заданной точки z_0 на расстояние, меньшее, чем заданное число ε. Окрестность обозначается $O_\varepsilon(z_0)$.

Геометрическая интерпретация - круг с центром в точке z_0 и радиусом ε, где ε - любое положительное число: $|z - z_0| < \varepsilon$.

Проколотой окрестностью точки z_0 называется множество точек *z*, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ или $O_\varepsilon(z_0) \setminus z_0$.

Точка z_0 называется **внутренней точкой** множества *M*, если она принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью, т.е. если $z_0 \in M$ и $\exists \varepsilon > 0$, что $O_\varepsilon(z_0) \subset M$.

Множество называется **открытым**, если все его точки внутренние.

Точка z_0 называется **граничной точкой** множества *M*, если в любой ее окрестности есть точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие *M*.

Совокупность всех граничных точек множества называется его **границей.**

Множество вместе со своей границей называется **замкнутым.**

Область *D* называется **ограниченной**, если все ее точки принадлежат некоторому кругу радиуса *R*. В противном случае область *D* называется **неограниченной**.

Направление обхода границы называется **положительным**, если область, ограниченная контуром, при обходе расположена слева.

Открытое множество называется **связным**, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству. Связное открытое множество называется **областью**.

Например, связное множество (рис. 14 а, б).

а б

Рис. 14

Замкнутой областью называется область с присоединенной границей.

Область D называется **односвязной,** если ее граница состоит из одной замкнутой самонепересекающейся линии, и **многосвязной,** если граница области состоит из нескольких замкнутых непересекающихся и несамопересекающихся линий (точек, дуг). Например, область А (на рис. 15) является односвязной ($n=1$), а область В является семисвязной (по числу линий $n=7$).

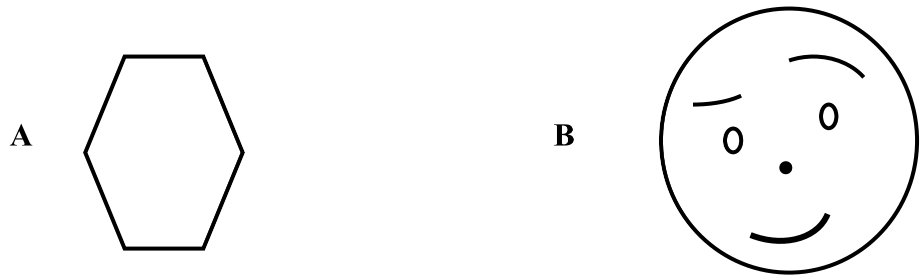


Рис. 15

Для окрестности точки z_0 (или $|z-z_0|<\varepsilon$) $n=1$; для проколотой окрестности точки z_0 ($0<|z-z_0|<\varepsilon$) $n=2$.

Кривую на комплексной плоскости параметрически задают одним уравнением $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ или $x=x(t);\quad y=y(t)$ при $\alpha\le t\le\beta$.

Исключением параметра t из этих уравнений получают уравнение кривой в неявном виде: $F(x,y)=0.$ Данное уравнение кривой на плоскости можно записать в комплексной форме, выражая x и y через z:

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\qquad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Получают $\quad F\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=0.$

Кривая $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ называется **замкнутой,** если $z(\alpha) = z(\beta)$. Расположенная на кривой точка z_0 считается **кратной**, если существуют по крайней мере два значения параметра t_1 и t_2 ($\alpha \le t_1 \le t_2 \le \beta$), такие что $z(t_1) = z(t_2) = z_0$. При этом хотя бы одно из чисел t_1, t_2 отлично от α и от β.

Задача 9. Выяснить, какая линия на плоскости задается уравнением

$z = t + it^2$ $(-\infty < t < \infty)$.

Решение. Представив $z = x + iy$, получают $x = t$, $y = t^2$ $(-\infty < t < \infty)$ или $y = x^2$ $(-\infty < t < \infty)$. Значит, данная линия − парабола.

Задача 10. Изобразить на комплексной плоскости z область D, заданную соотношениями: а) $|\operatorname{Re} z| > 2$; б) $1 \le |z - 3 - 3i| \le 2$.

Выяснить ее открытость или замкнутость, а также связность.

Решение. а) Если $\operatorname{Re} z = x$, то по условию $|x| > 2$, т.е. $\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right.$.

Искомая область D представляет собой две полуплоскости, ограниченные прямыми $x = 2$ *и* $x = -2$. Данные прямые параллельны мнимой оси и не включены в область. Область *D* (рис. 16) − открытая, несвязная.

б) Уравнение вида $|z - a| = c$ определяет множество точек *z*, находящихся на расстоянии *c* от точки *a*, т.е. окружность с центром в точке *a* комплексной плоскости и радиусом $R = c$. Неравенство вида $|z - a| \le c$ определяет круг с центром в точке *a* и радиусом $R = c$.

Двойное неравенство $1 \le |z - 3 - 3i| \le 2$ или $1 \le |z - (3 + 3i)| \le 2$ определяет расстояние от точки $(3 + 3i)$ до точки *z*. Его значение находится в пределах от 1 до 2.

Таким образом, искомая область D − это кольцо между двумя окружностями с центром в точке $3+3i$ и радиусами 1 и 2, включая границы. Область D замкнутая и связная (рис. 17).

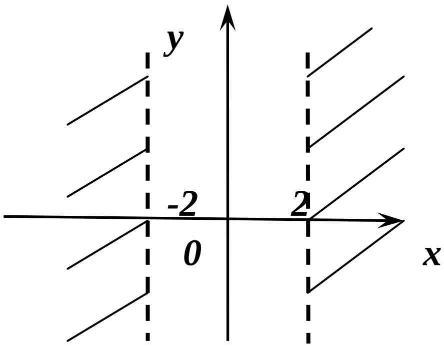


Рис. 16

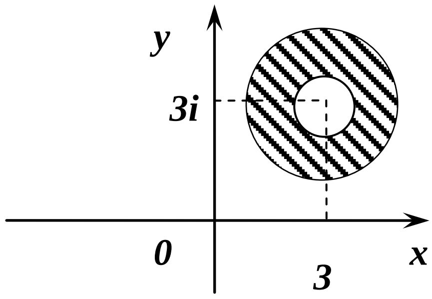


Рис. 17

Задача 11. Определить вид множеств, заданных соотношениями:

а) $\begin{cases} |z-i|<1 \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases}$, б) $\begin{cases} \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) < -\dfrac{1}{2} \\ |\arg z| \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

Решение. а) Пересечение круга с центром в точке $i=(0,1)$ и радиусом 1 (граница не входит) и правой полуплоскости дает искомую область (рис. 18).

б) Раскрывают входящие в систему неравенства. В первом неравенстве $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) < -\dfrac{1}{2}$ преобразуют левую часть: $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Тогда $-\dfrac{y}{x^2+y^2} < -\dfrac{1}{2}$ или $\dfrac{-2y+(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)} < 0$.

Так как знаменатель положительный, получают $x^2+y^2-2y<0$. Данное неравенство определяет круг $x^2+(y-1)^2<1$ или $|z-i|<1$.

Второе неравенство системы $|\arg z| \le \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{или } -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\right)$ соответствует правой полуплоскости (мнимая ось входит).

Таким образом, пересечением является та же самая область (рис. 18), как и в случае (а).

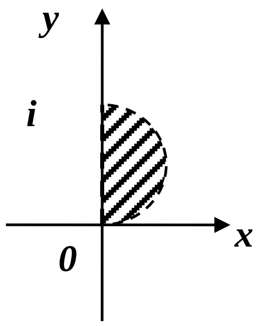


Рис. 18

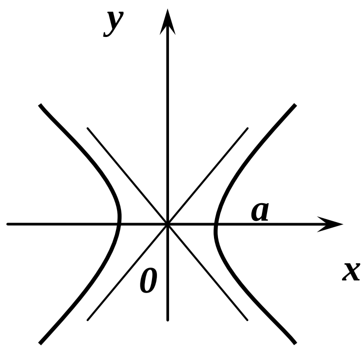


Рис. 19

Задача 12. Изобразить на комплексной плоскости линию, точки которой удовлетворяют условию $\mathrm{Re}(z^2) = \alpha^2$.

Решение. Находят $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Следовательно, $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$. Данное условие $\mathrm{Re}(z^2) = \alpha^2$ равносильно уравнению $x^2 - y^2 = \alpha^2$, которое определяет равностороннюю гиперболу (рис. 19).

