Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина: Прикладные задания математическиго анализа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к курсовой работе
на тему

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Студент: гр. 253505 Азаров Е. А.

Руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент Калугина М. А.

Минск 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Операционное исчисление — один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев с помощью простых средств решать сложные математические задачи такие, как вычисление несобственных интегралов, решение обыкновенных дифференциальных уравнений, решение интегральных уравнений и уравнений в частных производных, и т.п.

Возникновение символического (операционного) исчисления как самостоятельной теории относится ко второй половине XIX века. Однако его истоки прослеживаются еще в классических работах Лейбница, Д. Бернулли, Лагранжа, Лапласа, Эйлера, Фурье, Пуассона, Коши.

Основной идеей, лежащей в основе операторного метода, является подход к оператору дифференцирования как к алгебраической величине. Формальные правила работы с этой величиной были предложены английским физиком О. Хевисайдом при решении дифференциальных уравнений с начальными условиями. Позже операционное исчисление получило строгое обоснование на базе теории аналитических функций, непосредственно связанной с преобразованиями Фурье и Лапласа.

1 ТЕОРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Преобразования Лапласа. Основные понятия

Функцией-оригиналом называется любая комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям:

1)$f(t) = 0$, если $t < 0$;

2)кусочно-непрерывна при $t \geq 0$, причем на каждом конечном промежутке имеет ишь конечное число точек разрыва I рода;

3)$|f(t)|$ возрастает при $t \longrightarrow \infty$ не быстрее показательной функции, то есть $\exists M > 0, s \geq 0 : |f(t)| \leq Me^{st} \, \forall t \geq 0$.

Показателем роста такой функции называют нижнюю грань $s_0 = inf\{s\}$. Слово оригинал по отношению к функции подчеркивает возможность к ней преобразование Лапласа. [1, стр. 4]

Простейшей функцией-оригиналом является так называемая единичная функция Хевисайда.

$$\eta(t) = \left[\begin{array}{l} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{array} \right.$$

Если некоторая функция $f(t)$ удовлетворяет условиям 2) и 3) оригинала, но не обращается в ноль для отрицательного аргумента, то рассматривают обычно произведение $f(t)\eta(t)$.

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Операцию перехода от ориганала к изображению называют преобразованием Лапласа.

1.2 Свойства преобразования Лапласа

1.2.1 Теорема об области существования изображения.

Для всякого ориганала с показателем роста s_0 существует изображение $F(p)$ в полуплоскости $Rep = s > s_0$, которое является аналитической (дифференцируемой) функцией на этом множестве.[1, стр. 5]

Доказательство. Оценим интеграл, определяющий изображение $F(p)$, и учтём при этом, что $|f(t) < Me^{s_0 t}|$:

$$|F(p)| = |\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-pt} f(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} |e^{-pt}| M e^{s_0 t} dt =$$

$$= M \int_0^{+\infty} |e^{-pt + s_0 t}| dt = M \int_0^{+\infty} |e^{-(s+i\sigma)t + s_0 t}| dt M \int_0^{+\infty} |e^{-t(s-s_0)}||e^{-i\sigma t}| dt =$$

$$= ||e^{-i\sigma t}| = 1| = M \int_0^{+\infty} e^{-t(s-s_0)} dt = \left[\begin{array}{l} \frac{M}{s-s_0}, s > s_0 \\ +\infty, s \leq s_0 \end{array} \right. .$$

Таким образом, при $s > s_0$ интеграл Лапласа сходится равномерно, т.е. функция F(p) определена в полуплоскости $s > s_0$. □

1.2.2 Теорема единственности.

Если $F(p)$ — изображение двух функций-оригиналов, то они совпадают в точках непрерывности.

1.2.3 Свойство линейности.

Для любых a и b справедливо равентсво $af(t) + bg(t) \risingdotseq aF(p) + bG(p)$. [1, стр. 6]

Доказательство. Данное свойство следует непосредственно из линейности интеграла. □

1.2.4 Теорема подобия.

$f(kt) \risingdotseq \frac{1}{k} F(\frac{p}{k})$ [1, стр. 7]

Доказательство. По определению преобразования Лапласа

$$f(kt) \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(kt) dt = \left| \ kt = u \to t = \tfrac{u}{k} \to dt = \tfrac{1}{k} du \ \right| =$$

$$= \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-p\frac{u}{k}} f(u) du = \frac{1}{k} F(\frac{p}{k}).$$

□

1.2.5 Дифференцирование оригинала.

Если функции $f(t)$, $f'(t)$,..., $f^{(n)}(t)$ являются функциями-оригиналами и $f(t) \risingdotseq F(t)$, то [2, стр. 6]

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f(0),$$

$$\ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

Доказательство. Найдём изображения $f'(t), f''(t)$ по определению:

$$f'(t) \risingdotseq \int e^{-pt} f'(t) dt = \left| \begin{array}{l} u = e^{-pt} \to du = -pe^{-pt} dt \\ dv = f'(t) dt \to v = f(t) \end{array} \right| =$$

$$= e^{-pt} f(t) \Big|_{t \to +0}^{t \to +\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = 0 - f(+0) + pF(p) = pF(p) - f(+0).$$

Поскольку $f'(t)$ — оригинал по условию теоремы с найденным изображением $F_1(p) = pF(p) - f(+0)$, то согласно только что выведенной формуле

$$(f'(t))' \risingdotseq pF_1(p) - f'(+0) = p(pF(p) - f'(+0)) - f'(+0) =$$

$$= p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0).$$

На основании метода математической индукции можно доказать, что

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \ldots - f^{n-1}(+0).$$

$\square$

1.2.6 Дифференцирование изображения.

Дифференцирование изображения сводится к умножению на $(-t)$ оригинала $F'(p) \risingdotseq -tf(t)$ или, вообще $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n f(t)$. [2, стр. 7]

Доказательство.

