

Orden de red y razón de bifurcación

José Ramón Martínez Batlle

Orden de red y razón de bifurcación

El orden de red de curso fluvial es un número entero positivo usado en geomorfología e hidrología como indicativo del grado de ramificación de una red de drenaje, y es un paso importante en el análisis topológicos de redes (Wikipedia contributors, 2020, GRASS Development Team (2020a)). Existen muchos métodos para establecer el orden de red, pero el más conocido es el de Strahler (Strahler, 1957), por su sencillez, consistencia y por ofrecer un procedimiento inequívoco, a diferencia del Horton (Horton, 1945), al que históricamente sustituye.

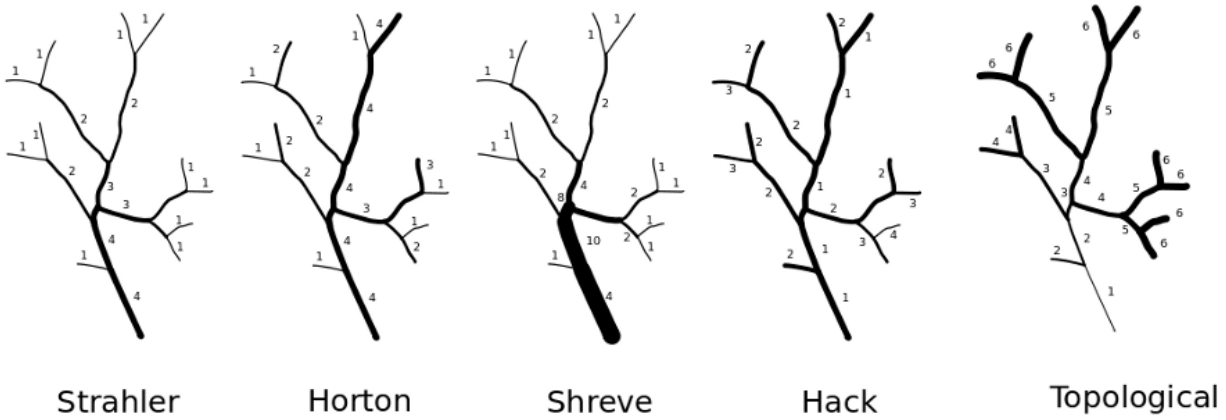


Figure 1: Ejemplos de métodos de establecimiento del orden de red. Tomado de: GRASS Development Team (2020a)

Horton (1945) define la razón de bifurcación se define como la relación entre el número promedio de cursos fluviales de un orden dado entre el número de cursos del orden inmediatamente mayor (ver figura arriba sobre ejemplos de orden de red. Según el mismo autor, usualmente esta razón es constante para todos los órdenes de red en una cuenca determinada.

Su fórmula es:

$$R_b = \frac{N_u}{N_{u+1}}$$

donde R_b es la razón de bifurcación, N_u es el número de cursos de orden de red u , y N_{u+1} es el número de cursos del orden de red inmediatamente mayor.

