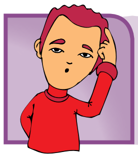
Tema 2. Áreas y volúmenes de los sólidos



Indagación

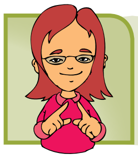
Recordemos que volumen es la medida del espacio ocupado por un cuerpo. El volumen de los cuerpos es el resultado de sus tres dimensiones: ancho, alto y profundidad.

En escultura y pintura, la manera de tratar la tridimensionalidad (tres dimensiones: largo, ancho y alto) de las masas.

En escultura, se le llama volumen a una estructura formal tridimensional, así como también volumen a las partes componentes del todo escultórico, cuando éstas tiene el carácter de masas.

En arquitectura, se le llama volumen al conjunto exterior de un edificio, que encierra el espacio interior.

Escribe en tu cuaderno a cerca del volumen, por ejemplo, cuáles objetos de tu casa tienen volumen. Compara tu trabajo con dos o tres compañeros.



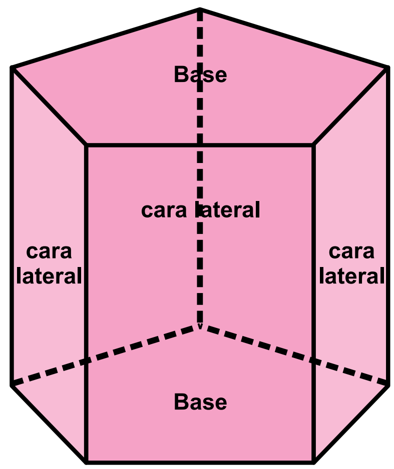
Conceptualización

Prisma

Es un poliedro limitado por dos polígonos congruentes y paralelos llamados bases y varios paralelogramos llamados caras laterales.

Los prismas se clasifican según el polígono que corresponde a sus bases. Así, los prismas pueden ser triangulares, pentagonales, hexagonales, entre otros.

En cualquier prisma se puede calcular el área lateral, el área total y el volumen.



Área Lateral (A_L)

Es la suma de las áreas de las caras laterales y corresponde al producto de la altura del prisma por el perímetro de una de las bases.

$$A_L = h \cdot P_B$$

Área total (A_T)

Es la suma del área de las dos bases y el área lateral del prisma.

$$A_T = A_L + 2A_B$$

Volumen

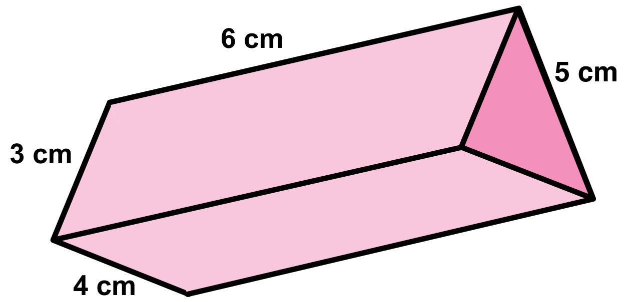
Es el producto del área de la base por la altura del prisma.

$$V = A_B \cdot h$$

Analicemos la situación siguiente:

Una caja prismática de base triangular tiene las dimensiones como muestra la figura.

Queremos conocer su: área lateral, área total y volumen.



Para calcular el área lateral del prisma se calcula el perímetro de la base y se multiplica por la altura.

P= 3 cm + 4 cm + 5 cm = 12 cm

$$A_L = h \cdot P_B$$
$$A_L = 6cm \cdot 12cm = 72cm^2$$

Para calcular el área total del prisma, se calcula el área de la base.

