

Оглавление

1. Введение	2
2. Постановка задачи	6
3. Подходы к получению упругих характеристик дисперсно-армированного композита	7
3.1. Подход Mori-Tanaka	9
3.2. Подход Self-consistent	11
4. Результаты работы	12
4.1. Описание алгоритма	12
4.2. Графическое представление	14
5. Заключение	20
Список использованных источников	21

1. Введение

Основным подходом, позволяющим использовать макросвойства и макромоделли для материалов, обладающих сложной микроструктурой, является подход гомогенизации — замены неоднородного материала с известной микроструктурой на однородную среду, реагирующую на механические воздействия эквивалентно неоднородному материалу. [1] Основным понятием является понятие *репрезентативного элементарного объема* (РЭО) — характерного объема исследуемого материала, верно отражающего микроструктуру, поведение которого неотлично от поведения материала в целом, и который при этом на макроуровне можно рассматривать как материальную точку. (Рис. 1)

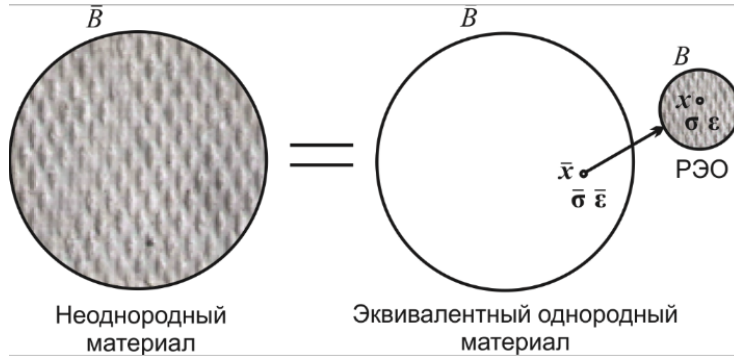


Рис. 1. Схема РЭО

Для упругого однородного материала справедлив обобщенный закон Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = D_{ijkl}\sigma_{ij}, \quad (1)$$

где C_{ijkl} — компоненты тензора упругости C ; D_{ijkl} — компоненты тензора упругой податливости D ; σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензоров напряжения и деформации соответственно. В Тензорные соотношения (1), пользуясь свойствами симметрии тензоров и теоремой о взаимности работ, удобно представлять в матричной форме ($C_{ijkl} \rightarrow C_{pq}$, $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$).

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}, [D] = [C]^{-1}.$$

В общем случае анизотропного материала матрица упругости $[C]$ симметрична относительно своей главной диагонали и имеет 21 независимую компоненту.

Если в анизотропном теле его упругие свойства идентичны в любых двух направлениях, симметричных относительно некоторой плоскости, то такая плоскость называется плоскостью упругой симметрии. Плоскость, в которой упругие свойства во всех направлениях идентичны, называют плоскостью изотропии.

Будем рассматривать композиционные материалы, которые обладают плоскостями упругой симметрии и/или плоскостями изотропии. Можно выделить ортотропные, трансверсально-изотропные и изотропные композиционные материалы.

Матрица упругости трансверсально-изотропного материала имеет вид

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{22} - C_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}.$$

Упругое поведение может быть описано 5 упругими постоянными

$$E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{23}.$$

Для $E_3, G_{13}, G_{23}, \nu_{13}$ справедливо

$$E_3 = E_2, G_{13} = G_{12}, G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})}, \nu_{13} = \nu_{12}.$$

Коэффициенты матрицы упругости выражаются через приведенные выше упругие постоянные

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}^2}{E_2^2 B}, & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 B}, \\ C_{12} &= \frac{\nu_{12}(1 + \nu_{23})}{E_1 E_2 B}, & C_{23} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}}{E_1 E_2 B}, & C_{66} &= G_{12}, \\ B &= \frac{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}{E_1 E_2^2}, \end{aligned}$$

и наоборот

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{C_{11}C_{22} + C_{11}C_{23} - 2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}, \\ E_2 &= \frac{2C_{12}^2C_{22} - 2C_{12}^2C_{23} + C_{11}C_{23}^2 - C_{11}C_{22}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, \\ G_{12} = C_{66}, \nu_{12} &= \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}, \nu_{23} = \frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Матрица упругости изотропного материала имеет вид

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix}.$$

Упругое поведение может быть описано 2 упругими постоянными

$$E_1, \nu_{12}.$$

Для E_2, G_{12}, ν_{23} справедливо

$$E_2 = E_1, G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}, \nu_{23} = \nu_{12}.$$

