

Orden de red y razón de bifurcación

José Ramón Martínez Batlle

Orden de red

El orden de red de curso fluvial es un número entero positivo usado en geomorfología e hidrología como indicador del grado de ramificación de una red de drenaje, y es un paso importante en el análisis topológico de redes (Wikipedia contributors, 2020, GRASS Development Team (2020a)). Existen muchos métodos para establecer el orden de red, pero el más conocido es el de Strahler (Strahler, 1957), comúnmente preferido sobre el de Horton (Horton, 1945) (ver figura 1).

Cada uno tiene sus ventajas: el método de Strahler es sencillo y consistente, pero no considera a la red de manera íntegra, ni utiliza el concepto de curso principal, aspectos ambos que sí son considerados en el de Horton. Asimismo, cada uno tiene desventajas: el primero es inequívoco y no da lugar jerarquizaciones inconsistentes, mientras que el segundo es interpretable y, por lo tanto, diferentes jerarquizaciones podrían realizarse para una misma cuenca.

Más sobre los métodos ordenación jerárquica de red en la lista de reproducción **Geomorfología (GEO114), licenciatura en Geografía, UASD**.

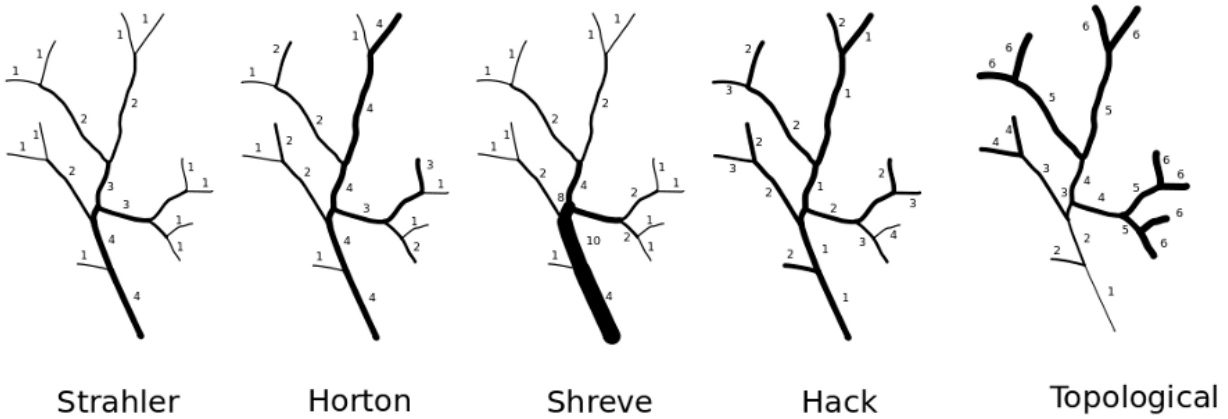


Figure 1: Ejemplos de métodos de establecimiento del orden de red. Tomado de: GRASS Development Team (2020a)

Razón de bifurcación

Horton (1945) define la razón de bifurcación como la relación entre el número de cursos fluviales de un orden dado entre el número de cursos del orden inmediatamente mayor (ver figura 1). Según el mismo autor, usualmente esta razón es constante para todos los órdenes de red en una cuenca determinada. Su fórmula es:

$$R_b = \frac{N_u}{N_{u+1}}$$

donde R_b es la razón de bifurcación, N_u es el número de cursos de orden de red u , y N_{u+1} es el número de cursos del orden de red inmediatamente mayor.

Existen dos tipos de razones de bifurcación, en función del método utilizado para calcularla, y cada una produce resultados distintos. El primer tipo, que denominaremos **razón de bifurcación promedio**, es fácil de calcular pero menos “sintética”. Consiste en promediar los valores de R_b por cada par de órdenes consecutivos. El segundo tipo, denominado **razón de bifurcación por medio de coeficientes de regresión**, consiste en generar una recta de regresión y utilizar su pendiente para estimar la razón de bifurcación. A continuación muestro los procedimientos específicos sobre cómo calcular cada una tanto en R como directamente en GRASS GIS, utilizando como modelo la red de drenaje del arroyo Pantuflas (Constanza, República Dominicana).

Razón de bifurcación promedio

La cuenca del arroyo Pantuflas tiene un orden de red máximo de 4. Para obtener los datos fuente, es decir, número de cursos por orden, usaré el add-on de GRASS GIS `r.stream.stats` (GRASS Development Team, 2020b); nótese que añado el flag `o`, necesario para generar estadísticas por orden de red.

