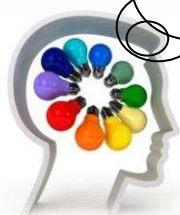
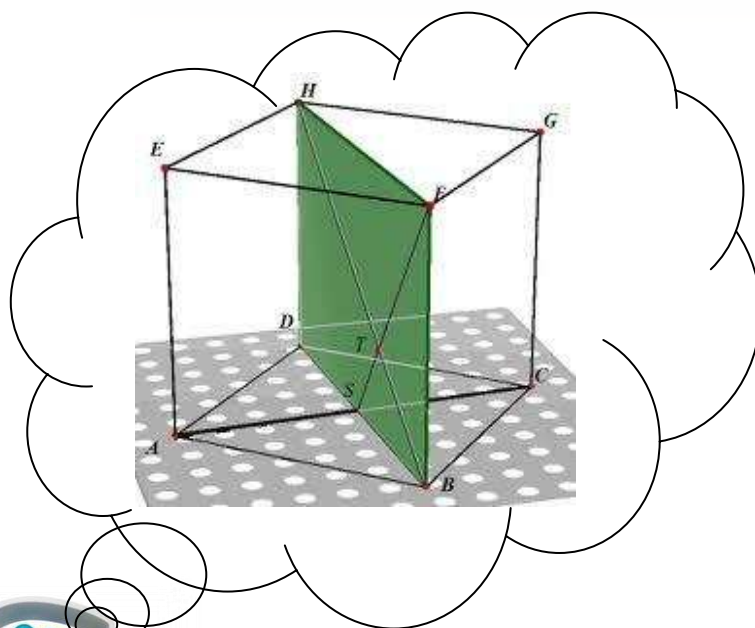


M Raih Juara Olimpiade matematika



MODUL OLIMPIADE MATEMATIKA SMP

Oleh

Ahmad Wachidul Kohar, S.Pd

- ✓ Pemecahan Masalah
- ✓ Bilangan
- ✓ Aljabar dan Pengukuran
- ✓ Geometri
- ✓ Kombinatorika dan Peluang



SILABUS OLIMPIADE SAINS NASIONAL (OSN) BIDANG MATEMATIKA SMP

RUANG LINGKUP MATERI OLIMPIADE MATEMATIKA "OSN" TINGKAT SMP

Ruang lingkup materi yang akan diujikan pada Olimpiade Sains Nasional disesuaikan dengan silabus Olimpiade Sains Nasional yang disusun oleh Direktorat Pembinaan SMP, Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar, Kementerian Pendidikan Nasional. Adapun ruang lingkup materi adalah sebagai berikut.

I. Bilangan

- Operasi dan sifat-sifat bilangan rasional, pembagian bersisa
- Faktor Persekutuan Besar (FPB) dan Kelipatan Persekutuan Kecil (KPK)
- Pemecahan masalah yang berkaitan dengan bilangan

II. Aljabar

- Himpunan :Himpunan bagian dan operasi himpunan
- Fungsi
 - Relasi dan fungsi, Nilai fungsi, daerah asal dan daerah hasil suatu fungsi
 - Grafik fungsi dan operasi fungsi
- Perbandingan
 - Ukuran benda dengan skala
 - Perbandingan senilai dan perbandingan berbalik nilai
- Operasi aljabar
- Persamaan dan pertidaksamaan satu variabel
 - Sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan
 - Solusi persamaan atau pertidaksamaan
- Persamaan garis lurus
- Sistem persamaan linear
- Bilangan berpangkat
- Barisan dan deret bilangan

Rumus suku ke- n barisan bilangan dan jumlah n suku barisan bilangan
- Persamaan kuadrat
 - Solusi persamaan kuadrat

- 2) Sifat-sifat akar persamaan kuadrat
- 3) Penyusunan kembali persamaan kuadrat
- k. Pemecahan masalah yang berkaitan dengan aljabar

III. Geometri dan Pengukuran

- a. Garis dan sudut
 - 1) Kedudukan dua garis
 - 2) Sifat-sifat garis
 - 3) Sifat-sifat sudut
- b. Bangun datar
 - 1) Keliling dan luas
 - 2) Garis tinggi, garis berat, dan garis bagi segitiga, titik berat segitiga
 - 3) Sifat-sifat kesebangunan
 - 4) Lingkaran: keliling, luas, jari-jari, diameter, panjang busur, luas juring, luas tembereng, sudut pusat, dan sudut keliling.
- c. Bangun ruang
 - 1) Kubus, balok, limas, prisma tegak, tabung, kerucut, dan bola
 - 2) Jaring-jaring bangun
- d. Dalil Pythagoras
- e. Pemecahan masalah yang berkaitan dengan geometri pengukuran

IV. Statistika dan Peluang

- a. Ukuran pemusatan
- b. Penyajian dan penafsiran data

Penyajian data tunggal atau berkelompok dalam bentuk tabel dan diagram dan penafsiran diagram suatu data
- c. Peluang kejadian
 - 1) Percobaan dan ruang sampel
 - 2) Peluang suatu kejadian
- d. Aturan pencacahan
 - 1) Aturan Perkalian
 - 2) Permutasi dan kombinasi
- e. Pemecahan masalah yang berkaitan dengan statistika dan peluang

BAB 1

PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA (MATHEMATICS PROBLEM SOLVING)

A. Langkah-Langkah Pemecahan Masalah Matematika

Untuk menyelesaikan masalah dalam olimpiade matematika dengan menggunakan pendekatan pemecahan masalah, kita akan mengikuti langkah-langkah dari Polya (1988) yang telah disusun secara hirarkis, yaitu:

Langkah 1 : Memahami masalah (PAHAM)

Untuk dapat memahami masalah, hal-hal yang bisa dilakukan adalah

1. Identifikasi apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan (dibuktikan)
2. Memperkenalkan notasi yang cocok
3. Memodelkan masalah dalam bentuk diagram atau gambar.
4. Memberikan ilustrasi atau contoh pada data berupa definisi.

Langkah 2 : Menyusun strategi (RENCANAKAN)

Hal-hal yang dilakukan ketika menyusun strategi penyelesaian diantaranya:

1. Menyatakan kembali masalah itu ke dalam bentuk yang lebih operasional
2. Mengingat kembali apakah masalah yang dihadapi telah dikenal dengan baik sebelumnya, baik masalah yang sama maupun dalam bentuk yang berbeda.
3. Menentukan definisi atau aturan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang dihadapi.
4. Perhatikan apa yang harus dicari (dibuktikan), dapatkah kita mengkondisikan sesuatu yang lebih sederhana sehingga kita dapat memperoleh apa yang dicari (dibuktikan).
5. Menyelesaikan masalah dalam bentuk atau formulasi yang lebih sederhana,
6. Mengembangkan data yang diberikan berdasarkan aturan yang sudah diketahui.

Langkah 3 : Menjalankan strategi (JALANKAN)

Hal-hal yang dilakukan ketika menjalankan strategi diantaranya:

1. Lakukan rencana strategi itu untuk memperoleh penyelesaian dari masalah
2. Perhatikan apakah setiap langkah yang dilakukan sudah benar.

Langkah 4 : Memeriksa hasil yang diperoleh (PERIKSA KEMBALI)

Hal-hal yang dilakukan dalam memeriksa penyelesaian yang dihasilkan diantaranya:

1. Menggunakan hasil yang diperoleh pada kasus khusus atau masalah lainnya.
2. Menyelesaikan masalah dengan cara yang berbeda.

Alur berpikir dalam pemecahan masalah matematika dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 1. Diagram Alur Pemecahan Masalah Matematika

B. Strategi Pemecahan Masalah

1. Mencari Pola (find pattern)

Contoh: Temukan rumus yang menyatakan banyak himpunan bagian dari S bila himpunan S memiliki n buah elemen yang berbeda.

Kita dapat memulai dengan beberapa harga n lalu mencoba menemukan sebuah pola. Berikut ini apa yang terjadi bila $n = 0, 1, 2, 3$ elemen.

n	Elemen	Himpunan bagian	Banyak himpunan bagian
0	Tidak ada	\emptyset	1
1	a	$\emptyset, \{a\}$	2
2	a, b	$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$	4
3	a, b, c	$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$	8

Selanjutnya, misal untuk $n = 4$ kita dapat menyusun himpunan bagian berdasarkan banyak elemen tiap himpunan bagian. Perhatikan tabel berikut ini.

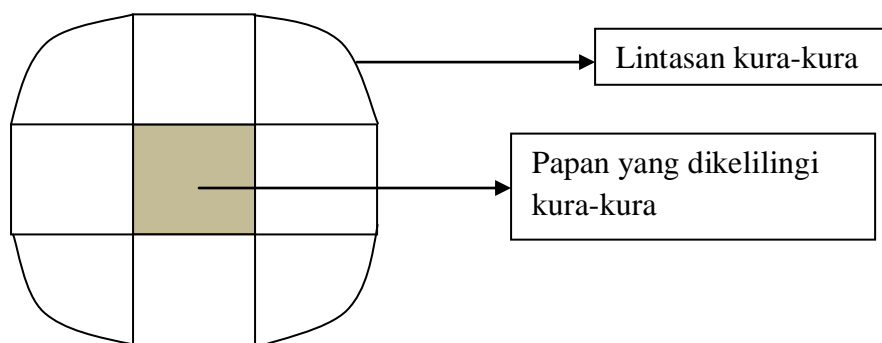
Banyak elemen	Himpunan bagian	Banyak himpunan bagian
0	\emptyset	1
1	$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\},$	4
2	$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$	6
3	$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$	4
4	$\{a, b, c, d\},$	1

Ternyata kita melihat ada pola baru yang mengingatkan kita pada koefisien ekspansi binomial atau segitiga Pascal untuk mengetahui banyaknya elemen dari tiap-tiap himpunan bagian. Oleh karena itu, banyak himpunan bagian S dari n elemen adalah banyak himpunan bagiannya yang dapat dinyatakan dalam 2^n .

Jadi, rumus yang menyatakan banyak himpunan bagian dari S bila himpunan S memiliki n buah elemen yang berbeda adalah 2^n .

2. Lukis sebuah gambar atau diagram (make a picture or a diagram)

Contoh: Seekor kura-kura berjalan mengelilingi suatu papan berbentuk persegi dengan sisi panjang 1 m dan jaraknya selalu tetap, yakni 1 m dari bagian terluar persegi tersebut. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh lintasan kura-kura tersebut.



3. Lakukan analisis mulai dari jawaban yang dikehendaki (working backward)

Contoh: Jika jumlah dua bilangan adalah 12 dan hasil kalinya 4, temukan jumlah kebalikan kedua bilangan tersebut!

Cara Rutin: Misal $x + y = 12$, dan $xy = 4$,

Dengan substitusi diperoleh $x(12 - x) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 4 = 0$.

Dengan rumus persamaan kuadrat, kita peroleh $x_1 = 6 + 4\sqrt{2}$ dan

Lalu dengan substitusi, dapat kita peroleh $y_1 = 6 - 4\sqrt{2}$ sehingga diperoleh

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6 + 4\sqrt{2}} + \frac{1}{6 - 4\sqrt{2}} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} + \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} = 3.$$

Strategi “bergerak dari belakang (working backward)”:

Mulai dari $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ Bentuk tujuan ini dapat disederhanakan menjadi: $\frac{x+y}{xy}$.

Nah, sekarang terbaca, karena diketahui $x + y = 12$, $xy = 4$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{12}{4} = 3$.
Ternyata, strategi ini lebih cepat.

4. Buat persamaan (make an equation) atau buat notasi yang tepat (use appropriate notation)

Contoh: Jika $2n + 1$ adalah bilangan kudrat sempurna dengan n bilangan bulat positif, buktikan bahwa $n + 1$ adalah jumlah dua bilangan kuadrat sempurna yang berurutan.

Rutin:

Pemisalan $2n + 1 = K$ tidak ada manfaatnya.

Misalkan $2n + 1 = k^2$ dengan k sebuah bilangan bulat positif. Karena k^2 adalah sebuah bilangan ganjil, maka k juga bilangan ganjil. Sekarang misalkan $k = t + 1$

dengan t sebuah bilangan bulat positif. Maka $2n + 1 = (2t + 1)^2$. Dari persamaan terakhir ini kita peroleh:

$$n = \frac{(2t+1)^2 - 1}{2} = \frac{4t^2 + 4t}{2} = 2t^2 + 2t$$

sehingga, $n + 1 = 2t^2 + 2t + 1 = t^2 + (t + 1)^2$ (terbukti).

5. Buat tabel atau bentuk daftar lain yang sistematis seperti diagram pohon, diagram alir, atau barisan (make a table or an organized list)

Contoh: Sebuah kelompok terdiri dari 5 orang. Bila akan dipilih dua orang sebagai ketua dan sekretaris, ada berapa cara kemungkinan pilihan yang berbeda.

Rutin:

Biasanya siswa memulai dengan mencoba-coba memasangkan setiap dua orang yang berbeda. Namun cara ini tidaklah memadai untuk mendapatkan jawaban yang lengkap.

Menggunakan daftar yang sistematis:

Alternatif penyelesaian dapat dengan menggunakan daftar yang sistematis, antara lain tabel atau pohon bercabang.

	A	B	C	D	E
A		AB	AC	AD	AE
B	BA		BC	BD	BE
C	CA	CB		CD	CE
D	DA	DB	DC		DE
E	EA	EB	EC	ED	

Dari tabel di atas terlihat ada 20 pasang orang yang dapat dibentuk dari 5 orang. Namun karena urutan pasangan tidak diperhatikan, artinya seperti AB dan BA dipandang sebagai satu pasang, maka hanya terdapat 10 pasang orang (ketua dan sekretaris) yang dibentuk. Masalah ini merupakan masalah kombinasi 2 dari 10 unsur, sehingga selain dengan cara di atas, dapat pula digunakan cara kombinasi sebagai berikut.

$$C_2^{10} = \frac{10!}{2! (10-2)!} = 10$$

6. Menggunakan sudut pandang yang berbeda (adopting different point of view)

Contoh : Tentukan nilai dari $(x+y)$ jika

$$123x + 321y = 345$$

$$321x + 123y = 543$$

Solusi: ketika menjumpai sistem persamaan yang mengandung variabel, seringkali kita secara otomatis menyelesaikan dengan metode yang pernah diajarkan sebelumnya seperti metode eliminasi berikut ini.

$$(321)(123)x + (321)(321)y = (321)(345)$$

$$(123)(321)x + (123)(123)y = (543)(123)$$

$$39.483x + 103.041y = 110.745$$

$$87.912y = 43.956$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$123x + (321)\frac{1}{2} = 345$$

$$123x + 160,5 = 345$$

$$123x = 184,5$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Sehingga $x+y = 2$. Kita perlu mencatat bahwa menggunakan cara penyelesaian seperti di atas memerlukan tingkat ketelitian dan perhitungan aritmetik yang tinggi, karena bilangan-bilangan yang digunakan besar. Jika menggunakan **sudut pandang yang berbeda**. Kita dapat melihat bahwa jika kedua persamaan tersebut dijumlahkan, maka diperoleh $444x + 444y = 888$, sehingga nilai $x+y=2$. Cara ini jauh lebih efisien.

7. Menggunakan cara yang mirip dengan cara yang digunakan pada penyelesaian masalah yang lebih sederhana (solving a simpler analogous problem)

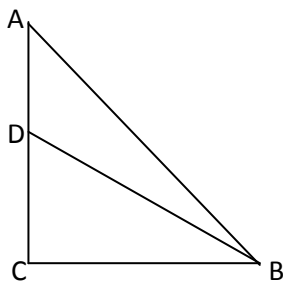
Contoh: Jumlah dari semua pembagi bilangan 360 adalah 1.170. Berapakah jumlah dari kebalikan dari semua pembagi 360?

Solusi: Pembagi-pembagi dari 360 adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, ..., 120, 180, 360. Jumlah dari kebalikan-kebalikannya adalah $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{180} + \frac{1}{360}$. Tentu, kita akan kesulitan menjumlahkannya karena kesulitan dalam menyamakan penyebutnya. Untuk itu, soal ini dapat diselesaikan dengan melihat dari cara penyelesaian dari soal yang mirip yang lebih sederhana. Contoh pembagi dari 12 adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 12. Jumlahnya adalah 28. Maka, jumlah dari kebalikan-kebalikannya adalah $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{28}{12}$. Dari soal yang lebih sederhana ini, diketahui bahwa pembilang dari pecahan ini (28) adalah jumlah dari pembagi-pembagi 12. Dengan demikian, jumlah dari kebalikan pembagi-pembagi 360 adalah $\frac{1170}{360}$, karena jumlah pembagi-pembaginya 1170.

Latihan 1-1

Selesaikan soal-soal berikut ini dengan menggunakan strategi pemecahan masalah yang sesuai!

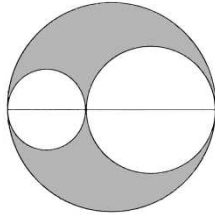
1.



Tentukan selisih luas antara dua segitiga ABC dan BCD, jika $\angle BCA = 90^\circ$, $BC = 18$ cm, $BD = 30$, dan $AD = 9$ cm !

2. Sebuah balok mempunyai 3 pasang sisi yang luasnya masing-masing 165 cm^2 , 176 cm^2 , dan 540 cm^2 . Berapakah volume balok tersebut?
3. Tentukan nilai dari $\frac{2+4+6+8+\dots+34+36+38}{3+6+9+12+\dots+51+54+57}$

4.



Pada gambar di samping, perbandingan dari ketiga lingkaran tersebut adalah 2 : 3 : 5. Tentukan perbandingan luas dari daerah yang diarsir dengan luas lingkaran terbesar!

5. Diketahui jumlah dari 19 bilangan bulat berurutan adalah 95. Bilangan ke-10 dalam barisan bilangan tersebut adalah...

6. Diketahui $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}$. Hitunglah nilai dari $\frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{12.13} + \dots + \frac{1}{99.100} = \dots$

7. 12 orang bertemu dalam sebuah pesta dan saling bersalaman. Ada berapa salaman yang terjadi jika tiap dua orang tepat bersalaman satu kali?

8. Berapakah maksimum kue yang dapat kamu peroleh dengan sembilan kali pemotongan secara berurutan?

9. Cabe segar mengandung 90% air. Setelah dikeringkan, kadar air berkurang 60%. Jika menghendaki cabe kering sebanyak 7,5 kg, hitunglah berapa kg cabe segar yang diperlukan!

10. Diagram di bawah ini menunjukkan sebuah persegi ajaib dimana jumlah bilangan dalam semua baris, kolom maupun diagonalnya adalah sama.

8		
9		5
4	X	

Maka nilai x adalah...?

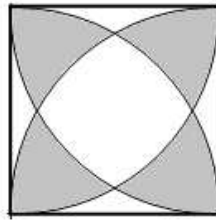
11. Angka satuan dari 2007^{2012} adalah...

12. Juliana mempunyai uang sebanyak Rp 73.000,00 yang terdiri dari pecahan lembaran uang 2000- an dan 1000-an. Jika jumlah uang Juliana sebanyak 41 lembar , maka jumlah uang Juliana yang 2000-an saja adalah sebanyak Rp ...

Latihan 1-2

Selesaikan soal-soal berikut ini !

