Γ. ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΑΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΕΔΙΟΥ

ΑΘΗΝΑ, 2019

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

1.1 Λαγκρανζιανή διατύπωση

Επαναλαμβάνουμε κάποια στοιχεία αναλυτικής δυναμικής που είναι χρήσιμα στην ανάπτυξη θεμάτων που θα μας απασχολήσουν αργότερα. Στη διατύπωση του Lagrange γίνεται αποκλειστική χρήση των γενικευμένων συντεταγμένων $q_1, q_2, \ldots, q_n$, που είναι ισάριθμες με τους βαθμούς ελευθερίας και συνδέονται με τις ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες με τις σχέσεις:

$$x_\nu = x_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

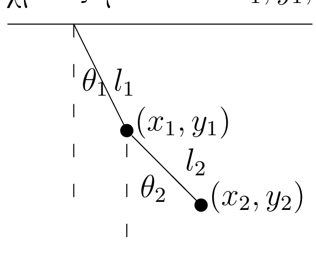
$$y_\nu = y_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

$$z_\nu = z_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

ή, πιό συνοπτικά:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Ο δείκτης ν υποδηλώνει τα διάφορα σωματίδια που συναποτελούν το σύστημα, που έχει n βαθμούς ελευθερίας. Για παράδειγμα, θεωρούμε το διπλό εκκρεμές που είναι περιορισμένο να κινείται στο επίπεδο xy. Αν θέλαμε να το περιγράψουμε με ορθογώνιες συντεταγμένες, θα χρειαζόμαστε τα x_1, y_1, x_2 και y_2.



Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες θ_1 και θ_2 των δύο νημάτων με την κατακόρυφο και να εκφράσουμε τις ορθογώνιες συντεταγμένες με τις σχέσεις:

$$x_1 = l_1 \cos\theta_1$$

$$y_1 = l_1 \sin\theta_1$$

$$x_2 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2$$

$$y_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2$$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για το σωματίδιο ν γράφεται:

$$m_\nu \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial t^2} = \vec{F}_\nu.$$

Είναι εύκολο ν' αποδειχτεί ότι για την κινητική ενέργεια

$$T = \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)^2$$

ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\frac{\partial T}{\partial q_a} = \sum_\nu m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_a \partial t}\right), \ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} = \sum_\nu m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right). \tag{1.1}$$

Ο νόμος του Νεύτωνα συνεπάγεται ότι:

$$m_\nu \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial t^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) = \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) \to$$

$$\to m_\nu \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) - m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_a \partial t}\right) = \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) \to$$

$$\to \sum_\nu \frac{d}{dt}\left(m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) - \sum_\nu m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_a \partial t}\right) = \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right).$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.1) η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right). \tag{1.2}$$

Αυτές οι σχέσεις είναι μια πρώτη μορφή των εξισώσεων Lagrange. Η έκφραση $p_a \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}$ λέγεται *γενικευμένη ορμή*, ενώ το δεύτερο μέλος $f_a \equiv \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right)$ λέγεται *γενικευμένη δύναμη*.

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε τη σπουδαία ειδική περίπτωση που η δύναμη παράγεται από δυναμικό: $\vec{F}_\nu = -\vec{\nabla}_\nu V$. Η γενικευμένη δύναμη γίνεται:

$$\sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) = -\sum_\nu \vec{\nabla}_\nu V \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) =$$

$$= -\sum_\nu \left[\frac{\partial V}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_a} + \frac{\partial V}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_a} + \frac{\partial V}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_a}\right] = -\frac{\partial V}{\partial q_a}.$$

Μ' αυτό το δεδομένο, η σχέση (1.2) γράφεται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_a}=-\frac{\partial V}{\partial q_a}\to\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_a}\right)-\frac{\partial (T-V)}{\partial q_a}=0,$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι το δυναμικό εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες q_a και όχι από τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_a$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$L\equiv T-V$$

που ονομάζεται *Λαγκρανζιανή συνάρτηση* και οι εξισώσεις του Lagrange παίρνουν την πιο συνηθισμένη τους μορφή:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_a}=0. \tag{1.3}$$

Παράδειγμα: Για το απλό εκκρεμές η κινητική ενέργεια είναι: $T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$ και η δυναμική ενέργεια: $V=mg(l-l\cos\theta)$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο. Η Λαγκρανζιανή είναι, λοιπόν: $L=T-V=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2-mg(l-l\cos\theta)$. Ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις ότι $\frac{\partial L}{\partial\theta}=-mgl\sin\theta$, $\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}$ εφαρμόζουμε την εξίσωση (1.3) και βρίσκουμε:

$$ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0\to\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0,$$

που για μικρές γωνίες απομάκρυνσης μεταπίπτει στη γνωστή: $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$. Από πλευράς ορολογίας το θ είναι η γενικευμένη συντεταγμένη, το $\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}=ml(l\dot{\theta})=mlv$, δηλαδή η γενικευμένη ορμή, δεν είναι άλλη από τη στροφορμή. Η γενικευμένη δύναμη ισούται με $-\frac{\partial V}{\partial\theta}=mgl\sin\theta$, που είναι η προβολή της δύναμης κατά μήκος της τροχιάς.

1.1.1 Περιορισμοί πάνω στις γενικευμένες συντεταγμένες

Αν υπάρχουν (δύο, έστω) σχέσεις που συνδέουν τις γενικευμένες συντεταγμένες μεταξύ τους, και που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή:

$$[\sum_{a=1}^{n}A_a dq_a+Adt=0,\ \sum_{a=1}^{n}B_a dq_a+Bdt=0]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[\sum_{a=1}^{n}A_a\dot{q}_a+A=0,\ \sum_{a=1}^{n}B_a\dot{q}_a+B=0],$$

οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι πια ανεξάρτητες και οι εξισώσεις (1.2) πρέπει να τροποποιηθούν στις:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_a}=\sum_{\nu}\vec{F}_\nu\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right)+\lambda_1 A_a+\lambda_2 B_a,\ a=1,\ldots,n.$$

Επίσης, οι εξισώσεις (1.3) που αναφέρονται σε διατηρητικά συστήματα, τροποποιούνται στις:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = \lambda_1 A_a + \lambda_2 B_a,\ a = 1, \ldots, n.$$