Задача 13. Записать в виде неравенств следующие множества точек:

а) сектора, образованного биссектрисными прямыми в I и II координатной четверти;

б) прямоугольника АВСД, если $A\ (1, -2)$, $B\ (1, 2)$, $C\ (-1, 2)$, $Д\ (-1, -2)$.

Решение. а) Для сектора, образованного биссектрисными прямыми в I и II четвертях, границами множества являются лучи $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$.

Следовательно, область, ограниченная этими лучами описывается двойным неравенством $\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4}$ (рис. 20).

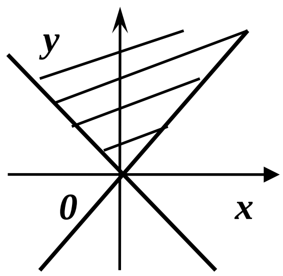


Рис. 20

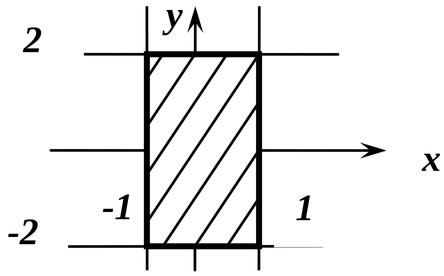


Рис. 21

б) Для прямоугольника *АВСД*, если *А* (1, −2), *В* (1, 2), *С* (−1, 2), *Д* (−1, −2), получают следующие ограничения по переменным x и y: $-1 \le x \le 1$ и $-2 \le y \le 2$. Следовательно, множество точек, ограниченное контуром прямоугольника (рис. 21), определяется системой

$$\begin{cases} -1 \le \operatorname{Re} z \le 1 \\ -2 \le \operatorname{Im} z \le 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |\operatorname{Re} z| \le 1 \\ |\operatorname{Im} z| \le 2 \end{cases}.$$

1.4. Задачи для самостоятельной работы
(по главе 1)

1. Изобразить на комплексной плоскости следующие комплексные и им сопряженные числа:

1) $2+3i$; 2) $1-i$;

3) $\sqrt{2}-\sqrt{3}i$; 4) $3i$;

5) $-2+5i$; 6) πi;

7) -2; 8) $-3-4i$;

9) $-(\sqrt{5}+1)i$.

2. Найти модули и аргументы комплексных чисел:

1) $-1+i$; 2) $1-i$;

3) $(1+i)(\sqrt{3}-i)$; 4) $-3i$;

5) $(2-\sqrt{3})i$; 6) $-2i\left(\cos\frac{4\pi}{7}-i\sin\frac{4\pi}{7}\right)$;

7) 2; 8) $-2+\sqrt{3}$;

9) $ie^{\frac{-\pi}{7}}$; 10) $2-5i$;

11) $1+\sqrt{2}i$; 12) $-3e^{\frac{-\pi i}{5}}$.

3. Сколько модулей соответствует данному комплексному числу и сколько комплексных чисел соответствует данному модулю? Сколько комплексных чисел соответствует данному аргументу, и сколько аргументов соответствует данному комплексному числу?

4. Представить в тригонометрической и показательной форме числа:

1) $7i$; 2) $1+i\sqrt{3}$;

3) $\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$; 4) $-1-i$;

5) bi $(b \neq 0)$; 6) $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$;

7) -5; 8) $a-bi$ $(a \neq 0)$;

9) $-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}$; 10) $3-2i$;

11) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$; 12) $-i(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8})$.

5. Указать на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям. Выяснить открытость или замкнутость, ограниченность или неограниченность, связанность этих областей:

1) $\arg z = \frac{\pi}{6}$; 2) $\sqrt{5} < |z| \leq 5$;

3) $\operatorname{Im} z = \sqrt{3}$; 4) $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$;

5) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0$; 6) $|z-2+i| \leq 4$;

7) $\begin{cases} \frac{-\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 < |z| < 3 \end{cases}$; 8) $|z| + \operatorname{Im} z \ \leq 1$;

9) $\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z < \frac{3}{2} \\ -1 < \operatorname{Im} z \leq 1 \end{cases}$; 10) $\operatorname{Im}\frac{z+1}{z-i} = 0$;

11) $\left|\frac{z}{z+1}\right| < 1$; 12) $|z-i| + |z+i| \geq 4$;

13) $\arg\frac{i-z}{z+i} = 0$; 14) $\operatorname{Re}\frac{z-2i}{z+2i} = 0$;

15) $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| > 2$; 16) $\operatorname{Re} z^2 > 1$;

17) $\operatorname{Im} z^2 < 1$; 18) $|z-2| - |z+2| > 3$.

6. Записать с помощью неравенств следующие открытые множества точек комплексной плоскости:

1) второй квадрант;

2) левая полуплоскость;

3) полоса, состоящая из точек, отстоящих от действительной оси на расстояние, меньшее двух;

4) внутренность эллипса с фокусами в точках $1+i$, $3+i$ и большей полуосью, равной трем;

5) внутренность угла с вершиной в начале координат раствора $\dfrac{\pi}{4}$, симметричного относительно луча, параллельного отрицательной мнимой полуоси.

7. Записать в алгебраической форме число $\bar{z}$, если $z = \left(\dfrac{2-i}{1+i}\right)^3$.

8. Произвести указанные действия над комплексными числами:

1) $\dfrac{1-i}{1+i}$;	2) $\dfrac{2+i}{\sqrt{3}-i}$;
3) $5i(e-\pi i)$;	4) $\sqrt[5]{\sqrt{2}(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6))}$;
5) $\sqrt[6]{-8}$;	6) $(1-i)^5(\sqrt{3}-i)^8$;
7) $\sqrt[4]{1}$;	8) $\sqrt[3]{-4-3i}$;
9) $\sqrt[7]{128}$;	10) $(1+3i)(1-i)^2(5-i)$;
11) $\sqrt[3]{-1}$;	12) $(-4+3i)^5$.

9. Найти: $\operatorname{Im}(2-i)^4$; $\operatorname{Re}(1+i)^6$.

10. Найти $\operatorname{Im}\bar{z}$, если $z = \dfrac{2i}{1-2i}$.

11. Найти $\operatorname{Re}\bar{z}$, если $z = \left(\dfrac{2-i}{1+i}\right)^3$.

12. Найти $Arg\ f(z)$, если $z = re^{i\varphi}$:

1) $f(z) = z^2$; 2) $f(z) = z^3$;

3) $f(z) = \sqrt[3]{z+1}$.

13. Доказать, что $|\overline{z}| = |z|$, $\arg \overline{z} = -\arg z$.

14. Доказать неравенства:

1) $\left|\dfrac{z}{|z|-1}\right| \le |\arg z|$; 2) $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$.

15. Доказать справедливость следующих равенств:

1) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$; 2) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$;

3) $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$.

16. Доказать тождество $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ и выяснить его геометрический смысл.

17. Даны три вершины параллелограмма z_1, z_2, z_3. Найти четвертую вершину z_4, противолежащую вершине z_2.

18. Существуют ли два неравных комплексных числа, каждое из которых равно квадрату другого?

19. Найти угол, на который надо повернуть вектор $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2i}$, чтобы получить вектор $-5 + i$.

20. Выяснить, какая линия задается уравнением $\left|\dfrac{z-1}{z+3}\right| = 1$.

21. Определить, какие линии заданы указанными уравнениями:

1) $z = it$, $(|t| \le 1)$; 2) $z = i\sin t$, $(0 \le t \le 2\pi)$;

3) $z = t^2 + it^4, -\infty < t < \infty$; 4) $z = t + \dfrac{i}{t}, -\infty < t < 0$;

5) $z = t + i\sqrt{1-t^2}, -\infty \le t \le 1$; 6) $z = -t + i\sqrt{1-t^2}, -\infty \le t \le 0$.

22. Найти и изобразить на чертеже линии, заданные указанными уравнениями (неравенствами):

1) $|z-2| + |z+2| = 4$; 2) $z^2 + \overline{z^2} = 1$;

3) $\left|\dfrac{z-3}{z+1}\right| > 2$; 4) $|z-2| - |z+2| = 1$;

5) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{k} \quad (k > 0)$; 6) $|z-2| + |z+2| = 1$.

23. Записать в комплексной форме уравнения прямой и окружности.