- Perhatikan kelompok bilangan berikut ini:
 $\{1, 3\}$, $\{5, 7, 9\}$, $\{11, 13, 15, 17\}$, $\{19, 21, 23, 25, 27\}$
 Tentukan jumlah dari bilangan yang terdapat pada kelompok ke-100 !
- Dua buah lingkaran l_1 dan l_2 masing-masing berjari-jari 1 cm saling bersinggungan. Dibuat sebuah garis yang menyinggung kedua lingkaran tersebut, misalkan garis tersebut adalah garis m . Lingkaran ketiga l_3 dengan jari-jari R dibuat menyinggung lingkaran l_1 dan l_2 dan juga menyinggung m . Lingkaran keempat dengan jari-jari r dibuat menyinggung lingkaran l_1 dan l_3 dan juga menyinggung m . Tentukan jari-jari R dan r !
- Urutan bilangan 2^{4444} , 3^{3333} , 4^{2222} dari yang terkecil sampai yang terbesar adalah...
- Lima pasang suami istri akan duduk di 10 kursi secara memanjang. Banyaknya cara mengatur tempat duduk mereka sehingga setiap pasang suami istri duduk berdampingan adalah....
- Diketahui $2^{2x} + 2^{-2x} = 7$. Nilai dari $2^{3x} + 2^{-3x} = \dots$
- Jumlah angka penyusun $2^{2011}5^{2010}$ adalah....
- Dalam suatu kelas, $\frac{3}{5}$ bagian siswanya adalah perempuan. Ke dalam kelas tersebut ditambahkan 5 siswa pria dan 5 siswa perempuan. Sekarang $\frac{3}{7}$ bagian siswanya adalah pria. Berapakah banyak siswa dalam kelas mula-mula?
- Jika bilangan bulat x dan y dibagi 4, maka bersisa 3. Jika bilangan $x-3y$ dibagi 4, maka bersisa....
- Dari angka 1, 2, 3, 4, dan 5 dapat dibuat bilangan lima digit dengan tidak ada angka yang berulang. Jika bilangan-bilangan tersebut disusun dari yang terkecil sampai terbesar, maka bilangan 43125 berada di urutan ke...
- Jumlah angka-angka dari hasil kali bilangan 999999999 dengan 12345679...
- Perhatikan gambar berikut ini. Jika sisi persegi di bawah ini memiliki panjang 1 cm, maka luas daerah yang diarsir adalah...(Nyatakan jawaban dalam n (phi))!



12. Jika $f(1) = 2$, $f(2x) = 4f(x) - 1$ dan $f(x+1) = f(x) + 2x + 1$, maka $f(7)$?
13. Dalam $\triangle ABC$ diketahui bahwa titik A adalah perpotongan garis $2x + y - 6 = 0$ dan garis $2x + 2y - 3 = 0$. Sedangkan koordinat B dan C berturut-turut adalah $(0,1)$ dan $(1,2)$. Tentukan persamaan garis tinggi dari sudut A pada segitiga tersebut!
14. Rata-rata dari empat bilangan berurutan adalah $2m - 1$, maka nilai dari empat kali bilangan terkecil adalah...
15. Berapakah digit terakhir dari 2002^{2011} ?
16. Jika $\frac{3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3}}{39} = 27$, maka nilai x adalah...
17. Tentukan semua bilangan bulat a yang memenuhi persamaan:

$$a^2 + 3a = \frac{8}{a^2 + 3a - 2}$$

Kunci Jawaban Latihan 1-1

1) 18 cm	5) 5	9) 45 kg
2) 3960 cm^2	6) $\frac{9}{100}$	10) 11
3) $\frac{2}{3}$	7) 76	11) 1
4) $12 : 25$	8) 46	12) Rp 64.000,00

Kunci Jawaban dan Pembahasan Latihan 1-2

1. Perhatikan suku pertama pada tiap kelompok, maka diperoleh barisan 1, 5, 11, 19 yang merupakan barisan bertingkat. Pada barisan bertingkat tersebut dapat dibuat rumus

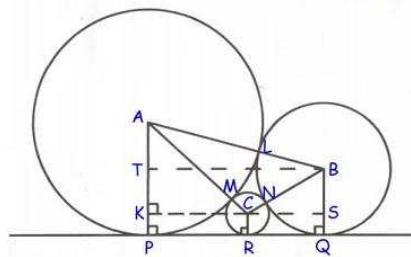
$$U_n = \frac{a + (n-1)b}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)c}{2!}$$

. Perhatikan barisan berikut ini

$$\begin{array}{ccccccc} a=1, & \underbrace{\quad 5, \quad}_{b=4} & \underbrace{\quad 11, \quad}_{6} & \underbrace{\quad 19, \quad}_{8} & \underbrace{\quad 29, \dots}_{10, \dots} & \text{Maka } U_n = \frac{1+(n-1)4}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)2}{2!} \\ & \underbrace{\quad \quad}_{c=2} & \underbrace{\quad \quad}_{2} & \underbrace{\quad \quad}_{2} & & U_n = 1 + (n-1)4 + (n-1)(n-2) \end{array}$$

Dari U_n diperoleh suku pertama di kelompok ke-100 adalah 10099. Banyak suku di kelompok ke-100 ditunjukkan oleh suku terakhir dari barisan yang menyatakan banyaknya anggota dari masing-masing kelompok, yaitu 2,3,4,...,101. Sehingga Jumlah bilangan di kelompok ke 100, dengan rumus deret aritmetika diperoleh $S_{100} = \frac{101}{2} (2.10099 + (101 - 1)2) = 1030099$

- Untuk mencari hubungan antara dua lingkaran yang saling bersinggungan dan sebuah garis yang menyinggung dua lingkaran tersebut, diperoleh ilustrasi sebagai berikut.



$$(PR)^2 = (CK)^2 = (AC)^2 - (AK)^2$$

$$(RQ)^2 = (CS)^2 = (BC)^2 - (BS)^2$$

$$(PR)^2 = (AM + MC)^2 - (AP - KP)^2$$

$$(RQ)^2 = (BN + NC)^2 - (BQ - SQ)^2$$

$$(PR)^2 = (a + c)^2 - (a - c)^2$$

$$(RQ)^2 = (b + c)^2 - (b - c)^2$$

$$(PR)^2 = a^2 + c^2 + 2ac - a^2 - c^2 + 2ac \quad (RQ)^2 = b^2 + c^2 + 2bc - b^2 - c^2 + 2bc$$

$$PR = 2\sqrt{ac}$$

$$RQ = 2\sqrt{bc}$$

Dengan cara yang sama diperoleh juga bahwa $PQ = 2\sqrt{ab}$

$$PQ = PR + RQ$$

$$2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$$

Misalkan $a, b, c = R$ berturut-turut adalah jari-jari lingkaran l_1, l_2 , dan l_3 maka

$$a = b = 1 \text{ cm, maka } \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{1 \cdot c} + \sqrt{1 \cdot c} \Leftrightarrow c = R = \frac{1}{4} \text{ cm}$$

Dengan cara yang sama r untuk jari-jari l_4 diperoleh $\sqrt{1 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{1 \cdot c} + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot c} \Leftrightarrow$

$$c = r = \frac{1}{9} \text{ cm}$$

- $4^{2222} = ((2)^2)^{2222} = 2^{4444} = ((2)^4)^{1111} = (16)^{1111} < 3^{3333} = (27)^{1111}$
- Karena ada 5 pasang dengan masing-masing pasang ada 2 kemungkinan cara duduk, maka $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2^5 = 3840$ cara
- $(2^x + 2^{-x})^2 = 2^{2x} + 2^{-2x} + 2 = 7 + 2 = 9 \Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 3$
 $(2^x + 2^{-x})(2^{2x} + 2^{-2x}) = 2^{3x} + 2^{-3x} + 2^x + 2^{-x}$

$$(3)(7) = 2^{3x} + 2^{-3x} + 3 \Leftrightarrow 2^{3x} + 2^{-3x} = 18$$

$$6. \quad 2^{2011} 5^{2010} = 2 \cdot 2^{2010} 5^{2010} = 2(2.5)^{2010} = 2 \cdot (10)^{2010}$$

Jumlah digit dari $2 \cdot (10)^{2010}$ adalah 2

7. Misal banyak siswa laki-laki semula l dan siswa perempuan semula p , maka $l:p = 2:3$. Sehingga $l = \frac{2}{3}p$. Karena bertambah 5 laki-laki dan 5 perempuan dan perbandingan laki-laki dan perempuan menjadi 3:4 diperoleh persamaan $\frac{3}{4} = \frac{\frac{2}{3}p+5}{p+5} \Leftrightarrow p = 15$. Karena $p = 15$ maka $l = 10$ dan jumlah siswa laki-laki dan perempuan $15+10 = 25$ siswa

8. x dibagi 4 bersisa 3 maka $x = 4m + 3$
 y dibagi 4 bersisa 3 maka $y = 4n + 3$

Sehingga :

$$x - 3y = 4m + 3 - 3(4n + 3)$$

$$x - 3y = 4m + 3 - 12n - 9$$

$$x - 3y = 4m - 12n - 6$$

$$x - 3y = 4(m - 3n) - 6$$

$$x - 3y = 4(m - 3n + 2 - 2) - 6$$

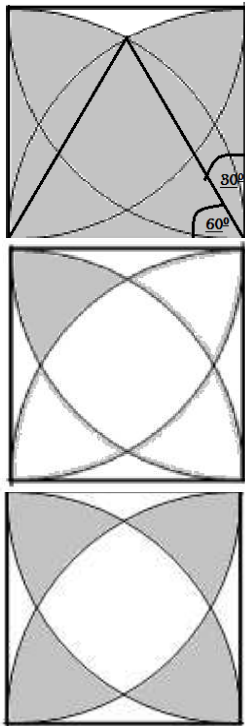
$$x - 3y = 4(m - 3n - 2) + 8 - 6$$

$$x - 3y = 4(m - 3n - 2) + 2$$

Ini berarti $x - 3y$ dibagi 4 bersisa 2

9. Karena tidak boleh ada angka yang berulang dengan aturan perkalian diperoleh $5.4.3.2.1=120$ buah bilangan. Bilangan 43125 berada di 24 bagian yang keempat ($120:5$ bilangan yang menunjukkan digit pertama). Dengan cara mengurutkan diketahui bahwa bilangan ini berada di urutan ke-85
10. $999999999.12345679 = (10000000000-1) 12345679 = 1234567900000000000 - 12345679 = 123456789987654321$, yang jumlah digitnya adalah $2(1+2+3+\dots+9) = 90$

11.



Luas daerah yang tidak diarsir pada gambar di samping dapat diperoleh dengan cara $L_{\text{tidak diarsir}} = L_{\square} -$

$$2L_{\text{juring } \odot} - L_{\Delta} \Leftrightarrow L_{\text{tidak diarsir}} = 1^2 - 2 \cdot \frac{30}{360} 1^2 \pi -$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12 - 2\pi - 3\sqrt{3}}{12} \dots L_{\alpha})$$

Luas 1 daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah

$$L_{\square} - L_{\frac{1}{4}\odot} - 2L_{\alpha} = 1^2 - \frac{1}{4} 1^2 \pi - 2 \left(\frac{12 - 2\pi - 3\sqrt{3}}{12} \right) =$$

$$\left(\frac{6\sqrt{3} + \pi - 12}{12} \right) \text{ cm}$$

Jadi luas gambar yang diarsir pada gambar di samping

$$\text{adalah } 4 \left(\frac{6\sqrt{3} + \pi - 12}{12} \right) \text{ cm} = \left(2\sqrt{3} - 4 + \frac{\pi}{3} \right) \text{ cm}$$

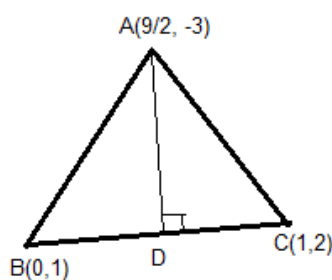
12. $f(1) = 2, f(2x) = 4f(x) - 1$ dan $f(x + 1) = f(x) + 2x + 1$. Dengan cara looking backward, diperoleh $f(2) = f(2.1) = 4f(1) - 1 = 4.2 - 1 = 7$

$$f(3) = f(2 + 1) = f(2) + 2.2 + 1 = 7 + 5 = 12$$

$$f(6) = f(2.3) = 4f(3) - 1 = 4.12 - 1 = 47$$

$$f(7) = f(6 + 1) = f(6) + 2.6 + 1 = 47 + 13 = 60$$

13.



Dengan cara eliminasi/substitusi diperoleh perpotongan

garis $2x + y - 6 = 0$ dan $2x + 2y - 3 = 0$ di $A\left(\frac{9}{2}, -3\right)$

(lihat gambar). m_{BC} adalah gradien garis yang melewati

titik B dan C, maka $m_{BC} = \frac{2-1}{1-2} = 1$ Misalkan m_{AD} adalah

gradien garis yang melewati titik A, maka $m_{BC} \cdot m_{AD} =$

-1 (karena $AD \perp BC$). Sehingga $m_{AD} = -1$

Persamaan garis tinggi dari sudut A pada segitiga tersebut

$$\text{adalah } y - (-3) = -1 \left(x - \frac{9}{2} \right) \Leftrightarrow 2y + 2x - 3 = 0$$

14. Misalkan empat bilangan dari yang terkecil secara berturut-turut $a, a + 1, a + 2$, dan $a + 3$. Karena rata-rata keempat bilangan itu $2m - 1$, maka $a + a + 1 + a + 2 + a + 3 = 4(2m - 1) \Leftrightarrow 4a + 6 = 8m - 4 \Leftrightarrow 4a =$

$8m - 10$. Dengan demikian empat kali bilangan terkecil adalah $4a = 8m - 10$

15. Perhatikan pola berikut ini. (Find a pattern)

$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16$. Digit terakhir ini berulang setiap empat kali sekali (2,4,8,16). $2002^{2011} = 2002^{4 \cdot 502 + 3}$. Oleh karena pangkat dari bilangan ini bersisa 3 jika dibagi 4, maka digit terakhir bilangan ini adalah 8

$$16. \frac{3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3}}{39} = 27 \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x + 27 \cdot 3^x}{3 \cdot 13} = 27 \Leftrightarrow \frac{3^x(3+9+27)}{39} = 27 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3}}{39} = 27 \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3$$

17. Misalkan $a^2 + 3a = \frac{8}{a^2 + 3a - 2}$ adalah $x = \frac{8}{x-2} \Leftrightarrow x(x-2) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2) = 0$. Untuk $x = 4$, maka $a^2 + 3a = 4$, sehingga nilai a yang mungkin $a = 1, a = -4$. Untuk $x = -2$, maka $a^2 + 3a = -2$, sehingga nilai a yang mungkin $a = -2, a = -1$

BAB 2 BILANGAN

A. Keterbagian

1. Keterbagian dan Pembagian Bersisa

Suatu bilangan dikatakan habis dibagi oleh suatu bilangan lain jika hasil baginya adalah bilangan bulat. Misalnya 6 habis dibagi 3 karena $6 : 3 = 2$ sedangkan 7 tidak habis dibagi 3 karena $7 : 3 = 2 \frac{1}{3}$ (bukan bilangan bulat). 6 habis dibagi 3 dinotasikan dengan $3|6$ sedangkan 7 tidak habis dibagi 3 dinotasikan dengan $3 \nmid 7$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa a membagi b (diberi simbol $a|b$), jika ada suatu bilangan bulat k sedemikian hingga $b = ka$. Sedangkan jika a tidak habis membagi b, maka ada bilangan bulat c yang merupakan sisa dari pembagian b oleh a, sehingga dapat ditulis sebagai bentuk $b = ka + c$.

Sifat: Jika $a|b$ dan $c|b$ maka $ac|b$. Contoh : $3|72$ dan $4|72$, maka $12|72$

Sifat-sifat khusus pada pembagian bilangan bulat

- a. Suatu bilangan terbagi oleh 9 jika dan hanya jika jumlah angka-angkanya terbagi oleh 9
- b. Suatu bilangan terbagi oleh 3 jika dan hanya jika jumlah angka-angkanya terbagi oleh 3
- c. Suatu bilangan terbagi oleh 2 jika dan hanya jika angka terakhirnya terbagi oleh 2
- d. Suatu bilangan terbagi oleh 4 jika dan hanya jika dua angka terakhirnya habis dibagi oleh 4
- e. Suatu bilangan terbagi oleh 8 jika dan hanya jika tiga angka terakhir bilangan tersebut habis dibagi 8
- f. Suatu bilangan terbagi oleh 6 jika dan hanya jika bilangan tersebut habis dibagi oleh 2 dan habis pula dibagi oleh 3
- g. Jika $abcdefg....$ adalah suatu bilangan, maka $abcdefg$ habis dibagi 11 jika dan hanya jika $11|(a+c+e+g+...)-(b+d+f+...)$
- h. suatu bilangan habis dibagi a dan juga habis dibagi b, jika dan hanya bilangan tersebut akan habis dibagi ab dengan syarat a dan b relatif prima.

(Dua bilangan dikatakan relatif prima, jika faktor persekutuan terbesarnya (FPB) dua bilangan tersebut sama dengan 1). Contoh: 36 habis dibagi 4 dan 3, maka 36 habis dibagi 12 (4×3). Sedangkan 36 habis dibagi 12 dan 6, tetapi 36 tidak habis dibagi 72 (12×6)

Contoh:

- 1) Tentukan nilai p yang merupakan digit dalam bilangan dalam persamaan berikut ini.

$$81 \times 586794 = 475p0p14$$

Jawab:

Bilangan $475p0p14$ habis dibagi 9 karena hasil perkalian dari 81. Oleh karena itu, jumlah digit-digitnya habis dibagi 9 pula. Dengan kata lain $9 \mid (4+7+5+0+1+4+2p) = 9 \mid (21+2p)$. Sedangkan bilangan terdekat dengan 21 yang habis dibagi 9 adalah 27, maka persamaan menjadi $21+2p = 27$, sehingga $p = 3$.

- 2) 100 jika dibagi x memberi sisa 4, sedangkan 90 jika dibagi y memberi sisa 10. Tentukan nilai x !

Jawab: 100 dibagi x sisa 4 $\rightarrow 100 = mx + 4 \rightarrow 96 = mx$, ini berarti $x \mid 96$. Sedangkan 90 dibagi x sisa 10 $\rightarrow 90 = nx + 10 \rightarrow 80 = nx$, ini berarti $x \mid 80$. Dengan demikian, x adalah FPB dari 96 dan 80, yaitu 16.

B. Sifat Bilangan Berpangkat

1. Arti bilangan berpangkat: $a^m = a \times a \times a \times a \times \dots \times a$ (a sebanyak m faktor)
2. Sifat-sifat pangkat bulat dan pecahan

$$\begin{array}{lll} \text{a. } a^m \cdot a^n = a^{m+n} & \text{e. } a^m \cdot b^m = (ab)^m & \text{i. } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \text{b. } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & \text{f. } \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & \\ \text{c. } (a^m)^n = a^{mn} & \text{g. } a^0 = 1 & \\ \text{d. } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} & \text{h. } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} & \end{array}$$

Contoh: Jika $\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5} \times \frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5} = 2^p$, tentukan nilai p !

Jawab: Dengan sifat pangkat bilangan diperoleh,

$$\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5} \times \frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5} = 2^p \Leftrightarrow \frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \times \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = \frac{4^{5+1}}{3^{5+1}} \times \frac{6^{5+1}}{2^{5+1}} = \frac{(4 \cdot 6)^6}{(3 \cdot 2)^6} = 2^p$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4.6}{3.2}\right)^6 = 2^p \Leftrightarrow 4^6 = 2^p \Leftrightarrow (2^2)^6 = 2^p \Leftrightarrow 2^{12} = 2^p$$

Dari persamaan terakhir diperoleh bahwa nilai $p = 12$

Contoh: Tentukan penyelesaian dari persamaan $9^{x+3} = \sqrt[4]{27^{x+5}}$

Jawab: $9^{x+3} = \sqrt[4]{27^{x+5}}$

$$3^{2(x+3)} = 3^{\frac{3(x+5)}{4}}$$

$$3^{2x+6} = 3^{\frac{3x+15}{4}}$$

$$2x + 6 = \frac{3x+15}{4}$$

$$4(2x + 6) = 3x + 15$$

$$8x + 24 = 3x + 15$$

$$5x = -9$$

$$x = -\frac{9}{5}$$

C. Pemfaktoran Bilangan dengan Bantuan Aljabar

1. Sifat bilangan Real: Komutatif ($a + b = b + a$), asosiatif ($(a + b) + c = a + (b + c)$), distributif ($a(b \pm c) = ab \pm ac$)
2. Sifat-sifat pemfaktoran:
 - a. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
 - b. $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
 - c. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
 - d. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Contoh : $\frac{83^2+17^3}{83 \times 66 + 17^2} = \dots$

Jawab: Dengan menggunakan rumus $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,

$$\frac{83^2+17^3}{83 \times 66 + 17^2} = \frac{(83+17)(83^2-83 \times 17+17^2)}{83 \times 66 + 17^2} = \frac{100 \times (83 \times 66 + 17^2)}{83 \times 66 + 17^2} = 100$$

D. Modullo

Sistem bilangan yang umum digunakan adalah bilangan modulo 10, yaitu 0, 1, 2, 3, ..., 9. Misalkan 36 dalam modulo 10 ditulis $36 \pmod{10} \leftrightarrow 36 = 3 \times 10 + 6 \pmod{10}$, atau berarti 36 akan bersisa 6 jika dibagi dengan 10, karena $10 \mid (36 - 6)$. Secara umum sistem bilangan modulo dapat ditulis sebagai berikut.

