Дискретное преобразование Фурье.

Лукьянчиков Иван
Группа 424

1) Постановка задачи. Имеем разностное уравнение

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k, \quad h = 1/N, \quad 1 \leqslant k \leqslant N-1$$

$$y_0 = y_N = 0$$

Требуется аналитически найти $\lambda^{(m)}$ и $y_k^{(m)}$, затем численно посчитать невязку, проверить ортогональность системы $\{y_k^{(m)}\}$ и разложить функцию f удовлетворяющую начальным условиям через линейную комбинацию $\{y_k^{(m)}\}$.

2) Решение задачи. Характеристическое уравнение задачи имеет вид

$$\mu^2 - p\mu + 1 = 0, \quad \text{где} \quad p = 2 - h^2\lambda$$

$$\mu_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4}}{2}$$

Если корни характеристического уравнения различны (равные корни рассматриваются аналогично) и вещественны, то общее решение имеет вид

$$y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k$$

откуда из краевых условий получаем

$$C_1 + C_2 = 0, \ C_1\mu_1^N + C_2\mu_2^N = 0$$

откуда следует, что $y_k = C_1\mu_1^N - C_1\mu_1^N = 0$. Так как $\mu_1 \neq \mu_2$, то $C_1 = C_2 = 0$.

Поэтому следует рассматривать случай комплексно-сопряженных корней $\mu_{1,2} = cos\phi + isin\phi$. Тогда общее решение задачи имеет вид

$$y_k = C_1 cos(k\phi) + C_2 sin(k\phi)$$

Из краевых условий получаем $C_1 = 0$ и $sinN\phi = 0$, отсюда $\phi = \pi m/N, m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ подставляя $k = 0$ и $k = -N$ получим, что $\phi = 2\pi m/N$ Так как $\mu_1 + \mu_2 = 2 - h^2\lambda$, то $cos\phi = 1 - \frac{h^2\lambda}{2}$, следовательно

$$\lambda^{(m)} = \frac{4}{h^2}\ sin^2\frac{\pi m}{N}$$

и общее решение имеет вид

$$y_k^{(m)} = C_2 sin\frac{\pi m k}{N}$$

Рассмотрим вектора $y^i = (y_0^i, \dots y_N^i)$, где $i = 1, \dots, N-1$

Рассмотрим произвольную функцию, удовлетворяющую граничным условиям. Подставляя в функцию значения hk,$k = 0, 1, \dots, N$ получаем вектор f и находим его разложение в базисе y^i. В пространстве со скалярным произведением $\sum_{k=1}^{N-1} v_i u_i h + 0.5h[v_0 u_0 + v_N u_N]$, y^i образуют ортонормированный базис. Имеем $f = \sum_{i=1}^{N-1} d_i y^i$, где $d_i = (f, y^i)$.

Пусть теперь количество точек увеличено, например $M = 2N - 1$. Получаем вектор f для M точек. Это значение может быть получено двумя способами:

1. при помощи суммы базисных векторов с найденными ранее коэффициентами;
2. явно подставив точки в выражение, для ранее заданной произвольной функции, удовлетворяющей граничным условиям.

Для проверки корректности приближения(разложение является приближением функции по N точкам) находим норму разности векторов, полученных двумя способами.

3) Реализация задачи. Задача была реализована на языке программирования C++. Мною был разработан class myvector и в рамках этого класса были реализованны следующие функции: сложение векторов, умножение вектора на скаляр, и скалярное произведение векторов. И все посчитано.

4) Тестирование. Было численно проверена ортогональность системы y^i для $N = 101, 1001$, через delta обозначено максимальное отклонение от 0, i и j вектора, на которых достигается максимально отклонение.

N=101:

delta=6.25311e-15 i=97 j=98

N=1001:

delta=1.66993e-13 i=999 j=1000

Разложение функции по базисным векторам было протестировано на следующих данных. На отрезке $[0; 1]$ была взята равномерная сетка из 2N-1 узлов, в качестве приближаемой функции $y = cos(2\pi x) - 1$, которая приближалась по системе из N функций вида $C_2 sin((\pi mk)/(2N - 1))$. Для оценки погрешности были посчитаны различные нормы от вектора разности.

N=101:

diff=2.06715e-10 diff=4.13429e-08 diff=4.30862e-05

N=1001:

diff=2.06709e-15 diff=4.13417e-12 diff=4.30922e-07