24. Решить уравнение $z^4 - 1 + i = 0$.

25. Решить уравнение $z^3 - i = 0$.

26. Сколько корней уравнения $z^6 + 1 = 0$ расположены в верхней полуплоскости? Выписать эти корни.

27. Решить уравнения:

1) $z^8 - 2\sqrt{3}z^4 + 4 = 0$;

2) $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$;

3) $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$.

28. «Очевидно, что $i^{21} = \left(i^4\right)^{\frac{21}{4}} = 1^{\frac{21}{4}} = 1$. С другой стороны, $i^{21} = \left(i^4\right)^5 i = 1^5 \cdot i = i$. Следовательно, $i = 1$». В чем ошибка?

29. «Пусть требуется решить уравнение $\sqrt{6-x} + xi = (x-6) + 7i$ в действительных числах. Так как для равенства двух комплексных чисел необходимо равенство их мнимых частей, то заключаем, что $x = 7$. Но данное

уравнение можно, очевидно, привести к виду $6-x=(7-x)i-i\sqrt{6-x}$. Подставив найденное значение *x*, получим $i=1$». Найдите ошибку.

30. Решить уравнение $\cos x+i\sin x=\sin x+i\cos x$.

31. Центр квадрата находится в точке $z_0=1+i$, а одна из вершин - в точке $z_1=1-i$. В каких точках находятся остальные вершины квадрата?

32. Используя формулу Муавра, найти выражения для $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ через тригонометрические функции угла φ.

ГЛАВА 2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2.1. Определение функции комплексного переменного

Пусть даны два множества комплексных чисел D и G. На множестве D можно **задать функцию** $f(z)$, если каждой точке z этого множества D поставить в соответствие комплексное число w множества G (рис. 22).

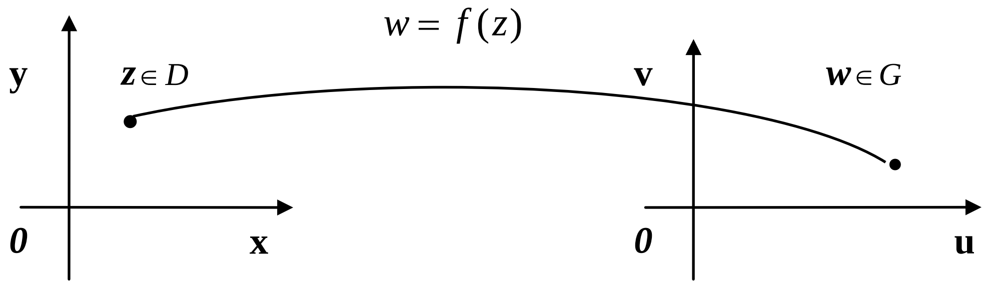


Рис. 22

Функция $w = f(z)$ каждой точке $z \in D$ комплексной плоскости (x, y) ставит в соответствие некоторую точку $w \in G$ плоскости (u, v). Точку w называют **образом** точки z, а точку z – **прообразом** точки w при отображении $w = f(z)$.

Комплексное число z можно представить в алгебраической форме $z = x + iy$, а комплексное число $w = f(z)$ можно рассматривать как $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где пара функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ есть функции переменных x и y. Функцию $u(x, y)$ называют **действительной**, а $v(x, y)$ – **мнимой** частью $f(z)$.

$$u(x, y) = \operatorname{Re} z \quad , \qquad v(x, y) = \operatorname{Im} z .$$

Множество D называется **областью определения** функции w. Область определения D функции w может быть открытой или замкнутой.

Область D называется **ограниченной,** если все ее точки принадлежат некоторому кругу радиуса R. В противном случае область D называется **неограниченной**.

Если каждому значению $z \in D$ соответствует одно значение w, то функция называется **однозначной**, в противном случае − **многозначной**.

Если любое значение функции $w \in G$ является образом только одной точки аргумента $z \in D$, то отображение называется **однолистным** в области D, т.е. для любых точек z_1 и z_2 из области D равенство $f(z_1) = f(z_2)$ выполняется тогда и только тогда, когда $z_1 = z_2$. В противном случае отображение называется **неоднолистным.**

Из определения следует, что однолистное отображение является **взаимнооднозначным** отображением.

Простейшими взаимнооднозначными на всей комплексной плоскости отображениями являются отображения $w = z$, $w = \bar{z}$. В первом случае комплексная плоскость или любая ее область отображается на себя, во втором верхняя полуплоскость отображается на нижнюю, нижняя на верхнюю.

Пример неоднолистности: $w = z^n$.

Задача 14. Выделить действительную и мнимую часть данной функции $f(z) = \dfrac{1}{z + 2i}$.

Решение. Выполняют преобразования:

$$f(z) = \frac{1}{z + 2i} = \frac{1}{x + i(y+2)} = \frac{x - i(y+2)}{x^2 + (y+2)^2} = \frac{x}{x^2 + (y+2)^2} - i\frac{y+2}{x^2 + (y+2)^2},$$

Получают: $\operatorname{Re} f(z) = \dfrac{x}{x^2 + (y+2)^2}$, $\operatorname{Im} f(z) = \dfrac{-(y+2)}{x^2 + (y+2)^2}$.

Задача 15. Найти $\operatorname{Re} f(z)$, если: а) $f(z) = \overline{iz} + 2z^2$; б) $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{i} + \dfrac{i}{\bar{z}}$.

Решение. Для решения используют алгебраическую форму записи комплексного числа $z = x + iy$ и ему сопряженного $\overline{z} = x - iy$. Выполняют необходимые преобразования:

а) $f(z) = \overline{i(x+iy)} + 2(x+iy)^2 = \overline{-y+ix} + 2(x^2 - y^2 + i2xy) =$

$= -y - ix + 2x^2 - 2y^2 + i4xy = (2x^2 - 2y^2 - y) + i(4xy - x)$.

Следовательно, $\operatorname{Re} f(z) = 2x^2 - 2y^2 - y$;

б) $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{i} + \dfrac{i}{\overline{z}} = \dfrac{x-iy}{i} + \dfrac{i}{x-iy} = \dfrac{(x-iy)i}{i^2} + \dfrac{i(x+iy)}{(x-iy)(x+iy)} = \dfrac{ix+y}{-1} + \dfrac{ix-y}{x^2+y^2} =$

$= (-y - \dfrac{y}{x^2+y^2}) + i(x + \dfrac{x}{x^2+y^2})$.

Следовательно, $\operatorname{Re} f(z) = -y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Задача 16. Найти образ точки $z = 1 + i$ при отображении $w = 2\overline{z} + i$.

Решение. Подставляют значение z в формулу функции $w = 2\overline{z} + i = 2(\overline{1+i}) + i = 2(1-i) + i = 2 - i$.

Задача 17. Найти образ линии $y = 2x + 3;\ -\infty < x < \infty$ при отображении $w = 3z + i$.

Решение. Выделяют действительную и мнимую части функции w: $w = 3(x+iy) + i = 3x + i(3y+1)$, т.е. $u = 3x$; $v = 3y + 1$.

Когда точка z проходит на плоскости (x, y) линию $y = 2x + 3$, соответствующая ей точка w проходит на своей плоскости (u, v) линию $u = 3x$, $v = 3(2x+3) + 1$, т.е. $u = 3x$, $v = 6x + 10$, $(-\infty < x < \infty)$.

Исключая параметр x, получают уравнение прямой $v = 2u + 10$, $(-\infty < u < \infty)$ на плоскости (u, v). Отображение является однолистным.

Задача 18. Какую линию в комплексной области задают соотношения:

а) $z = -2 - it, \quad -1 \le t \le 2$; б) $z = a(\cos t + i\sin t), \ \dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{3\pi}{2}, \quad a > 0$?

Решение. а) По условию $x = -2, \quad y = -t$ при $-1 \le t \le 2$ или $x = -2$, $-2 \le y \le 1$. Следовательно, точка z проходит (рис. 23) отрезок прямой $x = -2$ в пределах $-2 \le y \le 1$.

б) По условию $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases}$, $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{3\pi}{2}$. Эти параметрические уравнения левой полуокружности с центром в начале координат радиуса a (рис. 24).