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Yang berarti $m \mid (a - b)$. Sifat-sifat sistem bilangan modulo berikut ini dapat digunakan untuk mencari sisa pembagian.

Jika $a \equiv \alpha \pmod{m}$ dan $b \equiv \beta \pmod{m}$, maka:

$$1) a + b \equiv \alpha + \beta \pmod{m} \quad 3) ab \equiv \alpha\beta \pmod{m}$$

$$2) a - b \equiv \alpha - \beta \pmod{m} \quad 4) b^2 \equiv \beta^2 \pmod{m}$$

Contoh 1 : Tentukan sisa pembagian 110 oleh 7

$$\begin{aligned} \text{Jawab : } 110 \pmod{7} &\equiv 15 \times 7 \pmod{7} + 5 \pmod{7} \\ &\equiv 0 \pmod{7} + 5 \pmod{7} \\ &\equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

Jadi sisa pembagian 110 oleh 7 adalah 5.

Contoh 2: Tentukan bilangan satuan dari 23^{2012}

$$\begin{aligned} \text{Jawab: } 23^{2012} \pmod{10} &\equiv (23)^{4 \times 503} \pmod{10} \\ &\equiv (3)^{4 \times 503} \pmod{10} \\ &\equiv (3^4)^{503} \pmod{10} \\ &\equiv 81^{503} \pmod{10} \\ &\equiv 1^{503} \pmod{10} \quad \text{Jadi bilangan satuan dari } 23^{2012} \text{ adalah } 1 \\ &\equiv 1 \pmod{10} \end{aligned}$$

Alternatif: Satuan dari bilangan dengan satuan 3 jika dipangkatkan secara berturut-turut akan berulang yaitu, 3,9,7,1. Karena 2012 habis dibagi 4, maka satuan dari 23^{2012} adalah 1.



Latihan 2-1

Selesaikan soal-soal berikut ini !

- 100 jika dibagi y bersisa 4, sementara 90 jika dibagi y sisanya 18. Tentukan nilai y !
- Tentukan sisa 3^{1990} jika dibagi 41.
- Tentukan nilai n yang memenuhi persamaan $5^n + 5^n + 5^n + 5^n + 5^n = 25^{20}$
- Sebuah bilangan 8 digit 123456 d 3, jika dibagi 6 memberikan sisa 5. Tentukan nilai d yang mungkin!
- Tentukan nilai dari $2008 \times 20082009 - 2009 \times 20082008$
- Tentukan nilai dari $\frac{3^2+1}{3^2-1} + \frac{5^2+1}{5^2-1} + \frac{7^2+1}{7^2-1} + \dots + \frac{99^2+1}{99^2-1}$
- Nilai dari $\frac{20092008^2}{20092007^2+20092009^2-2}$ adalah...

8. Jika $\sqrt{p - \sqrt{p - \sqrt{p - \sqrt{p - \dots}}}} = 5$, tentukan nilai p !
9. Tentukan bilangan 4 digit terkecil sehingga:
Bilangan itu dibagi 10 bersisa 3, bila dibagi 12 bersisa 5, bila dibagi 15 bersisa 8
10. Jumlah semua digit dari $4^{1008}5^{2012}$ adalah...
11. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat positif (m,n) yang merupakan solusi dari persamaan $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$
12. Bilangan tiga angka terkecil yang merupakan bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik (pangkat tiga) sempurna sekaligus adalah...
13. Bilangan 2004 memiliki faktor selain 1 dan 2004 sebanyak...
14. Sisa pembagian 2^{13} oleh 13 adalah...
15. Semua n sehingga n dan $\frac{n+3}{n-1}$ keduanya merupakan bilangan bulat adalah...
16. Tentukan bilangan asli terkecil yang memiliki tepat 12 faktor positif!
17. Tentukan sisanya jika 5^{308} dibagi 8.
18. Diantara empat bilangan 5256, 7018, 18623, 32571 yang habis dibagi 99 adalah...
19. Suatu bilangan terdiri dari 3 angka. Bilangan tersebut sama dengan 12 kali jumlah ketiga angkanya. Tentukan bilangan tersebut.
20. Tentukan angka puluhan dari 7^{707} .

unci Jawaban Latihan 2-1

1) 24	5) 0	9) 1013	13) 10	17) 5
2) 38	6) $49\frac{49}{100}$	10) 7	14) 2	18) 32.571
3) 39	7) $\frac{1}{2}$	11) 4 (12,3),(8,4),(6,6),(5,10)	15) -3, -2, 0, 2, 3, dan 5	19) 108
4) 2, 5, dan 8	8) 30	12) 729	16) 60	20) 4



Latihan 2-2

Selesaikan soal-soal berikut ini !

1. Tentukan nilai digit k dalam persamaan berikut ini.

$$2k99561 = (3(523 + k))^2$$

2. Tentukan banyaknya pembagi dari bilangan 2592.
3. Bilangan yang dinyatakan dalam $a679b$ ini habis dibagi 72. Berapakah nilai $-b$?
4. Jika $3996 = p^q r^s t^u$, dengan p , r , dan t adalah bilangan prima, maka nilai $p + q + r + s + t + u$ adalah...
5. Bilangan asli terbesar yang jika membagi bilangan 1723, 2010, dan 5741 selalu memberikan sisa 1 adalah...
6. $\frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \frac{1}{4^2+4} + \dots + \frac{1}{2004^2+2004} = \dots$
7. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots - 2010^2 + 2011^2 = \dots$
8. Nyatakan 1,23412341234..... ke dalam bentuk pecahan rasional yang paling sederhana!
9. Tentukan nilai x ($x \in$ bilangan rasional) pada persamaan berikut ini.

$$\sqrt[3]{(0,2)^x} = 25^{x+1}$$

10. Urutan hari berdasarkan pasaran kalender Jawa adalah Wage, Kliwon, Legi, Pahing, dan Pon. Jika hari ini adalah Minggu Pahing, 31 Agustus 2011, jatuh pada hari apakah 2012 hari lagi?
11. Misalkan N adalah bilangan bulat terkecil yang bersifat bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi 7, dan bersisa 4 jika dibagi 9. Hasil penjumlahan digit-digit dari N adalah...
12. Tentukan semua bilangan bulat positif m, n dengan n bilangan ganjil yang memenuhi $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12}$
13. $\frac{1^{-4}+2^{-4}+3^{-4}+4^{-4}+\dots}{1^{-4}+3^{-4}+5^{-4}+7^{-4}+\dots} = \dots$
14. $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{100 \times 101 \times 102} = \dots$
15. Sisa hasil pembagian $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 100^3$ oleh 7 adalah...

Kunci Jawaban dan Pembahasan Latihan 2-2

- $2k99561 = (3(523 + k))^2$, karena $9|(2+9+9+5+6+1+k)$ maka nilai k yang memenuhi adalah $k = 4$
- $2592 = 2^5 3^4$, untuk pangkat dari bilangan 2 ada 0,1,2,3,4,5 (6 kemungkinan) dan untuk pangkat bilangan 3 ada 0,1,2,3,4 (5 kemungkinan). Jadi ada $6 \times 5 = 30$ pembagi bilangan 2592
- Karena $72|a679b$ maka $8|a679b$ yang terjadi jika $8|79b$, sehingga nilai b yang mungkin adalah 2 dan $9|a679b$ yang terjadi jika $9|(a+6+7+9+b)$, sehingga nilai a yang mungkin adalah 3. Oleh karena itu $a - b = 1$
- $3996 = 2^2 3^3 37 \Leftrightarrow p^q r^s t^u$, maka $p + q + r + s + t + u = 47$
- $1723 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 41 + 1$
 $2010 = 7^2 \cdot 41 + 1$
 $5741 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 41 + 1$

Dari ketiga faktorisasi tersebut maka dapat disimpulkan bahwa bilangan bulat terbesar yang membagi ketiga bilangan tersebut dengan memberikan sisa satu adalah 41

- $$\frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \frac{1}{4^2+4} + \dots + \frac{1}{2004^2+2004} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2004 \cdot 2005}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{2004} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005} = \frac{2004}{2005}$$
- $$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots - 2010^2 + 2011^2 = (3 \cdot -1) + (7 \cdot -1) + (11 \cdot -1) + \dots + (4019 \cdot -1) + 2011^2 = -(3 + 7 + 11 + \dots + 4019) + 2011^2 = -\left(\frac{1005}{2}(3 + 4019)\right) + 2011^2 = 2.023.066$$
- Misalkan $1,2341234\dots = x$

$$\begin{array}{r} 12341,2341234\dots = 10.000x - \\ \hline x = \frac{12340}{9999} \end{array}$$
- $$\sqrt[3]{(0,2)^x} = 25^{x+1}$$

$$5^{\frac{-x}{3}} = 5^{2x+2}$$

$$x = -\frac{6}{7}$$
- Untuk hari, 7 membagi 2012 dengan memberikan sisa 3 (Rabu)
 Untuk jenis pasaran, 5 membagi 2012 dengan memberikan sisa 2 (Wage)

Untuk tanggal, rincian banyak hari dari tahun ke tahun diberikan melalui penjumlahan berikut secara berurutan mulai tahun 2011-2017, yaitu $122+366+365+365+365+366+63$ hari = 2012 hari, jatuh pada tanggal (4 Maret 2017). Dengan demikian, secara lengkap jatuh pada Rabu Wage, 4 Maret 2017.

11. N bersisa 4 jika dibagi 9, maka $N = 9.a + 4$. N bersisa 3 jika dibagi 7, maka $N = 9.7.a + 7.4 + 3$, sedangkan N bersisa 2 jika dibagi 5, maka $N = 9.7.5.a + 4.7.5 + 3.5 + 2$. Karena N terkecil, maka ambil $a=1$ sehingga $N = 1.9.7.5.a + 4.7.5 + 3.5 + 2 = 472$, sehingga jumlah digit-digitnya $4 + 7 + 2 = 13$
12. $12n + 48m = mn \Leftrightarrow (m - 12)(n - 48) = 576 = 3^2 2^6$. Karena n ganjil maka $n - 48$ juga ganjil. Faktor ganjil dari 576 adalah 1, 3, dan 3^2 . Jika $n - 48 = 1$ maka $n = 49, m - 12 = 576 \rightarrow m = 588$. Jika $n - 48 = 3$ maka $n = 51, m - 12 = 192 \rightarrow m = 204$. Jika $n - 48 = 9$ maka $n = 57, m - 12 = 64 \rightarrow m = 76$. Jadi pasangan (m,n) yang mungkin $(588,49);(204,51);(76,57)$
13. Misalkan $M = 1^{-4} + 2^{-4} + 3^{-4} + 4^{-4} + \dots$ dan $N = 1^{-4} + 3^{-4} + 5^{-4} + 7^{-4} + \dots$, maka $M - N = 2^{-4} + 4^{-4} + 6^{-4} + 8^{-4} + \dots$ atau $N = M - (2^{-4} + 4^{-4} + 6^{-4} + 8^{-4} + \dots) \Leftrightarrow N = M - 2^{-4}(1^{-4} + 2^{-4} + 3^{-4} + 4^{-4} + \dots) \Leftrightarrow N = M - \frac{1}{16}M = \frac{15}{16}M$. Akibatnya $\frac{M}{N} = \frac{16}{15}$
14. $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{100 \times 101 \times 102} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{100.101} - \frac{1}{101.102} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{101.102} \right] = \frac{2575}{10302}$
15. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 100^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100)^2 = (50 \times 101)^2 = 5050^2$

$$\begin{aligned} 5050^2(\text{mod } 7) &\equiv (721.7 + 3)^2(\text{mod } 7) \\ &\equiv (3)^2(\text{mod } 7) \\ &\equiv 9(\text{mod } 7) \\ &\equiv 2(\text{mod } 7) \end{aligned}$$

Jadi, sisa pembagiannya adalah 2

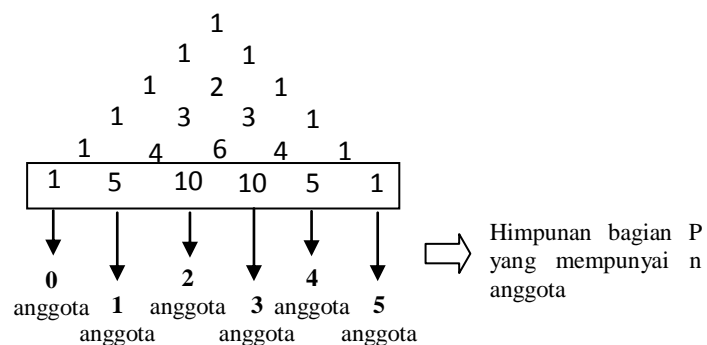
BAB 3

ALJABAR DAN PENGUKURAN

A. Himpunan

1. Himpunan Bagian

Untuk menentukan banyaknya himpunan bagian yang mungkin dari suatu himpunan yang mempunyai n anggota dirumuskan 2^n . Sedangkan untuk merinci himpunan bagian yang mempunyai anggota yang dikehendaki dapat digunakan segitiga Pascal. Perhatikan contoh penggunaan segitiga Pascal berikut ini.

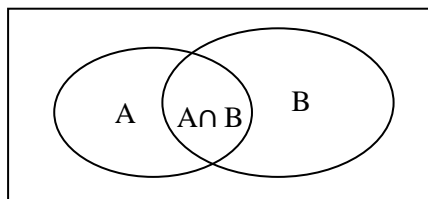


Contoh: Diketahui $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Misalkan $X \subseteq A$, maka banyak himpunan bagian X yang terdiri dari 4 anggota adalah...

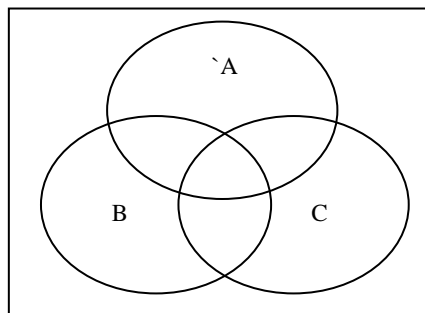
Jawab: Karena A memiliki 5 anggota, maka sesuai dengan segitiga Pascal di atas terdapat 5 himpunan bagian yang terdiri dari 4 anggota.

2. Operasi Himpunan

Perhatikan diagram Venn berikut ini.



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



$$\begin{aligned}
 n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\
 &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\
 &\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)
 \end{aligned}$$

B. Operasi Aljabar

1. Perpangkatan:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Catatan:

Perhatikan bahwa koefisien dari masing-masing suku adalah bilangan yang ditunjukkan dalam segitiga Pascal

2. Jumlah dan selisih kuadrat:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \text{ atau } a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Contoh: Jika $y^3 + y^{-3} = 7$, tentukan $y^6 + y^{-6}$!

$$\begin{aligned} \text{Jawab: } y^6 + y^{-6} &= (y^3 + y^{-3})^2 - 2y^3y^{-3} \\ &= 7^2 - 2 = 47 \end{aligned}$$

3. Manipulasi Aljabar

Manipulasi aljabar adalah teknik mengubah bentuk soal ke bentuk yang lebih sederhana sehingga lebih mudah dikerjakan.

Contoh: Tentukan solusi semua x anggota bilangan real yang memenuhi

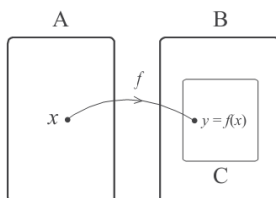
$$\text{persamaan: } x^2 - 2x + 3 = \frac{2}{2x^2 - 4x + 3}$$

Jawab: Dengan memisalkan $x^2 - 2x = p$, diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} p + 3 &= \frac{2}{2p+3} & \text{Sehingga untuk } p &= -\frac{7}{2} \\ (2p+3)(p+3) &= 2 & 2x^2 - 4x + 7 &= 0, \text{ tidak ada } x \in \mathbb{R} \\ 2p^2 + 9p + 7 &= 0 & \text{yang memenuhi,} \\ (2p+7)(p+1) &= 0 & \text{Untuk } p &= -1 \\ p &= -\frac{7}{2} \text{ atau } p = -1 & x^2 - 2x + 1 &= (x-1)^2 = 0 \\ & & \text{Jadi } x &= 1 \end{aligned}$$

C. Fungsi

Suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah pemetaan dari A ke B dimana untuk setiap x anggota A memiliki tepat satu anggota y di B.



$$f : x \mapsto y \text{ atau } f : x \mapsto f(x)$$

Catatan:

dibaca: fungsi f memetakan x anggota A ke y anggota B

Contoh 1: Jika $f(x) = x^2 - 3x + 2$, maka $f(x-1) = \dots$

Jawab: $f(x-1) = (x-1)^2 - 3(x-1) + 2 \Leftrightarrow f(x-1) = x^2 - 2x + 1 - 3x + 3 + 2 \Leftrightarrow f(x-1) = x^2 - 5x + 6$

Contoh 2: Jika $f(xy) = f(x+y)$ dan $f(11) = 11$, maka $f(49) = \dots$

Jawab: $f(49) = f(49.1) = f(49+1) = f(50) = f(2.25) = f(2+25) = f(27) = f(27.1) = f(27+1) = f(28) = f(4.7) = f(4+7) = f(11) = 11$

D. Persamaan dan Pertidaksamaan

Sistem persamaan linear 2 variabel (SPLDV)

Bentuk umum : $ax + by = c$

$$px + qy = r$$

Dengan menggunakan substitusi atau eliminasi, diperoleh (x,y) yang merupakan penyelesaian dari SPLDV di atas.

Sistem persamaan linear dan kuadrat

Bentuk umum: $ax + by = c$

$$px^2 + qx + ry = s$$

Contoh: Jika $x - y = 7$ dan $2x^2 + xy - 3y^2 = 28$, tentukan nilai $x + y$!

Jawab: $x - y = 7 \Rightarrow (x - y)^2 = 49$ dan

$$\begin{array}{l} 2x^2 + xy - 3y^2 = 28 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 49 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x^2 + 2xy - 6y^2 = 56 \\ \underline{x^2 - 2xy + y^2 = 49} + \end{array}$$

$$5x^2 - 5y^2 = 105 \Rightarrow x^2 - y^2 = 21$$

$$(x + y)(x - y) = 21$$

$$\text{Karena } x - y = 7, \text{ maka } 7(x + y) = 21 \Rightarrow x + y = 3$$

Pertidaksamaan

Definisi : Jika $a - b > 0$, maka $a > b$ dengan a, b anggota bilangan Real

Sifat-Sifat Pertidaksamaan:

Jika $a > b$, maka $a \pm c > b \pm c$

Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka $ac > bc$ atau $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $ac < bc$ atau $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$

Catatan:

Sifat-sifat di samping juga berlaku untuk tanda " \leq " dan " \geq "

Contoh: Diketahui a, b, c dan d bilangan asli yang memenuhi $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dan $c < a$. Jika $b \neq 1$ dan $c \neq d$, maka...

a. $\frac{a}{b} < \frac{b-a}{d-c}$

c. $\frac{a}{b} < \frac{b(d-1)}{d(b-1)}$

e. $\frac{a+b}{c+d} < \frac{a}{c}$

b. $\frac{b-a}{d-c} < \frac{a}{c}$

d. $\frac{b(d-1)}{d(b-1)} < \frac{a}{c}$

Jawab: Karena a, b, c, d bilangan asli maka a, b, c , dan $d > 0$ dan bulat.