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} (-te^{-pt}) f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} (-tf(t)) dt \risingdotseq -tf(t),$$

$$F''(p) = \int_0^{+\infty} (-t)^2 e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} (-t)^2 f(t) dt \risingdotseq (-t)^2 f(t),$$

$$F^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} (-t)^n e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} (-t)^n f(t) dt \risingdotseq (-t)^n f(t)$$

$\square$

1.2.7 Интегрирование ориганала.

Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p, то есть если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\int_0^t f(\tau) d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$. [2, стр.]

Доказательство. Для нахождения изображения воспользуемся определением преобразования Лапласа и поменяем пределы интегрирования в полученном двойном интеграле:

$$\int_0^t f(u)du \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt}(\int_0^t f(u)du)dt = |0 < u < t < +\infty| =$$

$$\int_0^{+\infty} f(u)(\int_u^{+\infty} e^{-pt}dt)du = \int_0^{+\infty} f(u)\,(-\frac{e^{-pt}}{p})\Big|_{t=u}^{t\to+\infty} du =$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du = \frac{1}{p}F(p).$$

□

1.2.8 Интегрирование изображения.

Если интеграл $\int_p^{+\infty} F(p)dp$ сходится, то он служит изображением функции $\frac{f(t)}{t}$: [2, стр. 8]

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{+\infty} F(p)dp.$$

Доказательство.

$$\int_p^{+\infty} F(q)dq = \int_p^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tq}dtdq =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)(\int_t^{+\infty} e^{-tq}dq)dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,\frac{e^{-qt}}{-t}\Big|_{q=t}^{q\to+\infty} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt.$$

□

1.2.9 Теорема смещения.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого комплексного p_0 [1, стр. 9]

$$e^{p_0t}f(t) \risingdotseq F(p-p_0).$$

Доказательство. Найдём изображение функции-оригинала $e^{-p_0t}f(t)$ по определению Лапласа:

$$e^{p_0t}f(t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{p_0t}f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-p_0)t}f(t)dt = F(p-p_0).$$

$\square$

1.2.10 Теорема запаздывания.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого положительного τ [1, стр. 7]

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p).$$

Доказательство. Поскольку $f(t-\tau)$ — оригинал, то $f(t-\tau) = 0$ при $t < \tau$. Значит,

$$f(t-\tau) \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t-\tau)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t-\tau)dt =$$

$$= \Big|\ t-\tau = u \to dt = du\ \Big| = \int_0^{+\infty} e^{-p(t+\tau)}f(u)du = e^{-p\tau}\int_0^{+\infty} e^{-pu}f(u)du =$$
$$= e^{-p\tau}F(p).$$

$\square$

1.2.11 Теорема о свёртке.

Свёрткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$ называется функция вида [3, стр. 53]

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t g(u)f(t-u)du.$$

Для функций-ориганалов $f(t)$ и $g(t)$ справедливо [3, стр. 55]

$$f(t)*g(t) \risingdotseq F(p)G(p).$$

Доказательство. Для нахождения изображения воспользуемся определением преобразования Лапласа и поменяем пределы интегрирования в полученном двойном интеграле:

$$f(t)*g(t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt}\int_0^t f(u)g(t-u)dudt =$$

$$= |0 < u < t < +\infty| = \int_0^{+\infty}\int_u^{+\infty} e^{-py}f(u)g(t-u)dtdu =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(u)\int_u^{+\infty} e^{-pt}g(t-u)dtdu = |t-u = z| =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(u) \int_0^{+\infty} e^{-p(u+z)} g(z) dz du = \int_0^{+\infty} f(u) e^{-pu} du \int_0^{+\infty} e^{-pz} g(z) dz =$$
$$= F(p)G(p).$$

$\square$

1.3 Обратное преобразования Лапласа

Оригинал по известному изображению определяется однозначно следующей формулой при достаточно общих условиях:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} e^{pt} F(p) dp, Rep > s_0.$$

Доказательство. [1, стр. 24]

1.4 Таблица основных оригиналов и их изображения

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$\dfrac{1}{p}$
$t^n \ (n = 1,2,...)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
$e^{\alpha t}\cos(\beta t)$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\sin(\beta t)$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$\operatorname{sh}\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
$\operatorname{ch}\alpha t$	$\dfrac{t}{p^2-\alpha^2}$
$t\sin\alpha t$	$\dfrac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$
$t\cos\alpha t$	$\dfrac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$
$\dfrac{1}{2\alpha^3}(\sin\alpha t - \alpha t\cos\alpha t)$	$\dfrac{1}{(p^2+\alpha^2)^2}$
$\delta(t)$	1

1.5 Приложения к вычислению неберущихся интегралов

На основании теоремы об интегрировании изображения появляется следствие: [2, стр. 9]

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(p)dp, f(t) \risingdotseq F(p).$$

Доказательство. Подставим в правую часть равенства интегра Лапласа и поменяем пределы интегрирования:

$$\int_0^\infty F(p)dp = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt dp = \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty e^{-pt} dp dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)(-\frac{1}{t}e^{-pt})|_{p=0}^{p\to\infty} = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt.$$

□

Данная формула позволяет вычислять неберущиеся интегралы.

1.6 Приложения операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений и их систем

1.6.1 Общий случай решения задачи Коши дифференциального уравнения.

Пусть имеем дифференциальное уравнение (для простоты второго порядка)

$$a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x(t) = f(t),$$

где $a_0, a_1, a_2 = const, a_0 \neq 0, f(t)$ - функция оригинал. Пусть решение удовлетворяет начальным условиям $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$. А также $x(t) \risingdotseq X(p)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Применяя к обеим частям исходного дифференциального уравнения преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа получаем операторное уравнение:

$$(a_0p^2 + a_1p + a_2)X(p) - (a_0px_0 + a_0x_1 + a_1x_0) = F(p).$$

Откуда выражаем $X(p)$: [2, стр. 30]

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0px_0 + a_0x_1 + a_1x_0}{a_0p^2 + a_1p + a_2}.$$

Это так называемое операторное решение. Найдя оригинал по $X(p)$, мы получим функцию $x(t)$ – решение задачи Коши исходного дифференциального уравнения.