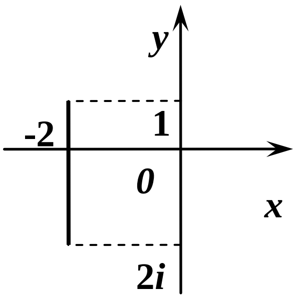


Рис. 23

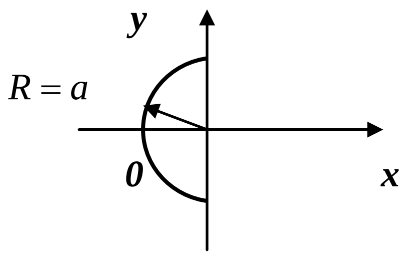


Рис. 24

Задача 19. Установить, на какие линии плоскости w с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ отображаются следующие линии плоскости z:

а) $|z| = R$; б) $y = x$; в) $\arg z = \dfrac{-\pi}{6}$.

Решение. а) Уравнение $|z| = R$ описывает окружность радиуса R с центром в начале координат плоскости (x, y). Находят ее образ при заданной функции:

$$|w| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{R}.$$

Это окружность радиуса $\dfrac{1}{R}$ плоскости (u, v).

Значит, функция $w = \frac{1}{z}$ отображает окружность $|z| = R$ на окружность $|w| = \frac{1}{R}$.

б) Преобразуют функцию $w = \frac{1}{z}$. Выделяют действительную и мнимую части функции: $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$.

Следовательно, $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{-y}{x^2+y^2}$. При $y = x$ получают $u = \frac{x}{2x^2}$, $v = \frac{-x}{2x^2}$. Исключив параметр x, получают $v = -u$.

Линия $y = x$ является биссектрисой первого и третьего координатных углов плоскости (x, y). Когда точка z проходит линию $y = x$ на плоскости (x, y), то соответствующая ей точка на плоскости (u, v) проходит линию $v = -u$, что также является биссектрисой, но второго и четвертого координатных углов плоскости (u, v).

Функция $w = \frac{1}{z}$ отображает прямую $y = x$ на прямую $v = -u$, т.е. при данном отображении образом прямой служит прямая. Отображение является однолистным.

в) Преобразуют значение аргумента $-\frac{\pi}{6} = \arg z = \arg(re^{i\varphi}) = \varphi$. При заданной функции $w = \frac{1}{z}$ имеют:

$$\arg w = \arg\frac{1}{z} = \arg z^{-1} = \arg(re^{i\varphi})^{-1} = \arg(\frac{1}{r}e^{-i\varphi}) = -\arg z = -\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

В плоскости плоскости (x, y) уравнение $\arg z = \frac{-\pi}{6}$ определяет луч, выходящий из начала координат и образующий с действительной осью угол, равный $\frac{-\pi}{6}$, а в плоскости (u,v) уравнение $\arg w = \frac{\pi}{6}$ определяет луч, выходящий из начала координат и образующий с действительной осью угол $\frac{\pi}{6}$.

Итак, при отображении $w = \frac{1}{z}$ образом луча $\arg z = \frac{-\pi}{6}$ служит луч $\arg w = \frac{\pi}{6}$.

2.2. Элементарные функции комплексного переменного. Основные понятия

Линейная функция: $w = az + b, \quad a, b \in C, \quad a \neq 0$.

Показательная функция: $w = e^{Z}$,

$$e^{Z} = e^{X+IY} = e^{X}(\cos y + i \sin y). \tag{18}$$

Значение функции: $e^{Z} \in C$, $(e^{Z} \neq 0)$. Показательная функция $w = e^{Z}$ обладает следующими свойствами:

а) $e^{Z+2\pi i} = e^{Z}$.

Показательная функция e^{Z} имеет период $2\pi i$:

$$e^{Z+2\pi i} = e^{Z}, \qquad e^{Z+2\pi Ki} = e^{Z}, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots; \tag{19}$$

б) $e^{Z_1} \cdot e^{Z_2} = e^{Z_1+Z_2}$. (20)

Следствия: $\dfrac{e^{Z_1}}{e^{Z_2}} = e^{Z_1-Z_2}, \quad (e^{Z})^{n} = e^{Zn}$, где z_1 и z_2 − любые комплексные числа.

Логарифмическая функция: $w = Ln\, z$.

Функция является многозначной ($z \neq 0$) и определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \qquad z \neq 0, \ k \in z. \tag{21}$$

Значение функции, которое получается при $k = 0$, называется **главным значением логарифма** и обозначается как $\ln z = \ln|z| + i \arg z$. (22)

Логарифмическая функция $\mathrm{Ln}\, z$ обладает следующими свойствами:

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2, \qquad \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2, \tag{23}$$

$$\mathrm{Ln}\, z^{n} = n\,\mathrm{Ln}\, z + 2\pi k i, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad \mathrm{Ln}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\mathrm{Ln}\, z.$$

Общая показательная функция: $w = a^z$.

Функция многозначная и для любого комплексного числа a $(a \neq 0,\ a \neq 1)$ определяется как $a^z = e^{zLna}$. (24)

Главное значение этой функции $a^z = e^{z \ln a}$.

Общая степенная функция: $w = z^a$.

Функция многозначная и для любого комплексного числа a, $z \neq 0$ определяется как $z^a = e^{aLnz}$ (25)

Главное значение этой функции $z^a = e^{a \ln z}$.

Основные тригонометрические функции:

1. Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ выражаются через показательную функцию:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (26)$$

Тригонометрические функции обладают следующими свойствами:

а) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2\pi) = \sin z$;

б) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$, (27)

$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2$;

в) $\sin z$ − нечетная функция,

$\cos z$ − четная функция.

2. Функции $tg\ z$ и $ctg\ z$ определяются равенствами:

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}. \qquad (28)$$

Для тригонометрических функций комплексного переменного справедливы все известные формулы тригонометрии.

3. Гиперболические функции $sh\,z,\ ch\,z,\ th\,z,\ cth\,z$ определяются равенствами:

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \qquad shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2};$$

$$thz = \frac{shz}{chz}; \qquad cthz = \frac{chz}{shz}. \tag{29}$$

Из формул (26) и (29) получают следующие формулы, устанавливающие связь между показательной, гиперболическими и тригонометрическими функциями:

$$ch\,iz = \cos z; \qquad sh\,iz = i \cdot \sin z; \qquad \cos\,iz = ch\,z;$$

$$\sin\,iz = i \cdot sh\,z; \qquad e^z = chz + shz. \tag{30}$$

Гиперболические функции обладают следующими свойствами:

а) $ch\,(z + 2\pi i) = ch\,z, \quad sh\,(z + 2\pi i) = sh\,z;$ (31)

б) $ch(z_1 \pm z_2) = chz_1 \cdot chz_2 \pm shz_1 \cdot shz_2,$

$sh(z_1 \pm z_2) = shz_1 \cdot chz_2 \pm chz_1 \cdot shz_2;$ (32)

в) $sh\,z$ - нечетная функция,

$ch\,z$ - четная функция.

4. Обратные тригонометрические функции $\mathrm{Arcsin}\,z$, $\mathrm{Arccos}\,z$, $\mathrm{Arctg}\,z$, $\mathrm{Arcctg}\,z$ определяются как обратные к функциям $\sin z$, $\cos z$, $tg\,z$, $ctg\,z$ соответственно. Так, если $z = \cos w$, то w называют арккосинусом числа z и обозначают $w = \mathrm{Arccos}\,z$. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую функцию по формулам:

$$\mathrm{Arcsin}\,z = -i\,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}); \qquad \mathrm{Arccos}\,z = -i\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$\mathrm{Arctg}\,z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz}; \qquad \mathrm{Arcctg}\,z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z - i}{z + i}. \tag{33}$$

Значения, соответствующие главному значению логарифма, обозначаются теми же символами со строчной буквы: $\arcsin z$, $\arccos z$, $arctg\ z$, $arcctg\ z$. Они называются **главными значениями.**

5. Обратные гиперболические функции $Arsh\,z$, $Arch\,z$, $Arth\,z$, $Arcth$ выражаются через логарифмическую функцию по формулам:

$$Arsh\ z = Ln(z+\sqrt{z^2+1}), \qquad Arch\ z = Ln(z+\sqrt{z^2-1}),$$

$$Arth\ z = \frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), z \neq \pm 1, \qquad Arcth = \frac{1}{2}Ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right). \qquad (34)$$

Логарифмическая, общая показательная, общая степенная, обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции являются бесконечными, многозначными функциями в силу бесконечной значности логарифма и двузначности комплексного корня, например $\sqrt{z^2-1}$ в формулах (34).