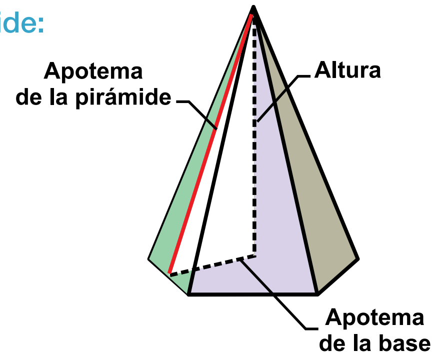
Luego, se suma el área lateral con el doble del área de la base.

$$A_B = \frac{3cm \cdot 4cm}{2} = 6cm^2$$
$$A_T = A_L + 2A_B$$
$$A_T = 72cm^2 + 2 \cdot 6cm^2 = 84cm^2$$

Y para calcular el volumen del prisma, se multiplica el área de la base por la altura:

$$V = A_B \cdot h$$
$$V = 6cm^2 \cdot 6cm = 36cm^3$$

Pirámide:



La pirámide es un poliedro en el cual una de sus caras, llamada *base*, es un polígono y lasotras caras, llamadas *caras laterales*, siempre son triángulos que concurren en un vértice común.

Las pirámides se clasifican según el polígono que corresponde a su base, en pirámide triangular, hexagonal, pentagonal, entre otras. Además, una pirámide puede ser recta u oblicua.

Una pirámide es recta si todas sus caras laterales son triángulos isósceles y es oblicua si alguna de sus caras laterales es un triángulo escaleno.

En cualquier pirámide se puede calcular el área lateral, el área total y el volumen.

Área Lateral (A_L): es la suma de las áreas de las caras laterales. Así, si "n" es el número de lados de la base y "A" es el área de una de las caras laterales, se tiene que:

$$A_L = n.A$$

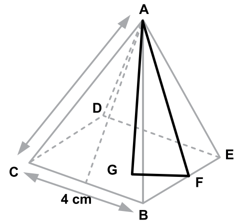
Área total (A_T): es la suma del área de la base y el área lateral.

$$A_T = A_B + A_L$$

Volumen: es la tercera parte del producto del área de la base y la altura de la pirámide.

$$V = \frac{1}{3}(A_B.h)$$

Ejemplo: calcular el área lateral y el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de lado 4 cm. y cuyas caras laterales son triángulos equiláteros.



Para calcular el área lateral se halla el área del triángulo EBA y se multiplica por el número de lados de la base, así:

Primero hallamos la altura del triángulo EBA, aplicando el Teorema de Pitágoras, recordemos que la altura va del ángulo al lado opuesto y es perpendicular al punto medio:

$$h = \sqrt{(4cm)^2 - (2cm)^2} = \sqrt{16cm^2 - 4cm^2} = \sqrt{12cm^2} = 3.46cm$$

Luego, se calcula el área del triángulo EBA:

$$A_\Delta = \frac{4cm \cdot 3,46cm}{2} = \frac{13.84}{2} cm^2 = 6.92cm^2$$

Luego se calcula el área lateral, para ello se multiplica por 4 el área del triángulo EBA, (la pirámide tiene cuatro caras, pues su base es cuadrada):

$$A_L = n \cdot A$$

$$A_L = 4 \cdot (6.92cm^2) = 27.68cm^2$$

Para calcular el volumen, primero debemos hallar la altura de la pirámide, aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$AG = \sqrt{(3.46cm)^2 - (2cm)^2} = \sqrt{11.97cm^2 - 4cm^2} = 2.82cm$$

Por lo tanto el volumen es:

$$V = \frac{1}{3}(A_B \cdot h)$$

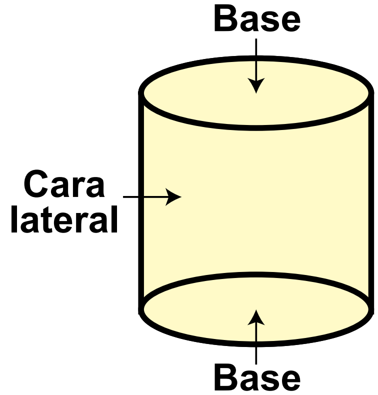
$$V = \frac{1}{3}(16cm^2 \cdot 2.82cm) = \frac{1}{3}(45.12cm^3) = 15.04cm^3$$