Общий случай решения задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка принципиально ничем не отличается от случая n = 2. На рисунке 1.1 показана схема решения задачи Коши операторным методом. [2, стр. 30]

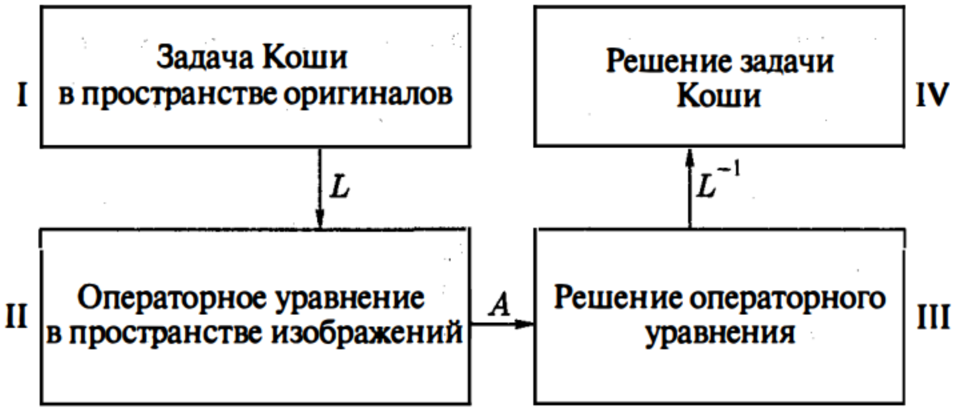

Рисунок 1.1 – Алгоритм решения задачи Коши операторным методом

1.6.2 Интеграл Дюамеля.

В случаях, когда сложно найти изображение по $f(t)$, применяется формула Дюамеля.

Пусть $f(t)$ непрепрывна на $[0, +\infty)$, а функция $\phi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$ и $F(p) \risingdotseq f(t)$, $\Phi(p) \risingdotseq \phi(t)$, то по теореме о свёртке:

$$F(p)\Phi(p) \risingdotseq \int_0^t f(u)\phi(t-u)du.$$

Отсюда по теореме о дифференцировании ориганала получаем формулу Дюамеля [2, стр. 41]

$$pF(p)\Phi(p) \risingdotseq f(t)\phi(0) + \int_0^t f(u)\phi'(t-u)du.$$

Пусть требуется решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами n-ого порядка

$$L[x] \equiv a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(0) + ... + a_n x(t) = f(t), a_0 \neq 0,$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = ... = x^{n-1}(0) = 0.$$

Допустим, что известно решение $X_1(p)$ уравнения

$$L[x] = 1$$

с той же левой частью и правой частью, равной единицы при нулевых начальных условиях.

Переходя к операторным уравнениям, будем иметь ($A(p)$ – известный многочлен от p)

$$A(p)X(p) = F(p).$$

Откуда

$$X(p) = \frac{F(p)}{A(p)}.$$

Для уравнения $L[x] = 1$ имеем

$$A(p)X_1(p) = \frac{1}{p}.$$

Тогда

$$A(p) = \frac{1}{pX_1(p)},$$

откуда

$$X(p) = pX_1(p)F(p).$$

Согласно формуле Дюамеля

$$pX_1(p)F(p) \risingdotseq f(t)x_1(0) + \int_0^t f(u)x_1'(t-u)du.$$

Учитывая, что $x_1(0) = 0$, получаем

$$X(p) = pX_1(p)F(p) \risingdotseq \int_0^t f(u)x_1'(t-u)du.$$

Отсюда решение исходного дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях будет иметь вид [2, стр. 42]

$$x(t) = \int_0^t f(u)x_1'(t-u)du.$$

1.6.3 Решение систем линейных дифференциальных уравнений.

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом производится по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения.

Пусть, например, нужно решить систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\frac{d^2x_k}{dt^2}+b_{ik}\frac{dx_k}{dt}+c_{ik}x_k)=f_i(t), i=1,2,...,n,$$

где $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} = const$, при начальных условиях $x_k = \alpha_k$, $x'_k(0) = \beta_k$. Обозначая через $X_k(p)$ и $F_i(p)$ изображения $x_k(t)$ и $f_i(t)$, от изначальной системы дифференциальных уравнений перейдём к операторной системе [2, стр. 45]

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}p^2+b_{ik}p+c_{ik})X_k(p)=F_i(p)+\sum_{k=1}^{n}[(a_{ik}p+b_{ik})\alpha_k\beta_k], i=1,2,...,n.$$

Решая полученную систему как линейную алгебраическую систему уравнений относительно $X_k(p)$, найдём $X_k(p)$, а затем их оригиналы $x_k(t)$ $k = 1, 2,..., n$, являющиеся решениями задачи Коши для исходной системы дифференциальных уравнений.

1.7 Интегральные уравнения Вольтера с ядрами специального вида

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. Рассмотрим решение задачи Коши

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0.$$

Оно сводится к следующему интегральному уравнению:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx + y_0.$$

Если функция y входит в уравнение линейно, то интегральное уравнение называется линейным. [2, стр. 49]

Уравнение вида

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt,$$

где a и b – постоянные, называется линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода [2, стр. 49]. Здесь $K(x,t)$, $f(x)$ – заданные функции, $y(x)$ – искомая функция. Функцию $K(x,t)$ называют ядром уравнения.

Уравнения вида [2, стр. 49]

$$\phi(x) + \int_0^x K(x-t)\phi(t)dt = f(x)$$

с ядром $K(x-t)$, зависящим лишь от разности аргументов, представляют собой важный класс уравнений Вольтера. Они иногда называются уравнениями типа свёртки.