Задача 20. Вычислить значение $e^{1+\frac{i\pi}{2}}$, найти модуль, действительную и мнимую части.

Решение. По формуле (18) находят $e^{1+\frac{i\pi}{2}} = e\cdot\left(\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})\right) = ei$, отсюда $\mathrm{Re}\left(e^{1+\frac{i\pi}{2}}\right)=0$, $\mathrm{Im}\left(e^{1+\frac{i\pi}{2}}\right)=e$.

Так как $|e^z| = \sqrt{(e^x\cos y)^2+(e^x\sin y)^2} = e^x\sqrt{\cos^2 y+\sin^2 y} = e^x$, то $|e^z| = e^x$.

Для данной функции в примере $\left|e^{1+\frac{i\pi}{2}}\right| = e.$

Задача 21. Вычислить: 1) $Ln(1-i)$; 2) $Ln(-5+4i)$;

3) 6^{i+1}; 4) z^{3+i};

5) $ch(1+i)$; 6) $Arc\sin 2$.

Решение. 1) Находят модуль и аргумент числа $(1-i)$:

$$|1-i|=\sqrt{2}, \quad \arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}.$$

В итоге по формуле (21)получают

$$Ln(1-i)=\ln\sqrt{2}+i(\frac{-\pi}{4}+2\pi k)=\frac{1}{2}\ln 2+i(\frac{-\pi}{4}+2\pi k), \quad k\in z.$$

2) Аналогично примеру (1) находят модуль и аргумент числа $|-5+4i|=\sqrt{41},\ \arg(-5+4i)=\pi-arctg\frac{4}{5}$ и подставляют в формулу (21):

$$Ln(-5+4i)=\ln\sqrt{41}+i(\pi-arctg\frac{4}{5}).$$

3) Для вычисления 6^{i+1} в формулу (24) подставляют $a=6,\ z=i+1$:

$$6^{i+1}=e^{(i+1)Ln6}=e^{(i+1)(\ln 6+i2\pi k)}=e^{-2\pi k+\ln 6+i(\ln 6+2\pi k)}=$$

$$=e^{(\ln 6-2\pi k)+i\ln 6}=e^{(\ln 6-2\pi k)}\cdot(\cos\ln 6+i\sin\ln 6),\ k\in z.$$

4) По формуле (25) при $a=3+i$ получают

$$z^{3+i}=e^{(3+i)Lnz}=e^{(3+i)(\ln|z|+i(\arg z+2\pi k))}=$$

$$=e^{3\ln|z|-(\arg z+2\pi k)+i(\ln|z|+3(\arg z+2\pi k))}=e^{3\ln|z|-(\arg z+2\pi k)+i(\ln|z|+3\arg z)}=$$

$$=e^{3\ln|z|-\arg z-2\pi k}\cdot(\cos(\ln|z|+3\arg z)+i\sin(\ln|z|+3\arg z)),\ k\in z.$$

5) В данном случае для функции $ch\,z$ лучше воспользоваться не определением (29), а использовать формулы преобразования (30) и (32):

$$ch(1+i)=ch1\cdot chi+sh1\cdot shi=ch1\cdot\cos 1+i\cdot sh1\cdot\sin 1.$$

6) По формуле (33) при $z=2$ записывают:

$$Arc\sin 2=-i\cdot Ln(2i\pm\sqrt{1-4})=-i\cdot Ln((2\pm\sqrt{3})i).$$

Так как $\left|2\pm\sqrt{3}\right| = 2\pm\sqrt{3}$, $\arg(2\pm\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{2}$, то в итоге получают

$$Arc\sin 2 = -i\cdot Ln((2\pm\sqrt{3})i) = -i\left(\ln\left|2\pm\sqrt{3}\right| + i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)\right) =$$

$$= (4k+1)\frac{\pi}{2} - i\ln(2+\sqrt{3}), \quad k\in z.$$

Задача 22. Показать, что выражение i^i принимает только действительные значения.

Решение. Используя формулу (24), записывают

$$i^i = e^{iLni} = e^{i\cdot(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2}+2\pi k))} = e^{i\cdot i\cdot(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}.$$

Полученное значение есть действительное число при любом $k\in z$.

Задача 23. Найти действительную и мнимую части функций:

1) e^{3zi-2}; 2) $\cos z^2$.

Решение. 1) Полагая $z = x+iy$, выделяют действительную и мнимую часть степени $3zi-2 = 3(x+iy)i-2 = -(3y+2)+i3x$. По формуле (18) находят значение

$$e^{3zi-2} = e^{-(3y+2)+i3x} = e^{-(3y+2)}\cdot(\cos 3x + i\sin 3x).$$

В итоге получают: $\mathrm{Re}\, e^{3zi-2} = e^{-(3y+2)}\cdot\cos 3x$,

$$\mathrm{Im} e^{3zi-2} = e^{-(3y+2)}\cdot\sin 3x.$$

2) Так как $z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2)+i2xy$, то по формуле (9)

$$\cos z^2 = \cos((x^2-y^2)+i2xy) = \cos(x^2-y^2)\cdot\cos(i2xy) - \sin(x^2-y^2)\cdot\sin(i2xy) =$$

$$= \cos(x^2-y^2)\cdot ch2xy - i\sin(x^2-y^2)\cdot sh2xy.$$

Отсюда находят:

$$\mathrm{Re}(\cos z^2) = \cos(x^2-y^2)\cdot ch2xy, \qquad \mathrm{Im}(\cos z^2) = -\sin(x^2-y^2)\cdot sh2xy.$$

Задача 24. Решить уравнение $\sin z = 3$.

Решение. Следует найти величину $z = Arc\sin 3$.

По формуле (33):

$z = Arc\sin(3) = -iLn\left(i3 + \sqrt{-8}\right)$.

Так как $\sqrt{-8} = \pm\sqrt{8}i$, то получают $z = -iLn\left(3i \pm i\sqrt{8}\right)$ или $z = -i(Ln\left(3 \pm \sqrt{8}\right) \cdot i)$.

Находят модуль и аргумент чисел $z = \left(3 \pm \sqrt{8}\right) \cdot i$:

$\left|(3 \pm \sqrt{8}) \cdot i\right| = 3 \pm \sqrt{8}$, $\quad \arg\left((3 \pm \sqrt{8})i\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Далее по формуле (21):

$-iLn\left(3i \pm i\sqrt{8}\right) = -i(\ln(3 \pm \sqrt{8}) + \dfrac{\pi}{2}i + 2\pi ki = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln(3 \pm \sqrt{8})$.

Следовательно, $z = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln(3 \pm \sqrt{8})$, где $k \in z$.

2.3. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Понятие о конформном отображении

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области D комплексного переменного z. Точки z и $z+\Delta z$ принадлежат области D. Вводят обозначения для приращений аргумента $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и самой функции $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$.

Если для функции $w = f(z)$ в точке $z \in D$, отношение $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ имеет конечный предел при $\Delta z \to 0$, то этот предел называется **производной функции** $w = f(z)$ и обозначается как

$$w' = f'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{35}$$

Следует иметь в виду, что этот предел не зависит от способа стремления $\Delta \underline{z}$ к нулю.

Функция *f(z)* называется **дифференцируемой** в точке *z*, если она имеет в этой точке производную.

Это определение полностью совпадает с аналогичным определением производной в действительной области.

Техника дифференцирования комплексного переменного формально не отличается от техники дифференцирования функций действительного переменного. Правила дифференцирования и основная таблица производных сохраняются.

При дифференцировании **многозначной** функции нужно выделить необходимую ее однозначную ветвь и оперировать с нею.

Дифференцируемость функции в параметрической форме вида $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$; $z = x + iy$ устанавливается с помощью **теоремы Коши-Римана.**

Теорема. Для того, чтобы функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ была дифференцируема в точке *z*, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке (*x,y*) и удовлетворяли условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad и \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{36}$$

Условия (36) называются **условиями Коши-Римана** или условиями **Даламбера-Эйлера.**

Функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ дифференцируемы как функции двух действительных переменных, функция $f(z) = u + iv$ дифференцируема в точке $z = x + iy$ как функция комплексного переменного *z*.

Переход от явного задания $w = f(z)$ к параметрическому $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ возможен всегда, а обратный переход возможен не всегда.