Коэффициенты матрицы упругости выражаются через упругие постоянные

$$C_{11} = \frac{E_1(1 - \nu_{12})}{(1 + \nu_{12})(1 - 2\nu_{12})}, \quad C_{12} = \frac{E_1\nu_{12}}{(1 + \nu_{12})(1 - 2\nu_{12})},$$

и наоборот

$$E_{11} = \frac{C_{11}^2 + C_{11}C_{12} - 2C_{12}^2}{C_{11} + C_{12}}, \quad \nu_{12} = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}}.$$

Модуль всестороннего сжатия K и модуль сдвига G_{12} выражаются через упругие постоянные [1]

$$K = \frac{E_1}{3(1 - 2\nu_{12})} \quad G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})} \quad (3)$$

2. Постановка задачи

Цель: Рассмотреть два метода получения упругих характеристик композитов, армированных эллипсоидными включениями (Mori-Tanaka и Self-consistent) и изучить возможности Digimat (программный комплекс для многоуровневого моделирования многофазных материалов, разработанный бельгийской компанией e-Xstream engineering).

Задачи:

- 1) Изучить методы Mori-Tanaka и Self-consistent.
- 2) Использовать подход Mori-Tanaka в среде Digimat.
- 3) Написать собственную программу в Wolfram Mathematica: Self-consistent для частного случая и Mori-Tanaka для рассматриваемых случаев.
- 4) Сравнить результаты Digimat и программы в Wolfram Mathematica (для метода Mori-Tanaka).
- 5) Сравнить методы Mori-Tanaka и Self-consistent для случая сферических включений.

3. Подходы к получению упругих характеристик дисперсно-армированного композита

Дж. Эшелби были получено аналитическое выражение для распределения деформаций в бесконечной упругой среде, вызванных произвольным включением формы вытянутых сфероидов (Рис. 2). Рассмотрим бесконечное упругое тело с включением в виде вытянутых сфероидов Ω , упругие свойства которых определяются тензором упругости с компонентами C'_{ijkl} . Во включении Ω возникают собственные деформации с компонентами ε^*_{ij} (Рис. 2, а) [2]

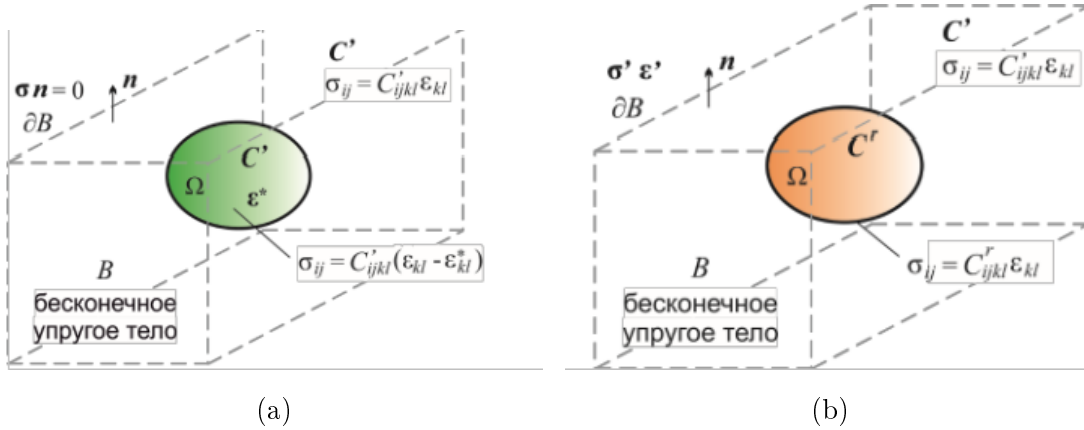


Рис. 2. Задача Эшелби

Эшелби показал, что полные деформации ε_{ij} бесконечной упругой среды в этом случае задаются выражением

$$\varepsilon_{ij} = const = S_{ijkl} \varepsilon^*_{kl}, \quad (4)$$

где S_{ijkl} — тензор Эшелби, зависящий от геометрии включения и компонент тензора C'_{ijkl} . Если рассмотреть неоднородное включение, то есть включение, обладающее отличным от C'_{ijkl} тензором упругости C^r_{ijkl} (Рис. 2, б), используя (4) можно получить

$$\varepsilon_{ij} = const = T^r_{ijkl} \varepsilon^*_{kl}, \quad (5)$$

где ε'_{ij} — деформации, возникающие вдали от включения, тензор T^r с компонентами T^r_{ijkl} называется тензором взаимодействия, а его компоненты определяются по формуле (в матричной форме записи)

$$[T^r] = ([I] + [S^r][C']^{-1}([C^r] - [C']))^{-1}, \quad (6)$$

где $[X]$ обозначает матрицу 6×6 , соответствующую тензору 4 ранга с компонентами X_{ijkl} , $S^r_{ijkl} = S_{ijkl}$.