Пусть имеем следующее уравнение

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\phi(t)dt.$$

Предполагая, что функции $\phi(x)$, $f(x)$, $K(x)$ удовлетворяют условиям оригиналов, применим к обеим частям преобразование Лапласа $\phi(x) \risingdotseq \Phi(p), f(x) \risingdotseq F(p), K(x) \risingdotseq L(p)$

$$\Phi(p) = F(p) + L(p)\Phi(p).$$

Откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-L(p)}, L(p) \neq 1.$$

Для $\Phi(p)$ находим оригинал $\phi(x)$ – решение исходного интегрального уравнения. [2, стр. 50]

Аналогично решаются интегральные уравнения Вольтера первого рода с ядром $K(x-t)$, зависящим только от разности $x-t$, то есть уравнение вида

$$\int_0^x K(x-t)\phi(t)dt = f(x),$$

где $f(x)$ – известная функция, $\phi(x)$ – искомая функция. При этом предполагаем, что $K(x,x) \neq 0$, $F(p) \risingdotseq f(x), L(p) \risingdotseq K(x), \Phi(p) \risingdotseq \phi(x)$. Применяя к обеим частям интегрального уравнения и используя теорему о свертке, будем иметь

$$L(p)\Phi(p) = F(p),$$

Откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{L(p)}, L(p) \neq 0.$$

Оригинал для $\Phi(p)$ будет решением $\phi(x)$ исходного интегрального уравнения. [2, стр. 51]

Указанный метод решения уравнений приложим также к системам интегральных уравнений Вольтера вида

$$\phi_i(x) = f_i(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^x K_{ik}(x-t)\phi_k(t)dt, (i = 1,2,..., n).$$

Применяя к обеим частям каждого уравнения преобразование Лапласа, получим

$$\Phi_i(p) = F_i(p) + \sum_{k=1}^{n} L_{ik}(p)\Phi(p), (i = 1,2,3,...,n).$$

Решая эту систему уравнений, линейную относительно $\Phi_i(p)$, найдём $\Phi_i(p)$ $(i = 1,2,3,...,n)$, оригиналы для которых и будут решением исходной системы интегральных уравнений. [2, стр. 52]

1.8 Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом

Уравнения вида [2, стр. 54]

$$x'(t) = \phi(t, x(t), x(t-u(t))),$$

$$x'(t) = \phi(t, x(t), x'(t-u(t)), x'(t-u(t))),$$

$$x''(t) = \phi(t, x(t), x'(t), x'(t-u_1(t)), x(t-u_2(t))).$$

называются дифференциальными уравнениями с отклоняющимися аргументами. Если $u_i(t)$ – постоянные, то такое уравнение называется дифференциально-разностным. Если $u_i(t) > 0$ и старшая производная входит в дифференциально-разностное уравнение только при одном значении аргумента, не меньшем всех других аргументов функций и производных, входящих в уравнение, то уравнение называется дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом.

Пусть дано дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом с постоянными коэффициентами:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t-u_k) + f(t),$$

где $a_k = const, u_k = const \geq 0 (0 < t < +\infty)$. Возьмём для простоты нулевые начальные условия

$$x(0) = x'(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0.$$

При этом полагаем для $t < 0$

$$x(t) = x'(t) = ... = x^{(n-1)}(t) \equiv 0.$$

Применяя к обеим частям исходного дифференциального уравнения преобразование Лапласа и пользуясь при этом теоремой о запаздывании, получим операторное уравнение для $X(p) \risingdotseq x(t)$:

$$p^n X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k X(p) e^{-u_k p} + F(p),$$

откуда [2, стр. 55]

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-u_k p}}.$$

Находя $x(t)$ – оригинал для $X(p)$, получаем решение исходного дифференциального уравнения.

1.9 Преобразование Фурье и его приложения

1.9.1 Определения преобразования Фурье.

Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей области определения, тогда функция

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

называется преобразованием Фурье (Фурье-образом) функции $f(x)$ [2, стр. 76]. Здесь ξ — действительная переменная. В дальнейшем преобразование Фурье будем обозначать следующим образом:

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\xi).$$

Обратным преобразованием Фурье называется формула [2, стр. 76]

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

1.9.2 Свойства преобразования Фурье.

1. Линейность. Если $F(\xi)$ и $G(\xi)$ — Фурье-образы функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то при любых постоянных α и β верно следующее выражение: [2, стр. 78]

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha F(\xi) + \beta G(\xi).$$

Доказательство. Доказательство следует из линейности интеграла. □

2. Если $F(\xi)$ — Фурье-образ абсолютно интегрируемой на всей числовой оси функции $f(x)$, то $F(\xi)$ ограничена при всех $\xi \in (-\infty, +\infty)$:

$$|F(\xi)| \leq M, \forall \xi, -\infty < \xi < +\infty.$$

3. Дифференцированию функции $f(x)$ отвечает умножение её образа $F(\xi)$ на множитель $i\xi$: [2, стр. 78]

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\xi), f'(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\xi F(\xi),$$

$$f^{(n)}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\xi)^n F(\xi).$$

Таким образом, преобразование Фурье заменяет операцию дифференцирования операцией умножения и тем самым упрощает задачу интегрирования некоторых типов дифференциальных уравнений.

4. Пусть $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\xi)$. Тогда

$$xf(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\frac{d}{d\xi}F(\xi),$$

$$x^k f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^k \frac{d^k}{d\xi^k}F(\xi),$$

т.е. преобразование Фурье заменяет операцию умножения $f(x)$ на аргумент x операцией $i\frac{d}{d\xi}$. [2, стр. 78]

5. Преобразование Фурье свёртки функций. Пусть $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ — Фурье-образы функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Тогда [2, стр. 78]

$$f_1 * f_2 \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{2\pi}F_1F_2.$$

Доказательство. [4, стр. 68]

1.9.3 Таблица основных преобразований Фурье.