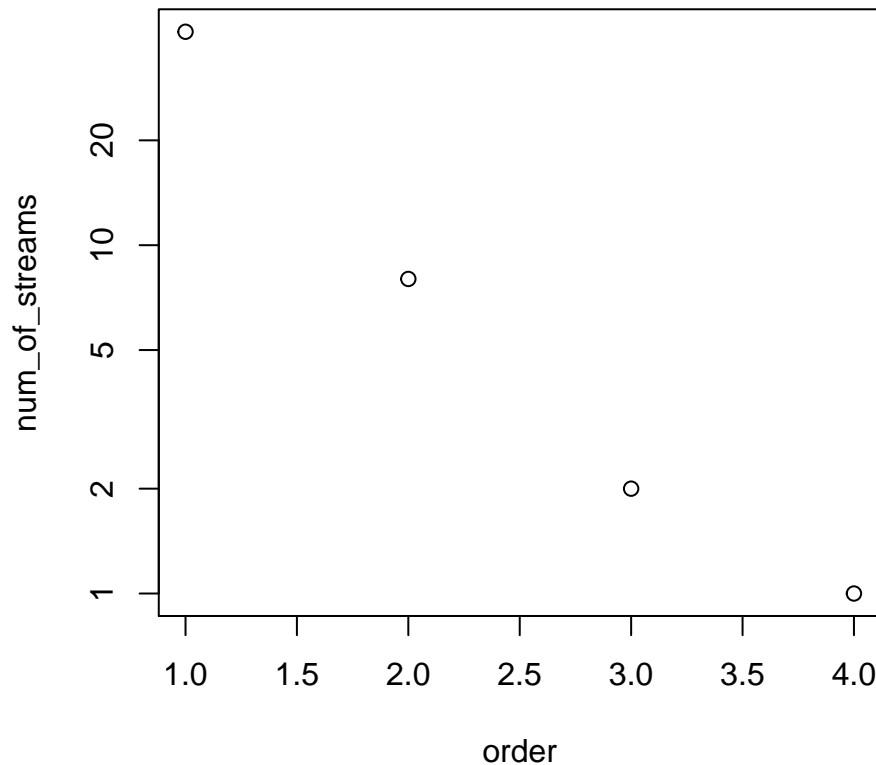
Por ejemplo, imaginemos una cuenca modelo en la que existen 10 cursos fluviales de orden 1 y 3 de orden 2. La relación de bifurcación sería el resultado de dividir $10/3 = 3.333$. Dentro de la cuenca modelo, la expectativa sería que haya 1 curso de orden 3, para una razón de bifurcación de $3/1 = 3$.

Asumiendo que el número de cursos fluviales es función del orden de red, entonces $N_u = f(u)$. Si graficamos el logaritmo del número de cursos por cada orden de red (según el método de Strahler), notaremos que existe una relación lineal entre ambas variables.

A continuación, muestro un ejemplo de cómo calcular la razón de bifurcación con datos reales (cuenca del arroyo Pantuflas, República Dominicana), utilizando el add-on de GRASS GIS `r.stream.stats` (GRASS Development Team, 2020b):

```
execGRASS(
  "r.stream.stats",
  flags = c('overwrite', 'verbose', 'o'),
  parameters = list(
    stream_rast = 'order-strahler',
    direction = 'drainage-dir-de-rstr',
    elevation = 'dem',
    output = 'pant_stats.txt'
  )
)

d <- read.csv("pant_stats.txt", skip=1, header=TRUE)
plot(num_of_streams~order, data=d, log="y")
```



El eje y es \log_{10} .

Formulemos entonces la siguiente función:

$$\log_{10} N_u = mu$$

donde N_u es el número de cursos de orden u , y m es una pendiente por determinar (la base es irrelevante siempre que se utilice la misma de manera consistente a lo largo del ejercicio). Dicha pendiente, en teoría, siempre es negativa, puesto que a mayor orden de red, menor el número de cursos, como de hecho ocurre en el ejemplo graficado. La demostración matemática a continuación así lo demostrará, y la podremos poner en relación con R_b .

$$m = \frac{\log_{10} N_{u+1} - \log_{10} N_u}{(u+1) - u}$$

$$m = \frac{\log_{10} N_{u+1} - \log_{10} N_u}{1}$$

$$m = \log_{10} N_{u+1} - \log_{10} N_u$$

$$m = -(\log_{10} N_u - \log_{10} N_{u+1})$$

$$m = -(\log_{10} \frac{N_u}{N_{u+1}})$$

$$m = -\log_{10} R_b$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta no es más que el opuesto del logaritmo de la razón de bifurcación, tal como se plantea en esta generalización (Costa-Cabral & Burges, 1997):