Οι σταθερές λ_1 και λ_2 είναι πολλαπλασιαστές Lagrange και οι παραστάσεις $\lambda_1 A_a$ και $\lambda_2 B_a$ είναι οι γενικευμένες δυνάμεις που απαιτούνται για να επιβληθούν οι περιορισμοί. Ας επικεντρώσουμε στην τελευταία μορφή των εξισώσεων και ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο σε βαρυτικό πεδίο που κινείται υποχρεωτικά σ΄ ένα παραβολοειδές εκ περιστροφής με εξίσωση

$$x^2 + y^2 \equiv \rho^2 = az \to 2\rho d\rho - a dz = 0.$$

Η Λαγκρανζιανή θα γραφτεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz.$$

Είναι προφανές ότι

$$q_1 = \rho, q_2 = \phi, q_3 = z,\ A_1 = 2\rho, A_2 = 0, A_3 = -a$$

και ότι έχουμε μόνο έναν περιορισμό, άρα μας χρειάζεται μόνο το λ_1. Οι εξισώσεις κίνησης

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = \lambda_1 A_a,\ a = 1, 2, 3$$

είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = \lambda_1 2\rho,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = -a\lambda_1,$$

που μετά τις πράξεις γίνονται:

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right) = 2\lambda_1\rho,\ m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0,\ m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 a.$$

Ο περιορισμός $\rho^2 = az$ συνεπάγεται την

$$2\rho\dot{\rho} - a\dot{z} = 0,$$

που, μαζί με τις εξισώσεις κίνησης, συναποτελεί τις τέσσερεις εξισώσεις που είναι απαραίτητες για τον προσδιορισμό των τεσσάρων αγνώστων ρ, ϕ, z και λ_1.

1.2 Χαμιλτονιανή διατύπωση

Ξεκινώντας από τον ορισμό των γενικευμένων ορμών $p_a \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}$ μπορεί κανείς (τουλάχιστον κατ΄ αρχήν) να εκφράσει τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_a$ συναρτήσει των απομακρύνσεων q_a και των γενικευμένων ορμών p_a. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό Legendre της Λαγκρανζιανής, που θα τον λέμε Χαμιλτονιανή συνάρτηση, με τη σχέση:

$$H(p_a, q_a, t) \equiv \sum_{a=1}^{n} p_a \dot{q}_a - L(q_a, \dot{q}_a, t).$$

Επισημαίνουμε ότι οι γενικευμένες ταχύτητες του δεξιού μέλους πρέπει να αντικατασταθούν όπως εξηγήσαμε λίγο πριν, οπότε, αν και στο δεξιό μέλος εμφανίζονται οι γενικευμένες ταχύτητες, η Χαμιλτονιανή τελικά είναι συνάρτηση των γενικευμένων ορμών, των απομακρύνσεων και ενδεχομένως του χρόνου.

Η Χαμιλτονιανή προσφέρει μια εναλλακτική διατύπωση της κλασικής μηχανικής. Για να το δούμε, θεωρούμε το διαφορικό της H :

$$dH = \sum_a dp_a \dot{q}_a + \sum_a p_a d\dot{q}_a - \sum_a \frac{\partial L}{\partial q_a} dq_a - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d\dot{q}_a - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Ο ορισμός της γενικευμένης ορμής δείχνει ότι ο δεύτερος και ο τέταρτος όρος του δεξιού μέλους αλληλοαναιρούνται. Επί πλέον, οι εξισώσεις του Lagrange γράφονται: $\frac{\partial L}{\partial q_a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) = \frac{dp_a}{dt} \equiv \dot{p}_a$. Η έκφραση για το διαφορικό γράφεται, λοιπόν:

$$dH = \sum_a \dot{q}_a dp_a - \sum_a \dot{p}_a dq_a - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Εξ άλλου, αν λάβουμε υπ′ όψη ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές της Χαμιλτονιανής είναι οι p_a, q_a και t, το διαφορικό γράφεται εναλλακτικά με τη μορφή:

$$dH = \sum_a \frac{\partial H}{\partial p_a} dp_a + \sum_a \frac{\partial H}{\partial q_a} dq_a + \frac{\partial H}{\partial t} dt,$$

οπότε, συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις για το διαφορικό συνάγουμε τις σχέσεις:

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \; \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a} \tag{1.4}$$

και $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$. Οι εξισώσεις (1.4) λέγονται εξισώσεις του Hamilton και είναι μια ισοδύναμη διατύπωση με τη Λαγκρανζιανή. Αποδεικνύεται ότι, για διατηρητικά συστήματα, ισχύει:

$$H = T + V.$$

Για το παράδειγμα του απλού εκκρεμούς η λαγκρανζιανή, όπως έχουμε ήδη πει είναι: $L = T - V = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mg(l - l\cos\theta)$ και η συζυγής ορμή $p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \to \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$. Άρα: $H \equiv p_\theta\dot{\theta} - L = (ml^2\dot{\theta})\dot{\theta} - \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mg(l - l\cos\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mg(l - l\cos\theta)$. Βέβαια, όπως είπαμε, η Χαμιλτονιανή πρέπει να εκφράζεται ως συνάρτηση της απομάκρυνσης θ και της συζυγούς ορμής p_θ, οπότε αντικαθιστούμε το $\dot{\theta}$ με το ίσο του $\frac{p_\theta}{ml^2}$ και καταλήγουμε στην τελική έκφραση:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mg(l - l\cos\theta).$$

Ο κινητικός όρος είναι της μορφής $\frac{L^2}{2I}$, αφού $p_\theta = L$, δηλαδή η στροφορμή, και $ml^2 = I$, δηλαδή η ροπή αδράνειας περί το σημείο εξάρτησης. Οι εξισώσεις του Χάμιλτον δίνουν:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2},\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta.$$

Πρόκειται για δύο εξισώσεις πρώτης τάξης ως προς το χρόνο, από τις οποίες είναι εύκολο να καταλήξουμε στην ισοδύναμη εξίσωση Lagrange: αρκεί να αντικαταστήσουμε στη δεύτερη εξίσωση του Χάμιλτον το p_θ όπως δίνεται από την πρώτη: $\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = -mgl\sin\theta \to \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$.

