Задача 1

На лекции мы выписали двойственный функционал для задачи регрессии:

$$Q(a) = ||\Phi\Phi^T a - y||^2 + \frac{\lambda}{2} a^T \Phi\Phi^T a = ||Ka - y||^2 \frac{\lambda}{2} a^T K a \longrightarrow \min,$$

где $K = \Phi\Phi^T$ – матрица Грама. Покажите, что решение данной задачи достигается в

$$a = (K + \lambda I)^{-1} y,$$

где I – единичная матрица.

Задача 2

Рассмотрим следующую задачу условной оптимизации:

$$\begin{aligned} &x^2 + 1 \longrightarrow \min, \\ &(x-2)(x-4) \le 0, \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$.

1. Найдите допустимое множество, оптимальное значение x_* и оптимальное решение $f(x_*)$;
2. Постройте график минимизируемой функцию x^2+1 по переменной x. На том же графике отметьте допустимое множество, оптимальные значения и решение, постройте график лагранжиана $L(x, \lambda)$ для 2-3 положительных значений λ. Убедитесь, что выполенено неравенство $f(x_*) \ge \inf_x L(x, \lambda)$. Нарисуйте эскиз двойственной функции g.
3. Запишите двойственную задачу оптимизации, найдите двойственное оптимальное значение λ^* и двойственнное оптимальное решние $g(\lambda^*)$. Выполнена ли строгая двойственность?

4* Обозначим через $f_u(x_*)$ – оптимальное решение прямой задачи

$$\begin{aligned} &x^2 + 1 \longrightarrow \min \\ &(x-2)(x-4) \le u, \end{aligned}$$

как функцию от параметра u. Постройте график $f_u(x_*)$ по переменной u и докажите, что

$$\frac{\partial f_u(x_*)}{\partial u} = -\lambda.$$

Задача 3

Покажите, что функция

$$K(x, z) = \sin(x - z)$$

является ядром.

Задача 4

Покажите, что функция

$$K(x, z) = \frac{1}{1 + e^{-xz}},$$

где $x, z \in \mathbb{R}$ не является ядром.

Задача 5

Пусть даны два ядра $K_1(x, z) = (1 + xz)^2$ и $K_2(x, z) = (1 + xz + x^2 z^2)$. Найдите спрямляющие проостранства для ядер $K_1, K_2, K_1 + K_2$.