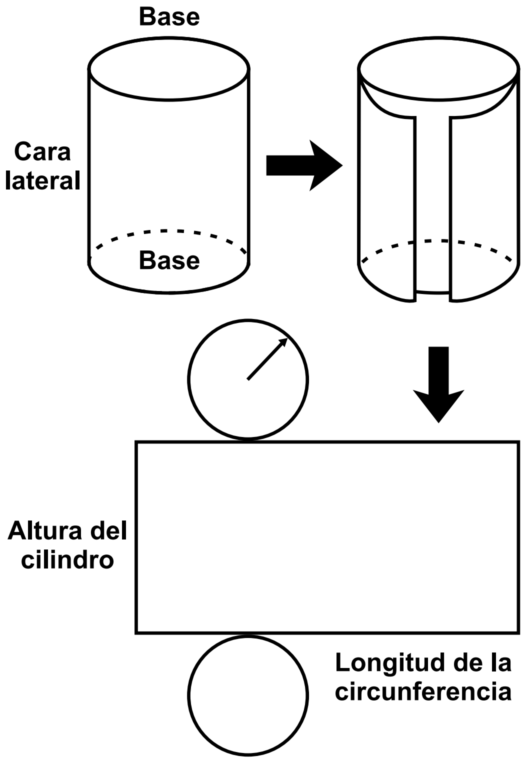
Cuerpos redondos: son sólidos limitados por superficies curvas o por superficies planas y curvas. Los principales cuerpos redondos son: el cilindro, el cono y la esfera.

Cilindro

Es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y dos caras planas circulares.

La superficie curva que conforma el cilindro se denomina *cara lateral* y las dos caras circulares se denominan *bases*.





Al efectuar el desarrollo de un cilindro se puede observar que la cara lateral pertenece a un rectángulo cuyo largo es la longitud de la circunferencia que corresponde a la base y cuyo ancho es la altura del cilindro.

Por tanto, si "h" es la altura del cilindro y "r" el radio de la base se tiene que:

El área lateral (A_L) del cilindro corresponde al área del rectángulo que representa su desarrollo.

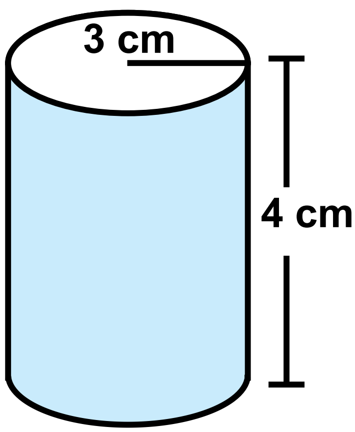
$$A_L = (2 \cdot \pi \cdot r)h$$

El área total del cilindro es la suma del área de las dos bases y el área lateral.

$$A_T = A_L + 2A_B = (2 \cdot \pi \cdot r)h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = (2 \cdot \pi \cdot r)(h + r)$$

El volumen del cilindro es el producto del área de la base por la altura del cilindro.

$$V = A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



Analicemos el área lateral, área total y el volumen del cilindro de radio 3 cm. y altura 4 cm.

Se reemplazan las medidas del radio y de la altura en las expresiones correspondientes al área lateral, al área total y al volumen del cilindro.

Luego, se realizan las operaciones indicadas así:

Área lateral:

$$A_L = (2 \cdot \pi \cdot r)h = 2 \cdot 3.14 \cdot 3cm \cdot 4cm = 75.36cm^2$$

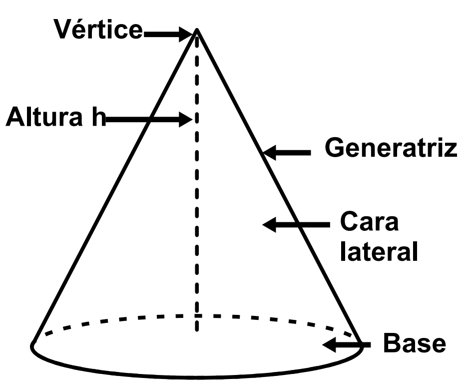
Área total:

$$A_T = (2 \cdot \pi \cdot r)(h + r) = (2 \cdot 3.14 \cdot 3cm)(4cm + 3cm) = 131.88cm^2$$

Volumen:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3.14(3cm^2) \cdot 4cm = 113.04cm^3$$

Cono



Es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y una cara plana circular.