Пусть включение в виде вытянутых сфероидов имеет полуоси a_1, a_2, a_3 . В общем виде матричное представление тензора Эшелби имеет вид

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}.$$

Ненулевые компоненты S_{ijkl} в общем виде представляются через интегральные коэффициенты, которые могут быть выражены через элементарные функции в ряде случаев.

От абсолютных размеров включений компоненты тензора Эшелби не зависят. Компоненты тензора Эшелби для сферических включений ($a_1 = a_2 = a_3$) вычисляются по формулам

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = \frac{7 - 5\nu}{15(1 - \nu)},$$

$$S_{12} = S_{23} = S_{31} = S_{13} = S_{21} = S_{32} = \frac{5\nu - 1}{15(1 - \nu)},$$

$$S_{44} = S_{55} = S_{66} = \frac{4 - 5\nu}{15(1 - \nu)}.$$

Рассмотрим также включения в виде вытянутого сфероида ($a_1 > a_2 = a_3$). Для таких включений [3]

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{3a_1^2}{8\pi(1-\nu)}I_{11} + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_1, \\
S_{22} = S_{33} &= \frac{3a_1^2}{8\pi(1-\nu)}I_{22} + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_2, \\
S_{55} = S_{66} &= \frac{3(a_1^2 + a_2^2)}{16\pi(1-\nu)}I_{12} + \frac{1-2\nu}{16\pi(1-\nu)}(I_1 + I_2), \\
S_{44} &= \frac{a_2^2}{8\pi(1-\nu)}I_{22} + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_2, \\
S_{12} = S_{13} &= \frac{3a_2^2}{8\pi(1-\nu)}I_{12} - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_1, \\
S_{23} &= \frac{a_2^2}{8\pi(1-\nu)}I_{22} - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}I_2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I_k &= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_k^2 + u)\Delta}, \quad I_{kk} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_k^2 + u)^2 \Delta}, \\
I_{kl} &= \frac{2}{3}\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_k^2 + u)(a_l^2 + u)\Delta}, \quad \Delta^2 = (a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u).
\end{aligned}$$

Существует ряд подходов, использующих соотношение (6) для определения компонент тензоров концентрации: Mori-Tanaka, Self-consistent. В совокупности с соотношениями для для случаев разной геометрии включений эти подходы позволяют определить упругие свойства композита.

3.1. Подход Mori-Tanaka

Для метода Mori-Tanaka основное допущение состоит в том, что для произвольного включения с компонентами тензора упругости C_{ijkl}^r влияние других неоднородностей передаются только через материал окружающей его матрицы с тензором упругости C_{ijkl}^0 , НДС (напряженно-деформированное состояние) которого характеризуется тензорами напряжений и деформаций с компонентами σ_{ij}^0 и ε_{ij}^0 . Кроме того, предполагается, что удаление одного включения и замена его материалом матрицы существенно не влияет на НДС всего

композита. Тогда можно положить $C'_{ijkl} = C^0_{ijkl}$ и $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon^0_{ij}$, а (5) с учетом $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon^r_{ij}$ преобразуется к виду

$$\varepsilon^r_{ij} = T^r_{ijkl} \varepsilon^0_{ij}, \quad r = 1..N, \quad (7)$$

Матрица $[A^r]$ соответствующая тензору концентрации A_{ijkl} для данного метода получается

$$[A^r] = [T^r](c^0[I] + \sum_{r=1}^N c^r [T^r])^{-1}, \quad (8)$$

где $[I]$ — единичная матрица 6х6, а c^0 и c^r — объемная доля для матрицы и объемная доля для r -ого включения соответственно.