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, berarti $ad < bc \Rightarrow ad - ac < bc - ac$ (karena $ac > 0$).

$$a(d - c) < c(b - a) \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c} \quad (\text{Jawaban a})$$

E. Perbandingan

1. Perbandingan Senilai

Komponen I	Komponen II
a	c
b	d
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow ad = bc$	

Contoh permasalahan : jumlah barang, harga barang,

2. Perbandingan Berbalik Nilai

Komponen I	Komponen II
a	c
b	d
$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} \longrightarrow ac = bd$	

Contoh permasalahan: kecepatan, waktu tempuh, banyak pekerja,

Contoh: Sebuah proyek direncanakan selesai dalam waktu 24 hari oleh 15 orang. Setelah berjalan selama 8 hari, proyek terhenti selama 6 hari karena kehabisan bahan baku. Agar proyek selesai tepat waktu, berapa tambahan pekerja yang dibutuhkan?

Jawab: Masalah ini dapat diselesaikan dengan perbandingan berbalik nilai. Misalkan x adalah tambahan pekerja yang dibutuhkan, maka diperoleh persamaan sebagai berikut. $24 \times 15 = 8 \times 15 + 10(15 + x) \Rightarrow x = 9$. Jadi butuh tambahan pekerja 9 orang.

F. Barisan dan Deret

1. Barisan bilangan

Suku-suku bilangan $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots$ merupakan barisan bilangan jika hubungan antar suku bilangan yang berurutan memiliki pola tertentu. Misalnya: 1, 4, 7, 10, ... (barisan bilangan dengan pola ditambah 2 (+2))

2. Barisan dan deret aritmetika

Pada barisan aritmetika $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots$ berlaku:

a) $U_2 - U_1 = U_4 - U_3 = \dots = U_n - U_{n-1} = b$ (beda)

b) $U_n = a + (n - 1)b$, dengan a = suku pertama

c) Jumlah n suku pertama $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$ atau $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$

Contoh barisan aritmetika : 3, 5, 7, 9, 11,...(beda 2)

3. Barisan dan deret geometri

Pada barisan geometri $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots$ berlaku:

a) $\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \dots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = r$ (rasio)

b) $U_n = ar^{n-1}$, a = suku pertama

c) Jumlah n suku pertama: $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ untuk $r > 1$ atau $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ untuk $r < 1$

Contoh barisan geometri: 2, 4, 8, 16, 32, 64,... (rasio 2)

4. Barisan bertingkat

Pada barisan bertingkat selisih antar suku barisan masih memiliki selisih/beda lagi. Contoh:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 5, & 11, & 19, & 29, & \dots \\ & \underbrace{\quad\quad}_{4} & \underbrace{\quad\quad}_{6} & \underbrace{\quad\quad}_{8} & \underbrace{\quad\quad}_{10}, & \dots \\ & & \underbrace{\quad\quad}_{2} & \underbrace{\quad\quad}_{2} & \underbrace{\quad\quad}_{2} & \dots \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccccccc} 1, & 5, & 11, & 19, & 29, & \dots \\ & \underbrace{\quad\quad}_{4} & \underbrace{\quad\quad}_{6} & \underbrace{\quad\quad}_{8} & \underbrace{\quad\quad}_{10}, & \dots \\ & & \underbrace{\quad\quad}_{2} & \underbrace{\quad\quad}_{2} & \underbrace{\quad\quad}_{2} & \dots \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Memiliki beda di tingkat 2} \\ \text{(barisan tingkat 2)} \end{array}$$

Untuk mencari suku ke- n dari barisan bertingkat, dapat digunakan rumus berikut.

$$U_n = \frac{a + (n-1)b}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)c}{2!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)d}{3!} + \dots$$

Keterangan: $4! = 4.3.2.1$ (baca 4 faktorial) dan $3! = 3.2.1$ dan seterusnya.

$$\begin{array}{ccccccc} a = U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5, \dots & , U_n \\ & \underbrace{\quad\quad}_{b} & \underbrace{\quad\quad}_{c} & \underbrace{\quad\quad}_{d} & \underbrace{\quad\quad}_{\dots} & \\ & & \underbrace{\quad\quad}_{c} & \underbrace{\quad\quad}_{d} & \underbrace{\quad\quad}_{\dots} & \\ & & & \underbrace{\quad\quad}_{d} & \underbrace{\quad\quad}_{\dots} & \\ & & & & \underbrace{\quad\quad}_{\dots} & \end{array}$$

Contoh: Tentukan U_{20} dari barisan 4, 5, 8, 13, 20,...

Jawab: $a = 4$ 5 8 13 20 $, U_n = \frac{4+(n-1)1}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)2}{2!}$

$$\begin{array}{ccccccc} & \underbrace{\quad\quad}_{b=1} & \underbrace{\quad\quad}_{3} & \underbrace{\quad\quad}_{5} & \underbrace{\quad\quad}_{7} & & \\ & & \underbrace{\quad\quad}_{c=2} & & & & \end{array}$$

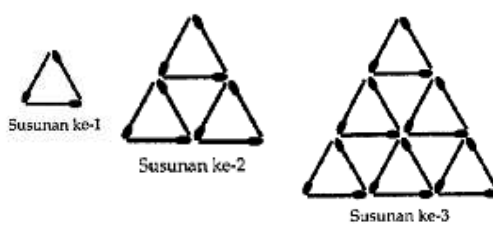
$$U_{20} = \frac{4 + (20-1)1}{1!} + \frac{(20-1)(20-2)2}{2!} = 365$$



Latihan 3-1

Selesaikan soal-soal berikut ini !

1. Di suatu kelas yang terdiri dari 40 siswa, diperoleh data perbandingan banyak siswa yang gemar baca buku dan siswa yang gemar menulis adalah 3:4, siswa yang gemar keduanya 8 orang, dan yang tidak gemar keduanya 6 orang. Berapakah siswa yang gemar membaca buku saja?
2. Banyak himpunan X yang memenuhi $\{1,2\} \subseteq X \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ adalah...
3. Diberikan fungsi kuadrat $ax^2 - 3x + c$. Jika $f(1) = 4$ dan $f(2) = 7$, maka $f(-1) = \dots$
4. Jika $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, maka untuk $x \neq 1$, maka $f(-x) = \dots$ (Nyatakan dalam $f(x)$)
5. Perbandingan $2x - y$ terhadap $x + y$ adalah $\frac{2}{3}$. Tentukan perbandingan x terhadap y .
6. Jika $a + b = 1$ dan $a^2 + b^2 = 2$, maka $a^4 + b^4 = \dots$
7. Diketahui $x + \frac{1}{x} = 3$, maka nilai $x^4 + x^3 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} = \dots$
8. Gaji David 20% lebih banyak dari gaji Andika. Ketika Andika memperoleh kenaikan gaji, gajinya menjadi 20% lebih banyak dari gaji David. Persentase kenaikan gaji Andika adalah ...
9. Agung mempunyai satu bundle tiket piala dunia untuk dijual. Pada hari pertama terjual 10 lembar tiket, hari kedua terjual setengah dari tiket yang tersisa, dan pada hari ketiga terjual 5 lembar tiket. Jika tersisa 2 lembar, maka banyaknya tiket dalam satu bundel adalah...
10.



Kohar menyusun batang korek api dengan susunan seperti gambar di samping. Berapakah batang korek api yang dibutuhkan untuk membuat susunan ke-20 !
11. Jika $\frac{1+3+5+\dots+(2a-1)}{2+4+6+\dots+2a} = \frac{115}{116}$, maka nilai $a = \dots$
12. Ada beberapa burung dan sangkar. Jika ke dalam setiap sangkar dimasukkan 7 ekor burung, maka akan tertinggal 1 ekor burung di luar. Sementara jika ke dalam setiap sangkar dimasukkan 9 ekor burung, maka terdapat 1 buah sangkar yang tidak terisi. Berapa banyak burung yang ada?
13. Koko pulang dari les pada waktu yang sama setiap hari. Jika ia mengendarai sepeda dengan kecepatan 20 km/jam, maka ia tiba di rumah pukul 16.30. Tetapi

jika ia mengendarai sepeda dengan kecepatan 10 km/jam, ia tiba di rumah pukul 17.15. Berapa kecepatan Koko naik sepeda agar ia dapat pulang pukul 17.00?

14. Jika $x + \frac{1}{y} = 5$, $y + \frac{1}{z} = 12$, $z + \frac{1}{x} = 13$, maka $xyz + \frac{1}{xyz} = \dots$
15. Dalam sekelompok wanita dan pria, jika 9 orang pria keluar, maka setiap pria mendapat pasangan 2 orang wanita. Tetapi jika 22 orang wanita keluar, maka setiap wanita mendapat pasangan 3 orang pria. Berapa banyak pria dalam kelompok mula-mula?
16. Jika $(a + 10), (a^2 - 1), (3a + 18)$ merupakan 3 suku pertama barisan aritmetika naik, tentukan suku ke-10! (Hint: nilai suku semakin besar)
17. Nilai dari $1 + \frac{12}{1 + \frac{12}{1 + \frac{12}{\dots}}}$ adalah...
18. Sebuah deret aritmetika mempunyai ketentuan $U_3 + U_5 + U_7 = 21$, hitunglah jumlah sembilan suku pertama deret tersebut!
19. Misalkan f suatu fungsi yang memenuhi $f(xy) = \frac{f(x)}{y}$ untuk semua bilangan real positif x dan y . Jika $f(100) = 3$, maka $f(10) = \dots$
20. Koko dan Kiki bekerja bersama-sama dan dapat menyelesaikan pekerjaan dalam waktu 6 hari. Kecepatan bekerja Koko dua kali lebih cepat daripada Kiki. Pekerjaan tersebut dapat diselesaikan oleh Koko jika dikerjakan sendiri selama...hari.
21. Jika $\frac{2ab}{a+b} = 1$, $\frac{ac}{a+c} = \frac{1}{7}$, dan $\frac{bc}{b+c} = 2$, maka $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \dots$
22. Jika $ac + ad + bc + bd = -24$ dan $c + d = 8$, maka nilai dari $a+b+c+d = \dots$
23. Ditentukan 3 buah persamaan dengan $x, y, z > 0$

$$(x - 1)(y - 2) = 12$$

$$(y - 2)(z - 3) = 20$$

$$(z - 3)(x - 1) = 15$$

Tentukan nilai $3x + 2y + 3z$.
24. Hari ini usiaku $\frac{1}{3}$ kali usia ayahku. Lima tahun yang lalu, usiaku $\frac{1}{4}$ kali usia ayahku pada waktu itu. Berapakah usiaku sekarang?

Kunci Jawaban 3-1

1) 10 orang	7) 65	13) 12 km/jam	19) 30
2) 8	8) 44%	14) 75	20) 9 hari
3) 10	9) 24 tiket	15) 24 pria	21) $\frac{19}{4}$
4) $\frac{1}{f(x)}$	10) 630	16) 96	22) 5
5) $\frac{5}{4}$	11) 115	17) 4	23) 48
6) $\frac{7}{2}$	12) 36	18) 63	24) 15 tahun

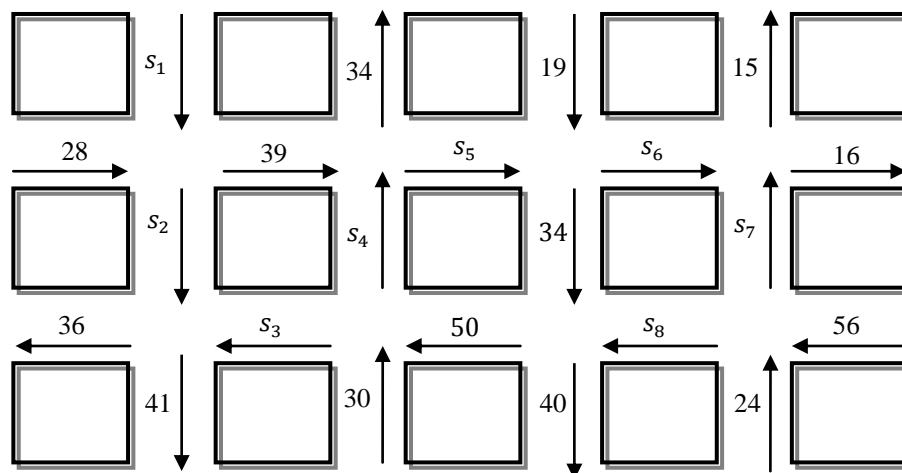
Latihan 3-2

Selesaikan soal-soal berikut ini !

1. Di kelas IX di sebuah sekolah adalah 240 anak. Mereka didata untuk mengikuti kegiatan ekstrakurikuler dan diperoleh data sebagai berikut: 100 siswa mengikuti tari, 90 siswa mengikuti musik, dan 80 siswa mengikuti olahraga, 50 siswa mengikuti tari dan musik, 40 siswa mengikuti musik dan olahraga, 30 siswa mengikuti tari dan olahraga. Jika 10 siswa mengikuti ketiganya, maka siswa yang tidak mengikuti kegiatan ekstrakurikuler sebanyak...
2. Diketahui kurva $y = x^2 + 7x + 2$ dan garis $y = 2x + 8$ saling berpotongan di titik A dan titik B. Jarak titik A dan B adalah...
3. Jika f adalah fungsi sehingga $f(xy) = f(x - y)$ dan $f(6) = 1$, maka $f(-2) - f(4) = \dots$
4. Tentukan persamaan garis yang melalui titik puncak $f(x) = x^2 - 6x + 5$ serta melalui titik potong garis $2x + 5y = 14$ dan $3x - 4y + 25 = 0$!
5. Jika $\frac{(y-x)^2}{z-x} - \frac{(y-z)^2}{z-x} = y - x$, dan $x \neq z$, maka nilai y sama dengan...
6. Misalkan a , b , dan c adalah bilangan real positif. Buktikan bahwa

$$4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$$
7. m, n adalah bilangan asli yang memenuhi $mn + m + n = 71$ dan $m^2n + mn^2 = 880$. Tentukan pasangan m dan n yang mungkin.
8. k adalah bilangan bulat positif yang memenuhi barisan $36 + k, 300 + k, 596 + k$ dimana kuadrat dari masing-masing bilangan tersebut membentuk barisan aritmatika. Tentukan k .

9. Pak Ahmad memiliki satu kantong permen yang akan dibagikan kepada anak-anak. Jika setiap anak diberi dua permen, maka di dalam kantong Pak Ahmad tersisa empat permen. Namun jika setiap anak diberi tiga permen, maka ada dua anak yang tidak mendapat bagian dan satu anak yang mendapatkan dua permen. Banyak permen Pak Ahmad di dalam kantong sebelum dibagikan adalah...
10. Berikut ini adalah gambar yang menunjukkan arah semut dan banyaknya semut ketika melewati jalan-jalan di antara meja-meja makanan.



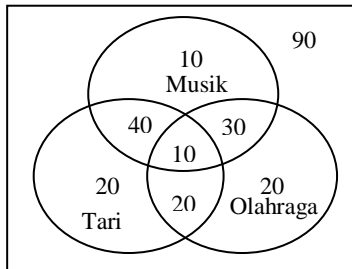
Berapakah s_1 ?

11. Jika $a^2 = 7b + 51$ dan $b^2 = 7a + 51$ dengan a dan b bilangan real berbeda, tentukan hasil kali ab .
12. Misalkan a dan b bilangan real positif. Jika $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 7$, maka $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \dots$
13. Untuk bilangan real a dan b didefinisikan suatu operasi $*$ dengan aturan sebagai berikut: $a * b = (a \times b) + (a + b)$ dimana simbol \times dan $+$ berturut-turut artinya adalah perkalian dan penjumlahan bilangan biasanya. Tentukan nilai a yang memenuhi ketentuan $a * a = 3$.
14. Tiga ekor ayam (Besar, Sedang, dan Kecil) ditimbang. Jika yang Besar dan Kecil ditimbang, beratnya adalah 2,6 kg. Jika yang Besar dan Sedang ditimbang, beratnya adalah 3 kg, dan jika yang Sedang dan Kecil ditimbang, beratnya adalah 2 kg. Berat ketiga ayam tersebut seluruhnya adalah
15. Misalkan f adalah fungsi yang memenuhi $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = 2x$ untuk setiap $x \neq 0$. Berapakah nilai $f(2)$?
16. Diberikan $\frac{x}{x^2+3x+1} = a$ ($a \neq 0$), tentukan $\frac{x^2}{x^4+3x^2+1}$ (Nyatakan dalam a)

17. Jika $x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$, maka $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \dots$
18. Pada sebuah bak penampungan air yang terisi penuh terdapat 3 kran yang berbeda ukuran. Jika kran 1 dan kran 2 dibuka bersama, air akan habis selama 70 menit. Jika kran 1 dan kran 3 dibuka bersama, air akan habis selama 84 menit. Sementara, jika kran 2 dan kran 3 dibuka bersama, air akan habis selama 140 menit. Tentukan berapa lama waktu yang diperlukan jika ketiga kran dibuka secara bersama!
19. Selesaikan sistem persamaan berikut ini:
- $$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ a + b + c + e &= 5 \\ a + b + d + e &= 1 \\ a + c + d + e &= 2 \\ b + c + d + e &= 4 \end{aligned}$$
20. Misalkan a dan b bilangan real yang berbeda sehingga $\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2$. Tentukan nilai $\frac{a}{b}$

Kunci Jawaban dan Pembahasan Latihan 2-2

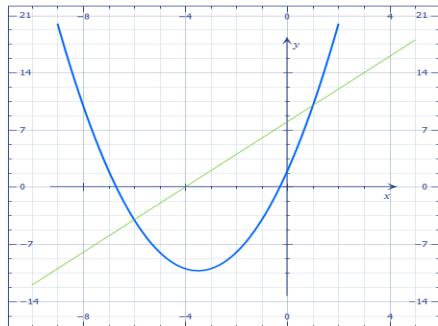
1.



Jadi, siswa yang tidak gemar ketiga hobi tersebut sebanyak 90 siswa

$$2. \quad y = x^2 + 7x + 2$$

$$y = 2x + 8$$



Jarak titik A $(-6, -4)$ dan B $(1, 10)$ pada grafik di atas adalah

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-6 - 1)^2 + (-4 - 10)^2} = 7\sqrt{5}$$

3. $f(xy) = f(x-y)$, Diketahui $f(6) = 1$

$$f(6) = f(3 \cdot 2) = f(3-2) = 1, \text{ maka } f(1) = 1$$

$$f(2) = f(2 \cdot 1) = f(2-1) = f(1) = 1$$

$$f(3) = f(3 \cdot 1) = f(3-1) = f(2) = 1$$

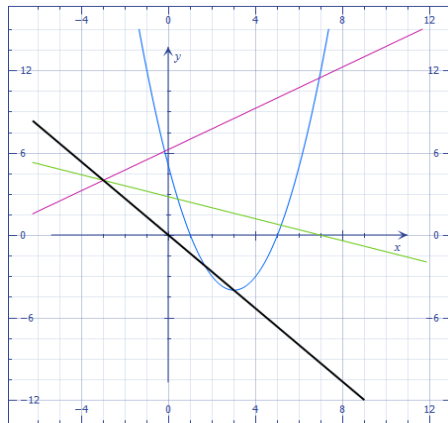
$$f(4) = f(4 \cdot 1) = f(4-1) = f(3) = 1, \text{ Selanjutnya } f(-2) = f(2(-1)) = f(2-(-1)) = f(3) = 1. \text{ Jadi } f(-2) - f(4) = 1 - 1 = 0$$

4. $y = x^2 - 6x + 5 \dots\dots\dots 1)$

$$2x + 5y = 14 \dots\dots\dots 2)$$

$$3x - 4y + 25 = 0 \dots\dots\dots 3)$$

Dari ketiga persamaan di atas diperoleh $6y + 8x = 0$ yang melewati titik puncak ...1) di $(3, -4)$, dan titik potong 2) dan 3) di $(-3, 4)$. Lihat grafik di bawah ini.