Функция $f(t)$	Образ $F(\omega)$
1	$\sqrt{2\pi}\delta(\omega)$
t^n $(n = 1,2,...)$	$i^n\sqrt{2\pi}\delta(\omega)$
$e^{-\alpha t^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{-\omega^2}{4\alpha}}$
$e^{i\alpha t}$	$\sqrt{2\pi}\delta(\omega-\alpha)$
$\cos(\alpha t)$	$\sqrt{2\pi}\frac{\delta(\omega-\alpha)+\delta(\omega+\alpha)}{2}$
$\sin(\alpha t)$	$\sqrt{2\pi}\frac{\delta(\omega-\alpha)-\delta(\omega+\alpha)}{2i}$
$\frac{1}{t^n}$	$-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}sgn(\omega)$

1.9.4 Приложения преобразования Фурье.

Пусть требуется найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности [2, стр. 79]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, a = const, t > 0, -\infty < x < +\infty,$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = \phi(x), -\infty < x < +\infty.$$

Физический смысл этой задачи состоит в определении температуры однородного бесконечного стержня в любой момент времени $t > 0$, если езвестна его температура в $\phi(x)$ в момент времени $t = 0$. Считается, что боковая поверхность стержня теплоизолирована, так что через нее тепло из стержня не уходит.

Поскольку пространственная переменная x меняется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, можно применить исходному уравнению преобразование Фурье. Предположим, что для функций $u(x,t)$ и $\phi(x)$ существуют изображения Фурье

$$v(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\xi x}dx,$$

$$\widetilde{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)e^{-i\xi x}dx.$$

Продифференцируем образы:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-i\xi x}=\frac{dv(\xi,t)}{dt},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-i\xi x}=-\xi^2 v(\xi,t).$$

Применяя преобразование Фурье относительно x к обеим частям исходного уравнения, перейдём к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{dt}+\xi^2 a^2 v=0,\, v|_{t=0}=\widetilde{\phi}(\xi),$$

(величина ξ играет роль параметра).

Тогда решение данного уравнения примет вид

$$v(\xi,t)=\widetilde{\phi}(\xi)e^{-\xi^2 a^2 t}.$$

$$e^{-\xi^2 a^2 t}\xrightarrow{\mathcal{F}^{-\infty}}\frac{1}{2\sqrt{2t}}e^{-x^2/(4a^2t)}$$

На основании теоремы о свёртке функций

$$v(\xi,t)\xrightarrow{\mathcal{F}^{-\infty}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi(\xi)*\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-x^2/(4a^2t)}.$$

Данную формулу можно переписать в виде

$$\mathcal{F}|u(x,t)|=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathcal{F}|\phi(\xi)*e^{-x^2/(4a^2t)}|,$$

откуда, пользуясь выражением для свёртки функции $\phi(x)$ и $e^{-x^2/(4a^2t)}$, получим

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\lambda)*e^{-(x-\lambda)^2/(4a^2t)}d\lambda.$$

Данная формула является решением исходной задачи Коши для уравнения теплопроводности.

1.10 Косинус- и синус-преобразования Фурье и его приложения

1.10.1 Определения косинус- и синус-преобразований.

Синус-преобразование Фурье и косинус-преобразование Фурье — одни из видов преобразований Фурье, не использующих комплексные числа. Их удобно применять, когда переменная x изменяется от 0 до $+\infty$. Функция

$$F_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \xi x dx$$

называется косинус-преобразованием Фурье функции $f(x)$. [2, стр. 84]

Формула обратного преобразования имеет вид [2, стр. 85]

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_c(\xi) \cos \xi x d\xi.$$

Функция [2, стр. 85]

$$F_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \xi x dx$$

называется синус-преобразованием Фурье функции $f(x)$.

Формула обратного преобразования имеет вид [2, стр. 85]

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_s(\xi) \sin \xi x d\xi.$$

1.10.2 Приложения синус- и косинус-преобразвания Фурье в интегрировании дифференциальных уравнений в частных производных.

Пусть $u(x,t)$ некоторая функция и $v_s(\xi, t)$ её преобразование Фурье:

$$v_s(\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} u(x,t) \sin \xi x dx.$$

Допустим, что $u(x,t)$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$ достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \to +\infty \forall t$. Найдём синус-преобразование второй производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Интегрируя по частям, имеем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \xi x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [(\frac{\partial u}{\partial x})\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \xi \int_{0}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \xi x dx].$$

Внеинтегральное слагаемое обращается в ноль, и мы получаем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \xi x dx = xi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \xi dx.$$

Интегрируя ещё раз по частям, получаем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\xi x dx = -\xi\sqrt{\frac{2}{\pi}}[(u\cos\xi x)|_{x=0}^{x=+\infty} + \xi\int_0^{+\infty}u(x,t)\sin\xi x dx,]$$

или

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\xi x dx = -\left.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi u\right|_{x=0} - \xi^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}u(x,t)\sin\xi x dx.$$

Таким образом, синус-преобразование Фурье второй производной Фурье выражается через синус-преобразвание Фурье производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ выражается через синус-преобразование самой функции $u(x,t)$ и значение $u(x,t)$ при $x = 0$. [2, стр. 87]

2 ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пример 1. Найдите изображение по заданному оригиналу [5, стр. 35]

$$f(t-1) = (t-1)^2\eta(t-1).$$

Решение. Для функции $f(t) = t^2\eta(t)$ имеем

$$f(t) \risingdotseq \frac{2}{p^3}.$$

По теореме запаздывания для функции $f(t-1) = (t-1)^2\eta(t-1)$ имеем

$$(t-1)^2\eta(t-1) \risingdotseq e^{-p}\frac{2}{p^3}.$$

На рисунке 2.1 показано решение, полученное в СКА Maple.