Матрица соответствующая тензору упругости композита вычисляется для метода Mori-Tanaka по формуле

$$[C] = [C'] + \sum_{r=1}^N c_r [C^r - C'] \cdot [A^r], \quad (9)$$

Модули всестороннего сжатия K и сдвига G_{12} композита со сферическими включениями для однофазного композита, состоящего из матрицы и волокна, для метода Mori-Tanaka можно выразить явно:

$$K = K^0 + \frac{c^1 K^0 (K^1 - K^0) (3K^0 + 4G_{12}^0)}{3(1 - c^1)(K^1 - K^0)K^0 + K^1(3K^0 + 4G_{12}^0)},$$

$$G_{12} = G_{12}^0 + \frac{5c^1 G_{12}^0 (G_{12}^1 - G_{12}^0) (3K^0 + 4G_{12}^0)}{6(1 - c^1)(G_{12}^1 - G_{12}^0)(K^0 + 2G_{12}^0) + 5G_{12}^1(3K^0 + 4G_{12}^0)}, \quad (10)$$

3.2. Подход Self-consistent

Этот подход также исходит из предположения о том, что удаление одного включения и замена его материалом матрицы существенно не влияет на НДС композита. При этом в отличие от модели Mori-Tanaka предлагается производить учет влияния всех неоднородностей на произвольное включение, полагая $C'_{ijkl} = C_{ijkl}$ и $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}$. Тогда с учетом $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^r$ (5) можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij}^r = T_{ijkl}^r \varepsilon_{ij}, \quad r = 1..N, \quad (11)$$

Матрица $[A^r]$ соответствующая тензору концентрации A_{ijkl} для метода Self-consistent получается

$$[A^r] = ([I] + [S^r][D]([C^r] - [C]))^{-1}, \quad (12)$$

где S_{ijkl}^r — компоненты тензора Эшелби, зависящие от геометрии включений r -ой фазы и компонент тензора упругости C_{ijkl} .

Матрицу $[A^r]$ можно найти итерационными методами. В качестве начального приближения для C_{ijkl} можно выбрать упругий тензор, полученный методом Mori-Tanaka.

Матрица соответствующая тензору упругости композита вычисляется для метода Self-consistent по формуле (9). [1]

4. Результаты работы

4.1. Описание алгоритма

1) Digimat

В ходе работы для изотропного и трансверсально-изотропного материалов были заданы по 2 ($E_{inclusion}, \nu_{inclusion}$) и 5 ($E_{11}, E_{22}, \nu_{23}, \nu_{12}, G_{12}$) начальных параметров соответственно для фаз-включений и по 2 (E_{matr}, ν_{matr}) начальных параметра для матрицы материала, а также объемная доля включений. Затем программой Digimat (для Mori-Tanaka) были получены упругие характеристики композита ($E_{11}, E_{22}, \nu_{23}, \nu_{12}, G_{12}$), кроме того в зависимости от объемной доли и формы включений получена иллюстрация РОЭ (Рис. 3).

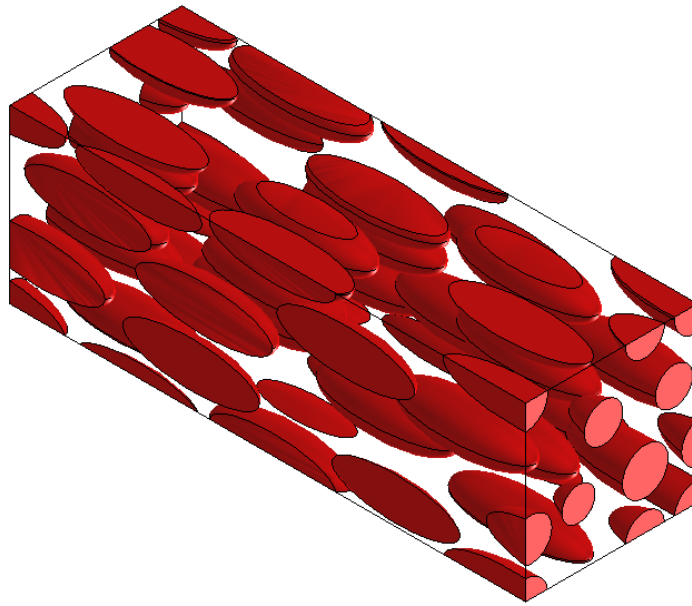


Рис. 3. Визуализация РОЭ при объемной доле включений 0,3 и отношении осей вытянутого сфероида 1:3 (Digimat)

2) Wolfram Mathematica

Аналогичным образом задали константы, после чего вычисляем матрицы соответствующие тензору Эшелби, тензору упругости матрицы и включения, тензору концентрации и наконец получаем тензор упруго-

сти композита, из которого по формулам (2) находим упругие характеристики, кроме того необходимые интегралы для тензора Эшелби берем средствами Wolfram Mathematica. Несколько раз проделываем эти операции внутри цикла, меняя объемную долю включений. В зависимости от объемной доли получена иллюстрация композита (Рис. 4).