5. $\frac{(y-x)^2 - (y-z)^2}{z-x} = y - x, z \neq x$

$$(y - x + y - z)(y - x - y + z) = (z - x)(y - x)$$

$$(2y - x - z)(z - x) = (z - x)(y - x)$$

$$2y - y = -x + x + z$$

$$y = z$$

6. Karena $a, b > 0$, maka $a + b > 0$ dan $(a - b)^2 \geq 0$

$$(a + b)(a - b)^2 \geq 0$$

$$a^3 - a^2b - ab^3 + b^3 \geq 0$$

$$3a^3 + 3b^2 \geq 3a^2b + 3ab^2$$

$$4a^3 + 4b^2 \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3$$

$$4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3 \text{ (terbukti)}$$

7. $mn + m + n = 71$

$$m^2n + mn^2 = 880, \text{ sehingga } mn(m + n) = 880$$

$$mn + \frac{880}{mn} = 71$$

$$(mn)^2 - 71mn + 880 = 0$$

$$(mn - 16)(mn - 55) = 0$$

- Jika $mn=16$, maka $m + n = 71 - 16 = 55$

Nilai (m,n) yang memenuhi $mn=16$ adalah $(1,16), (2,8), (8,2)$, dan $(16,1)$ tetapi tidak ada nilai yang memenuhi $m + n = 55$

- Jika $mn=55$, maka $m + n = 71 - 55 = 16$

Nilai (m,n) yang memenuhi $mn=55$ adalah $(1,55), (5,11), (11,5)$, dan $(55,1)$ tetapi tidak ada nilai yang memenuhi $m + n = 16$ adalah $m=5$ dan $n=11$ atau $m=11$ dan $n=5$

8. Misal ketiga barisan aritmetika tersebut adalah $a - b, a, a + b$. Kuadratnya adalah $(a - b)^2, a^2, (a + b)^2$

$$a^2 + b^2 - 2ab = 36 + k, a^2 = 300 + k \text{ dan } a^2 + b^2 + 2ab = 596 + k$$

$$a^2 - (a^2 + b^2 - 2ab) = 300 + k - (36 + k) = 264$$

$$b(2a - b) = 264 \dots 1)$$

$$a^2 + b^2 + 2ab - a^2 = 596 + k - (300 + k)$$

$$b(2a + b) = 296 \dots 2)$$

Dari 1) dan 2) diperoleh $296(2a - b) = 264(2a + b)$ yang ekuivalen dengan $4a = 35b$. Dari persamaan 1) diperoleh $b(4a - 2b) = 528 \rightarrow b = \pm 4 \rightarrow a = \pm 35$, sehingga $(a - b)^2 = 31^2 = 36 + k \rightarrow k = 925$

9. Misalkan a adalah banyak anak yang ada dalam kelompok tersebut, maka dapat dibuat persamaan $2a + 4 = 3(a - 2) + 2$ yang ekuivalen dengan $a = 8$. Karena banyak permen semula $2a + 4$, maka banyak permen adalah $2(8) + 4 = 20$ buah.

10. Sistem persamaan berikut ini menggambarkan perjalanan semut

$$s_8 + 34 = 50 + 40 \rightarrow s_8 = 56$$

$$s_7 + s_8 = 56 + 24 \rightarrow s_7 = 24$$

$$s_6 + s_7 = 15 + 16 \rightarrow s_6 = 7$$

$$s_5 + 19 = s_6 + 34 \rightarrow s_5 = 22$$

$$s_4 + 39 = 34 + s_5 \rightarrow s_4 = 17$$

$$s_3 + s_4 = 50 + 30 \rightarrow s_3 = 63$$

$$s_2 + s_3 = 36 + 41 \rightarrow s_2 = 15$$

$$s_1 + 28 = s_2 + 39 \rightarrow s_1 = 26$$

11. $a^2 - b^2 = 7(b - a) \rightarrow (a - b)(a + b) = 7(b - a)$. Karena $a \neq b$ maka $a + b = -7$. Sedangkan $a^2 + b^2 = 7(a + b) + 102 \rightarrow (a + b)^2 - 2ab = 7(a + b) + 102 \rightarrow (-7)^2 - 2ab = 7(-7) + 102 \rightarrow ab = -2$

12. $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 = 9$. Karena a dan b positif, maka $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \sqrt{9} = 3$

13. Karena $a * b = (a \times b) + (a + b)$, maka $a * a = (a \times a) + (a + a) = 3 \Leftrightarrow a^2 + 2a = 3 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow (a + 3)(a - 1) = 0$. Jadi nilai a yang memenuhi adalah $a = 3$ atau $a = 1$

14. $B + K = 2,6$

$B + S = 3$ Dari ketiga persamaan tersebut diperoleh $2(B + S + K) = 7,6$

$S + K = 2$

$B + S + K = 3,8$

Jadi berat ketiga ayam tersebut adalah 3,8 kg

15. $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = 2x$

Untuk $x = \frac{1}{2}$, maka $f(2) + 2f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$
 Untuk $x = -2$, maka $f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f(2) = -4$ } Dengan SPLDV diperoleh $f(2) = \frac{9}{2}$

16. $\frac{x}{x^2 + 3x + 1} = a \ (a \neq 0) \Leftrightarrow \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3} = a \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{1 - 3a}{a} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - 6a + 9a^2}{a^2}$

$$\frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 3} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1 - 6a + 9a^2}{a^2} + 3} = \frac{a^2}{12a^2 - 6a + 1}$$

17. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 47 + 2 = 49$. Jadi $x + \frac{1}{x} = 7$

$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \frac{1}{x} + 2 = 7 + 2 = 9$. Jadi $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{9} = 3$

18. Misalkan t_1, t_2, t_3 berturut-turut waktu kran 1, 2, 3 jika dibuka sendiri-sendiri.

Maka jika 2 kran dibuka bersama, diperoleh persamaan:

$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{70}$
 $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_3} = \frac{1}{84}$
 $\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{1}{140}$ } Misalkan t_{123} = waktu yang dibutuhkan jika ketiga kran dibuka, maka berlaku hubungan $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{1}{t_{123}}$
 Dari persamaan di samping $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{7}{420}$

Maka, $\frac{1}{t_{123}} = \frac{7}{420} \Rightarrow t_{123} = 60$ menit.

19. Solusi : Jumlahkan semua persamaan di atas didapat

$$4(a + b + c + d + e) = 12 \rightarrow a + b + c + d + e = 3$$

Maka $0 + e = 3$ sehingga $e = 3$

$5 + d = 3$ sehingga $d = -2$, $1 + c = 3$ sehingga $c = 2$, $2 + b = 3$ sehingga $b = 1$,

$4 + a = 3$ sehingga $a = -1$. Jadi, penyelesaian sistem persamaan tersebut adalah

$$(a, b, c, d, e) = (-1, 1, 2, -2, 3)$$

20. Karena $\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2$, maka $\frac{a}{b} + \frac{\frac{a}{b}+10}{1+10\frac{a}{b}} = 2$. Misal $\frac{a}{b} = x$, maka $\frac{x+10}{1+10x} = 2 -$

$$x \Leftrightarrow x + 10 = 2 - 10x^2 + 19x \Leftrightarrow (5x - 4)(x - 1) = 0. \text{ Sehingga } x = \frac{4}{5} \text{ atau}$$

$x = 1$. Karena $a \neq b$, maka $x \neq 1$. Jadi $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

BAB 3

GEOMETRI

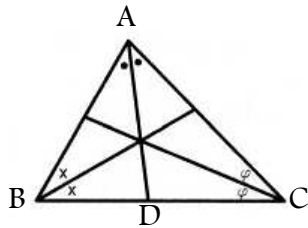
A. Segitiga

Macam-macam garis pada segitiga

a. Garis bagi

Garis bagi adalah garis yang membagi sebuah sudut segitiga menjadi dua bagian yang sama besar

Contoh:



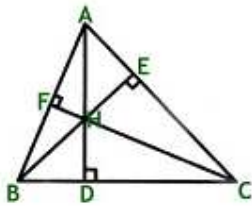
Sifat-Sifat:

- Ketiga garis bertemu di satu titik
- Misalkan garis bagi dalam dibuat dari titik A memotong sisi BC di D maka berlaku $\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}$

b. Garis Tinggi

Garis tinggi adalah garis yang ditarik tegak lurus dari suatu titik sudut ke sisi di hadapan sudut itu

Contoh: AD, BE, dan CF merupakan garis tinggi pada segitiga ABC

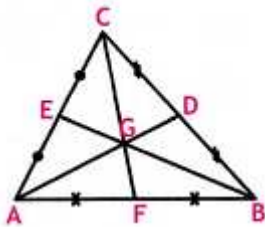


Sifat-Sifat:

- Ketiga garis bertemu di satu titik
- Misalkan AD garis tinggi dari segitiga ABC, maka $\angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$

c. Garis Berat

Garis berat adalah garis yang ditarik dari suatu titik sudut ke tengah-tengah sisi di hadapannya.

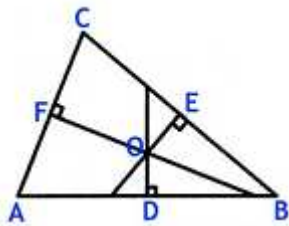


Sifat-Sifat:

- Ketiga garis bertemu di satu titik
- Perpotongan ketiga garis berat merupakan titik berat segitiga ABC
- Misalkan ketiga garis berat (AD, BE, dan CF) berpotongan di titik G, maka berlaku $AG:GD = BG:GE = CG:GF = 2:1$

d. Garis Sumbu

Garis sumbu adalah suatu garis yang ditarik tegak lurus dari pertengahan salah satu sisi dan memotong sisi di hadapannya.

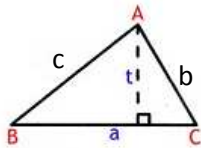


Sifat-Sifat:

- Ketiga garis bertemu di satu titik
- Garis yang ditarik dari F yang merupakan titik tengah AC dan tegak lurus AC adalah salah satu garis sumbu pada segitiga ABC

Luas Segitiga

Diketahui alas dan tinggi suatu segitiga, berturut adalah a dan t



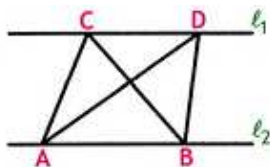
Maka luas segitiga ABC adalah $\frac{1}{2}at$ atau jika $s = \frac{a+b+c}{2}$,

maka luas segitiga adalah $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Sifat-sifat yang digunakan dalam mencari luas segitiga:

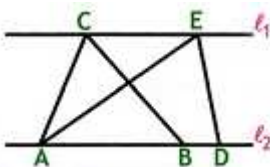
- 1) Dua segitiga yang alas **dan** tingginya sama panjang akan memiliki luas yang sama

Contoh:

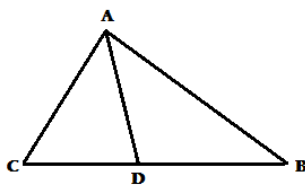


Garis l_1 sejajar l_2 . Akibatnya segitiga ABD dan ABC memiliki tinggi yang sama. Karena kedua segitiga tersebut memiliki alas yang sama, maka luas segitiga ABD = luas segitiga ABC

- 2) Dua segitiga yang alas **atau** tingginya sama, maka perbandingan luasnya berturut-turut dapat dinyatakan sebagai perbandingan tinggi atau alasnya.



Garis l_1 dan l_2 adalah dua garis yang sejajar. Akibatnya tinggi $\triangle ABC$, $\triangle ADE$ akan sama. Maka perbandingan luas $\triangle ABC$ dan $\triangle ADE$ dapat dinyatakan sebagai perbandingan alas. Luas $\triangle ABC$: Luas $\triangle ADE$ = panjang AB : AD



Pada $\triangle ABC$ di samping, berlaku Luas $\triangle ACD$: Luas $\triangle ADB$ = CD : DB

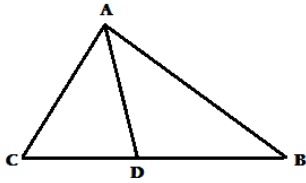
Contoh 1: Dari titik C pada $\triangle ABC$ ditarik garis memotong sisi AB di titik D sehingga AD=6 cm dan DB= 3 cm. Jika $\angle ACD = \angle DCB$ dan AC=10 cm, maka panjang BC adalah...cm

Jawab: Karena $\angle ACD = \angle DCB$, maka CD adalah garis bagi $\triangle ABC$ sehingga berlaku

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{10}{BC} = \frac{6}{3}$$

Jadi BC = 5 cm

Contoh 2: Diketahui luas $\triangle ACD$ adalah 40 cm^2 . Jika $CD:DB = 2:3$, maka luas $\triangle ABC$ adalah...



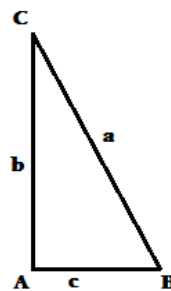
Jawab: Karena $\triangle ACD$ dan $\triangle ABC$ memiliki tinggi yang

sama, maka berlaku $\frac{CD}{CB} = \frac{\text{Luas } \triangle ACD}{\text{Luas } \triangle ABC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{40}{\text{Luas } \triangle ABC}$

Maka, Luas $\triangle ABC = 50 \text{ cm}^2$.

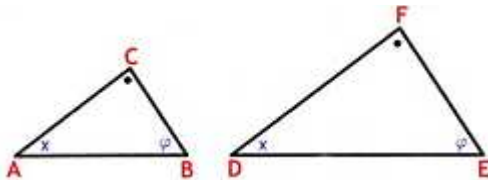
B. Teorema Phitagoras

Teorema ini berkaitan dengan sisi-sisi segitiga. Pada $\triangle ABC$ yang siku-siku di A berlaku $b^2 + c^2 = a^2$



C. Kesebangunan Segitiga

Dua segitiga dikatakan sebangun jika sisi-sisinya yang saling bersesuaian memiliki perbandingan yang sama, sedangkan segitiga yang memiliki sisi-sisi yang sama dikatakan kongruen (sama dan sebangun).

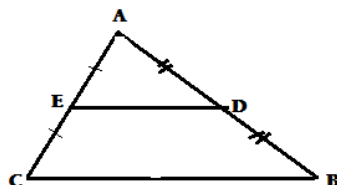


$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\text{Maka berlaku } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

Teorema titik tengah

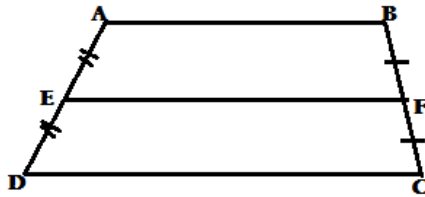
- 1) Pada segitiga ABC, jika D dan E berturut-turut adalah titik pada AB dan AC, maka DE sejajar BC dan $DE = \frac{1}{2}BC$ jika dan hanya jika D, E berturut-turut adalah titik tengah AB dan AC.



$$DE \parallel BC$$

$$DE = \frac{1}{2}BC$$

- 2) Pada trapesium ABCD dengan $AB \parallel CD$, jika E dan F berturut-turut adalah titik tengah AD dan BC, maka $EF \parallel AB \parallel CD$ dan $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$

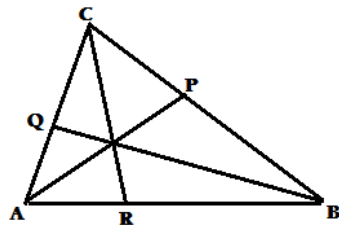


$$EF \parallel AB \parallel CD$$

$$EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

Dalil De Ceva

Jika AP, BQ, dan CR sembarang garis yang berpotongan di dalam $\triangle ABC$, maka berlaku: $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$ (Perhatikan gambar di bawah ini)



$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

Contoh: Pada segitiga ABC, D adalah titik tengah BC, E pada AC sedemikian hingga $AC = 3EC$. BE dan AD berpotongan di G. Tentukan AG:GD.

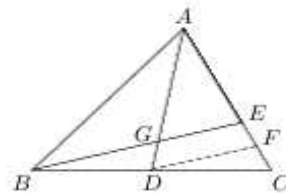
Jawab:

$AE = 2EC$ (berdasarkan teorema titik tengah)

$EF = FC$

$AC = 3EC \rightarrow AE = 2EC$

$AE = 4EF$ Karena $\triangle ADF \sim \triangle AGE$, maka $\frac{AG}{GD} = \frac{AE}{EF} = 4$. Sehingga AG:GD = 4:1



D. Lingkaran

- a) Luas dan keliling lingkaran

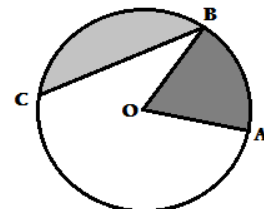
Lingkaran berjari-jari r memiliki luas πr^2 dan keliling $2\pi r$

- b) Busur, juring, dan tembereng

Panjang busur $AB = \frac{\angle AOB}{360^\circ} \times \text{keliling lingkaran}$

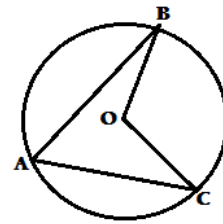
Luas juring $AOB = \frac{\angle AOB}{360^\circ} \times \text{luas lingkaran}$

Luas tembereng BC = Luas juring OBC - Luas $\triangle OBC$



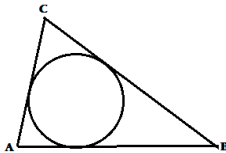
c) Sudut pusat dan sudut keliling

$\angle BOC$ adalah sudut pusat menghadap busur BC, dan $\angle BAC$ adalah sudut keliling menghadap busur BC. Berlaku hubungan $\angle BOC = 2\angle BAC$



d) Lingkaran dan segitiga

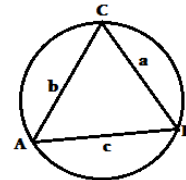
Lingkaran dalam segitiga



$$r_{\text{dalam}} = \frac{\text{luas } \triangle ABC}{s}$$

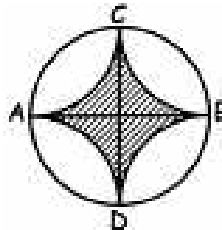
$$s = \frac{\text{Keliling } \triangle ABC}{2}$$

Lingkaran dalam segitiga



$$r_{\text{luar}} = \frac{1}{4 \text{ luas } \triangle ABC}$$

Contoh 1: Perhatikan gambar. AB dan CD adalah diameter lingkaran dengan $AB = CD = 8$ serta AB dan CD saling tegak lurus. Busur AC, CB, BD dan DA adalah busur yang kongruen dengan dua busur yang berdekatan saling bersinggungan. Tentukan luas daerah yang diarsir.



Jawab: Misal perpotongan garis AB

Luas tembereng AC = Luas $\frac{1}{4}$ lingkaran - Luas $\triangle AOC$

Luas tembereng AC = $\frac{1}{4} \pi \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4$

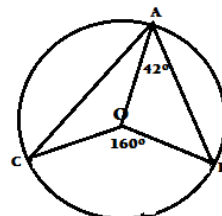
Luas tembereng AC = $4\pi - 8$

Luas arsir = Luas lingkaran - 8 Luas tembereng

Luas arsir = $\pi \cdot 4^2 - 8(4\pi - 8) = 64 - 16\pi$

Contoh 2: Pada gambar di samping

cari besar $\angle ACO$



Jawab: Karena segitiga AOC samakaki, maka $\angle ACO = \angle CAO$. Sedangkan $\angle CAO + \angle BAO = \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ (sudut pusat menghadap busur BC)

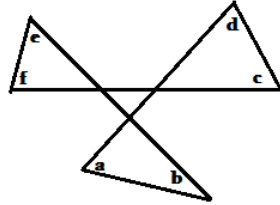
$$= \frac{1}{2} \cdot 160^\circ = 80^\circ. \text{ Sehingga } \angle ACO = \angle CAO = 80^\circ - 42^\circ = 38^\circ$$



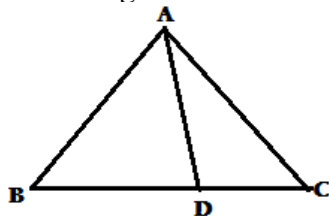
Latihan 4-1

Selesaikan soal-soal berikut ini !