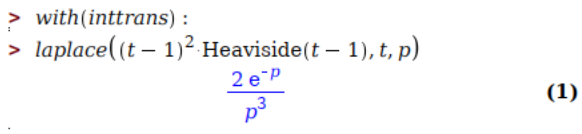

Рисунок 2.1 – Решение примера 1 в Maple

Пример 2. Найдите оригинал по заданному изображению

$$F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}.$$

Решение. Разложим $F(p)$ на сумму простейших дробей

$$fracp(p+1)(p^2+p+1) = \frac{-1}{p+1} + \frac{p+1}{p^2+p+1}.$$

Представим $\frac{p+1}{p^2+p+1}$ в виде суммы табличных образов для ориганалов $e^{at}\cos bt$ и $e^{at}\sin bt$

$$\frac{p+1}{p^2+p+1} = \frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}.$$

Найдём по таблице основных оригиналов и изображений соответствующие оригиналы:

$$-\frac{1}{p+1} \risingdotseq -e^{-t},$$

$$\frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \risingdotseq e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \risingdotseq \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Найдём сумму:

$$\frac{p}{(p+1)(p^2+p+1)} \risingdotseq -e^{-t} + e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + frac\sqrt{3}3e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t =$$

$$= -e^{-t} + \frac{e^{-t/2}(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + 3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t)}{3}.$$

На рисунке 2.2 показано решение, полученное в СКА Maple.

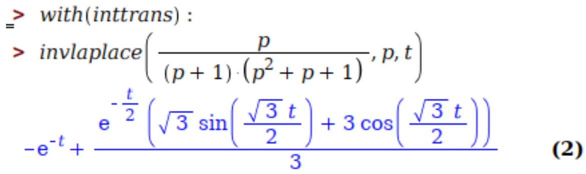

Рисунок 2.2 – Решение примера 2 в Maple

Пример 3. Вычислить неберущийся интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt.$$

Решение. Имеем $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$. Тогда:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \int_0^{+\infty}(\frac{1}{p^2+1})dp = \operatorname{arctg} p|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

На рисунке 2.3 показано решение, полученное в СКА Maple.

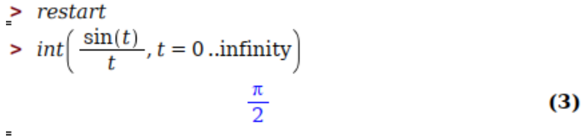

Рисунок 2.3 – Решение примера 3 в Maple

Пример 4. Вычислить неберущийся интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt, (b>0, a>0).$$

Решение. Имеем $e^{-at} - e^{-bt} \risingdotseq \frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b}$. Тогда:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^{+\infty} (\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b}) dp = \ln|\frac{p+a}{p+b}| \Big|_{p=0}^{p=\infty} =$$

$$= -\ln|\frac{a}{b}| = \ln|\frac{b}{a}|.$$

На рисунке 2.4 показано решение, полученное в СКА Maple.

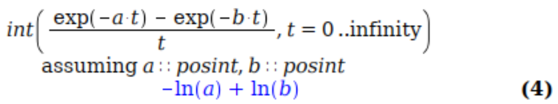

Рисунок 2.4 – Решение примера 4 в Maple

Пример 5. Найдите решение задачи Коши для заданного дифференциального уравнения [5, стр. 36]

$$y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Решение. Найдём изображения для производных:

$$y(t) \risingdotseq Y(p),$$

$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p),$$

$$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1.$$

Применим преобразование к обеим частям исходного дифференциального уравнения и решим операторное уравнение:

$$p^2Y(p) - 1 + 4pY(p) + 29Y(p) = \frac{1}{p+2},$$

$$Y(p)(p^2 + 4p + 29) = \frac{p+3}{p+2},$$

$$Y(p) = \frac{p+3}{(p+2)(p^2+4p+29)}.$$

Представим решение операторного уравнения в виде суммы простых дробей:

$$Y(p) = \frac{1}{25(p+2)} + \frac{-(p-23)}{25(p^2+4p+29)}.$$

Разложим $\frac{-(p-23)}{25(p^2+4p+29)}$, на сумму дробей, оригиналы которых можно найти по таблице основных оригиналов и изображений

$$\frac{-(p-23)}{25(p^2+4p+29)} = \frac{-1}{25}\frac{p+2}{(p+2)^2+5^2} + \frac{5}{25}\frac{5}{(p+2)^2+5^2}.$$

Найдём оригинал каждого слагаемого:

$$\frac{1}{25(p+2)} \risingdotseq \frac{e^{-2t}}{25},$$

$$\frac{-1}{25}\frac{p+2}{(p+2)^2+5^2} \risingdotseq \frac{-e^{-2t}\cos 5t}{25},$$

$$\frac{5}{25}\frac{5}{(p+2)^2+5^2} \risingdotseq \frac{e^{-2t}\sin 5t}{5}.$$

Тогда, применив обратное преобразование Лапласа, получим

$$y(t) = \frac{e^{-2t}}{25} - \frac{e^{-2t}\cos 5t}{25} + \frac{e^{-2t}\sin 5t}{5}.$$

На рисунке 2.5 показано решение, полученное в СКА Maple.

$$dsolve\left(\left\{\frac{d^2}{dt^2}(y(t)) + 4\cdot\frac{d}{dt}(y(t)) + 29\cdot y(t) = \exp(-2\,t), y(0) = 0, y'(0) = 1\right\}\right)$$

$$y(t) = \frac{e^{-2\,t}\sin(5\,t)}{5} - \frac{e^{-2\,t}\cos(5\,t)}{25} + \frac{e^{-2\,t}}{25} \qquad \textbf{(5)}$$