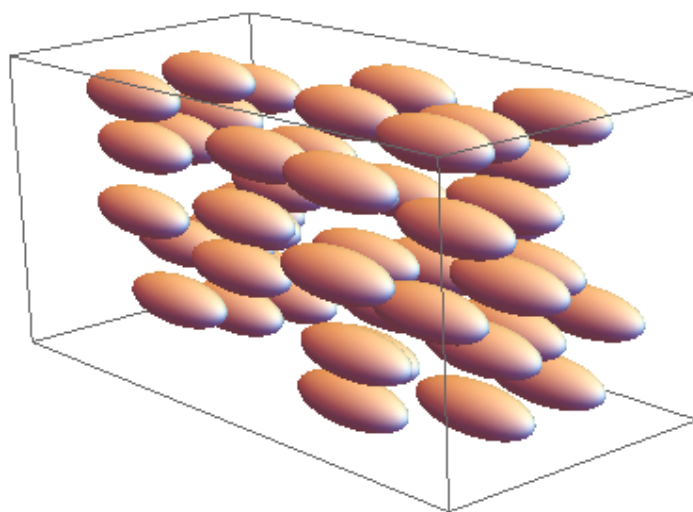


Рис. 4. Визуализация РОЭ при объемной доле включений 0,3 и отношении осей вытянутого сфероида 1:3 (Wolfram Mathematica)

4.2. Графическое представление

- 1) Сравнения методов Mori-Tanaka и Self-consistent для случая сферических изотропных включений. Исходные данные: $E_{matr} = 3 \cdot 10^9$ Па, $\nu_{matr} = 0.3$, $E_{inclusion} = 55 \cdot 10^9$ Па, $\nu_{inclusion} = 0.2$.

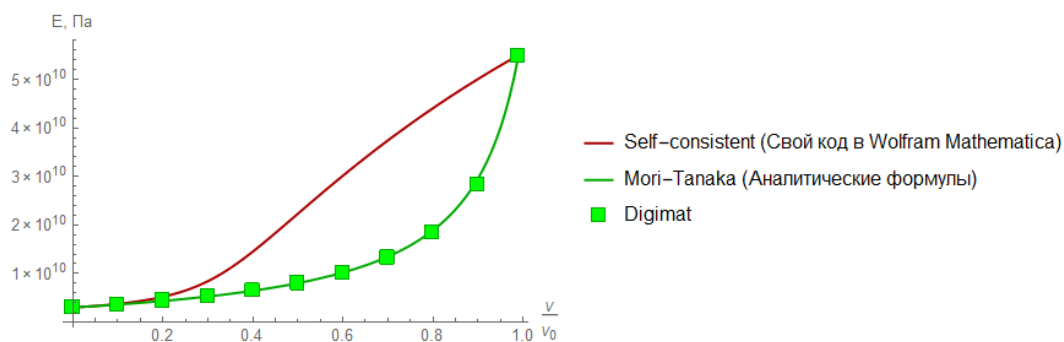


Рис. 5. Зависимость модуля упругости E изотропного композита от объемной доли включения

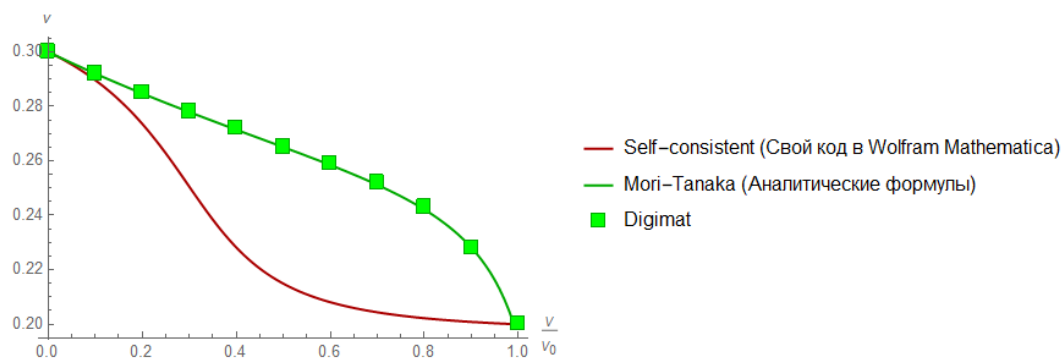


Рис. 6. Зависимость коэффициента Пуассона ν изотропного композита от объемной доли включения

- 2) Случай изотропных включений в форме вытянутых сфероидов для метода Mori-Tanaka. Исходные данные: $E_{matr} = 3 \cdot 10^9$ Па, $\nu_{matr} = 0.3$, $E_{inclusion} = 55 \cdot 10^9$ Па, $\nu_{inclusion} = 0.2$.