1. Berdasarkan gambar di bawah ini, hitunglah besar sudut $+b + c + d + e + f$!

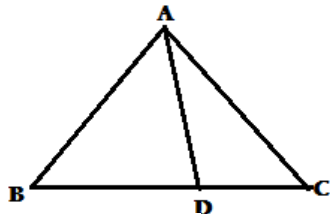


2. Pada $\triangle ABC$ siku-siku di B, diketahui panjang $AB = 6$ cm, D pada AC sehingga BD tegak lurus AC dan panjang $CD = 5$ cm. Hitunglah luas $\triangle ABC$!
3. AB, BC, dan CA berturut-turut memiliki panjang 7, 8, dan 9. Garis tinggi dari titik B memotong AC di D. Tentukan panjang AD.
4. Perhatikan gambar berikut.



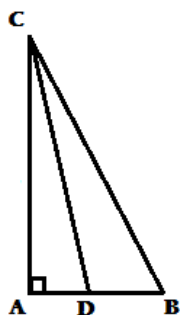
Jika $AB=AC$, $AD=BD$, dan besar sudut $\angle DAC = 39^\circ$, maka besar sudut $\angle BAD$ adalah...

5. Perhatikan gambar berikut ini.



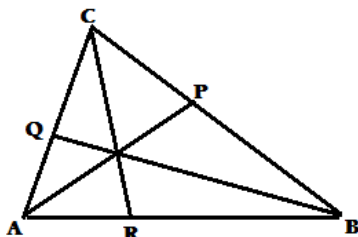
Jika $AC=BC$ dan $CD=AD=AB$, maka $\angle ACD = \dots$

6.



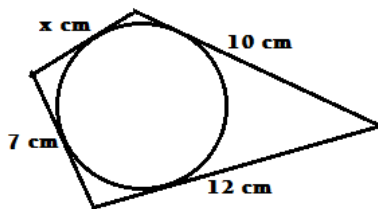
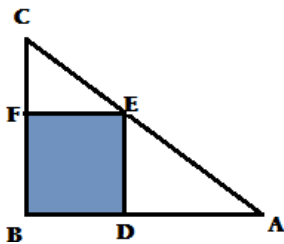
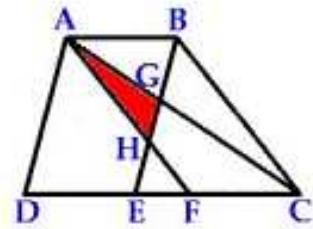
Pada gambar di samping, $\angle A = 90^\circ$, $\angle ACD = \angle BCD$, $AD = 1,5$ cm dan $BD = 2,5$ cm. Tentukan panjang AC.

7.

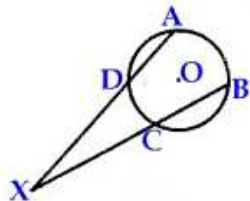


Pada gambar di samping, diketahui $AR:RB = 2:3$ dan $BP:PC = 5:3$. Tentukan $AQ:QC$

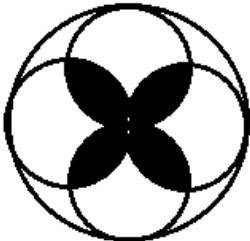
8. Pada $\triangle ABC$, D dan E berturut-turut terletak pada BC dan CA dan $BD:DC = 3:2$, $AE:EC = 3:4$. AD dan BE berpotongan di titik M. Diketahui luas $\triangle ABC$ adalah 1 cm^2 . Tentukan luas $\triangle BMD$!
9. Diketahui $\triangle ABC$, titik D dan E berturut-turut pada sisi AB dan AC, dengan $AD:BD = 1:2$, dan $AE:CE = 1:2$. Garis BE dan CD berpotongan di titik F. Diketahui luas $\triangle ABC$ adalah 90 cm^2 . Luas segiempat ADFE adalah...
10. Bangun datar ABCD di samping adalah trapesium dengan AB sejajar CD. Titik E dan F terletak pada CD sehingga AD sejajar BE dan AF sejajar BC. Titik H adalah perpotongan AF dengan BE dan titik G adalah perpotongan AC dengan BE. Jika panjang AB adalah 4 cm dan panjang CD adalah 10 cm. Hitunglah perbandingan luas segitiga AGH dengan luas trapesium ABCD!
11. Pada jajaran genjang ABCD, E terletak pada sisi BC. Garis DE memotong diagonal AC di titik G. Perpanjangan DE dan perpanjangan AB saling berpotongan di titik F. Jika panjang DG = 6 cm dan panjang EG = 4 cm, tentukan panjang EF.
12. ABCD adalah persegi panjang dengan AB = 4 cm dan BC = 3 cm. Tentukan jarak dari titik A ke garis BD. (Hint: panjang ruas garis yang ditarik dari titik A yang tegak lurus dengan BD)
13. Pada gambar di samping, diketahui $\triangle ABC$ dengan AB = 7 cm dan BC = 3 cm. Hitunglah luas persegi BDEF.
14. Keempat sisi segiempat di samping menyinggung lingkaran. Berapakah nilai x pada gambar di samping?
15. Jika suatu lingkaran, segitiga sama sisi, dan persegi mempunyai keliling yang sama, maka bangun yang memiliki luas paling besar adalah...
16. Pada segitiga ABC, D, E berturut-turut terletak di sisi BC dan AC. sedemikian hingga $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{4}$. Jika F adalah titik perpotongan AD dan BE, maka $\frac{AF}{FD} \cdot \frac{BF}{FE} = \dots$



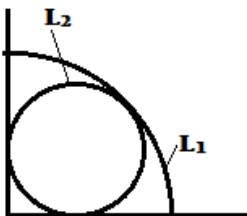
17. Pada sebuah trapesium dengan tinggi 4 cm, kedua diagonalnya saling tegak lurus. Jika salah satu dari diagonal tersebut panjangnya 5 cm, berapakah luas trapesium tersebut ?
18. Titik E dan F secara berurutan terletak pada sisi AB dan CD suatu persegi panjang ABCD sehingga DFBE adalah belah ketupat. Jika $AB = 16$ cm dan $BC = 12$ cm, maka panjang EF sama dengan...cm

19.  Diketahui $\angle AOB = 100^\circ$, $\angle COD = 60^\circ$ Berapakah besar $\angle AXB$ pada gambar di samping?

20. Tentukan sudut terkecil yang dibentuk oleh jarum panjang (menit) dan jarum pendek (jam) pada pukul 20 : 06 .

21.  Perhatikan gambar di samping. Diketahui lingkaran besar berdiameter 28 cm. Hitunglah luas daerah yang diarsir.

22. Segitiga ABC siku-siku di C mempunyai panjang sisi $AB = 10$ cm dan besar $\angle A = 75^\circ$. Hitunglah luas segitiga tersebut!
23. Misalkan segitiga ABC adalah segitiga samasisi dengan panjang sisinya 1 cm. Dari titik A, B, dan C sebagai pusat, dibuat lingkaran dengan jari-jari 1 cm. Berapakah luas daerah irisan dari ketiga lingkaran tersebut?
24. Titik P dan Q berturut-turut adalah titik tengah rusuk AE dan CG pada kubus ABCD.EFGH. Jika panjang rusuk kubus adalah 1 satuan, tentukan luas segiempat DPFQ.

25.  Perhatikan gambar di samping. Di dalam suatu Lingkaran L_1 yang berjari 4 cm dan berpusat di titik asal dibuat suatu lingkaran L_2 yang bersinggungan dengan L_1 dan sumbu x dan sumbu y positif. Jari-jari lingkaran L_2 adalah...cm

26. Pada $\triangle ABC$, diketahui besar $\angle A = 2\angle B$ dan $\angle C = 3\angle B$. Berapakah perbandingan $BC : AB$?

27. Sebuah lingkaran menyinggung bagian dalam suatu segienam ABCDEF. Jika diketahui panjang sisi-sisi $AB = 1$ cm, $BC = 2$ cm, $CD = 3$ cm, $DE = 4$ cm dan $EF = 5$ cm, maka panjang sisi FA adalah...cm
28. Sepotong kawat dipotong menjadi 2 bagian, dengan perbandingan panjang 3:2. Masing-masing bagian kemudian dibentuk menjadi sebuah persegi. Perbandingan luas kedua persegi adalah...

Kunci Jawaban 4-1

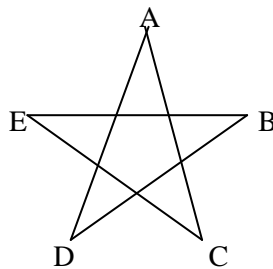
1) 360^0	8) $\frac{4}{15} \text{ cm}^2$	15) lingkaran	22) $12,5 \text{ cm}^2$
2) $9\sqrt{5}$	9) 15 cm^2	16) $\frac{35}{12}$	23) $(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}) \text{ cm}^2$
3) $\frac{11}{3}$	10) 8:105	17) $\frac{50}{3} \text{ cm}^2$	24) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$
4) 47^0	11) 5 cm	18) 15	25) $4(\sqrt{2} - 1)$
5) 36^0	12) $\frac{12}{5} \text{ cm}$	19) 20^0	26) $\sqrt{3}:2$
6) 3 cm	13) $4,41 \text{ cm}^2$	20) 153^0	27) 3 cm
7) 10:19	14) 5	21) 112 cm^2	28) 9:4



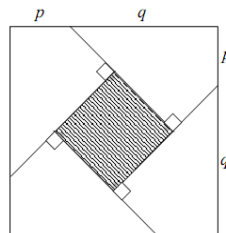
Latihan 3-2

Selesaikan soal-soal berikut ini !

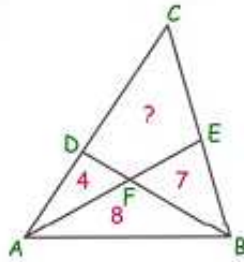
1. Gambar di bawah ini adalah bangun bintang beraturan yang mempunyai sifat simetris jika dilihat dari kelima sudutnya. Berapakah $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$



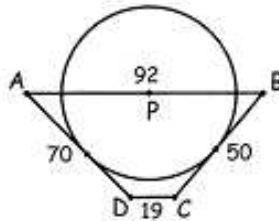
2. Perhatikan gambar berikut ini. Terdapat 4 layang-layang kongruen yang termuat pada persegi dan ternyata masih tersisa daerah persegi yang diarsir. Jika panjang $p = 3\sqrt{2}$ cm, dan $q = 5\sqrt{2}$ cm, maka luas daerah yang diarsir adalah...



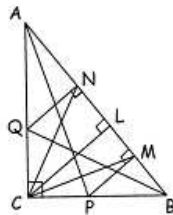
3. Dua garis lurus membagi sebuah segitiga menjadi empat bagian dengan luas tertulis seperti pada gambar. Tentukan luas keempat.



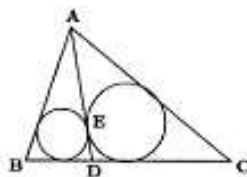
4. Seekor kura-kura berjalan mengelilingi suatu taman berbentuk persegi dengan panjang sisi taman 2 m dan jaraknya selalu tetap, yakni 2 m dari bagian terluar persegi tersebut. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh lintasan kura-kura tersebut.
5. ABCD adalah trapesium dengan AB sejajar DC, Diketahui panjang $AB = 92$, $BC = 50$, $CD = 19$, $DA = 70$. P adalah sebuah titik yang terletak pada sisi AB sehingga dapat dibuat sebuah lingkaran yang berpusat di P yang menyinggung AD dan BC. Tentukan panjang AP.



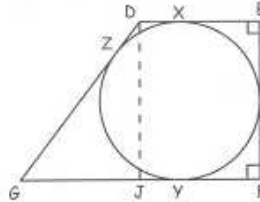
6. Segitiga ABC siku-siku di C. Garis bagi dalam sudut BAC dan ABC memotong sisi BC dan CA berturut-turut di titik P dan Q. Titik M dan N masing-masing terletak pada sisi AB sehingga PM dan QN tegak lurus AB. Tentukan besar $\angle MCN$.



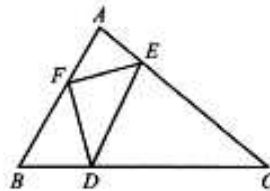
7. Segitiga ABC memiliki sisi $AB = 137$, $AC = 241$ dan $BC = 200$. Titik D terletak pada sisi BC sehingga lingkaran dalam $\triangle ABD$ dan lingkaran dalam $\triangle ACD$ menyinggung sisi AD di titik yang sama, yaitu E. Tentukan panjang CD.



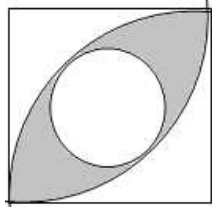
8. Sebuah trapesium DEFG dengan sebuah lingkaran dalam menyinggung keempat sisinya dan berjari-jari 2 cm. Sisi DE dan GF adalah sisi yang sejajar dengan $DE < GF$ dan $DE = 3$ cm. Diketahui bahwa $\angle DEF = \angle EFG = 90^\circ$. Tentukan luas trapesium.



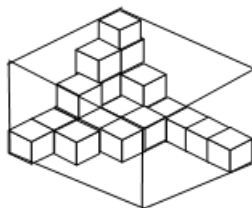
9. Pada segitiga ABC, titik D, E dan F secara berurutan terletak pada sisi BC, CA dan AB yang memenuhi $\angle AFE = \angle BFD$, $\angle BDF = \angle CDE$ dan $\angle CED = \angle AEF$. Buktikan bahwa $\angle BDF = \angle BAC$.



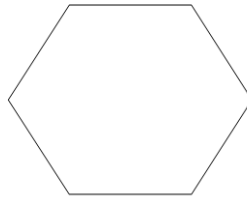
10. Perhatikan gambar di bawah ini. Sebuah lingkaran menyinggung busur-busur lingkaran yang terdapat di dalam sebuah persegi. Jika sisi persegi memiliki panjang a cm, maka luas daerah yang diarsir adalah....(Nyatakan dalam phi (π))



11. Sebuah bak berbentuk kubus penuh air mempunyai luas bidang diagonal $9\sqrt{2}$ cm². Kemudian, dimasukkan sebuah kayu yang juga berbentuk kubus dengan volume 8 cm³ sehingga air tumpah. Jika kayu tenggelam, hitunglah volume air yang tumpah!
12. Pada kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk a cm, titik S adalah titik tengah rusuk FG. Panjang lintasan terpendek pada permukaan kubus A ke S adalah....
13. Berapa banyak kubus satuan yang masih diperlukan untuk memenuhi kotak pada gambar berikut ini?

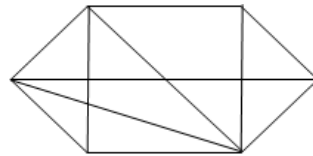


14. Divide the hexagon into six identical kite

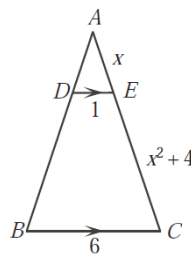


15. Given T is a midpoint of AF in regular hexagon ABCDEF whose each edge has a length of 1 cm. What is the length of TE ?

16. How many triangles in the following figure?



17. Look at the figure below. Given DE is parallel to BC. Find the possible value of x !



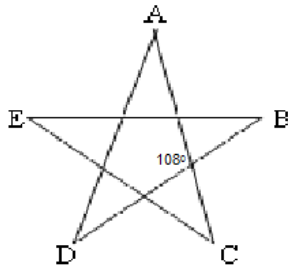
18. In the cube ABCD.EFGH whose edge length is a cm, what is the shortest distance between the point D to the space diagonal AC ?
19. Pada gambar di bawah, terdapat sebuah seperempat lingkaran besar, di dalamnya ada dua buah setengah lingkaran sedang dan kecil. Jika panjang jari-jari seperempat lingkaran 12 cm, hitunglah jari-jari setengah lingkaran terkecil.



20. Garis AB dan CD sejajar dan berjarak 4 satuan. Misalkan AD memotong BC di titik P diantara kedua garis. Jika $AB = 4\text{ cm}$ dan $CD = 12\text{ cm}$, berapa jauhkah P dari garis CD?

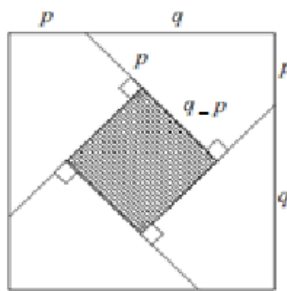
Kunci Jawaban dan Pembahasan Latihan 4-2

1.



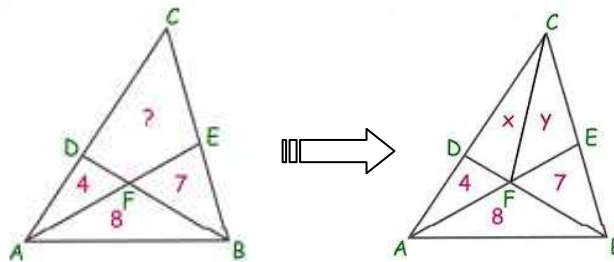
Karena $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E$, maka besar
 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 5(\angle A) = 5(180^\circ - 2 \cdot 72^\circ) = 5 \cdot 36^\circ = 180^\circ$

2.



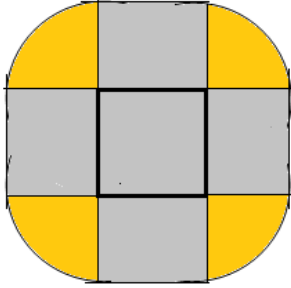
Diketahui $p = 3\sqrt{2}$ cm, dan $q = 5\sqrt{2}$. Dari gambar di samping diperoleh bahwa panjang sisi persegi adalah $q - p = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Sehingga luas persegi adalah $(2\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$

3.



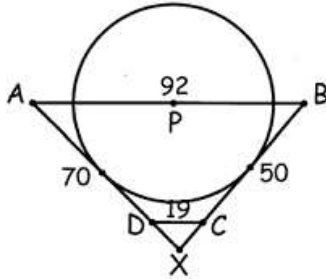
Misalkan luas $\triangle CDF = x$ dan $\triangle CEF = y$. $\triangle CDF$ dan $\triangle DAF$ memiliki tinggi yang sama, maka $\frac{CD}{DA} = \frac{x}{4} \dots (1)$. $\triangle CDB$ dan $\triangle BDA$ memiliki tinggi yang sama, maka $\frac{CD}{DA} = \frac{x+y+7}{4+8} \dots (2)$. Dari (1) dan (2), diperoleh $12x = 4x + 4y + 28 \Leftrightarrow 2x = y + 7 \dots (3)$. $\triangle BEF$ dan $\triangle CEF$ memiliki tinggi yang sama, maka $\frac{BE}{EC} = \frac{7}{y} \dots (4)$. $\triangle BAE$ dan $\triangle EAC$ memiliki tinggi yang sama, maka $\frac{BE}{EC} = \frac{7+8}{x+y+4} \dots (5)$. Dari (4) dan (5), diperoleh $7x + 7y + 28 = 15y \Leftrightarrow 8y = 7x + 28 \dots (6)$. Dari (3) dan (6), diperoleh $x = \frac{28}{3}$ dan $y = \frac{35}{3}$. Jadi luas bagian keempat dari segitiga tersebut adalah $x + y = 21$

4.