Если подставить значения x и y по формулам $x = \dfrac{z + \bar{z}_0}{2}$; $y = \dfrac{z - \bar{z}_0}{2i}$, то получим функцию $w = f(z, \bar{z})$. Ее дифференциал равен $dw = w'_z\, dz + w'_{\bar{z}}\, d\bar{z}$.

Так как $w'_z = \dfrac{dw}{dz}$, то $w'_{\bar{z}} = 0$.

Легко увидеть, что последнее условие эквивалентно условиям Коши-Римана:

$$w'_{\bar{z}} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Следовательно, **условие** $w'_{\bar{z}} = 0$ **является условием существования** w'_z.

Однозначная функция $w = f(z)$ называется **аналитической в данной точке z**, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Функция $w = f(z)$ называется **аналитической в области D** или **регулярной** в этой области, если она аналитична в каждой точке $x \in D$.

Свойства аналитических функций. Суперпозиция аналитических функций (сумма, произведение, частное для знаменателя, отличного от нуля) в точке есть функция аналитическая.

Производная аналитической функции вычисляется по формулам:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (37)$$

Для основных элементарных однозначных функций в области их определения имеют место формулы:

$$\begin{aligned} &\left(z^n\right)' = nz^{n-1}, \quad n \in N; \\ &\left(e^z\right)' = e^z; \qquad \left(\ln z\right)' = \frac{1}{z}; \qquad (38) \\ &\left(\sin z\right)' = \cos z, \qquad \left(\cos z\right)' = -\sin z; \\ &\left(sh\, z\right)' = ch\, z, \qquad \left(ch\, z\right)' = sh\, z. \end{aligned}$$

Функция $w = f(x, y)$ называется **гармонической** на области *D,* если она имеет непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \qquad (39)$$

Две гармонические функции, связанные между собой условиями Коши-Римана, называются **сопряженными гармоническими функциями.**

Якобиан отображения для условия взаимной однозначности отображения $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ в области *D* отличен от нуля:

$$J_{(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (40)$$

Тогда внутренняя точка переходит во внутреннюю, граничная − в граничную.

Для функции $w=f(z)$, аналитической в D, в силу условий (36) и (40), получают

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & -\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x}\end{vmatrix}\neq 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\neq 0. \qquad (41)$$

Пользуясь условиями Коши-Римана, можно восстановить аналитическую функцию $w=f(z)$, если известна ее действительная часть $u=u(x,y)$ или мнимая часть $v=v(x,y)$ и, кроме того, задано значение $f(z_0)$ функции в некоторой точке z_0. Для аналитичности $f(z)$ необходимо, чтобы $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были гармоническими функциями (обратное утверждение выполняется не всегда).

Аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ можно восстановить также по одной из следующих формул:

$$f(z)=2\,u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2},\frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)-\overline{C}_0, \qquad (42)$$

$$f(z)=2\,iv\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2},\frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)+\overline{C}_0, \qquad (43)$$

где $\overline{C}_0$ - сопряженное число для $f(z_0)$; $\bar{z}_0$ − сопряженное число для z_0.

Пусть задано аналитическое отображение $w=f(z)$ области D плоскости (x,y) на область G плоскости (u,v), причем $f'(z)\neq 0$. При таком отображении некоторая кривая L перейдет в кривую L*. Касательная к кривой L в точке z_0 перейдет в касательную к кривой L* в соответствующей точке.

Аргумент $f'(z_0)$ **равен углу**, на который нужно повернуть касательную к кривой L в точке z_0, чтобы получить положение касательной к образу этой кривой $L*$ в соответствующей точке, т.е. это угол между первоначальным и отображаемым направлениями:

$$\alpha = \arg f'(z_0). \qquad (44)$$

Модуль $|f'(z_0)|$ равен **коэффициенту деформации** в точке z_0. Это величина искажения масштаба в точке z_0 при отображении функции $w = f(z)$

Очевидно, что при $|f'(z_0)| > 1$ в точке z_0 происходит **растяжение**, а при $|f'(z_0)| < 1|$ – **сжатие.**

Конформным отображением называется отображение, обладающее (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) свойством **сохранения углов** (с сохранением направления отсчета) и свойством **постоянства растяжений.**

Отображение с помощью аналитической функции $w = f(z)$ является конформным во всех точках, где $f'(z) \neq 0$. Благодаря этому аналитические функции находят применение при решении большого числа практических задач. В таких задачах часто требуется найти взаимнооднозначное конформное отображение данной односвязной области D на каноническую область (полуплоскость или круг). В простейших случаях конформное отображение может быть найдено с помощью элементарных функций (существует таблица простейших конформных отображений).

Задача 25. Дана действительная часть аналитической функции $w = f(z)$ $u = e^x \cos y, \quad f(0) = 1$. Найти функцию $f(z)$.

Решение. Используют условия Коши-Римана (36):

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y.$$

Интегрируя последнее уравнение по переменной *x*, находят мнимую часть: $v = e^x \sin y + C(y)$.

Слагаемое $C(y)$ представляет собой постоянную интегрирования (так как интегрирование велось по переменной *x*, переменная $y - const$). Затем дифференцируя это уравнение по переменной *y* и сопоставляя результаты, получают $C'(y) = 0$. Следовательно, $C(y) = C$.

Таким образом $v = e^x \sin y + C$ и $f(z) = u + iv = e^x(\cos y + i \sin y) + C$ или с учетом формулы (4): $f(z) = e^z + C$. Учитывая дополнительное условие $f(0) = 1$, получают $C = 0$. Следовательно, $f(z) = e^z$.

Задача 26. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = -i$ по известной мнимой части $v(x, y) = 3x + 2xy$ и значению $f(z_0) = 2$.

Решение. С учетом формулы (43) в данном примере $z_0 = -i$, $\bar{z}_0 = i$, $C_0 = 2$, $\overline{C_0} = 2$:

$$f(z) = 2\, iv\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) + \overline{C_0} = 2i\left(3\frac{z+i}{2} + 2\frac{z+i}{2} \cdot \frac{z-i}{2i}\right) + 2 = 3iz + z^2.$$

Задача 27. Показать, что функция $u = e^{2x} \cos 2y$ является гармонической.

Решение. Функция называется гармонической в области *D*, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа (39).

Если функция $w = u + iv$ аналитична в области D, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ гармонические в области D.

Находят $\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4e^{2x}\cos 2y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\sin 2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4e^{2x}\cos 2y$.

Составляют сумму $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4e^{2x}\cos 2y + (-4e^{2x}\cos 2y) = 0$.

Итак, функция $u = e^{2x}\cos 2y$ гармоническая.

Задача 28. Установить, что функция $f(z) = |z|$ не является регулярной ни в какой области.

Решение. Преобразуют выражение функции $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Выделяют действительную и мнимую части: $u = \sqrt{x^2 + y^2}$; $v = 0$.

Находят частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Очевидно, что условия Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ нигде не выполняются.

Задача 29. Найти постоянные *a, b, c*, при которых функция $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ будет регулярной (аналитической).

Решение. Выделяют действительную и мнимую часть функции $f(z)$: $u(x, y) = x + ay,\quad v(x, y) = bx + cy$.

Находят частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = c; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = a; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = b.$$

Чтобы функция была регулярной, должны выполняться условия Коши-Римана (36), согласно которым для данной функции $f(z)$ будут иметь место равенства $c=1,\ a=-b$.

При $c=1,\ a=-b$ данная функция будет регулярной. В итоге получают

$$f(z)=x+ay+i(-ax+y)=x(1-ai)+iy(1-ai)=(1-ai)(x+iy)=(1-ai)z.$$

Задача 30. Проверить, что функция $f(x,y)=x^3-3xy^2+2y$ является гармонической.

Решение. Находят частные производные второго порядка. Проверяют условие (39):

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-6xy+2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6x.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x-6x=0$, т.е. функция является гармонической на всей комплексной плоскости.

Задача 31. Найти регулярную функцию $f(z)=u+iv$ по заданной ее мнимой части $v=3+x^2-y^2-\dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$.

Решение. Находят $\dfrac{\partial v}{\partial x}=2x+\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2x-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$. Интегрируя последнее условие по переменной *y*, получают с точностью до $x-const$ значение функции $u=\int(-2x-\dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^2})dy=-2xy+\dfrac{x}{2(x^2+y^2)}+\varphi(x)$.