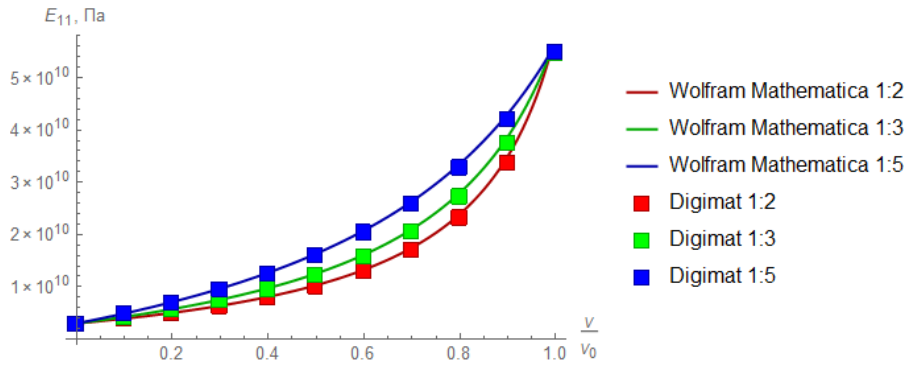


Рис. 7. Зависимость модуля упругости E_{11} трансверсально-изотропного композита, армированного включениями в форме вытянутых сфероидов (для трех разных соотношений осей) от объемной доли включения

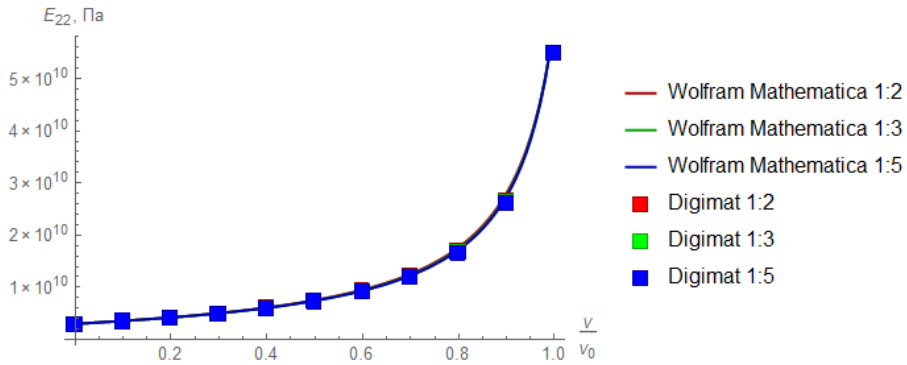


Рис. 8. Зависимость модуля упругости E_{22} трансверсально-изотропного композита, армированного включениями в форме вытянутых сфероидов (для трех разных соотношений осей) от объемной доли включения

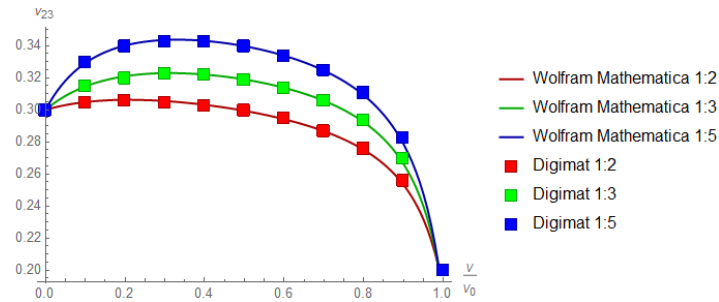


Рис. 9. Зависимость коэффициента Пуассона ν_{23} трансверсально-изотропного композита, армированного включениями в форме вытянутых сфероидов (для трех разных соотношений осей) от объемной доли включения