Dari ilustrasi gambar di samping yang menunjukkan luas daerah yang dibatasi oleh lintasan kura-kura, maka luas total adalah 4 luas persegi+1 luas lingkaran, yaitu $4s^2 + \pi s^2 = s^2(4 + \pi) = 2^2(4 + \pi) = 4(4 + \pi)$ (dalam m^2)

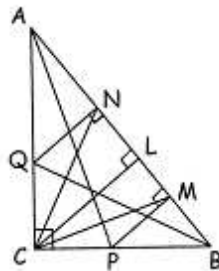
5.



Misal perpanjangan AD dan BC berpotongan di X. Karena garis AX dan BX menyinggung lingkaran dengan pusat P, maka $\angle AXP = \angle PXB$. Akibatnya XP adalah garis bagi $\triangle AXP$. Maka berlaku: $\frac{AX}{XB} = \frac{AP}{PB}$. Karena AB sejajar CD, maka $\triangle XDC$ sebangun dengan $\triangle XAB$

$$\frac{XD}{AX} = \frac{XC}{BX} \Leftrightarrow \frac{AX}{BX} = \frac{XD}{XC} = \frac{AX-70}{BX-50} \Leftrightarrow (AX)(BX) - 50(AX) = (AX)(BX) - 70(BX) \Leftrightarrow \frac{AX}{BX} = \frac{7}{5} = \frac{AP}{PB} = \frac{AP}{92-AP} \Leftrightarrow 7.92 - 7(AP) \Leftrightarrow AP = \frac{161}{3}$$

6.

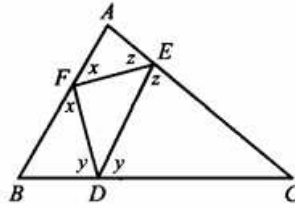


Dibuat CL dengan L terletak pada AB sehingga CL tegak lurus AB. Segitiga-segitiga $\triangle ACB, \triangle ANQ, \triangle ALC, \triangle CLB$ dan $\triangle PMB$ semuanya sebangun. Misalnya $\angle MCL = x$. Karena PM sejajar CL, maka $\angle MCL = \angle PMC = x$. Pada $\triangle APC$ dan $\triangle APM$, ketiga sudut segitiga tersebut sama serta AP merupakan hipotenusa kedua segitiga sehingga $\triangle APM$ dan $\triangle APC$ kongruen (sama dan sebangun), sehingga $PC=PM$. Karena $PC=PM$, maka $\triangle CPM$ sama kaki, maka $\angle PCM = \angle PMC = \angle MCL = x$. Misalkan $\angle NCL = y$. Karena QN sejajar CL maka $\angle NCL = \angle QNC = y$. Pada $\triangle BQC$ dan $\triangle BQN$, ketiga sudut segitiga tersebut sama serta BQ merupakan hipotenusa kedua segitiga

$$\angle MCN = \angle MCL + \angle NCL \Leftrightarrow \angle MCN = \frac{1}{2}(\angle BCL + \angle ACL) = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^{\circ}$$
$$CD = 241 - 89 \Leftrightarrow CD = 152$$

GF=GY+YF=4+2=6, maka Luas trapesium = $\frac{6+3}{2} \cdot 4 = 18$

9.



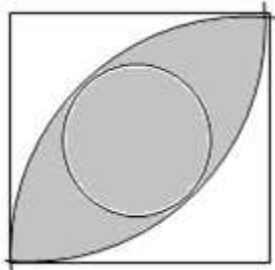
Misal $\angle AFE = \angle BFD = x$, $\angle BDF = \angle CDE = y$, $\angle CED = \angle AEF = z$

Maka $\angle FAE = 180^\circ - x - z$, $\angle FBD = 180^\circ - x - y$, $\angle ECD = 180^\circ - y - z$. Pada $\triangle ABC$ berlaku $\angle FAE + \angle DBD + \angle ECD = 180^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - x - z + 180^\circ - x - y + 180^\circ - y - z = 180^\circ \Leftrightarrow x + y + z = 180^\circ$

$\angle FAE = 180^\circ - (180^\circ - y) = y$

$\angle BDF = \angle FAE = \angle BAC$ (terbukti)

10.



Misal, luas daerah yang diarsir pada gambar di samping = L_1 , luas persegi dengan sisi a cm,

$L_{\blacksquare} = a^2 \text{ cm}^2$, dan luas lingkaran L_{\bigcirc} maka berlaku

$$L_1 = L_{\blacksquare} - 2 \left(L_{\blacksquare} - \frac{1}{4} L_{\bigcirc} \right) = \frac{1}{2} L_{\bigcirc} - L_{\blacksquare} = \frac{1}{2} \pi a^2 -$$

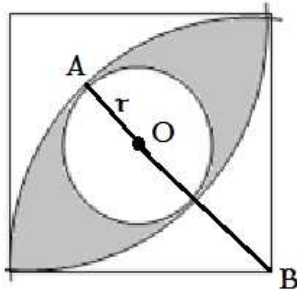
$a^2 \dots (1)$. Misal r pada gambar di samping adalah jari-jari lingkaran yang menyinggung daerah terarsir,

$$\text{maka } r = AB - OB \Leftrightarrow r = a - \frac{1}{2} a\sqrt{2} = a \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \right).$$

Maka, luas lingkaran adalah $\pi \left(a \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \right) \right)^2 =$

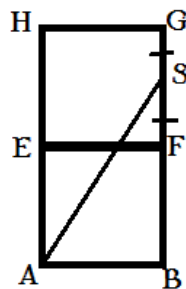
$$\pi \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4} \dots (2).$$

Maka, luas daerah yang diarsir adalah $(1) - (2) = \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{2} - \frac{1}{4} \pi - 1 \right) a^2 \text{ cm}^2$



11. Volume air yang tumpah adalah volume kayu berbentuk kubus yang dimasukkan ke balok yaitu 8 cm^3 .

12. Perhatikan gambar potongan jarring-jaring kubus ABCD.EFGH berikut ini

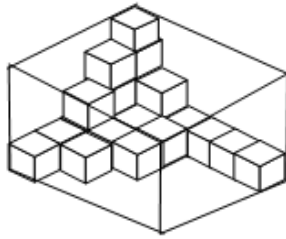


AS adalah lintasan terpendek pada kubus yang menghubungkan A dan S, sehingga pada segitiga ABS, berlaku

$$AS = \sqrt{(AB)^2 + (BS)^2} \Leftrightarrow AS = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{2} a \right)^2} \Leftrightarrow$$

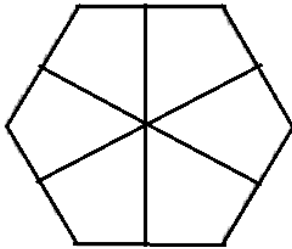
$$AS = \frac{a}{2} \sqrt{13}$$

13.

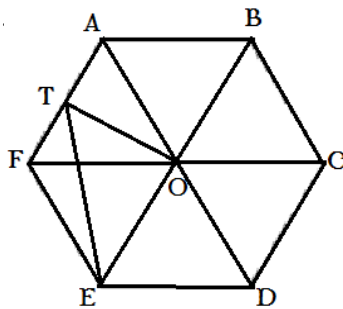


Banyak kubus satuan jika balok penuh adalah $6 \times 5 \times 4 = 120$ buah. lapis 1 + lapis 2 + lapis 3 + lapis 4 = $15 + 4 + 2 + 1 = 22$ buah. Jadi kubus satuan yang masih dibutuhkan adalah $120 - 22 = 98$ buah

14.

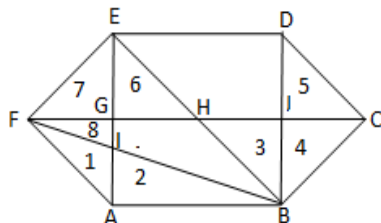


15.



T titik tengah AF, maka $TO \perp AF$. Karena $AF \parallel OE$, maka $TO \perp OE$. Jadi pada segitiga OTE, berlaku $TE = \sqrt{(TO)^2 + (OE)^2} \Leftrightarrow TE = \sqrt{(OF)^2 - (TF)^2 + (OE)^2} \Leftrightarrow$
 $TE = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{7}$

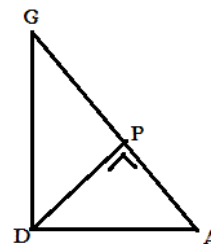
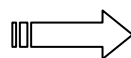
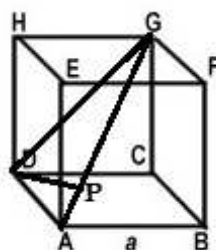
16.



Segitiga-segitiga yang ada adalah (1) Segitiga dengan 1 partisi : 8 buah (lihat gambar) ,(2) Segitiga dengan gabungan beberapa partisi: segitiga AGF, AEF, ABF, ABE, BEF, BFH, BIE, BFJ, BCF, BCH, BDE, BDC, EFI dan EFH (14 buah). Jadi total terdapat 22 buah.

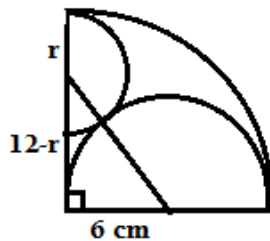
17. Karena DE sejajar BC, maka $\frac{x}{x^2+x+4} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6x = x^2 + x + 4 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x + 4 \Leftrightarrow 0 = (x - 4)(x - 1)$. Maka nilai x yang mungkin adalah $x = 4$ atau $x = 1$

18.



Perhatikan gambar di atas. Pada segitiga ADG, DP adalah jarak terdekat antara titik D ke diagonal AG pada kubus ABCD.EFGH, sehingga AD garis tinggi segitiga ADG. Maka berlaku $DG \cdot AD = DP \cdot AG \Leftrightarrow a\sqrt{2} \cdot a = DP \cdot a\sqrt{3} \Leftrightarrow DP = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$

19.

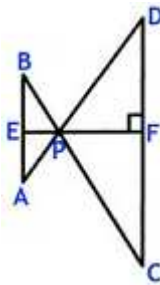


Misalkan jari-jari setengah lingkaran terkecil = r , maka dengan teorema Pythagoras, berlaku

$$\begin{aligned}(r + 6)^2 &= 6^2 + (12 - r)^2 \\ r^2 + 12r + 36 &= 36 + 144 - 24r + r^2 \\ r &= 4\end{aligned}$$

Jadi, panjang jari-jari lingkaran terkecil = 4 cm

20.



Karena $\angle CPD = \angle APB$ dan AB sejajar CD, maka $\triangle APB$ sebangun dengan $\triangle CPD$.

$$\begin{aligned}\frac{PF}{EP} &= \frac{CD}{AB} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow EP = \frac{1}{3}PF \\ EP + PF &= 4 \Rightarrow \frac{1}{3}PF + PF = 4\end{aligned}$$

Sehingga $PF = 3$ satuan

BAB 5

KOMBINATORIKA DAN STATISTIKA

A. Aturan Dasar Menambah

Jika ada dua himpunan yang tidak mempunyai unsure bersama, maka jumlah anggota dari dua himpunan ini adalah jumlah dari banyak anggota dari masing-masing himpunan.

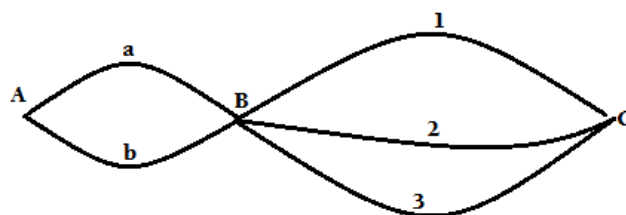
Contoh: Ada dua cara untuk pergi dari Surabaya ke Balikpapan, yaitu menggunakan pesawat terbang, atau kapal laut. Untuk pesawat terbang ada 4 pilihan maskapai, dan kapal laut ada 3 jenis. Berapa banyak cara untuk pergi dari Surabaya ke Balikpapan?

Jawab: Karena cara bepergian dari Surabaya ke Balikpapan adalah dua hal yang terpisah, maka banyaknya cara tinggal dijumlah yaitu, $3 + 4 = 7$ cara.

B. Aturan Perkalian

Misalkan ada suatu prosedur yang dapat dilakukan dalam dua langkah yang saling lepas. Jika langkah pertama r_1 cara dan langkah kedua r_2 cara, maka prosedur tersebut dapat dilakukan dengan $r_1 r_2$ cara.

Contoh1: Misalkan seseorang hendak pergi ke kota C dari kota A harus melewati kota B. Dari kota A ke kota B ada 2 jalan, dan dari kota B ke kota C ada 3 jalan. Berapa banyak pilihan jalan yang dapat dilewati dari kota A ke kota C?



Gambar 5.1

Jawab: Gambar di atas menunjukkan jalan dari kota A ke kota C melewati kota B. dari gambar dapat diketahui bahwa terdapat 6 jalan yang bisa dipilih yaitu pasangan-pasangan a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , dan b_3 . Dengan aturan perkalian, karena ada 2 jalan dari A ke B, dan 3 jalan dari B ke C, maka dari A ke C ada $2 \times 3 = 6$ cara.

Contoh 2: Misalkan ada 3 orang utusan dari kelas VII, 4 orang utusan dari kelas VIII, dan 2 orang utusan dari kelas IX. Tentukan banyak kemungkinan susunan ketua dan wakil ketua dengan syarat kedua jabatan tersebut harus dari kelas yang berbeda.

Jawab: Dengan aturan perkalian, diperoleh:

- 1) Jika ketua dari kelas VII, wakil ketua dapat dari kelas VIII atau kelas IX, maka ada $3 \cdot (4+2) = 18$ kemungkinan
- 2) Jika ketua dari kelas VIII, wakil ketua dapat dari kelas VII atau kelas IX, maka ada $4 \cdot (3+2) = 20$ kemungkinan
- 3) Jika ketua dari kelas IX, wakil ketua dapat dari kelas VII atau kelas VIII, maka ada $2 \cdot (3+4) = 14$ kemungkinan

Sehingga total ada $18 + 20 + 14 = 52$ kemungkinan

Contoh 3: Dari lima angka 0, 3, 4, 5, 7 akan dibentuk sebuah bilangan yang terdiri dari 4 angka. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk jika :

- a) angka-angkanya boleh berulang
- b) angka-angkanya tidak boleh berulang

Jawab : Solusi :

- a) Angka pertama sebagai ribuan dapat dipilih 4 kemungkinan yaitu 3, 4, 5 atau 7. Angka 0 tidak mungkin menjadi angka pertama sebab akan menyebabkan bilangan yang dibentuk hanya terdiri dari 3 angka. Karena boleh berulang maka angka ratusan, puluhan dan satuan masing-masing dapat dipilih 5 kemungkinan. Banyaknya bilangan yang terbentuk ada $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$ bilangan.
- b) Angka pertama sebagai ribuan dapat dipilih 4 cara. Karena tidak boleh berulang sedangkan satu angka sudah dipakai pada angka pertama maka banyaknya cara memilih angka kedua hanya tinggal 4 cara. (Misalkan angka pertama dipilih 3 maka pilihan pada angka kedua adalah 0, 4, 5 atau 7.) Banyaknya pilihan pada angka ketiga ada 3 cara dan banyaknya pilihan pada angka keempat ada 2 cara. Banyaknya bilangan yang dapat dibentuk ada $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$ bilangan.

C. Permutasi

Faktorial

Jika n bilangan asli, tulisan $n!$ dibaca n faktorial, mempunyai arti sebagai $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$ dan $0! = 1$ (didefinisikan)

Permutasi

Misalkan ada 3 unsur berbeda a, b, dan c. Kita telah dapat menentukan banyaknya susunan 3 unsur tanpa pengulangan, yaitu sebanyak $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ susunan. Susunan tersebut adalah abc, acb, bac, bca, cab, cba. Setiap susunan disebut permutasi dari a, b, dan c. Perhatikan bahwa urutan dalam susunan-susunan ini diperhatikan sehingga abc tidak sama artinya dengan acb.

Permutasi r unsur dari n unsur berbeda dilambangkan P_r^n . Misalkan diketahui n unsur berbeda. Banyaknya permutasi dari r unsur ($r \leq n$) yang diambil dari n unsur adalah

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh :

Empat orang masuk ke dalam bus dan tersedia 10 tempat duduk yang masih kosong. Tentukan banyak semua kemungkinan posisi empat orang tersebut duduk.

Jawab:

Masalah ini merupakan permutasi empat tempat duduk terisi dari 10 tempat duduk kosong, yaitu sebanyak

$$P_4^{10} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 5040$$

Sehingga terdapat 5040 kemungkinan posisi tempat duduk 4 orang tersebut.

Permutasi Siklis

Jika terdapat beberapa orang yang ingin duduk melingkar di suatu pertemuan, maka banyak cara menyusun mereka untuk duduk bersebelahan dan melingkar dapat digunakan permutasi siklis. Banyaknya permutasi siklis dari n unsur tersebut dapat digunakan rumus:

$$P - \text{siklis} = (n-1)!$$

Contoh 1: Enam anak ingin duduk melingkar di suatu tempat duduk. Ada berapa cara mereka menyusun tempat duduk mereka?

Jawab:

$$P_6 - \text{siklis} = (6-1)! = 5! = 120$$

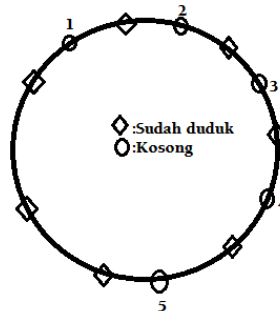
Jadi ada 120 cara menyusun tempat duduk.

Contoh 2: Diketahui ada 5 pemuda dan 3 pemudi duduk mengelilingi meja bundar. Tentukan banyaknya kemungkinan susunan mereka jika:

- Mereka duduk bebas
- Pemuda pertama dan pemuda pertama tidak duduk berdampingan.
- Tidak ada putri yang duduk berdampingan

Jawab:

- Banyaknya susunan mereka duduk bebas: $P_8 - \text{siklis} = (8 - 1)! = 7! = 5040$
- Dengan tanpa menghitung pemuda pertama, banyaknya susunan mereka duduk adalah $P_7 - \text{siklis} = 6!$. Setelah mereka duduk, maka pilihan duduk pemuda pertama ada 5.



Jadi banyak susunan secara lengkap adalah $6! \times 5 = 3600$ kemungkinan

- Setelah 5 pemuda duduk (yang lebih banyak), pemuda pertama mempunyai pilihan sebanyak 5 posisi. Tetapi karena dua pemuda tidak dapat duduk berdampingan, maka pemuda kedua hanya 4 kemungkinan posisi dan pemuda ketiga hanya mempunyai 3 kemungkinan posisi. Dengan demikian jumlah semua kemungkinan adalah $4! \times 5 \times 4 \times 3 = 1440$ kemungkinan

D. Kombinasi

Jika diketahui dua unsur a, b, maka pada permutasi susunan ab dan ba kita pandang sebagai dua susunan yang berbeda. Sekarang kita akan menghitung susunan dimana ab dan ba adalah susunan yang sama. Pada keadaan ini kita menggunakan aturan kombinasi. Jika diketahui 3 unsur a, b, c, maka kombinasi dua unsurnya adalah ab atau ba, ac atau ca, dan bc atau cb.

Jika diketahui n unsur berbeda, maka kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur adalah

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Contoh:

Diketahui kelas yang terdiri dari 15 putra dan 10 putri.

- Tentukan banyaknya kemungkinan pengiriman delegasi terdiri dari 5 orang.
- Tentukan banyaknya kemungkinan pengiriman delegasi terdiri dari 3 putra dan 2 putra.

Jawab:

1. Masalah pemilihan delegasi tanpa memperhatikan urutan anggotanya adalah masalah kombinasi. Untuk soal ini adalah kombinasi 5 dari 25 orang.

$$C_5^{25} = \frac{25!}{5!(25-5)!} = 53.130$$

2. Dalam hal ini ada 2 pemilihan untuk putra dan putri. Pemilihan putra adalah masalah kombinasi 3 dari 15 orang, sedangkan pemilihan putri adalah kombinasi 2 dari 10 orang. Untuk mencari susunan kemungkinan maka kita menggunakan aturan perkalian.

$$C_3^{15} \times C_2^{10} = \frac{15!}{3!(15-3)!} \times \frac{10!}{2!(10-2)!} = 20.475$$

Maka terdapat 20.475 kemungkinan susunan.