Para correr el módulo se requiere tener una sesión de GRASS iniciada, y disponer de las entradas requeridas por el módulo, que son los siguientes tres mapas ráster: orden de red, dirección de flujo y elevación. En este ejemplo se muestra la ejecución del add-on desde R mediante el paquete `rgrass7`.

```
execGRASS(
  "r.stream.stats",
  flags = c('overwrite', 'verbose', 'o'),
  parameters = list(
    stream_rast = 'order-strahler',
    direction = 'drainage-dir-de-rstr',
    elevation = 'dem',
    output = 'pant_stats.txt'
  )
)
```

La salida del módulo se guarda en `pant_stats.txt`, que es un archivo de valores separados por comas, el cual contiene el resultado de las estadísticas por orden de red, tal como se muestra a continuación:

```
d <- read.csv("pant_stats.txt", skip=1, header=TRUE)
d
```

```
##   order num_of_streams avg_length   avg_area avg_slope avg_grad
## 1      1              41  1.477507   2.163283  0.108221 0.090881
## 2      2               8  2.704625  10.557010  0.091887 0.081491
## 3      3               2  9.696423  63.223201  0.029943 0.023518
## 4      4               1  0.866862 127.663163  0.027581 0.007603
##   avg_elev.diff sum_length  sum_area
## 1   148.335510  60.577785  88.69459
## 2   190.532562  21.636997  84.45608
## 3   267.076660  19.392846 126.44640
## 4     6.590576   0.866862 127.66316
```

Como vemos, en la cuenca del arroyo Pantuflas existen 41 cursos fluviales de orden 1, 8 de orden 2, 2 de orden 3 y 1 de orden 4. La razón de bifurcación para el par de órdenes 1|2 es $41/8 = 5.125$, para el par 2|3 es $8/2 = 4.0$, y para 3|4 es $2/1 = 2.0$. El valor promedio sería $R_b = 3.7083$, tal como muestra el código de R a continuación:

```
rbp <- mean(d$num_of_streams[-length(d$num_of_streams)]/d$num_of_streams[-1])
rbp
```

```
## [1] 3.708333
```

El cuadro de la figura 2 muestra el procedimiento mediante hoja de cálculo:

| Orden | Número de cursos | |
|-------|------------------|-------------------------|
| 1 | 41 | Rb |
| 2 | 8 | } 41/8=5.125 |
| 3 | 2 | } 8/2=4.0 |
| 4 | 1 | } 2/1=2.0 |
| | | Rb=(5.125+4+2)/3=3.7083 |

Figure 2: Ejemplo de obtención de la razón de bifurcación promedio utilizando hoja de cálculo

Razón de bifurcación por medio de coeficientes de regresión

Para calcular la razón de bifurcación por medio de coeficientes de regresión, se obtiene primero un modelo lineal del logaritmo (e.g. base 10) del número de cursos fluviales en función del orden de red. El uso del logaritmo se debe a que existe una relación exponencial entre el número de cursos fluviales y el orden de red. Finalmente, se utiliza la pendiente de dicha recta para el cálculo de la relación de bifurcación, mediante la fórmula (al final incluyo la demostración):

$$R_b = \frac{1}{10^m}$$

donde R_b es la razón de bifurcación y m es la pendiente de la recta de regresión $\log_{10} N = mu$ (donde $u \in \mathbb{N}$). Por lo tanto, el procedimiento requiere primero obtener el número de cursos fluviales por orden, generar el modelo con dichos datos y luego utilizar la pendiente de la recta para calcular la R_b .

Mostraré un ejemplo de cálculo utilizando los mismos datos generados arriba por el add-on `r.stream.stats` de la red de Pantuflas, los cuales fueron asignados al objeto `d`. Seguiré el siguiente orden: mostraré un gráfico de dispersión del logaritmo en base 10 del número de cursos y el orden de red, luego generaré el modelo lineal con dichas variables, a continuación obtendré el coeficiente de regresión correspondiente a la pendiente (m) y, finalmente, estimaré la razón de bifurcación mediante la fórmula $R_b = \frac{1}{10^m}$.

Primero el gráfico de dispersión:

```
plot(num_of_streams~order, data=d, log="y")
```

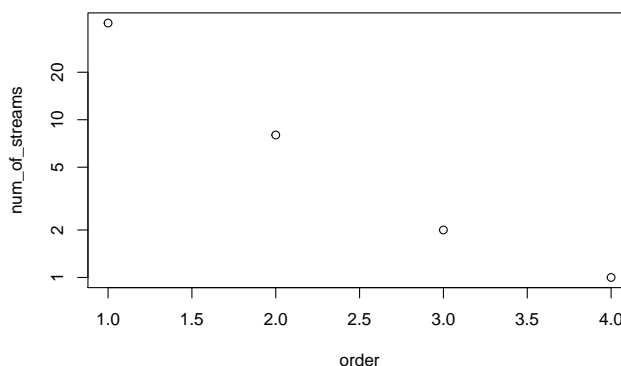


Figure 3: Número de cursos fluviales es función del orden de red. La ordenada usa escala log10