El cono está conformado por los siguientes elementos: cara lateral, base, vértice, altura y generatriz.

La generatriz es el segmento que tiene como puntos extremos el vértice del cono un punto de la circunferencia de la base.

La altura es la medida del segmento perpendicular a la base, cuyo punto extremo es el vértice del cono.

Si simbolizamos con "r" el radio de la base del cono, con "g" la generatriz del cono y con "h" su altura, se tiene que:

El área lateral (A_L) del cono corresponde al área del sector circular que resulta de su desarrollo.

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g$$

El área total (A_T) del cono es la suma del área de la base y el área lateral.

$$A_T = A_L + A_B = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$

El volumen del cono es un tercio del producto del área de la base por la altura del cono.

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h = \frac{1}{3}(\pi \cdot r^2 \cdot h)$$

Veamos cómo resolver el problema de un cono:

Calcular la medida de la generatriz, el área lateral, área total y el volumen de un cono cuyo radio es 5 cm. y su altura es 6 cm.

Para hallar la medida de la generatriz, se aplica el Teorema de Pitágoras:

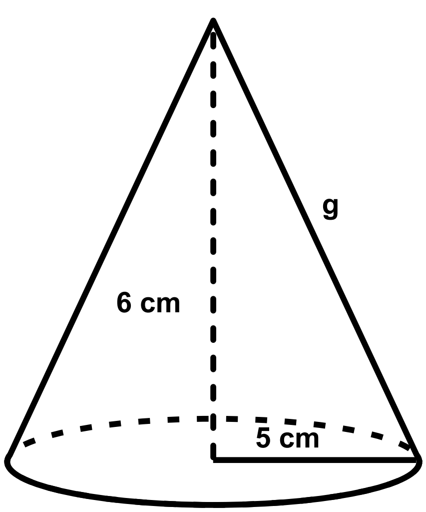
$$g = \sqrt{(6cm)^2 + (5cm)^2} = \sqrt{36cm^2 + 25cm^2} = \sqrt{61cm^2} \approx 7,81cm$$

Luego, se reemplazan las medidas del radio, la altura y la generatriz para calcular el área lateral, el área total y el volumen.

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3.14 \cdot 5cm \cdot 7.81cm = 122.617cm^2$$

$$A_T = \pi \cdot r \cdot (g + r) = 3.14 \cdot 5cm \cdot (7.81cm + 5cm) = 201.11cm^2$$

$$V = \frac{1}{3}(\pi \cdot r^2 \cdot h) = \frac{1}{3}(3.14 \cdot (5cm)^2 \cdot 6cm) = 157cm^3$$

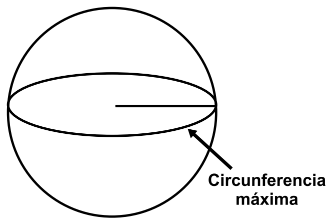


Esfera

Es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva. Todos los puntos de la superficie de la esfera equidistan de un punto llamado centro.

La distancia entre un punto de la superficie de la esfera y el centro se denomina radio.

La intersección de la superficie de la esfera con un plano que pasa por su centro se denomina circunferencia máxima y el círculo determinado por esta se denomina círculo máximo.



Si se representa con "r" el radio de la esfera se tiene que:

El área de la superficie de la esfera es cuatro veces el área del círculo máximo.

$$A_E = 4\pi r^2$$

El volumen de la esfera se calcula mediante la expresión:

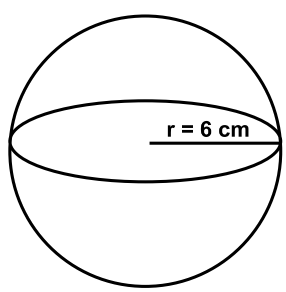
$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$ en donde r es el radio de la esfera.