E. Peluang

Ruang sampel adalah himpunan semua kejadian yang mungkin terjadi. Peluang suatu kejadian adalah kemungkinan terjadinya kejadian tersebut. Peluang kejadian A dengan ruang sampel S adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$P(A) = 0$, kemustahilan

$P(A) = 1$, kepastian

Contoh 1: Sebuah kotak berisi 3 kelereng merah, 4 kelereng hijau dan 5 kelereng biru. Jika dari dalam kotak diambil 3 buah kelereng, maka berapa peluang:

- semua kelereng yang diambil berwarna merah
- semuanya biru
- 2 buah berwarna merah dan 1 berwarna hijau

Jawab: Jumlah seluruh kelereng ada 12. Banyaknya cara memilih 3 dari 12 kelereng adalah $C_3^{12} = 220$

- a. Banyaknya cara memilih 3 kelereng merah dari 3 kelereng merah adalah $C_3^3 = 1$

Peluang 3 kelereng yang diambil semuanya merah adalah $\frac{1}{220}$

- b. Banyaknya cara memilih 3 kelereng biru dari 5 kelereng biru adalah $C_3^5 = 10$

Peluang 3 kelereng yang diambil semuanya biru adalah $\frac{10}{220} = \frac{1}{22}$

- c. Banyaknya cara memilih 2 kelereng merah dari 3 kelereng merah adalah $C_2^3 = 3$

Banyaknya cara memilih 1 kelereng hijau dari 4 kelereng hijau adalah $C_1^4 = 4$. Maka sesuai aturan perkalian, banyaknya cara memilih 2 buah kelereng berwarna merah dan 1 warna hijau adalah $3 \times 4 = 12$ cara, sehingga peluang terambilnya 2 kelereng merah dan 1 kelereng hijau adalah $\frac{12}{220}$.

Contoh 2: Dua buah dadu dilempar undi sekali. Tentukan peluang munculnya mata dadu berjumlah tidak sama dengan 10.

Jawab: Misalkan A = kejadian munculnya mata dadu berjumlah 10, yaitu pasangan (4,6), (5,5), dan (6,4) $\rightarrow n(A) = 3$. A' = kejadian muncul mata dadu tidak sama dengan 10 (bukan A). Karena $n(S) = 6 \times 6$, maka $n(A') = 36 - 3 = 33$. Sehingga $P(A') = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$.

F. Statistika Sederhana

Statistik yang dibahas dalam modul ini hanya bersifat sederhana yaitu berupa data tunggal dan terbatas pada ukuran pemusatan data seperti rata-rata, modus, dan median, dan ukuran penyebaran data seperti kuartil, dan jangkauan.

a. Mean (\bar{x})

Mean adalah nilai rata-rata dari semua data.

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n} \quad \begin{array}{l} f_n = \text{frekuensi ke-}n \\ x_n = \text{nilai ke-}n \end{array}$$

b. Modus

Modus adalah nilai yang paling sering muncul atau frekuensinya terbesar.

c. Median

Median adalah nilai tengah-tengah setelah data diurutkan. Jika banyaknya datanya ganjil maka median adalah data yang berada di tengah, sedangkan jika banyaknya datanya genap maka median adalah rata-rata hitung dari dua data yang berada di tengah.

d. Kuartil

Nilai tengah dari data-data yang berada di sebelah kanan median disebut juga kuartil atas (diberi simbol Q_3), sedangkan nilai tengah dari data-data yang berada di sebelah kiri median disebut juga kuartil bawah (diberi simbol Q_1). Sedangkan median sendiri dapat pula disimbolkan Q_2 .

e. Jangkauan

Jangkauan adalah selisih nilai terbesar dengan nilai terkecil dalam sekumpulan data ($J = x_{\max} - x_{\min}$)

Contoh1: Sepuluh orang wanita mempunyai rata-rata tinggi badan 160 cm sedangkan, 20 orang pria rata-rata tingginya 170 cm. Tinggi badan rata-rata ke-30 orang tersebut adalah... cm.

Jawab: Jumlah tinggi badan 10 wanita adalah $10 \times 160 = 1600$ cm . Jumlah tinggi badan 20 pria adalah $20 \times 170 = 3400$ cm. Tinggi badan rata-rata 30 orang tersebut

$$\frac{1600+3400}{30} = \frac{5000}{3} \text{ cm}$$

Contoh 2: Di sebuah kelas, rata-rata nilai matematika kelompok perempuan adalah 7,2, sedangkan kelompok laki-laki 7,7. Jika rata-rata kelasnya adalah 7,4, tentukan perbandingan banyak siswa perempuan dan siswa laki-laki.

Jawab:

Misalkan nilai rata-rata kelompok perempuan = $x_p = 7,2$ dan banyak siswa perempuan = p dan nilai rata-rata kelompok laki-laki = $x_l = 7,7$ dan banyak siswa laki-laki = l . Maka berlaku:

$$x_{\text{kelas}} = \frac{p \cdot x_p + l \cdot x_l}{p + l}$$

$$7,4 = \frac{7,2p + 7,7l}{p + l} \Leftrightarrow 7,4p + 7,7l = 7,2p + 7,7l$$

$$7,4p - 7,2p = 7,7l - 7,4l$$

$$0,2p = 0,3l, \text{ maka } p:l = 3:2$$

Jadi perbandingan banyak siswa perempuan dan laki-laki adalah 3:2

**Latihan 5-1**

Selesaikan soal-soal berikut ini !

1. Terdapat 11 titik pada bidang dengan tidak ada 3 titik yang segaris, tentukan banyaknya garis yang dapat dilukis.
2. Dalam suatu pemilihan terdapat 5 calon pria dan 3 calon wanita dalam pemilihan ketua, sekretaris, dan bendahara kelas. Tentukan banyak cara pemilihan pengurus dengan catatan minimal terdapat 1 pria dan 1 wanita.
3. Dua buah dadu identik dilempar bersamaan. Berapa peluang munculnya jumlah dua mata dadu tersebut sama dengan 5?

4. Berat Koko ditambah berat Wachid adalah 65 kg, berat Koko ditambah berat Ahmad adalah 63 kg, dan berat Wachid ditambah berat Ahmad 94 kg. Hitunglah berat rata-rata mereka bertiga!
5. Nomor polisi mobil-mobil di suatu daerah selalu terdiri dari 4 angka. Jika jumlah keempat angka pada setiap nomor juga harus genap serta angka 0 tidak boleh menjadi angka pertama, maka ada berapa banyak sistem penomoran mobil yang dapat dibentuk ?
6. Ada berapa banyak bilangan genap 3 angka, angka-angkanya tidak berulang dan kurang dari 600 dapat dibentuk jika angka-angkanya diambil dari 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 ?
7. Dari 8 pemain bulutangkis (5 di antaranya putera) akan dibentuk tim pasangan ganda campuran. Maka ada berapa pasangan ganda campuran yang dapat dibentuk ?
8. Dari 10 orang siswa yang terdiri 7 orang putera dan 3 orang puteri akan dibentuk tim yang beranggotakan 5 orang. Jika disyaratkan anggota tim tersebut paling banyak 2 orang puteri, maka ada berapa banyak kemungkinan tim yang dapat dibentuk ?
9. Sebuah kelas akan mengikuti lomba Futsal. Dari 12 orang siswa putera akan dipilih 2 orang berposisi sebagai kiper, 4 orang sebagai pemain belakang dan 3 orang sebagai penyerang dan tidak ada pemain yang merangkap pada posisi lain. Ada berapa cara memilihnya?
10. Di dalam sebuah pesta, 5 orang teman akan saling memberikan masing-masing satu hadiah sehingga setiap orang akan memberi dan menerima hanya satu (tentunya tidak akan ada orang yang akan menerima hadiah dari dirinya). Berapakah jumlah cara yang mungkin dilakukan?
11. Tentukan banyaknya bilangan yang terdiri dari paling banyak 3 angka dengan bilangan yang terbentuk tidak mempunyai angka yang sama dan diambil dari angka-angka 1,2,3,4,5,6,7,dan 8.
12. Sebuah kotak berisi 4 bola merah dan 5 bola putih. Dari kotak diambil sebuah bola secara acak. Berapakah peluang bola yang terambil adalah
 - a. berwarna merah
 - b. berwarna putih

13. Sebuah bilangan empat angka berbeda dibentuk dari angka-angka 3,4,5 dan 6. Berapakah peluang bahwa bilangan tersebut habis dibagi 11.
14. Sekelompok bilangan memuat bilangan 68 dan memiliki rata-rata 56. Jika 68 disisihkan, maka rata-ratanya menjadi 55. Berapa bilangan terbesar yang dapat terjadi pada kelompok itu?
15. Nilai rata-rata UN matematika di sebuah kota adalah 4,32. Karena kurang memuaskan, maka nilai dikonversi dengan aturan setiap data dikalikan dengan 4, kemudian hasilnya dibagi 3. Tentukan nilai rata-rata hasil konversi.
16. Umur rata-rata dari suatu kelompok yang terdiri dari dokter dan jaksa adalah 40 tahun. Jika umur rata-rata para dokter adalah 35 tahun dan umur rata-rata para jaksa adalah 50 tahun, maka perbandingan banyaknya dokter dan banyaknya jaksa adalah...
17. Agung mendapatkan bahwa nilai rata-rata dari tiga ulangan matematika yang diikutinya adalah 81. Nilai ulangan pertama adalah 85. Nilai ulangan ketiga lebih rendah 4 dari nilai ulangan kedua. Berapakah nilai ulangan kedua Agung ?
18. Dari 10 orang siswa, jika nilai tertinggi tidak diikutsertakan, maka nilai rata-rata kelompoknya hanya 6,5. Namun, jika nilai terendahnya tidak diikutsertakan, maka nilai rata-rata kelompoknya adalah 7,3. Tentukan jangkauan data kelompok tersebut.
19. Terdapat 8 buah data yang semuanya adalah bilangan bulat dan setelah diurutkan dari terendah ke tertinggi adalah a, b, c, d, e, f, g, dan h. Median dari data tersebut = 6,5 dan kuartil atas = 7. Jika modus = 3 dan 7 serta a, d dan h membentuk barisan aritmatika, maka rata-rata seluruh data tersebut sama dengan...
20. Jika Ali memperoleh nilai 94 pada ujian yang akan datang maka nilai rata-ratanya menjadi 89. Tetapi, jika ia memperoleh nilai 79 maka nilai rata-ratanya menjadi 86. Berapa banyak ujian yang telah dia ikuti?
21. Suatu data jangkauan 8 dan rata-rata 16. Jika setiap nilai dalam data dikalikan p kemudian dikurangi q, didapat data baru dengan jangkauan 12 dan rata-rata 18. Nilai dari $4p+3q = \dots$
22. Diketahui rata-rata dari 15 bilangan asli berbeda adalah 10. Tentukan bilangan asli terbesar yang mungkin.
23. Dua buah dadu dilemparkan bersamaan. Peluang jumlah kedua mata dadu yang muncul bilangan prima adalah...

24. Sebuah kelas akan memilih seorang murid di antara mereka untuk mewakili kelas tersebut. Setiap murid mempunyai kesempatan yang sama untuk dipilih. Peluang murid laki-laki terpilih sama dengan $\frac{2}{3}$ kali peluang terpilihnya seorang murid perempuan. Persentase murid laki-laki di kelas tersebut adalah...
25. Peluang seorang calon pegawai untuk diterima kerja di PT. Koko Abadi, Tbk adalah 0,27. Berapa orang dari 800 pelamar yang diperkirakan akan ditolak?
26. Tiga buah dadu dilempar sekaligus. Berapakah peluang bahwa hasil kali ketiga mata dadu menghasilkan bilangan genap dan penjumlahan ketiga mata dadu juga genap ?
27. Data nilai suatu tes sebagai berikut.

Nilai	5	6	7	8	9
Frekuensi	3	8	x	2	1

Jika data di atas memiliki rata-rata 6,5, tentukan nilai median data tersebut.

28. Dari bilangan-bilangan 2006, 2007, 2008, 2009 dan 2010 akan diambil 3 bilangan. Berapakah peluang jumlah ketiga bilangan tersebut habis dibagi 3 ?

Kunci Jawaban 5-1

1) 55	8) 231	15) 5,76	22) 45
2) 45	9) 277.200	16) 2:1	23) $\frac{5}{12}$
3) $\frac{1}{9}$	10) 44	17) 81	24) 40 %
4) 37 kg	11) 400	18) 7,2	25) 584 orang
5) 112896	12) a. $\frac{4}{9}$ b. $\frac{5}{9}$	19) $\frac{45}{8}$	26) $\frac{1}{2}$
6) 4500	13) $\frac{1}{3}$	20) 4 kali	27) 6
7) 15	14) 649	21) 24	28) $\frac{2}{5}$



Latihan 5-2

Selesaikan soal-soal berikut ini !

1. Lima orang akan pergi ke gunung menggunakan sebuah mobil berkapasitas 6 tempat duduk. Jika hanya ada dua orang yang bisa menjadi sopir, maka banyaknya cara mengatur tempat duduk di dalam mobil adalah...
2. Misalkan ada 6 angka 1, 3, 4, 5, 7, 8. Tentukan banyaknya bilangan yang dapat dibuat dari angka-angka tersebut dan
 - a. terdiri dari 3 angka dan dapat mempunyai angka yang sama,
 - b. terdiri dari 3 angka tetapi tidak boleh ada angka yang sama,
 - c. terdiri dari 3 angka dan dapat mempunyai angka yang sama tetapi bilangan yang dihasilkan ganjil,
 - d. terdiri dari 3 angka dan dapat mempunyai angka yang sama dan memuat angka 7.
3. Tentukan banyaknya bilangan yang terdiri dari paling banyak 3 angka dengan bilangan yang terbentuk tidak mempunyai angka yang sama dan diambil dari angka di susunan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 .
4. Rata-rata nilai matematika dari 24 siswa adalah 7,20. Setelah ditambah nilai dari 2 siswa, rata-ratanya menjadi 7,25. Jika nilai salah satu nilai dari kedua siswa tersebut adalah 7,65, maka nilai satu siswa yang lain adalah...
- 5.

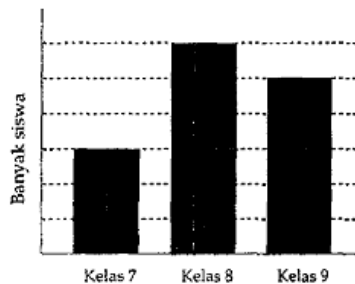


Diagram di atas menunjukkan banyaknya siswa dari kelas 7, kelas 8, dan kelas 9 yang mengikuti kegiatan ekstra kurikuler sepak bola. Diketahui bahwa banyak siswa yang mengikuti kegiatan tersebut semuanya adalah 28 orang. Dua orang siswa dipilih secara acak untuk menjadi ketua dan wakil ketua. Jika wakil ketua terpilih adalah siswa kelas 7, maka peluang terpilihnya ketua yang berasal dari kelas 9 adalah ...

6. Di dalam kotak terdapat 18 bola identik (berbentuk sama), 5 berwarna hitam, 6 berwarna putih dan 7 berwarna hijau. Jika diambil dua bola secara acak, maka peluang yang terambil bola berwarna sama adalah ...
7. Di dalam kotak terdapat 18 bola identik (berbentuk sama), 5 berwarna hitam, 6 berwarna putih dan 7 berwarna hijau. Jika diambil dua bola secara acak, maka peluang yang terambil bola berwarna TIDAK sama adalah ...
8. Banyak bilangan tiga digit yang bisa disusun dari angka-angka 0,2,3,5,7, dan 8 yang lebih dari 243 dan kurang dari 780 adalah....
9. Tiga bilangan a, b , dan c dipilih sehingga ketika setiap bilangan ditambahkan ke rata-rata dua bilangan lainnya maka berturut-turut hasilnya adalah 80, 90, dan 100. Rata-rata dari a, b , dan c adalah...
10. Carilah banyaknya kemungkinan susunan duduk n pasang suami istri mengelilingi meja bundar sehingga,
 - a) Pria dan wanita duduk berselang-seling
 - b) Setiap wanita duduk berdampingan dengan suaminya.

Kunci Jawaban dan Pembahasan 5-2

1. $2! \cdot 4! \cdot 5 = 240$ kemungkinan
2. a. $6 \times 6 \times 6 = 216$ kemungkinan
 b. $6 \times 5 \times 4 = 120$ kemungkinan
 c. $6 \times 6 \times 4 = 144$ kemungkinan
 d. 7 sebagai ratusan, $1 \times 6 \times 6 = 36$
 7 sebagai puluhan, $5 \times 1 \times 6 = 30$
 7 sebagai satuan, $5 \times 5 \times 1 = 25$
 Sehingga total terdapat 91 kemungkinan
3. Satu digit, 8 kemungkinan. Dua digit, $8 \times 7 = 56$ kemungkinan. Tiga digit, $8 \times 7 \times 6 = 336$ kemungkinan. Dengan demikian, terdapat total 400 kemungkinan
4. Misalkan x adalah nilai seorang siswa yang dimaksud, maka diperoleh

$$7,25 = \frac{24 \times 7,20 + 7,65 + x}{26}$$
 Sehingga $x = 8,05$
5. Berdasarkan diagram, jika jumlah siswa sebanyak 28 anak, maka kelas 7 sebanyak 6 anak, kelas 8 sebanyak 12 anak, dan kelas 9 sebanyak 10 orang.

Misalkan $P(A)$ adalah peluang terpilihnya ketua yang berasal dari kelas 9 dengan wakil ketua dari kelas 7, maka $P(A) = \frac{C_1^6 C_1^{10}}{C_2^{28}} = \frac{10}{63}$

6. Ruang sampel sebanyak $C_2^{18} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16!}{2!16!} = 153$, Jika $P(A)$ adalah peluang terambilnya 2 bola berwarna sama, maka $P(A) = \frac{5 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 7}{153} = \frac{107}{153}$

7. Karena $P(A) + P'(A) = 1$, maka $P'(A) = 1 - \frac{107}{153} = \frac{46}{153}$

8. Bilangan 243-300, $1 \times 3 \times 6 = 18$ kemungkinan

Bilangan 301-700, $2 \times 6 \times 6 = 72$ kemungkinan

Bilangan 701-780, $1 \times 5 \times 6 = 30$ kemungkinan

Jadi total kemungkinan adalah 120 kemungkinan

9. $\frac{a+b}{2} = 80, \frac{a+c}{2} = 90, \frac{b+c}{2} = 100$. Maka, $\frac{2(a+b+c)}{2} = 270$

$$\frac{a+b+c}{3} = 90$$

10. a. Pertama, n wanita duduk. Dalam hal ini ada $(n-1)!$ Kemungkinan. Kemudian, pria pertama mempunyai n posisi kemungkinan, pria kedua mempunyai $n-1$ posisi kemungkinan dan seterusnya. Jumlah semua susunan adalah $(n-1) \times n!$
- b. setiap pasangan kita anggap sebagai satu kesatuan. Jadi ada $(n-1)!$. Tetapi setiap pasang mempunyai dua posisi. Dengan demikian jumlah semua kemungkinan adalah $(n-1)! \times 2^n$

DAFTAR PUSTAKA

- Budhi, Wono Setya. 2006. Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika Jilid 1. Jakarta: CV. Ricardo.
- Hermanto, Eddy. 2011. Diktat Olimpiade Matematika Materi Dasar. Bengkulu: SMAN 5 Bengkulu.
- Kurniawan dan Suryadi. 2006. Siap Juara Olimpiade Matematika SMP. Jakarta: Erlangga.
- Posamentier, Alfred S and Stephen Krulik. 1998. Problem Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions (A Resource for the Mathematics Teacher). California: Corwin Press, Inc.
- Tim SSC Intersolusi. 2011. Olimpiade Matematika SMA. Jakarta: Erlangga.