1.3 Αγκύλες Poisson

Αν έχουμε δύο ποσότητες F και G που εξαρτώνται από τις απομακρύνσεις q_a, τις συζυγείς ορμές p_a και το χρόνο t, η αγκύλη Poisson ορίζεται ως εξής:

$$[F,G] = \sum_a \left(\frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial G}{\partial q_a} - \frac{\partial F}{\partial q_a}\frac{\partial G}{\partial p_a} \right).$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ιδιότητες:

$$[F,G] = -[G,F],\ [F_1+F_2,G] = [F_1,G]+[F_2,G],$$
$$[F,[G,H]] + [G,[H,F]] + [H,[F,G]] = 0,\ [A,BC] = [A,B]C + B[A,C],$$
$$[F,q_r] = \frac{\partial F}{\partial p_r},\ [F,p_r] = -\frac{\partial F}{\partial q_r}.$$

Ίσως η πιο σπουδαία ιδιότητά τους είναι ότι, για οποιαδήποτε συνάρτηση $f(q_a,p_a,t)$ ισχύει:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H,f]. \tag{1.5}$$

Πράγματι:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial q_a}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial p_a}{\partial t} \right) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial H}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial H}{\partial q_a} \right) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + [H,f],$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις εξισώσεις του Χάμιλτον:

$$\frac{\partial q_a}{\partial t} \equiv \dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a},\ \frac{\partial p_a}{\partial t} \equiv \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}.$$

Το 1925 ο Dirac παρατήρησε ότι οι διάφορες σχέσεις της κβαντικής μηχανικής είναι δυνατόν να προκύψουν αν κανείς αντικαταστήσει τις αγκύλες Poisson με τους αντίστοιχους μεταθέτες διά $i\hbar$:

$$[A,B]_{Poisson} \Rightarrow \frac{[A,B]}{i\hbar}.$$

Ένα πρώτο παράδειγμα είναι η κλασική σχέση $[x_i, p_j] = \delta_{ij}$ που με την αντικατάσταση που περιγράψαμε δίνει την $\frac{[x_i,p_j]}{i\hbar} = \delta_{ij} \to [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, που είναι η βασική σχέση στην οποία βασίζεται η κβαντική μηχανική. Άλλο σημαντικό παράδειγμα είναι η σχέση (1.5), όπως διαμορφώνεται για μια ποσότητα $F(q_a, p_a)$ που δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο. Η κλασική εξίσωση κίνησης (1.5) γράφεται: $\frac{dF}{dt} = [H, F]$, και με την αντικατάσταση $[H, F] \to \frac{[\hat{H},\hat{F}]}{i\hbar}$ παίρνουμε την αντίστοιχη κβαντική εξίσωση κίνησης για τον τελεστή $\hat{F}$:

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = i\hbar[\hat{H}, \hat{F}],$$

που δεν είναι τίποτ΄ άλλο από την εξίσωση για την κίνηση του κβαντικού τελεστή $\hat{F}$ στην εικόνα του Heisenberg. Η κβαντική εξίσωση είναι γενικότερη από την κλασική, με την έννοια ότι ισχύει και για τελεστές όπως το σπιν, που δεν έχουν κλασικό ανάλογο.

1.4 Δυναμικά που εξαρτώνται από ταχύτητα

Είδαμε ότι κατ΄ αρχήν, για να γραφτεί η σχέση (1.2) με τη μορφή η σχέση (1.3), πρέπει το σύστημα να είναι διατηρητικό. Παρ΄ όλ΄ αυτά, η κλάση των δυναμικών που επιτρέπουν μια τέτοια μεταγραφή μπορεί να διευρυνθεί στην $U(q_\nu,\ \dot{q}_\nu)$, αν περιλάβουμε τις γενικευμένες δυνάμεις που δίνονται από την έκφραση:

$$F_\nu = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\nu}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_\nu}. \tag{1.6}$$

Σ΄ αυτήν την περίπτωση η σχέση

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) \tag{1.7}$$

γίνεται: Κλασικό παράδειγμα είναι, βέβαια, η δύναμη Lorentz. Θα αποδείξουμε ότι το δυναμικό

$$V = qA_0 - \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}$$

δίνει τη δύναμη Lorentz, αν εφαρμοστεί ο κανόνας που προαναφέραμε. Ξεκινάμε με τις επί μέρους παραγωγίσεις, περιοριζόμενοι στην κατεύθυνση x. Οι άλλες κατευθύνσεις γίνονται παρόμοια.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = q\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\cdot\vec{v},$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_x} = -\frac{q}{c}A_x \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial v_x}\right) = -\frac{q}{c}\frac{dA_x}{dt} = -\frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}A_x,$$

οπότε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial v_x}\right) - \frac{\partial V}{\partial x} = -q\frac{\partial A_0}{\partial x} + \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\cdot\vec{v} - \frac{q}{c}\frac{dA_x}{dt}$$

$$= -q\frac{\partial A_0}{\partial x} + \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\cdot\vec{v} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}A_x.$$

$$= -q\frac{\partial A_0}{\partial x} + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial A_y}{\partial x}v_y + \frac{\partial A_z}{\partial x}v_z\right) - \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

$$= -q\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}v_x + \frac{q}{c}\frac{\partial A_y}{\partial x}v_y + \frac{q}{c}\frac{\partial A_z}{\partial x}v_z - \frac{q}{c}v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{q}{c}v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{q}{c}v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

$$= -q\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{q}{c}\frac{\partial A_y}{\partial x}v_y + \frac{q}{c}\frac{\partial A_z}{\partial x}v_z - \frac{q}{c}v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{q}{c}v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

Μένει ν' αποδειχτεί ότι η τελευταία παράσταση ισούται με τη συνιστώσα x της δύναμης Lorentz

$$F_x = qE_x + \frac{q}{c}(\vec{v}\times\vec{B})|_x = -q\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{q}{c}v_yB_z - \frac{q}{c}v_zB_y$$

$$= -q\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{q}{c}v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{q}{c}v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$= -q\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{q}{c}v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{q}{c}v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{q}{c}v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{q}{c}v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

Αυτή η ισότητα είναι προφανής.