Ejemplo: calcular el área de la superficie de una esfera y su volumen, si su diámetro es 12 cm.

Como la esfera tiene un diámetro de 12 cm, su radio es 6 cm. Luego se reemplaza la medida del radio para calcular el área de la superficie y su volumen.

$$A_T = 4\pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3.14(6cm)^2 = 4 \cdot 3.14 \cdot 36cm^2 = 452.39cm^2$$

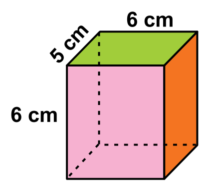
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot (6cm)^3 = \frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot 216cm^3 = 904.32cm^3$$



Aplicación

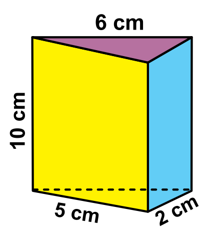
En forma individual, resuelve los siguientes ejercicios, en tu cuaderno. Dibuja las figuras que sean necesarias.

1. Marisol tiene una cajita como muestra la figura. Ella quiere saber:



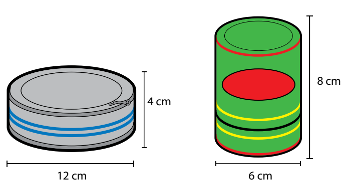
   a) El área lateral
   b) El área total
   c) El volumen

2. Un trozo de madera tiene la forma y las medidas que muestra la figura.
   Calcula:



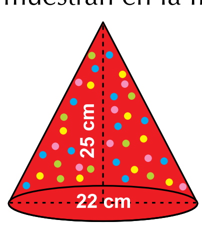
   a) El área lateral
   b) El área total
   c) El volumen

3. En una empresa de enlatados se utilizan recipientes con forma cilíndrica para empacar arvejas como se muestra a continuación:



   a) ¿Cuál de los dos recipientes tiene mayor capacidad?
   b) ¿En cuál de los dos recipientes se utiliza mayor cantidad de hojalata para su elaboración?
   c) Si en cada recipiente la etiqueta cubre toda la cara lateral, ¿en cuál de las dos etiquetas se utiliza mayor cantidad de papel?

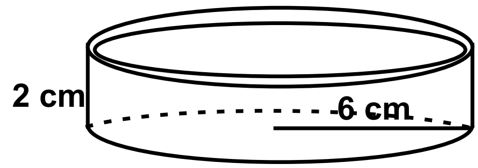
4. Josefa elaboró unos gorritos para una fiesta infantil. El diseño y medidas se muestran en la figura.
   Calcula:



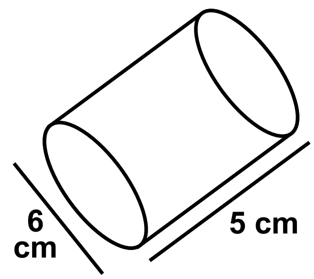
   a) El área lateral
   b) El área total
   c) El volumen

Calcula área lateral, área total y volumen de los cuerpos siguientes:

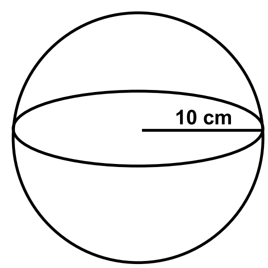
5.



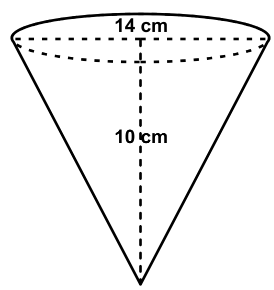
6.



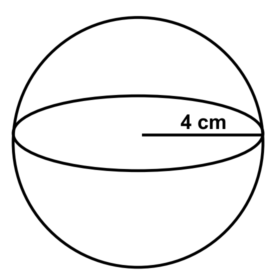
7.