Слагаемое $\varphi(x)$ находят, дифференцируя это выражение по переменной x и сопоставляя результаты $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2y + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{2(x^2 + y^2)^2} + \varphi'(x) = -2y + \frac{y^2 - x^2}{2(x^2 + y^2)^2} + \varphi'(x);$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2y - \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{2(x^2 + y^2)^2} = -2y + \frac{y^2 - x^2}{2(x^2 + y^2)^2}.$$

Следовательно, $\varphi'(x) = 0$, откуда $\varphi(x) = c$.

Действительная часть искомой функции $u = -2xy + \dfrac{x}{2(x^2 + y^2)} + C$, а искомая функция равна

$$f(z) = -2xy + \frac{x}{2(x^2 + y^2)} + C + i\left(3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}\right).$$

Данное выражение можно также преобразовать через *z*:

$$f(z) = -2xy + \frac{x}{2(x^2 + y^2)} + C + 3i + ix^2 - iy^2 - i\frac{y}{2(x^2 + y^2)} =$$

$$= \frac{x - iy}{2(x^2 + y^2)} + i(x^2 + i2xy - y^2) + C + 3i = \frac{1}{2(x + iy)} + i(x + iy)^2 + C + 3i =$$

$$= \frac{1}{2z} + iz^2 + C + 3i.$$

Задача 32. Доказать аналитичность функции $f(z) = sh\, z$ на всей комплексной плоскости.

Решение. Функцию преобразуют по формулам (30), (32):

$$sh\, z = sh(x + iy) = = sh\, x \cdot ch\, iy + ch\, x \cdot sh\, iy = sh\, x \cdot \cos y + ich\, x \cdot \sin y,$$

где $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = sh\, x \cdot \cos y$;

$\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = ch\, x \cdot \sin y$.

Так как функции дифференцируемые при любых *x* и *y*, находят

$$\frac{\partial u}{\partial x} = chx \cdot \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -shx \cdot \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = shx \cdot \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = chx \cdot \cos y.$$

Выполнение условий (36): $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ $и$ $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ при любых x и y доказывает регулярность функции $sh\,z$ на всей комплексной плоскости.

Задача 33. Задана функция $f(z)=e^{1-2x}\cos 2y-ie^{1-2x}\sin 2y$. Найти ее производную.

Решение. Сначала следует выяснить, что производная существует. Для данной функции $u=e^{1-2x}\cos 2y$, $v=-e^{1-2x}\sin 2y$. Следовательно, частные производные первого порядка имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2e^{1-2x}\cos 2y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{1-2x}\sin 2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2e^{1-2x}\sin 2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-2e^{1-2x}\cos 2y.$$

Условия Коши-Римана (36) выполняются, поэтому данная функция дифференцируема. Ее производную записывают по одной из формул (37):

$$f'(z)=-2e^{1-2x}\cos 2y+i2e^{1-2x}\sin 2y=-\,2e^{1-2x}(\cos 2y-i\sin 2y).$$

Задача 34. Найти угол поворота α направления, выходящего из точки $z_0=1+i$, и коэффициент k для отображения, заданного функцией $w=z^3$.

Решение. Находят производную $w'=3z^2$ и вычисляют ее значение в заданной точке $w'(1+i)=3(1+i)^2=3(1+2i-1)=6i$.

Отсюда $k=|w'(1+i)|=|6i|=6$, $\alpha=\arg w'(1+i)=\arg(6i)=\frac{\pi}{2}$.

Задача 35. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией $w=z^2+2z$?

Решение. Находят $w' = 2z + 2$ для любого z. Отсюда $|w'| = |2z + 2| = 2|z + 1|$.

Сжатие происходит в той части плоскости, для которой $w' < 1$, т.е. $2|z+1| < 1$ или $|z+1| < \dfrac{1}{2}$, а растяжение − в каждой точке плоскости, для которых $w' > 1$ или $|z+1| > \dfrac{1}{2}$.

Итак, при отображении $w = z^2 + 2z$ для точек, лежащих внутри окружности $|z+1| < \dfrac{1}{2}$, происходит сжатие, а для точек, лежащих вне той же окружности, − растяжение.

Задача 36. Найти длину γ спирали, на которую с помощью функции $w = e^z$ отображается отрезок $y = x,\ 0 \le x \le 2\pi$.

Решение. Преобразуют функцию $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ или $w = re^{i\varphi}$, где $r = e^x,\ \varphi = y$.

Таким образом, при отображении $w = e^z$ на линии $y = x,\ 0 \le x \le 2\pi$ получают $r = e^{\varphi},\ 0 \le \varphi \le 2\pi$.

Находят длину γ спирали: $\gamma = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi = \sqrt{2} \int\limits_2^{2\pi} e^{\varphi} d\varphi = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$.

Задача 37. Найти образ прямоугольной сетки плоскости z при отображении $w = e^z$.

Решение. Прямоугольная сетка в плоскости определяется уравнениями:

$$x = c_1 = const, \qquad y = c_2 = const.$$

Выделяют действительную и мнимую части функции $w = e^z$:

$$u = e^x \cos y, \qquad v = e^x \sin y.$$

При $x = c_1$ получают $u = e^{c_1} \cos y$, $v = e^{c_2} \sin y$ или, исключая параметр *y*, $u^2 + v^2 = e^{2c_1}$. Это уравнение семейства концентрических окружностей с центром в начале координат плоскости w радиуса $R = e^{c_1}$.

При $x = 0$ получают $u^2 + v^2 = 1$.

Итак, семейство прямых $x = c_1$, параллельных мнимой оси плоскости z, функция $w = e^z$ отображает на семейство концентрических окружностей $u^2 + v^2 = e^{2c_1}$, причем мнимую ось $x = 0$ отображает на окружность единичного радиуса.

При $y = c_2$ получают $u = e^x \cos c_2$, $v = e^x \sin c_2$ или, исключая параметр x, $\frac{u}{v} = ctg\, c_2$. Это уравнение в плоскости w определяет пучок прямых с центром в начале координат.

При $y = 0$ получают $v = 0$. Следовательно, действительная ось плоскости z отображается на действительную ось плоскости w.

В целом, прямоугольная сетка плоскости z с помощью функции $w = e^z$ отображается на сетку, состоящую из концентрических окружностей и пучка прямых с центрами в начале координат плоскости w, т.е. на полярную сетку плоскости w.

Задача 38. Найти область, на которую функция $w = \sin z$ отображает полуполосу $0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Решение. Данная полуполоса в переменных x и y определяется неравенствами: $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$.

Выделяют действительную и мнимую части функции w:

$$w = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x ch y + i \cos x sh y,$$

где $u = \sin x ch y$; $v = \cos x sh y$.

Известно, что $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Кроме того, при $y > 0$

$$ch y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} > 0, \qquad sh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} > 0.$$

Тогда можно заключить, что $u > 0$ и $v > 0$. Эта система неравенств в плоскости w определяет первую координатную четверть.

Итак, функция $w = \sin z$ отображает полуполосу $0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} z > 0$ на первую координатную четверть $u > 0$, $v > 0$.

2.4. Задачи для самостоятельной работы (по главе 2)

1. Построить на комплексной плоскости образы точек $z_0 = 1 + i$ при отображениях:

1) $w = 3z + 1$; 2) $w = \dfrac{1}{z}$;

3) $w = \dfrac{z}{z+1}$.

2. При отображении $w = 3z + i$ найти образ линии $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

3. Найти уравнения линий плоскости w, на которые функция $w = \dfrac{1}{z}$ отображает следующие линии плоскости z:

1) $x^2 + y^2 = R^2,$; 2) $y = 4$;

3) $\arg z = \dfrac{3\pi}{4}$.

4. Найти уравнение линий плоскости w, на которые функция $w = z^2$ отображает следующие линии плоскости z:

1) $x = 1$; 2) $y = x$;

3) $x^2 + y^2 = 9$; 4) $xy = 1$.

5. Найти образ единичной окружности при отображении $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{\bar{z}}\right)$.

6. Выделить действительную и мнимую часть для каждой функции:

1) $w = z^3$; 2) $w = \overline{z^2} + |z|^2$;

3) $w = \dfrac{1}{\bar{z}}$; 4) $w = z^2 + \dfrac{1}{z^2}$;

5) $w = \dfrac{1+i}{z-i}$; 6) $w = z^2 + 4z - i^5$;

7) $w = \dfrac{z+i}{z-i}$; 8) $w = z^3 - 3zi + 1$;

9) $w = z^3 + i$; 10) $w = i\overline{z} + 2z^2$.