1.5 Αρχή του Hamilton

Θεωρούμε υλικό σημείο που διατρέχει την τροχιά $C:\ q(t)$ μεταξύ των δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2. Ορίζουμε τη δράση που σχετίζεται με την κίνηση αυτή μέσω της σχέσης:

$$S[q] = \int_C L dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q,\ \dot{q},t)dt, \quad L(q,\ \dot{q},t) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - V(q), \tag{1.8}$$

όπου η έκφραση $L(q,\ \dot{q},t)$ είναι η Λαγκρανζιανή και, βέβαια, $V(q)$ είναι η δυναμική ενέργεια του κινητού σε κάθε σημείο. Είναι προφανές ότι η δράση $S[q]$ εξαρτάται από την έκφραση $q(t)$, που θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της τροχιάς. Ας υποθέσουμε ότι είναι γνωστή η τροχιά $C:\ q(t)$, η οποία δίνει ως αποτέλεσμα για τη δράση την ποσότητα $S_0[q]$. Έστω τώρα ότι θεωρούμε μια τροχιά ελαφρά διαφορετική από την $q(t)$, την

$$q(t) + \delta q(t),\ \dot{q}(t) + \delta\dot{q}(t),\ \delta q(t_1) = 0,\ \delta q(t_2) = 0.$$

Η δράση θα αλλάξει και θα γίνει, μετά το ανάπτυγμα κατά Taylor:

$$S[q+\delta q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t)+\delta q(t),\ \dot{q}(t)+\delta\dot{q}(t),\ t)dt \approx \int_{t_1}^{t_2}\left[L + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\right]dt$$

$$= S_0[q] + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \right] dt$$

$$= S_0[q] + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \right] dt$$

$$= S_0[q] + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_2} - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \left[- \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \right] dt.$$

Όμως $\delta q(t_2) = \delta q(t_1) = 0$, οπότε οι επιφανειακοί όροι μηδενίζονται και καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$S[q + \delta q] - S_0[q] = \int_{t_1}^{t_2} \left[- \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \right] dt.$$

Τελικά:

$$S[q + \delta q] - S_0[q] \approx \int_{t_1}^{t_2} \left[- \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial L}{\partial q} \right] \delta q(t) dt. \tag{1.9}$$

Αν απαιτήσουμε η δράση να είναι αναλλοίωτη κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό (αρχή του Hamilton), πρέπει το ολοκλήρωμα να μηδενίζεται για κάθε επιλογή του $\delta q(t)$, οπότε πρέπει:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q},$$

που δεν είναι τίποτ΄ άλλο από τις εξισώσεις Euler - Lagrange. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αρχή του Hamilton και οι εξισώσεις Euler - Lagrange είναι ισοδύναμες διατυπώσεις της κλασικής μηχανικής. Βέβαια, η απόδειξη προϋποθέτει τη γενίκευση σε περισσότερες από μία γενικευμένες συντεταγμένες, η οποία δεν είναι δύσκολο να γίνει.

Κεφάλαιο 2

Κλασική Θεωρία Πεδίου

2.1 Συνεχή μηχανικά συστήματα

Η κλασική Μηχανική μπορεί να γενικευτεί σε συνεχή μηχανικά συστήματα, όπως μια παλλόμενη χορδή. Εισαγωγικά μπορούμε να θεωρήσουμε N σωματίδια μάζας m, τα οποία απέχουν αποστάσεις a το ένα από το άλλο, συνδέονται μεταξύ τους με όμοια ελατήρια σταθεράς ελατηρίου k και τα οποία κινούνται σε μία διάσταση. Αν ονομάσουμε η_i την απομάκρυνση του σωματιδίου i από τη θέση ισορροπίας του, η Λαγκρανζιανή του συστήματος, σύμφωνα με όσα έχουμε ήδη πει, γράφεται:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}[m\dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{n+1} - \eta_i)^2] = \sum_{i=1}^{N} a\frac{1}{2}\left[\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2 - ka\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}\right)^2\right]. \qquad (2.1)$$

Ο πρώτος όρος είναι η κινητική ενέργεια του κάθε σωματιδίου, ενώ ο δεύτερος είναι η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στην επίδραση του ελατηρίου.[1] Διαπιστώνουμε ότι η Λαγκρανζιανή μπορεί να γραφτεί με τη μορφή:

$$L = \sum_{i=1}^{N} a\mathcal{L}_i, \;\; \mathcal{L}_i \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2 - ka\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}\right)^2\right]. \qquad (2.2)$$

Η παράσταση $\mathcal{L}_i$ ονομάζεται (γραμμική) Λαγκρανζιανή πυκνότητα, δηλαδή Λαγκρανζιανή ανά μονάδα μήκους.

Από το διακριτό σύστημα που μόλις περιγράψαμε μπορούμε να περάσουμε σ΄ ένα συνεχές σύστημα μέσω μιας διαδικασίας ορίου: θεωρούμε ότι $N \to \infty$, με τρόπο ώστε το συνολικό μήκος L του συστήματος να μένει αναλλοίωτο, ενώ η παράμετρος a να γίνεται απειροστά μικρή ($L = Na$). Στο όριο το a μπορεί να θεωρηθεί ότι μετατρέπεται σ΄ ένα διαφορικό ολοκλήρωσης dx, το πηλίκο $\frac{m}{a}$ πηγαίνει στο πεπερασμένο όριο μ, που

[1] Σημειώνουμε ότι έχουμε χειριστεί κάπως χαλαρά το θέμα των οριακών συνθηκών, πιο συγκεκριμένα το τί γίνεται στις θέσεις $i = 1$ και $i = N$, τί σημαίνει η_{N+1} κλπ, αλλά αυτού του είδους τα προβλήματα δεν έχουν σχέση με το θέμα μας και δεν θα μας απασχολήσουν. Για πληρότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε περιοδικές οριακές συνθήκες, ότι δηλαδή η επόμενη της θέσης N είναι η θέση 1 και ότι η προηγούμενη της θέσης 1 είναι η θέση N.