8.



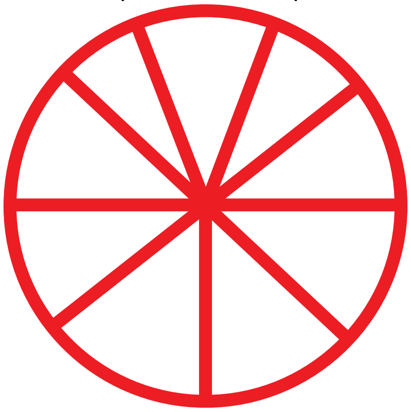
9.



10. Realiza el dibujo y calcula el área lateral, el área total y el volumen de una caja cúbica de 75.25 cm de lado.

Entendemos por…

Equidistante aquel punto que queda a la misma distancia de otro. Por ejemplo, el centro de una circunferencia es equidistante de los puntos de ella.



Diversión matemática

1. En la sopa de letras siguiente aparecen los nombres de diez matemáticos. Búscalos:

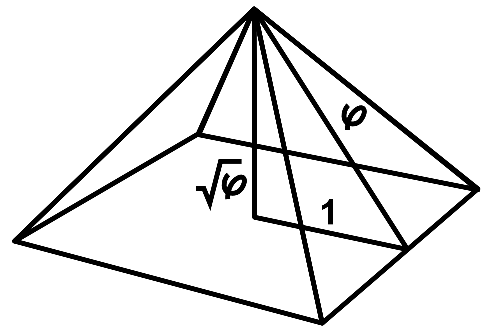
   Bolzano, Cauchy, Euclides, Euler, Fermat,
   Gauss, Leibniz, Newton, Pitágoras y Taylor.

G	C	A	U	S	E	R	H	U	P
L	A	P	N	A	F	O	D	R	I
E	U	L	E	R	O	L	Y	A	T
U	C	O	W	O	S	Y	U	P	A
C	H	N	T	G	A	U	S	S	M
L	Y	A	O	A	Z	W	M	I	R
I	L	Z	N	T	O	E	G	B	E
D	A	L	E	I	B	N	I	Z	F
E	R	O	T	P	I	T	A	E	A
S	A	B	N	I	Z	O	R	T	N

Día a día

Sección áurea y la Gran Pirámide de Gizeh

La gran pirámide de Gizeh se construyó hace 4,500 años aproximadamente y se incluyó entre las siete maravillas del mundo, siendo la más antigua y sin embargo la única que se conserva en la actualidad.



Leyendas de todo tipo han acompañado a cualquier manifestación de esta cultura fascinante y desconocida: sus dioses, sus faraones, sus jeroglíficos y, por supuesto, sus increíbles templos y construcciones funerarias nos hablan de grandeza y de misterio. Y de saberes ocultos celosamente guardados por poderosos sacerdotes.
Entre estos saberes secretos se hallan, cómo no, los conocimientos matemáticos. Mucho se ha escrito sobre las matemáticas de las pirámides, y se pueden leer todo tipo de fantásticas relaciones numéricas encarnadas en las formas y medidas de esas enormes moles de piedra.
La cuestión es que efectivamente hay matemáticas, y no hay más que fijarse en la forma elegida, pero quizá no tantas como se cree. Veamos un ejemplo de estos supuestos conocimientos: imaginemos que alguien Nos muestra el siguiente dibujo, en el que la letra φ representa la sección áurea.
Según el historiador griego Heródoto, la Gran Pirámide de Gizeh construyó de modo que la superficie de una cara fuese igual a la de un cuadrado que tuviese por lado la altura de la pirámide.
Es decir: el apotema de la pirámide, la distancia que va desde la cúspide de la pirámide hasta el punto medio de una de las aristas horizontales, se eligió de modo que la superficie de cada una de las caras triangulares fuese igual al cuadrado de la altura.

Tomado de: http://www.epsilones.com/paginas/t-historias1.html