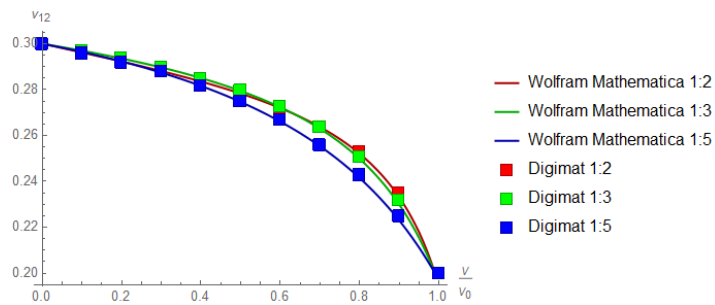


Рис. 10. Зависимость коэффициента Пуассона ν_{12} трансверсально-изотропного композита, армированного включениями в форме вытянутых сфероидов (для трех разных соотношений осей) от объемной доли включения

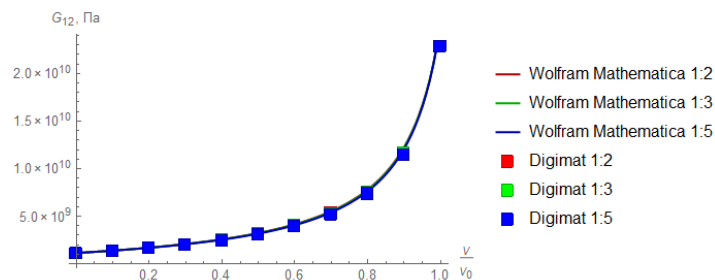


Рис. 11. Зависимость модуля сдвига G_{12} трансверсально-изотропного композита, армированного включениями в форме вытянутых сфероидов (для трех разных соотношений осей) от объемной доли включения

- 3) Случай трансверсально-изотропных включений в форме вытянутых сфероидов для метода Mori-Tanaka. Исходные данные: $E_{matr} = 3 \cdot 10^9$ Па, $\nu_{matr} = 0.3$, $E_{11} = 7.4826 \cdot 10^9$ Па, $E_{22} = 4.9984 \cdot 10^9$ Па, $\nu_{23} = 0.323$, $\nu_{12} = 0.29$, $G_{12} = 2.078 \cdot 10^9$ Па.

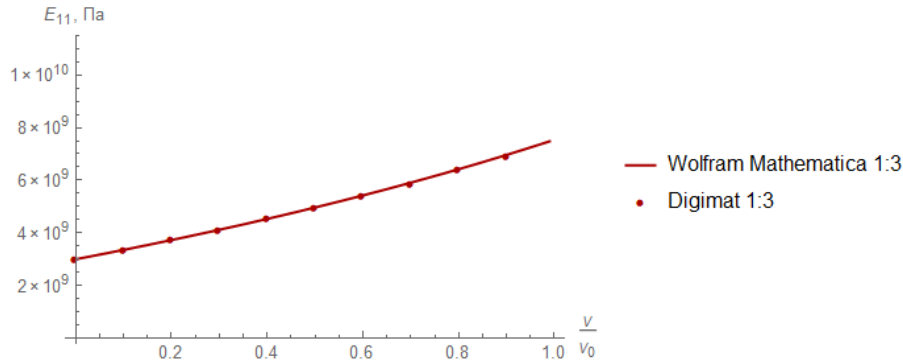


Рис. 12. Зависимость модуля упругости E_{11} трансверсально-изотропного композита, армированного включениями в форме вытянутых сфероидов (соотношение осей 1:3) трансверсально-изотропными включениями от объемной доли включения

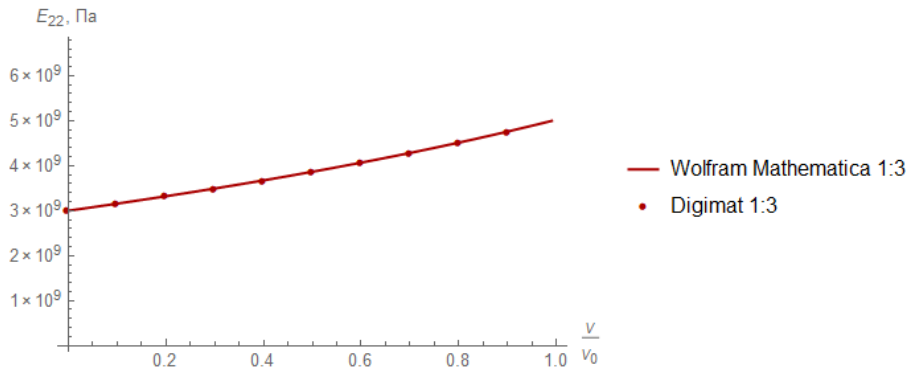


Рис. 13. Зависимость модуля упругости E_{22} трансверсально-изотропного композита, армированного включениями в форме вытянутых сфероидов (соотношение осей 1:3) трансверсально-изотропными включениями от объемной доли включения