δεν είναι τίποτ΄ άλλο από τη γραμμική πυκνότητα, η παράσταση $\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}$ συγκλίνει στην παράγωγο $\frac{\partial\eta}{\partial x}$, ενώ το γινόμενο ka τείνει σ΄ ένα πεπερασμένο όριο Y, που ερμηνεύεται ως το μέτρο ελαστικότητας του Young. (Υπενθυμίζουμε ότι το τελευταίο ορίζεται μέσω της σχέσης $F = Y\frac{\Delta l}{l} \rightarrow Y\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}$. Η δύναμη που απαιτείται για την επιμήκυνση ισούται με: $F = k(\eta_{i+1} - \eta_i) = ka\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}$, απ΄ όπου προκύπτει η ταυτοποίηση του Y με το ka). Τελικά:

$$L = \int \mathcal{L} dx, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\dot{\eta}^2 - Y\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{2.3}$$

Φυσικά το η είναι συνάρτηση των x και t, αλλά πρέπει να θεωρηθεί ως γενικευμένη συντεταγμένη, κάτι σαν τα q_i ενός διακριτού συστήματος.

Η αρχή των μεταβολών

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \tag{2.4}$$

γράφεται, για το συνεχές μηχανικό σύστημα, με τη μορφή:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \mathcal{L}\left(\eta, \dot{\eta}, \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = 0. \tag{2.5}$$

Η μεταβολή μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2, καθώς και στα όρια της χωρικής ολοκλήρωσης. Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned}
\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt &= \delta\int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \mathcal{L}\left(\eta, \dot{\eta}, \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)}\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\right\} - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)}\right\}\right]\delta\eta.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Στην τελευταία σειρά φαίνεται το αποτέλεσμα των παραγοντικών ολοκληρώσεων, αφού έχει ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι το $\delta\eta$ μηδενίζεται στα άκρα, επομένως και οι επιφανειακοί όροι μηδενίζονται. Αφού το $\delta\eta$ είναι αυθαίρετο, η τελευταία ισότητα συνεπάγεται ότι μηδενίζεται η ολοκληρωτέα παράσταση:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)}\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\right\} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} = 0. \tag{2.7}$$

Η ισότητα αυτή λέγεται **εξίσωση των Euler και Lagrange.** Για την Λαγκρανζιανή πυκνότητα $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\dot{\eta}^2 - Y\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]$ του παραδείγματός μας προκύπτουν οι σχέσεις: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)} = \mu\dot{\eta} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)}\right\} = \mu\ddot{\eta}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)} = -Y\frac{\partial \eta}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}\right\} = -Y\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0$, οπότε βρίσκουμε την εξίσωση Euler-Lagrange

$$Y\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0, \tag{2.8}$$

που δεν είναι άλλη από την κυματική εξίσωση για τη διάδοση των διαταραχών σε μονοδιάστατο μέσον, που προβλέπει ταχύτητα ίση με $\sqrt{\frac{Y}{\mu}}$. Σε ευθεία αναλογία με την Μηχανική των υλικών σημείων μπορούμε να ορίσουμε τη Χαμιλτονιανή γραμμική πυκνότητα μέσω της σχέσης:

$$\mathcal{H} \equiv \dot{\eta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} - \mathcal{L}, \tag{2.9}$$

που, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, δίνει:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}Y\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2, \tag{2.10}$$

όπου οι δύο όροι μπορούν να ταυτοποιηθούν με την κινητική και τη δυναμική ενέργεια της χορδής. Η παράσταση

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \tag{2.11}$$

λέγεται συζυγής ορμή και η Χαμιλτονιανή γραμμική πυκνότητα γράφεται:

$$\mathcal{H} \equiv \pi\dot{\eta} - \mathcal{L}. \tag{2.12}$$

Η έκφραση $\dot{\eta}$ απαλείφεται από την έκφραση για τη Χαμιλτονιανή γραμμική πυκνότητα με τη βοήθεια της εξίσωσης (2.11), οπότε η $\mathcal{H}$ εξαρτάται τελικά από τις θέσεις η και τις ορμές π.

2.1.1 Συναρτησιακή παράγωγος

Σ' αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να εισαγάγουμε μια καινούργια μαθηματική έννοια, η οποία θα φωτίσει πληρέστερα την αναλογία της κλασικής θεωρίας πεδίου με την κλασική μηχανική των υλικών σημείων. Ξεκινάμε με μια προσέγγιση:

$$L = \int \mathcal{L} dx \approx \sum_i \mathcal{L}\left[\eta_i,\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_i,\ \dot{\eta}_i,\ t\right]\delta x_i. \tag{2.13}$$

Η ολοκληρωτέα παράσταση στην (2.6) θα γραφτεί προσεγγιστικά:

$$\int dx\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}\right\} - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)}\right\}\right]\delta\eta$$

$$= \sum_i\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}\right\}\right]_i \delta\eta_i\delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i}\delta\dot{\eta}_i\delta x_i.$$

Η μεταβολή στην Λαγκρανζιανή προέρχεται από ανεξάρτητες μεταβολές του $\delta\eta_i$ και του $\delta\dot{\eta}_i$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι όλες αυτές οι μεταβολές μηδενίζονται, εκτός από μία συγκεκριμένη $\delta\eta_i$, την $\delta\eta_{i_0}$. Τότε

$$\delta\mathcal{L} \approx \left[\left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i}\right|_{i_0} - \frac{\partial}{\partial x} \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\right|_{i_0} \right] \delta\eta_{i_0}\delta x_{i_0} \Rightarrow \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\eta_{i_0}\delta x_{i_0}} \approx \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i}\right|_{i_0} - \frac{\partial}{\partial x} \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\right|_{i_0}. \tag{2.14}$$

Στο όριο των απειροστών $\delta\eta_{i_0}$ και δx_{i_0} η ποσότητα αυτή ονομάζεται **συναρτησιακή παράγωγος ως προς το** $\eta(x)$ και συμβολίζεται ως εξής:

$$\frac{\delta L}{\delta\eta(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta(x)} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}. \tag{2.15}$$

Αν, τώρα, υποθέσουμε ότι όλες οι μεταβολές μηδενίζονται εκτός από από μία συγκεκριμένη $\delta\dot{\eta}_i$, την $\delta\dot{\eta}_{i_0}$, θα προκύψει:

$$\delta L \approx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}_{i_0}}\delta\dot{\eta}_{i_0}\delta x_{i_0} \Rightarrow \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\eta}_{i_0}\delta x_{i_0}} \approx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}_{i_0}},$$