El gráfico confirma la mencionada relación exponencial, dado que la ordenada utiliza escala logarítmica y los puntos insinúan una línea recta. Necesitamos entonces obtener una recta de regresión para este conjunto de

datos, por lo que construimos el modelo de regresión lineal usando mínimos cuadrados mediante la función `lm` de R:

```
mod <- lm(log10(num_of_streams) ~ order, data=d)
plot(num_of_streams~order, data=d, log="y")
abline(mod)
text(2.2, 20, 'logN=2.064-0.544u')
```

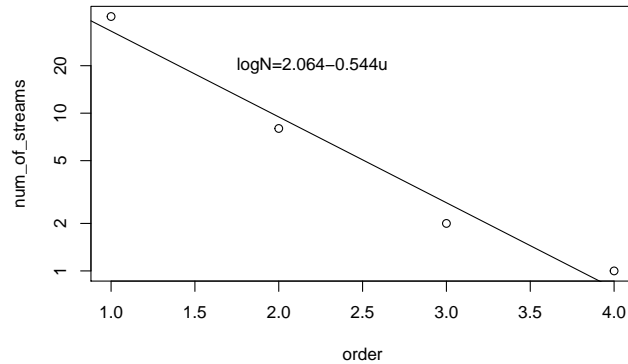


Figure 4: Recta de regresión para el modelo "número de cursos fluviales es función del orden de red" y ecuación correspondiente

La pendiente de la recta es el factor que multiplica al orden de red u , que en este caso es -0.544 . El modelo de regresión de R es el objeto `mod`, el cual contiene un vector denominado `coefficients`, cuyo segundo valor es el coeficiente de la variable u :

```
mod$coefficients[[2]]
```

```
## [1] -0.5440412
```

Aplicando la fórmula $R_b = \frac{1}{10^m}$, la razón de bifurcación sería:

```
rb <- 1/10^mod$coefficients[[2]]
round(rb,4)
```

```
## [1] 3.4998
```

Nótese que este valor es diferente al obtenido para la razón de bifurcación promedio.

Utilizando el add-on de `r.stream.stats` de manera directa para estimar ambas R_b

Una forma más directa (aunque algo críptica) de obtener ambas razones de bifurcación, consiste en utilizar el add-on de GRASS GIS `r.stream.stats` sin el flag `o`.

```
execGRASS(
  "r.stream.stats",
  flags = c('overwrite','quiet'),
  parameters = list(
    stream_rast = 'order-strahler',
    direction = 'drainage-dir-de-rstr',
    elevation = 'dem',
    output = 'pant_stats_expanded.txt'
  )
)
```

El archivo `pant_stats_expanded.txt`, que es el resultado del código anterior, muestra ambas razones de bifurcación (ver figura 5). El valor bajo *Bif.rt.* de la sección “*Averaged stream ratios with standard deviations*” corresponde a la razón de bifurcación promedio (la segunda línea es la desviación estándar). Por otra parte, “*Bif.rt.*” de la sección “*Stream ratios based on regression coefficient*” corresponde a la razón de bifurcación por medio de coeficientes de regresión:

```
Summary:
Max order | Tot.N.str. | Tot.str.len. | Tot.area. | Dr.dens. | Str.freq.
  (num)   |   (num)   |    (km)     |   (km2)   | (km/km2) | (num/km2)
      4 |         52 |    102.4745 |   127.6632 |    0.8027 |    0.4073

Stream ratios based on regression coefficient:
Bif.rt. | Len.rt. | Area.rt. | Slo.rt. | Grd.rt.
 3.4998 | 0.9682 | 4.0646 | 1.6858 | 2.3835

Averaged stream ratios with standard deviations:
Bif.rt. | Len.rt. | Area.rt. | Slo.rt. | Grd.rt.
 3.7083 | 1.8350 | 3.6229 | 1.7774 | 2.5579
 1.5828 | 1.7479 | 3.1862 | 1.1193 | 1.2631
```

Figure 5: Captura de pantalla del archivo "pant_stats_expanded.txt"

Como vemos, ambos valores coinciden con lo calculado por medio de código de R, por lo que se confirma la consistencia entre algoritmos.

Demostración de fórmula de la razón de bifurcación

Asumamos que el número de cursos fluviales es función del orden de red, entonces $N_u = f(u)$. El diagrama de dispersión de la figura 3 sugiere que el logaritmo del número de cursos y el orden de red (según el método de Strahler) siguen una relación lineal.