7. Указанные функции от переменных x и y записать как функции переменного $z = x + iy$:

1) $w = y^3 - 3x^2y + y + i(x^3 - 3xy^2 - x)$;

2) $w = \dfrac{y - ix}{x^2 + y^2}$;

3) $w = \dfrac{x^2 + y^2 + 8x + 15}{x^2 + y^2 + 10x + 25} + i\dfrac{2y}{x^2 + y^2 + 10x + 25}$;

4) $w = \dfrac{x^2 + y^2 + x + i(x^2 + y^2 - y)}{x^2 + y^2}$.

8. Вычислить значения функций (записать в алгебраической форме):

1) e^{-4-2i} ; 2) $e^{i\frac{\pi}{2}}$;

3) z^{-1-i} 4) $Ln(-i)$;

5) $Ln(5-4i)$; 6) $Ln\,9$;

7) $Ln\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$; 8) $Ln\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$;

9) $(-3+4i)^{1+i}$; 10) 7^{1+i};

11) $(-1)^i$; 12) $tg(-2i)$;

13) $sh(-1+3i)$; 14) $\sin i$;

15) $Arc\cos 2$; 16) $Arth\,(1-i)$;

17) $Arctg\,(\dfrac{i}{3})$; 18) $Arch\,(-i)$.

9. Решить уравнения:

1) $\cos 2z = 0$; 2) $sh\,z = -1$;

3) $e^{z^2} = i$; 4) $\sin z = i\, sh\, z$;

5) $e^{z+1} = \pi i$; 6) $\ln(z+1) = \pi i$

7) $2ch\, z + sh\, z = i$; 8) $2\cos z + 3 = 0$;

9) $e^{2z} + 2e^{z} - 3 = 0$.

10. Найти ошибку в рассуждениях, приводящих к парадоксу И.Бернулли: $(-z)^2 = z^2$, поэтому $2Ln(-z) = 2Ln\, z$, следовательно, $Ln(-z) = Ln\, z$ (!).

Верна ли формула $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$?

11. Можно ли число 1 возвести в такую степень, чтобы получить 100 ?

12. Определить действительные и мнимые части функций:

1) $\cos z$; 2) $e^{\bar{z}}$;

3) $\sin(2\bar{z})$; 4) $z^2 \sin z$;

5) $Ln\, z$; 6) $ch\, 3z$;

7) e^{-z}; 8) 6^{z^2};

9) $\ln(-2-4i)$; 10) $z + sh\, z$;

11) $\cos(z+2i)$; 12) $i \sin^2 z$.

13. Доказать тождества:

1) $ch^2 z - sh^2 z = 1$; 2) $ch^2 z + sh^2 z = ch 2z$;

3) $sh 2z = 2shz \cdot chz$; 4) $tg 2z = 2tgz(1 - tg^2 z)$;

5) $\cos iz = chz$; 6) $tg\, iz = i \cdot thz$.

14. Для каждой из функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ найти множество точек z, где она принимает:

1) действительные значения;

2) чисто мнимые значения.

15. Найти кривые постоянного модуля и кривые постоянного аргумента для отображений:

1) $w = z^2 - 1$; 2) $w = \sin z$;

3) $w = e^z$.

16. Найти образы координатных осей при отображении:

1) $w = \dfrac{1}{z}$; 2) $w = 2iz$.

17. Найти:

1) образ линии $|z-1| = 1$ для отображения $w = \dfrac{1}{z}$;

2) образ линии $y = 2z$, $-\infty > x < \infty$ для отображения $w = \dfrac{z-3}{z+3}$;

3) образ линии $z^2 + y^2 = 1$ для отображения $w = \dfrac{z+2}{z+i}$;

4) образ прямоугольной сетки плоскости z при отображении $w = \cos z$;

5) образ прямоугольной сетки ($x = c,\ y = c$) плоскости z при отображении $w = z^2 + z$.

18. Выяснить, во что переходит при отображении $w = e^z$:

1) полуполоса $x < 0,\quad 0 < y < \dfrac{\pi}{4}$;

2) прямоугольник $0 < x < 1,\quad \dfrac{-\pi}{6} < y < \dfrac{\pi}{3}$.

19. С помощью условий Коши-Римана доказать регулярность на всей комплексной плоскости следующих функций:

1) $w = z^3 - iz$; 2) $w = 3z \cdot e^{2z}$;

3) $w = \bar{z}$; 4) $w = |z|^2$;

5) $w = z^n$; 6) $w = e^{z^2}$

7) $w = \cos z$ 8) $w = ch\, z$;

9) $w = \sin 3z - i$.

20. Найти области аналитичности функций и их производные:

1) $w = z \operatorname{Re} z$; 2) $w = iz^2 - 4z + 3$;

3) $w = z \cdot e^{-z}$; 4) $w = tg\; z$;

5) $w = \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$; 6) $w = \dfrac{z \cos z}{1 + z^2}$;

7) $w = cth\; z$; 8) $w = \cos(iz)$;

9) $w = Ln\, z^2$; 10) $w = \dfrac{\cos z}{\cos z - \sin z}$.

21. Показать, что функция $w = z \operatorname{Re} z$ является дифференцируемой только в точке $z = 0$. Найти $w'(0)$.

22. Показать, что функции w не являются аналитическими ни в какой области z:

1) $w = \bar{z}$; 2) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$.

23. Найти постоянные *a, b , c*, при которых функция

$f(z) = \cos x(chy + a \cdot shy) + i \sin x(chy + b \cdot shy)$ будет регулярной.

24. Найти области, в которых функция $f(z) = \left|x^2 - y^2\right| + 2i|xy|$ будет регулярной.

25. Показать, что условия Коши-Римана в полярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \cdot \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Проверить выполнение этих условий для функций:

1) $w = \ln z$; 2) $w = \ln^2 z$.

26. Восстановить с точностью до комплексной константы аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по заданной действительной или мнимой части:

1) $u = x^2 - y^2 + 5x - y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$; 2) $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

27. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если:

1) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + xy$, $f(0) = 0$;

2) $\operatorname{Im} f(z) = 2e^x \cos y$, $f(0) = 2(1+i)$;

3) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 2x$, $f(i) = -1 + 2i$;

4) $\operatorname{Im} f(z) = arctg(\dfrac{y}{x})$, $f(-i) = \dfrac{3\pi}{2} + 2i$.

28. Найти гармоническую функцию, сопряженную с заданной:

1) $f(x, y) = x - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$; 2) $f(x, y) = y + \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

29. Определить, в каких точках дифференцируема функция:

1) $f(x, y) = z \operatorname{Re} z$; 2) $f(x, y) = z \operatorname{Im} z$.

30. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = f(z)$ в заданных точках:

1) $w = \dfrac{z+1}{z+i}$ в точке $z_1 = 2i$;

2) $w = 3iz + 2$ в точке $z_1 = 1 + i$;

3) $w = e^z$ в точках $z_1 = i$, $z_2 = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}$;

4) $w = \sin z$ в точках $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 0$.

31. Найти линии равного растяжения и линии равного угла поворота отображений:

1) $w = z^3$; 2) $w = e^z$.

32. Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при отображении с помощью функций:

1) $w = z^3$; 2) $w = e^z$;

3) $w = \dfrac{1}{z}$; 4) $w = \ln z$.

33. Точка $z = x + iy$ описывает отрезок $x = 1$, $-1 \le y \le 1$. Чему равна длина линии, получающейся при отображении этого отрезка с помощью формулы $w = z^2$?

34. Пусть z описывает область, определяемую условиями $1 \le |z| \le 2$, $\frac{-\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$. Найти площадь области, получаемой при отображении $w = z^2$.

35. Вычислить площадь области, в которую преобразуется при отображении $w = e^z$ прямоугольник $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 8$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Волковыский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учеб. пособие / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. − 4-е изд., перераб. − М.: Физматлит, 2002. – 312 с.

2. Бугров, Я. С. Высшая математика: учеб. − Ч. 3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. − 5-е изд. стер. − М.: Дрофа, 2003. – 512 с.

3. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учеб. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. − 2-е изд., перераб. и доп. − М.: Наука, 1981. – 303 с. (Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов вузов).

4. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А.Лаврентьев, Б. В. Шабат. − 6-е изд., стер. - М.: Лань, 2002. – 688 с.