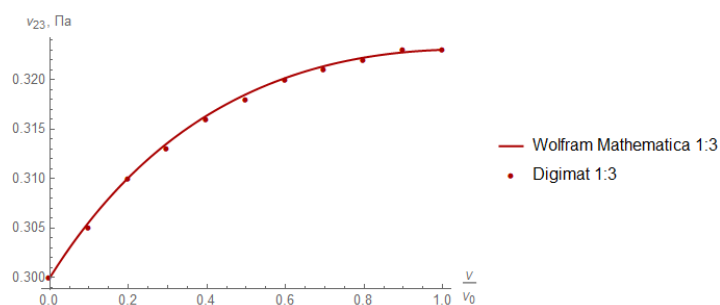


Рис. 14. Зависимость коэффициента Пуассона ν_{23} трансверсально-изотропного композита, армированного включениями в форме вытянутых сфероидов (соотношение осей 1:3) трансверсально-изотропными включениями от объемной доли включения

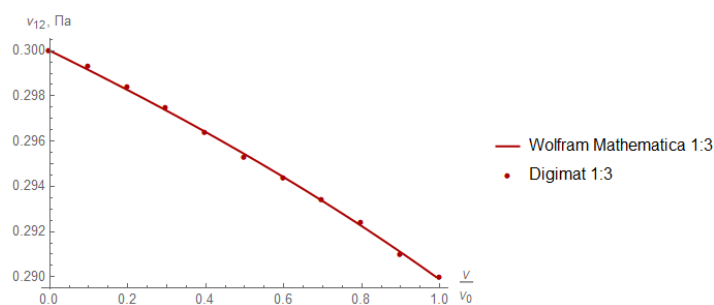


Рис. 15. Зависимость коэффициента Пуассона ν_{12} трансверсально-изотропного композита, армированного включениями в форме вытянутых сфероидов (соотношение осей 1:3) трансверсально-изотропными включениями от объемной доли включения

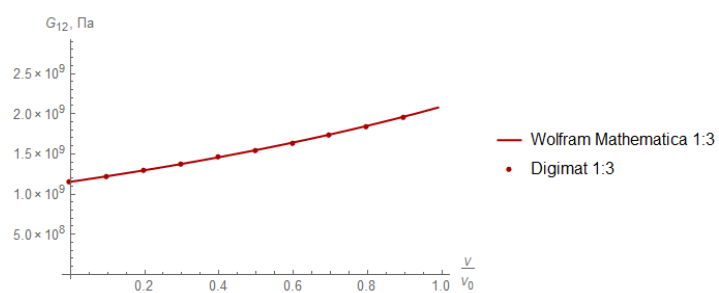


Рис. 16. Зависимость модуля сдвига G_{12} трансверсально-изотропного композита, армированного включениями в форме вытянутых сфероидов (соотношение осей 1:3) трансверсально-изотропными включениями от объемной доли включения

5. Заключение

В данной работе на примере композита, армированного сферическими включениями, проведено сравнение двух методов: Mori-Tanaka и Self-consistent. Оба метода демонстрируют близкие результаты при малой доле армирования ($\frac{V}{V_0} < 0.05$). При большей доле методы сильно различаются: у Self-consistent больше модуль упругости, а у Mori-Tanaka - коэффициент Пуассона (относительная погрешность модуля упругости до 130 процентов и до 28 процентов коэффициент Пуассона). Такой результат объясняется тем, что метод Mori-Tanaka не учитывает влияние других неоднородностей на произвольное включение, в отличие от метода Self-consistent.

Рассмотрели случаи включений в форме вытянутых сфероидов с разными соотношениями осей, где получили, что E_{22} не зависит от соотношений их осей. Для этих случаев результаты собственной программы в Wolfram Mathematica и результаты Digimat совпали.

Для основных характеристик в случае трансверсально-изотропных включений результаты также совпали.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Aboudi J. Arnold S.M. Bednarczyk B.A. - Micromechanics of Composite Materials - 1011 с.
2. Chatzigeorgiou G. Meraghni F. Charalambakis N. - Multiscale Modeling Approaches for Composites - 344 с.
3. Yu. Tsvelodub - Journal of Applied Mathematics and Mechanics (The Eshelby tensor) - 4 с.