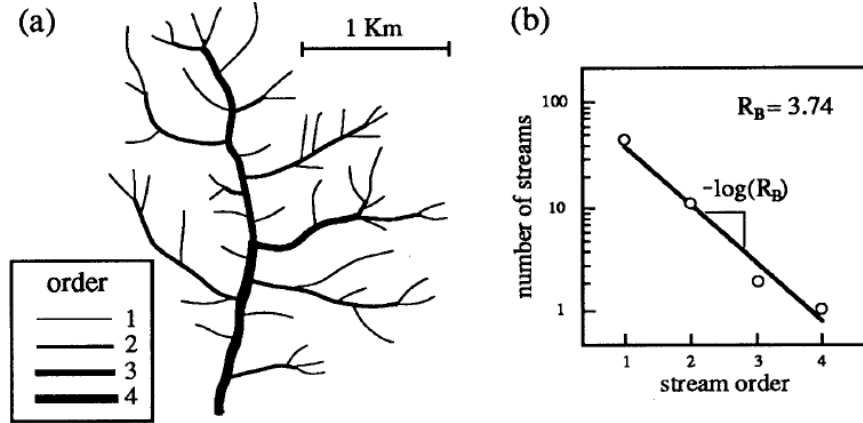


Figure 1. (a) Illustration of Strahler stream ordering rules: Source channels are streams of order 1, and where two streams of the same order, ω , join, the receiving stream has order $\omega + 1$. The fourth-order channel network pictured discharges into a fifth-order tributary stream of Old Man Creek, Iowa. The number of streams of each order ω , N_ω , are $N_1 = 46$, $N_2 = 11$, $N_3 = 2$, and $N_4 = 1$. The number of source streams, N_1 , is designated the magnitude of the network, μ . (b) Horton diagram of stream numbers for the network in Figure 1a: $\log(N_\omega)$ is plotted against ω . The bifurcation ratio is $R_B = 3.74$, obtained from the slope of the regression line, $(-\log(R_B))$. The geometric-mean ratio is $G_B = 3.58$, obtained from the slope of the line connecting the first and last points in the diagram, given by (4a), for $\mu = 46$ and $\Omega = 4$.

Si despejamos a R_b , obtenemos entonces entonces:

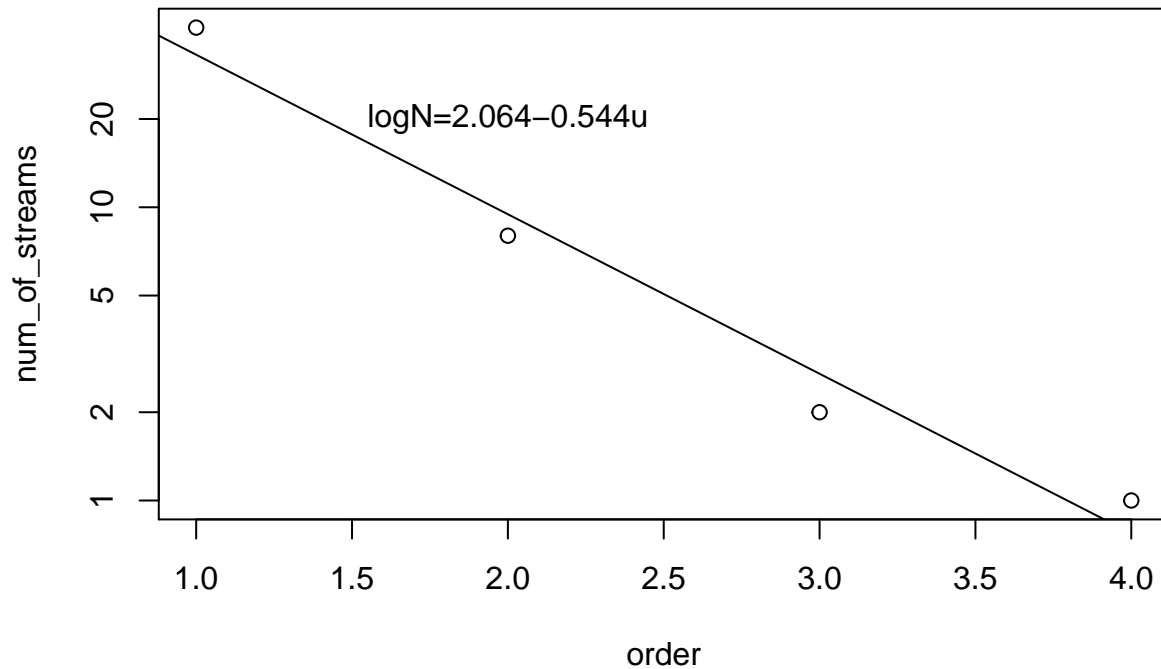
$$-m = \log_{10} R_b$$

$$10^{-m} = R_b$$

$$\frac{1}{10^m} = R_b$$

Volviendo a los datos del arroyo Pantuflas, y dado que lo que necesitamos obtener es la pendiente de la función $\log_{10}N_u = mu$, nos será de utilidad construir un modelo de regresión lineal usando mínimos cuadrados:

```
mod <- lm(log10(num_of_streams) ~ order, data=d)
plot(num_of_streams~order, data=d, log="y")
abline(mod)
text(2, 20, 'logN=2.064-0.544u')
```



La pendiente de la regresión es el factor que multiplica al número de orden de red u , que en este caso es -0.544 . Dentro del modelo regresión de R, dicho valor ocupa la posición número 2 del vector de coeficientes del objeto `mod`:

```
mod$coefficients[[2]]
```

```
## [1] -0.5440412
```

Por lo tanto, la R_b se calcularía así:

```
rb <- 1/10^mod$coefficients[[2]]
round(rb,4)
```

```
## [1] 3.4998
```

Que es el mismo valor de “*Bif.rt.*” contenido en la sección “*Stream ratios based on regression coefficient*” generada por el add-on `r.stream.stats` en modo expandido:

```
execGRASS(
  "r.stream.stats",
  flags = c('overwrite','quiet'),
  parameters = list(
    stream_rast = 'order-strahler',
    direction = 'drainage-dir-de-rstr',
    elevation = 'dem',
    output = 'pant_stats_expanded.txt'
  )
)
```

Summary:

| | | | | | |
|-----------|------------|--------------|-----------|----------|-----------|
| Max order | Tot.N.str. | Tot.str.len. | Tot.area. | Dr.dens. | Str.freq. |
| (num) | (num) | (km) | (km2) | (km/km2) | (num/km2) |
| 4 | 52 | 102.4745 | 127.6632 | 0.8027 | 0.4073 |

Stream ratios based on regression coefficient:

| | | | | |
|---------|---------|----------|---------|---------|
| Bif.rt. | Len.rt. | Area.rt. | Slo.rt. | Grd.rt. |
| 3.4998 | 0.9682 | 4.0646 | 1.6858 | 2.3835 |

Averaged stream ratios with standard deviations:

| | | | | |
|---------|---------|----------|---------|---------|
| Bif.rt. | Len.rt. | Area.rt. | Slo.rt. | Grd.rt. |
| 3.7083 | 1.8350 | 3.6229 | 1.7774 | 2.5579 |

Referencias

Costa-Cabral, M. C., & Burges, S. J. (1997). Sensitivity of channel network planform laws and the question of topologic randomness. *Water Resources Research*, 33(9), 2179–2197.

GRASS Development Team. (2020a). *r.stream.order*. *GRASS GIS 7.8.3dev Reference Manual*. Retrieved from <https://grass.osgeo.org/grass78/manuals/addons/r.stream.order.html>

GRASS Development Team. (2020b). *r.stream.stats*. *GRASS GIS 7.8.3dev Reference Manual*. Retrieved from <https://grass.osgeo.org/grass78/manuals/addons/r.stream.stats.html>

Horton, R. E. (1945). Erosional development of streams and their drainage basins; hydrophysical approach to quantitative morphology. *Geological Society of America Bulletin*, 56(3), 275–370.

Strahler, A. N. (1957). Quantitative analysis of watershed geomorphology. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 38(6), 913–920. <https://doi.org/10.1029/tr038i006p00913>

Wikipedia contributors. (2020). *Stream order* — *Wikipedia, the free encyclopedia*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Stream_order&oldid=935790793