Бузиашвили Г.К.

№1.

$$Q(a) = \frac{1}{2}\|Ka - y\|^2 + \frac{\lambda}{2} a^T K a \to min$$

$$= \frac{1}{2}(Ka-y)^T(Ka-y) + \frac{\lambda}{2}a^TKa = \frac{1}{2}(a^TK^TKa - a^TK^Ty - y^TKa + y^Ty) + \frac{\lambda}{2}a^TKa$$

$$\nabla Q = \frac{1}{2}(2K^TKa - K^Ty - K^Ty) + \frac{\lambda}{2}2Ka$$

(K – симметрична)

$$= (K^TK + \lambda K)a - K^Ty$$

$$\nabla Q = 0: (K^TK + \lambda K)a = K^Ty \Rightarrow K^T(K+\lambda E)a = K^Ty$$

$$\Rightarrow (K+\lambda E)a = y \Rightarrow a_* = (K+\lambda E)^{-1}y$$

№3.

$K(x,z) = \cos(x-z) = \cos(x)\cos(z) + \sin(x)\sin(z)$

1. cos, sin – ядра по св-ву 4°
2. $\cos(\cdot)\cdot\cos(\cdot)$, $\sin(\cdot)\cdot\sin(\cdot)$ – ядра как произвед-я ядер
3. $\cos(x-z)$ – ядро как сумма ядер

▽

№4.

$K(x,z) = \frac{1}{1+e^{-xz}}$

Достаточно показать, м-ца $K = (K(x_i, x_j))_{i,j=1}^{l}$ ~~отриц~~ определена неположительно.

Так будет при (x,z) равным, например: $(-10,-2)$, $(10,-1)$, $(1,2)$, $(1,5)$, $(1,10)$.

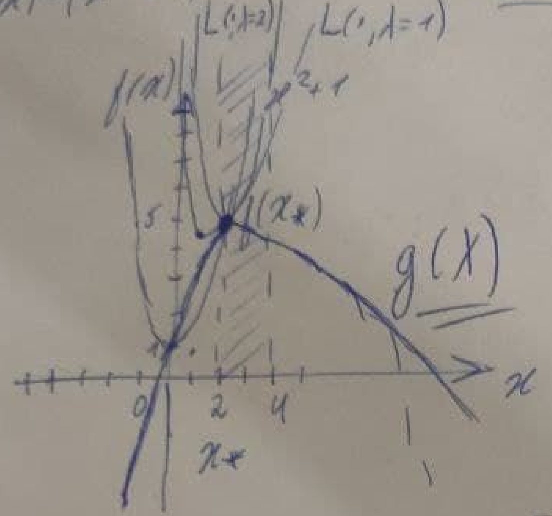
№2. $x^2+1 \to \min$

$(x-2)(x-4) \le 0$

1. $\overset{+}{\longrightarrow}\underset{2}{|}\overset{-}{\longrightarrow}\underset{4}{|}\overset{+}{\longrightarrow} x \Rightarrow x \in [2;4]$

$f'(x) = (x^2+1)' = 2x \Rightarrow x_* = 2;\ f(x_*) = 5$ $\cancel{8}$

2.



$L(x,\lambda) = x^2+1+\lambda(x-2)(x-4)$

$\lambda=1: L = 2x^2 - 6x + 9$

$\lambda=2: L = 3x^2 - 12x + 17$

$L'_x(x,\lambda) = 2x + \lambda(2x-6)$

$= x(2+2\lambda) - 6\lambda$

$\Rightarrow x = \frac{3\lambda}{1+\lambda}$

$\Rightarrow g(\lambda) = L\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}, \lambda\right) = \frac{9\lambda^2}{(\lambda+1)^2} + 1 + \lambda\left(\frac{3\lambda}{\lambda+1} - 2\right)\left(\frac{3\lambda}{\lambda+1} - 4\right)$

$= \frac{9\lambda^2}{(\lambda+1)^2} + \lambda\left(\frac{9\lambda^2}{(\lambda+1)^2} - 6\frac{3\lambda}{\lambda+1} + 8\right) + 1 \to \max_\lambda$

3. Дв-я задача.

$g(\lambda) = \frac{9\lambda^2}{(\lambda+1)^2} + \lambda\left(\frac{9\lambda^2}{(\lambda+1)^2} - 6\frac{3\lambda}{\lambda+1} + 8\right) + 1 \to \max_\lambda, \quad \lambda \ge 0$

$g'(\lambda) = \frac{18\lambda}{(\lambda+1)^3} + \frac{9\lambda^2(\lambda+3)}{(\lambda+1)^3} - \frac{36\lambda}{(\lambda+1)^3} + 8$

$= 9\lambda\frac{2+\lambda(\lambda+3)-4}{(\lambda+1)^3} + 8 = 9\lambda\frac{8(\lambda+1)^3 + (\lambda^2+3\lambda) - 2}{(\lambda+1)^3}$

$= 9\lambda\frac{8\lambda^3 + 24\lambda^2 + 24\lambda + 1 + \lambda^2 + 3\lambda - 2}{(\lambda+1)^3}$

$= 9\lambda\frac{8\lambda^3 + 25\lambda^2 + 27\lambda - 1}{(\lambda+1)^3}$

№5. $K_1(x, z) = (1 + xz)^2$ $\qquad x, z \in R^1$

$K_2 = (1 + xz + x^2 z^2)$

$K_3 = K_1 + K_2$

$K_1 = (1 + xz)^2 = 1 + 2xz + x^2 z^2 = \langle \varphi(x), \varphi(z) \rangle$

$= 1 + 2\langle x, z\rangle + \langle x, z\rangle^2 \Rightarrow \underline{\varphi : R^1 \to R^2}$

$K_2 = 1 + xz + x^2 z^2 = 1 + \langle x, z\rangle + \langle x, z\rangle^2 \Rightarrow \varphi : R^1 \to R^2$

$K_3 = 1 + 2\langle x, z\rangle + \langle x, z\rangle^2 + 1 + \langle x, z\rangle + \langle x, z\rangle^2$

$= 1 + 3\langle x, z\rangle + 2\langle x, z\rangle^2 \Rightarrow \varphi : R^1 \to R^2$