οπότε, πηγαίνοντας στο όριο, ορίζεται η **συναρτησιακή παράγωγος ως προς το** $\dot{\eta}(x)$ μέσω της σχέσης:

$$\frac{\delta L}{\delta\dot{\eta}(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}(x)}. \tag{2.16}$$

Παρατηρούμε ότι, παρ΄ όλον ότι η L είναι αριθμός και όχι συνάρτηση, οι συναρτησιακές παράγωγοι είναι συναρτήσεις του x, γιατί παραγωγίζουμε συναρτησιακά σε συγκεκριμένο σημείο. Χρησιμοποιώντας αυτό το νέο μαθηματικό αντικείμενο, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (2.7) των Euler και Lagrange με πολύ απλούστερη μορφή. Η

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)}\right\} + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta}\right\} = 0$$

γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta L}{\delta\dot{\eta}} - \frac{\delta L}{\delta\eta} = 0. \tag{2.17}$$

Αυτή η μορφή βρίσκεται πολύ κοντά στην αντίστοιχη εξίσωση (1.3), που διέπει την κίνηση ενός υλικού σημείου. Φυσικά και:

$$\delta L = \int\left(\frac{\delta L}{\delta\eta(x)}\delta\eta(x) + \frac{\delta L}{\delta\dot{\eta}(x)}\delta\dot{\eta}(x)\right)dx. \tag{2.18}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε πιο φορμαλιστικά την διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως και να ορίσουμε την συναρτησιακή παράγωγο ως εξής:

$$\delta L = L[\eta + \epsilon\delta(x-y)] - L[\eta] = \int dx \frac{\delta L}{\delta\eta(x)}\epsilon\delta(x-y) = \epsilon\frac{\delta L}{\delta\eta(y)}. \tag{2.19}$$

Στο όριο που το ϵ τείνει στο μηδέν:

$$\frac{\delta L}{\delta \eta(y)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{L[\eta + \epsilon\delta(x-y)] - L[\eta]}{\epsilon}. \tag{2.20}$$

Σημειώνουμε ότι το όριο $\epsilon \to 0$ προηγείται οποιασδήποτε άλλης διαδικασίας ορίου. Αυτό μπορεί να γίνει σαφέστερο στο ειδικό παράδειγμα $L = \int dx\eta^2(x)$. Ακολουθώντας τα προηγούμενα βήματα βρίσκουμε:

$$\frac{\delta L}{\delta \eta(y)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int dx(\eta + \epsilon\delta(x-y))^2 - (\eta)^2}{\epsilon} \tag{2.21}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int dx[\eta^2(x) + \epsilon^2[\delta(x-y)]^2 + 2\eta(x)\epsilon\delta(x-y) - \eta^2(x)]}{\epsilon} \tag{2.22}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int dx[2\eta(x)\epsilon\delta(x-y)]}{\epsilon} = 2\eta(y). \tag{2.23}$$

Αν δεν είχαμε πραγματοποιήσει πρώτα το όριο στο ϵ, θα έπρεπε να αντιμετωπίσουμε την πολύ προβληματική έκφραση $[\delta(x-y)]^2$. Σημειώνουμε επί πλέον ότι η συναρτησιακή παράγωγος ικανοποιεί ως επί το πλείστον τις ιδιότητες της συνηθισμένης παραγώγου. Παραδείγματα:

$$L = L_1 L_2 \Rightarrow \frac{\delta L}{\delta \eta(x)} = \frac{\delta L_1}{\delta \eta(x)} L_2 + L_1 \frac{\delta L_2}{\delta \eta(x)}, \tag{2.24}$$

$$\frac{\delta L_1[L_2[\eta]]}{\delta \eta(y)} = \int d\eta \frac{\delta L_1[L_2]}{\delta L_2[\eta]} \frac{\delta L_2[\eta]}{\delta \eta(y)}. \tag{2.25}$$

Η γενίκευση σε τρεις διαστάσεις είναι πολύ απλή (το dx γίνεται d^3x κλπ).

2.2 Χαμιλτονιανή διατύπωση

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι:

$$H = \int dx \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}(x) = \pi(x)\dot{\eta}(x) - \mathcal{L}, \quad \pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}(x)}. \tag{2.26}$$

Εξετάζουμε στη συνέχεια τη μεταβολή της L :

$$\delta L = \int \left(\frac{\delta L}{\delta \eta(x)} \delta\eta(x) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}(x)} \delta\dot{\eta}(x) \right) dx = \int \left(\dot{\pi}(x)\delta\eta(x) + \pi(x)\delta\dot{\eta}(x) \right) dx \tag{2.27}$$

$$= \int \left(\dot{\pi}(x)\delta\eta(x) + \delta[\pi(x)\dot{\eta}(x)] - \dot{\eta}(x)\delta\pi(x) \right) dx \tag{2.28}$$

$$= \int \delta[\pi(x)\dot{\eta}(x)] dx + \int \left(\dot{\pi}(x)\delta\eta(x) - \dot{\eta}(x)\delta\pi(x) \right) dx. \tag{2.29}$$

Όμως

$$\int dx \delta[\pi(x)\dot{\eta}(x)] = \int dx[\delta\mathcal{H} + \delta\mathcal{L}] = \delta H + \delta L,$$

οπότε:

$$\delta L = \delta H + \delta L + \int (\dot{\pi}\delta\eta - \dot{\eta}\delta\pi)\, dx \Rightarrow \delta H = \int (-\dot{\pi}\delta\eta + \dot{\eta}\delta\pi)\, dx \tag{2.30}$$

Εξ άλλου:

$$\delta H = \int \left(\frac{\delta H}{\delta \eta}\delta\eta + \frac{\delta H}{\delta \pi}\delta\pi \right) dx, \tag{2.31}$$

οπότε, συγκρίνοντας με την προηγούμενη σχέση (2.30) παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\dot{\eta}(x) = \frac{\delta H}{\delta \pi(x)}, \quad \dot{\pi}(x) = -\frac{\delta H}{\delta \eta(x)}. \tag{2.32}$$