Formulemos entonces la siguiente función:

$$\log_{10} N_u = mu$$

donde N_u es el número de cursos de orden u , y m es una pendiente por determinar (la base es irrelevante siempre que se utilice la misma de manera consistente en la demostración). Dicha pendiente, en teoría, siempre es negativa, puesto que, a mayor orden de red, menor el número de cursos, como de hecho ocurre en el ejemplo graficado (ver figura 3). No existe un intercepto, o al menos no tiene relevancia en el cálculo, puesto que el orden 0 no existe. Partiendo de esta función, generaré una fórmula con la cual calcular la R_b a partir de la pendiente.

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0} = \frac{\log_{10} N_{u+1} - \log_{10} N_u}{(u+1) - u}$$

$$m = \frac{\log_{10} N_{u+1} - \log_{10} N_u}{1}$$

$$m = \log_{10} N_{u+1} - \log_{10} N_u$$

$$m = -(\log_{10} N_u - \log_{10} N_{u+1})$$

$$m = -(\log_{10} \frac{N_u}{N_{u+1}})$$

$$m = -\log_{10} R_b$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta no es más que el opuesto del logaritmo de la razón de bifurcación, tal como se plantea en esta generalización (Costa-Cabral & Burges, 1997):

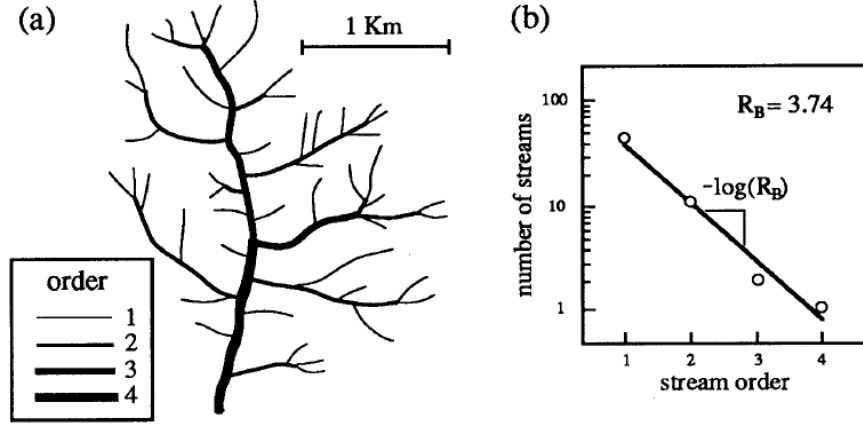


Figure 1. (a) Illustration of Strahler stream ordering rules: Source channels are streams of order 1, and where two streams of the same order, ω , join, the receiving stream has order $\omega + 1$. The fourth-order channel network pictured discharges into a fifth-order tributary stream of Old Man Creek, Iowa. The number of streams of each order ω , N_ω , are $N_1 = 46$, $N_2 = 11$, $N_3 = 2$, and $N_4 = 1$. The number of source streams, N_1 , is designated the magnitude of the network, μ . (b) Horton diagram of stream numbers for the network in Figure 1a: $\log(N_\omega)$ is plotted against ω . The bifurcation ratio is $R_B = 3.74$, obtained from the slope of the regression line, $(-\log(R_B))$. The geometric-mean ratio is $G_B = 3.58$, obtained from the slope of the line connecting the first and last points in the diagram, given by (4a), for $\mu = 46$ and $\Omega = 4$.

Si despejamos a R_b , obtenemos entonces entonces:

$$-m = \log_{10} R_b$$

$$10^{-m} = R_b$$

$$\frac{1}{10^m} = R_b$$

Referencias

Costa-Cabral, M. C., & Burges, S. J. (1997). Sensitivity of channel network planform laws and the question of topologic randomness. *Water Resources Research*, 33(9), 2179–2197.

GRASS Development Team. (2020a). *r.stream.order*. *GRASS GIS 7.8.3dev Reference Manual*. Retrieved from <https://grass.osgeo.org/grass78/manuals/addons/r.stream.order.html>

GRASS Development Team. (2020b). *r.stream.stats*. *GRASS GIS 7.8.3dev Reference Manual*. Retrieved

from <https://grass.osgeo.org/grass78/manuals/addons/r.stream.stats.html>

Horton, R. E. (1945). Erosional development of streams and their drainage basins; hydrophysical approach to quantitative morphology. *Geological Society of America Bulletin*, 56(3), 275–370.

Strahler, A. N. (1957). Quantitative analysis of watershed geomorphology. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 38(6), 913–920. <https://doi.org/10.1029/tr038i006p00913>

Wikipedia contributors. (2020). *Stream order* — *Wikipedia, the free encyclopedia*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Stream_order&oldid=935790793