Рисунок 2.5 – Решение задачи Коши примера 5 в Maple

Пример 6. Используя интеграл Дюамеля, найдите решение задачи Коши для заданного дифференциального уравнения [5, стр. 35]

$$x'' - x' = \frac{1}{1+e^t}, y(0) = y'(0) = 0.$$

Решение. По теореме о дифференцировании

$$x(t) \risingdotseq X(p),$$

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p).$$

Пусть

$$x_1'' - x_1' = 1.$$

Применим преобразвание Лапласа к обеим частям данного уравнения

$$p^2X_1(p) - pX_1(p) = \frac{1}{p},$$

$$X_1(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Данное уравнение можно записать в виде

$$A(p)X_1(p) = \frac{1}{p}.$$

Выразим $A(p)$

$$A(p) = \frac{1}{pX_1(p)}.$$

К исходному уравнении

$$x'' - x' = \frac{1}{1+e^t}$$

применим преобразование Лапласа и представим в следующем виде

$$A(p)X(p) = F(p).$$

Откуда

$$X(p) = \frac{F(p)}{A(p)} = |A(p) = frac1pX_1(p)| = pX_1(p)F(p).$$

Воспользовавшись теоремой о преобразовании свёртки, получим интеграл Дюамеля

$$x(t) = \int_0^t f(u)x_1'(t-u)du.$$

Найдём оригианал для $X_1(p)$

$$\frac{1}{p^2(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \risingdotseq e^t - 1 - t.$$

Продифференцируем $x_1(t)$

$$x_1' = e^t - 1.$$

Тогда

$$x(t) = \int_0^t \frac{e^{t-u}-1}{e^u+1}du = \int_0^t \frac{e^{t-u}-1}{e^u+1} =$$
$$= -1 + e^t - (1+e^t)(t - \ln(e^t+1) + \ln 2).$$

На рисунке 2.6 показано решение, полученное в СКА Maple.

$$dsolve\left(\left\{\frac{d^2}{dt^2}(x(t))-\frac{d}{dt}(x(t))=\frac{1}{\exp(t)+1}, x(0)=0, x'(0)=0\right\}\right)$$

$$x(t)=-t+e^t(1-\ln(2))+\ln\left(e^t+1\right)\left(e^t+1\right)-1-e^t\ln\left(e^t\right)-\ln(2) \qquad (6)$$

Рисунок 2.6 – Решение задачи Коши примера 6 в Maple

Пример 7. Найдите решение задачи Коши для заданной системы дифференциальных уравнений [5, стр. 38]

$$\begin{cases} x' = -x + 3y + 1 \\ y' = x + y \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = 2.$$

Решение. Применим преобразование Лапласа к исходной системе дифференциальных уравнений. Пусть

$$x(t) \risingdotseq X(p),$$

$$y(t) \risingdotseq Y(p),$$

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) - 2,$$

тогда получим следующую операторную систему

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = -X(p) + 3Y(p) + \frac{1}{p} \\ pY(p) - 2 = X(p) + Y(p) \end{cases},$$

$$\begin{cases} (p+1)X(p) - 3Y(p) = \frac{p+1}{p} \\ -X(p) + (p-1)Y(p) = 2 \end{cases}.$$

Решим данную систему линейных алгебраических уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & -3 \\ -1 & p-1 \end{vmatrix} = p^2 - 4,$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} \frac{p+1}{p} & -3 \\ 2 & p-1 \end{vmatrix} = 6 + \frac{p^2-1}{p},$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p+1 & \frac{p+1}{p} \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2p + 2 + \frac{p+1}{p}.$$

$$X(p)\frac{\Delta_X}{\Delta} = -\frac{3}{2(p+2)} + \frac{3}{2(p-2)} + \frac{1}{4p} + \frac{3}{8(p-2) + \frac{3}{8(p+2)}}.$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = -\frac{1}{4p} + \frac{1}{p+2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}) + \frac{1}{p-2}(\frac{3}{2}) + \frac{3}{8}.$$

Применим обратное преобразование к изображениям $X(p)$ и $Y(p)$ и получим

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{9}{8}e^{-2t} + \frac{15}{8}e^{2t} + \frac{1}{4} \\ y(t) = \frac{3}{8}e^{-2t} + \frac{15}{8}e^{2t} - \frac{1}{4} \end{cases}.$$

На рисунке 2.7 показано решение, полученное в СКА Maple.

```
dsystem := diff(x(t), t) =-x(t) + 3·y(t) + 1, diff(y(t), t) = x(t) + y(t);
```

$$dsystem := \frac{d}{dt}\,x(t) = -x(t) + 3\,y(t) + 1,\ \frac{d}{dt}\,y(t) = x(t) + y(t)$$

```
dsolve({dsystem, x(0) = 1, y(0) = 2})
```

$$\left\{x(t) = -\frac{9\,e^{-2t}}{8} + \frac{15\,e^{2t}}{8} + \frac{1}{4},\ y(t) = \frac{3\,e^{-2t}}{8} + \frac{15\,e^{2t}}{8} - \frac{1}{4}\right\}$$

Рисунок 2.7 – Решение задачи Коши примера 7 в Maple

Пример 8. Найдите решение следующего интегрального уравнения [2, стр. 50]

$$y(x) = \cos x + \int_0^x (x-t)y(t)dt.$$

Решение. Переходя к изображениям и рассматривая интеграл как свертку функций, получим на осноавнии правла изображения свёртки

$$Y(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2}Y(p),$$

откуда

$$Y(p) = \frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)}.$$

Находя оригинал для $Y(p)$, получим решение интегрального уравнения

$$y(t) = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{ch} x).$$

На рисунке 2.8 показано решение, полученное в СКА Maple.

