

## Задача 1

На лекции мы выписали двойственный функционал для задачи регрессии:

$$Q(a) = \frac{1}{2} \|\Phi \Phi^T a - y\|^2 + \frac{\lambda}{2} a^T \Phi \Phi^T a = \frac{1}{2} \|Ka - y\|^2 + \frac{\lambda}{2} a^T Ka \longrightarrow \min,$$

где  $K = \Phi \Phi^T$  – матрица Грама. Покажите, что решение данной задачи достигается в

$$a = (K + \lambda I)^{-1} y,$$

где  $I$  – единичная матрица.

## Задача 2

Рассмотрим следующую задачу условной оптимизации:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &\longrightarrow \min, \\ (x - 2)(x - 4) &\leq 0, \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$ .

1. Найдите допустимое множество, оптимальное значение  $x_*$  и оптимальное решение  $f(x_*)$ ;
2. Постройте график минимизируемой функции  $x^2 + 1$  по переменной  $x$ . На том же графике отметьте допустимое множество, оптимальные значения и решение, постройте график лагранжиана  $L(x, \lambda)$  для 2-3 положительных значений  $\lambda$ . Убедитесь, что выполнено неравенство  $f(x_*) \geq \inf_x L(x, \lambda)$ . Нарисуйте эскиз двойственной функции  $g$ .
3. Запишите двойственную задачу оптимизации, найдите двойственное оптимальное значение  $\lambda^*$  и двойственное оптимальное решение  $g(\lambda^*)$ . Выполнена ли строгая двойственность?
- 4\* Обозначим через  $f_u(x_*)$  – оптимальное решение прямой задачи

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &\longrightarrow \min \\ (x - 2)(x - 4) &\leq u, \end{aligned}$$

как функцию от параметра  $u$ . Постройте график  $f_u(x_*)$  по переменной  $u$  и докажите, что

$$\frac{\partial f_u(x_*)}{\partial u} = -\lambda.$$

## Задача 3

Покажите, что функция

$$K(x, z) = \cos(x - z)$$

является ядром.

## Задача 4

Покажите, что функция

$$K(x, z) = \frac{1}{1 + e^{-xz}},$$

где  $x, z \in \mathbb{R}$  не является ядром.

## Задача 5

Пусть даны два ядра  $K_1(x, z) = (1 + xz)^2$  и  $K_2(x, z) = (1 + xz + x^2 z^2)$ . Найдите спрямляющие пространства для ядер  $K_1, K_2, K_1 + K_2$ .