Με τη βοήθεια των τελευταίων σχέσεων μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής ενός συναρτησοειδούς $F = \int dx \mathcal{F}(\eta, \pi, t)$, που εξαρτάται από τα $\eta(x)$ και $\pi(x)$:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \int \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \pi}\dot{\pi} \right) dx = \frac{\partial F}{\partial t} + \int \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\frac{\delta H}{\delta \pi} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \pi}\frac{\delta H}{\delta \eta} \right) dx \tag{2.33}$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \tag{2.34}$$

2.2.1 Είδη μεταβολών

Εισάγουμε σ′ αυτήν την παράγραφο ένα τροποποιημένο είδος μεταβολής, την

$$\tilde{\delta} f(x) \equiv \tilde{f}(x) - f(x) = [\tilde{f}(\tilde{x}) - f(x)] - [\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(x)] = \delta f(x) - \partial_\mu f(x)\delta x^\mu, \tag{2.35}$$

όπου η $f(x)$ είναι μια συνάρτηση που μετατρέπεται στην $\tilde{f}(x)$ κατά τον μετασχηματισμό συντεταγμένων και η πράξη $\tilde{\delta}$ εκφράζει την τοπική αλλαγή της συνάρτησης. Η $\tilde{\delta}$ μετατίθεται με τις μερικές παραγώγους, αφού η μεταβολή γίνεται στο ίδιο σημείο. Γράφουμε μαζί τους ορισμούς των μεταβολών δ και $\tilde{\delta}$:

$$\delta f(x) \equiv \tilde{f}(\tilde{x}) - f(x), \quad \tilde{\delta} f(x) \equiv \tilde{f}(x) - f(x), \quad \tilde{\delta} f(x) = \delta f(x) - \partial_\mu f(x)\delta x^\mu. \tag{2.36}$$

Βέβαια, αν η $f(x)$ είναι βαθμωτή συνάρτηση, η $\tilde{f}(\tilde{x})$ ορίζεται ίση με την $f(x)$, οπότε:

$$\delta f(x) = 0, \quad \tilde{\delta} f(x) \approx -f'(x)\delta x. \tag{2.37}$$

Όμως σε λιγότερο τετριμένες περιπτώσεις τα πράγματα δεν είναι έτσι. Ας θεωρήσουμε την επίδραση μιας τρισδιάστατης στροφής $\vec{r} \to \tilde{\vec{r}} \equiv R\vec{r}$ σ′ ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{V}(\vec{r})$. Εξ ορισμού:

$$\tilde{\vec{V}}(\tilde{\vec{r}}) = R\vec{V}(\vec{r}) \Rightarrow \tilde{\vec{V}}(\vec{r}) = R\vec{V}(R^{-1}\vec{r}).$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει, αν θέσουμε $\tilde{\vec{r}} \to \tilde{\vec{r}}_1 \equiv R^{-1}\vec{r}$. Τότε:

$$\tilde{\vec{V}}(R\tilde{\vec{r}}_1) = R\vec{V}(\vec{r}_1) \Rightarrow \tilde{\vec{V}}(RR^{-1}\vec{r}) = R\vec{V}(R^{-1}\vec{r}) \Rightarrow \tilde{\vec{V}}(\vec{r}) = R\vec{V}(R^{-1}\vec{r}).$$

Άρα:

$$\tilde{\delta}\vec{V} = \tilde{\vec{V}}(\vec{r}) - \vec{V}(\vec{r})$$
$$= [\tilde{\vec{V}}(\tilde{\vec{r}}) - \vec{V}(\vec{r})] - [\tilde{\vec{V}}(\tilde{\vec{r}})] = [\tilde{\vec{V}}(\tilde{\vec{r}}) -] = \delta\vec{V}(\vec{r}) - (\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}(\vec{r}). \tag{2.38}$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί κατά συνιστώσες:

$$\tilde{\delta}V_x = -(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})V_x + \delta V_x, \tilde{\delta}V_y = -(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})V_y + \delta V_y, \tilde{\delta}V_z = -(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})V_z + \delta V_z. \tag{2.39}$$

Για να έχουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα υπ΄ όψη, θα θεωρήσουμε μια απειροστή στροφή στις δύο διαστάσεις:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{x} = x + \epsilon y \equiv x + \delta x \\ \tilde{y} = y - \epsilon x \equiv y + \delta y \end{bmatrix}. \tag{2.40}$$

Επίσης:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \tilde{x} - \epsilon\tilde{y} \\ y = \tilde{y} + \epsilon\tilde{x} \end{bmatrix}. \tag{2.41}$$

Για το διανυσματικό πεδίο:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_x(\tilde{x},\tilde{y}) = V_x(x,y) + \epsilon V_y(x,y) \\ \tilde{V}_y(x,y) = V_y(x,y) - \epsilon V_x(x,y) \end{bmatrix}. \tag{2.42}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\tilde{\vec{V}}(\vec{r}) = R\vec{V}(R^{-1}\vec{r})$, μπορούμε να καταλήξουμε στην:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_x(x,y) = V_x(x-\epsilon y, y+\epsilon x) + \epsilon V_y(x-\epsilon y, y+\epsilon x) \\ \tilde{V}_y(x,y) = V_y(x-\epsilon y, y+\epsilon x) - \epsilon V_x(x-\epsilon y, y+\epsilon x) \end{bmatrix}. \tag{2.43}$$

Άρα:

$$\delta V_x = \tilde{V}_x(\tilde{x},\tilde{y}) - V_x(x,y) = \tilde{V}_x(x+\epsilon y, y-\epsilon x) - V_x(x,y)$$
$$\approx \epsilon y\partial_x V_x(x,y) - \epsilon x\partial_y V_x(x,y) + \epsilon V_y(x,y) = \delta x\partial_x V_x(x,y) + \delta y\partial_y V_x(x,y) + \epsilon V_y(x,y). \tag{2.44}$$

Καταλήγουμε στη σχέση:

$$\delta V_x = (\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})V_x(x,y) + \epsilon V_y(x,y),$$

οπότε το $\epsilon V_y(x,y)$ πρέπει να ταυτιστεί με το $\tilde{\delta}V_x$, σύμφωνα και με την (2.42), αν θεωρήσουμε τα V_x και $\tilde{\delta}V_x$ στο ίδιο σημείο (x,y). Καταλήγουμε, δηλαδή, στη σχέση:

$$\delta V_x = (\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})V_x(x,y) + \tilde{\delta}V_x,$$

σε απόλυτη συμφωνία με τις (2.38) και (2.39).