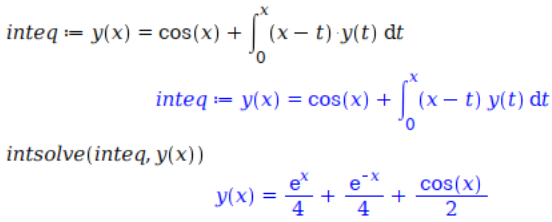

Рисунок 2.8 – Решение примера 8 в Maple

Пример 9. Найдите решение дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом [2, стр. 55]

$$x'(t) = x(t-1) + 1, x(0) = 0.$$

Решение. Переходя к изображениям, получим

$$pX(p) = X(p)e^{-p} + \frac{1}{p},$$

откуда

$$X(p) = \frac{1}{p}\frac{1}{p - e^{-p}} = \frac{1}{p^2}\frac{1}{1 - \frac{e^{-p}}{p}} =$$

$$= \frac{1}{p^2}(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + ... + \frac{e^{-np}}{p^n} + ...).$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим

$$x(t) = t\eta(t) + \frac{1}{2!}(t-1)^2\eta(t-1) + ... + \frac{1}{(n+1)!}(t-n)^{n+1}\eta(t-n) + ... =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\eta(t-k).$$

На рисунке 2.9 показан график решения, полученный в СКА Maple.

```
deleq := diff(x(t), t) = x(t − 1) + 10
```

$$deleq := \frac{d}{dt}\, x(t) = x(t-1) + 1$$

```
res := dsolve({deleq, x(0) = 0}, numeric) :
plots[odeplot](res, 0 ..10)
```

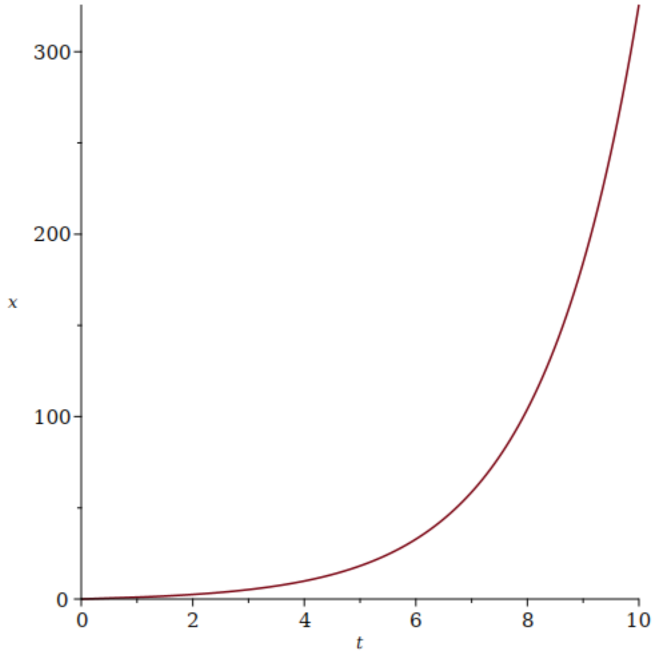

Рисунок 2.9 – График решения примера 9 в Maple

Пример 10. Найдите решение следующего интегрального уравнения, используя синус-преобразование Фурье, [2, стр. 89]

$$\int_0^{+\infty} y(x) \cos \xi x dx = \frac{1}{1+\xi^2}.$$

Решение. Умножим обе части интегрального уравнения на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} y(x) \cos \xi x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}.$$

Левая часть этого равенства является косинус-преобразованием $Y_c(\xi)$ функции $y(x)$, отсюда

$$Y_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}.$$

Тогда по формуле обратного косинус-преобразования Фурье имеем

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} Y_c(\xi) \cos \xi x d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \xi x}{1+\xi^2} dx.$$

Вычисляя данный интеграл, получим

$$y(x) = e^{-x}, (x \geq 0).$$

На рисунке 2.10 показано решение, полученное в СКА Maple.

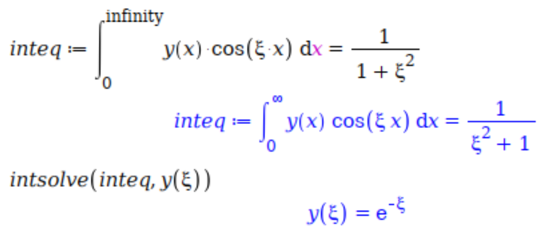

Рисунок 2.10 – Решение примера 10 в Maple

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной курсовой работе была рассмотрена тема «Приложения операционного исчисления» по учебным пособиям из указанного списка источников. Были рассмотрены основные понятия, свойства и приложения в вычислении дифференциальных и интегральных уравнений преобразований Лапласа и Фурье.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Дубков А.А., Агудов Н.В. Преобразование Лапласа. — Учебно-методическое пособие. — Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

[2] Краснов М. Л., Киселёв А. И., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.:Едиториал, 2003.

[3] Плескунов, М.А. Операционное исчисление. — Учебное пособие. — Издательство Уральского университета, Екатеринбург, 2014.

[4] Ющенко Д.П., Якубович О.В. Математический анализ. Ряды Фурье. — Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины. Гомель, 2008.

[5] Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты. — М.:Высшая школа, 1999.

[6] Подолян С.В., Юрченко И.В. Операционное исчисление и его применение. — Учебно-методическое пособие. — Учреждение образования «Могилевский государственный университет продовольствия».

[7] Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Часть 4. — Учеб. пособие для втузов. Ч.4. — Мн.: Высш. шк, 1987.

[8] Маслов, В.П. Операторные методы. — Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», Москва, 1973.

[9] Винер, Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. — Издательство «Физматгиз», Москва, 1983.

[10] Розенблюм, А.А. Интегрирование дифференциальных уравнений операторным методом. — Учебное пособие. — Издательство ГГУ, Горький, 1983.

[11] Танана, В.П. Методы решения операторных уравнений. — Учебное пособие. — Издательство «Наука», Москва, 1981.

[12] Jan Mikusinski, Operational calculus. — Polysh Academy of Sciences, Warszawa, 1967.

[13] Gregers Krabbe, Operational calculus. — Purdue University, Berlin, 1975.