2.3 Νόμοι διατήρησης: Θεώρημα της Noether

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα που περιλαμβάνει ένα σύνολο πεδίων $\phi^a(x)$, του οποίου η δυναμική περιγράφεται από τη δράση

$$S = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)), \tag{2.45}$$

όπου η $\mathcal{L}$ είναι κάποια λαγκρανζιανή πυκνότητα και Ω είναι ο τετραδιάστατος χώρος ολοκλήρωσης. Το μ παίρνει τις τιμές 0, 1, 2, 3 και χρησιμεύει ως δείκτης των συνιστωσών του χωροχρόνου. Ας εξετάσουμε έναν απειροστό μετασχηματισμό του συστήματος συντεταγμένων:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \tag{2.46}$$

κάτω από τον οποίο τα πεδία μετασχηματίζονται ως:

$$\phi^a(x) \to \phi'^a(x') + \delta\phi^a(x). \tag{2.47}$$

Αν ο χώρος ολοκλήρωσης Ω μετασχηματιστεί στον Ω', λόγω του μετασχηματισμού συντεταγμένων, τότε:

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(\phi'^a(x'), \partial'_\mu \phi'^a(x')) - \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)). \tag{2.48}$$

Αν $\delta S = 0$, η θεωρία χαρακτηρίζεται αναλλοίωτη κάτω από τον συγκεκριμένο μετασχηματισμό. Αλλάζουμε τη βουβή x' σε x στο πρώτο ολοκλήρωμα και βρίσκουμε:

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^4x \mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial_\mu \phi'^a(x)) - \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))$$

$$\Rightarrow \delta S = \int_{\Omega'} d^4x \left[\mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial_\mu \phi'^a(x)) - \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))\right] + \int_{\Omega'-\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial'_\mu \phi'^a(x)). \tag{2.49}$$

Επεξεργαζόμαστε ξεχωριστά τις συνεισφορές στο δS :

(1) Το τελευταίο ολοκλήρωμα εκτείνεται στον απειροστό όγκο $\Omega' - \Omega$, οπότε μπορεί να γραφτεί ως ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα επί το αντίστοιχο «ύψος» δx^μ :

$$\int_{\Omega'-\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial'_\mu \phi'^a(x)) = \int_{\partial\Omega} dS_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)).$$

Αντικαταστήσαμε τα $\phi'^a(x)$ με $\phi^a(x)$, γιατί πολλαπλασιάζουμε τη Λαγκρανζιανή με δx^λ, επομένως οι διαφορές που προκύπτουν είναι ανώτερης τάξης και αμελούνται. Υπενθυμίζουμε στη συνέχεια το θεώρημα του Gauss:

$$\int_{\partial\Omega} dS_\mu F^\mu = \int_\Omega d^4x \partial_\mu F^\mu, \tag{2.50}$$

για το διανυσματικό πεδίο F^μ και το στοιχείο εμβαδού dS_μ. Με βάση το θεώρημα του Gauss, θέτοντας $F^\lambda = \delta x^\mu \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))$, καταλήγουμε στην:

$$\int_{\Omega'-\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial'_\mu \phi'^a(x)) = \int_{\partial\Omega} d^4x \partial_\mu [\delta x^\mu \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))]. \tag{2.51}$$

(2) Επιστρέφουμε στην έκφραση (2.49) και εκφράζουμε τη διαφορά των Λαγκρανζιανών συναρτήσει της μεταβολής $\tilde{\delta}$ ως εξής:

$$\mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial_\mu \phi'^a(x)) - \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a}\tilde{\delta}\phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\tilde{\delta}(\partial_\mu \phi^a)$$

$$= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\tilde{\delta}\phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\tilde{\delta}(\partial_\mu \phi^a),$$

όπου επικαλεστήκαμε το γεγονός ότι, σύμφωνα με τις εξισώσεις Euler-Lagrange, ισχύει:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}.$$

Η διαφορά των Λαγκρανζιανών γράφεται τελικά:

$$\mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial_\mu \phi'^a(x)) - \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\tilde{\delta}\phi^a \right). \tag{2.52}$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση (2.49), λαμβάνοντας υπόψη και την (2.51), προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\delta S = \int_{\Omega'} & d^4x \left[\mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial_\mu \phi'^a(x)) - \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))\right] \\
&+ \int_{\Omega' - \Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial'_\mu \phi'^a(x)) \\
= \int_\Omega d^4x \partial_\mu & \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\tilde{\delta}\phi^a\right] + \int_\Omega d^4x \partial_\mu [\delta x^\mu \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))] \\
\Rightarrow \delta S = \int_\Omega & d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\tilde{\delta}\phi^a + \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))\delta x^\mu\right].
\end{aligned}$$

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2.35) και θα βρούμε:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_\Omega d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}(\delta\phi^a - \delta x^\nu \partial_\nu \phi^a) + \mathcal{L}\delta x^\mu\right] \\
&= \int_\Omega d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\delta\phi^a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\partial^\nu \phi^a \delta x_\nu + g^{\mu\nu}\mathcal{L}\delta x_\nu\right].
\end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι οι μεταβολές μπορούν να γραφτούν συναρτήσει απειροστών παραμέτρων ως:

$$\delta x_\mu = X_{\mu r}\delta\omega^r, \ \delta\phi^a = F^a_r \delta\omega^r, \tag{2.53}$$

οπότε:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\delta\phi^a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\partial^\nu \phi^a \delta x_\nu + g^{\mu\nu}\mathcal{L}\delta x_\nu\right] \\
= &\int_\Omega d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}F^a_r \delta\omega^r\right] + \int_\Omega d^4x \partial_\mu \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\partial^\nu \phi^a X_{\nu r}\delta\omega^r + g^{\mu\nu}\mathcal{L}X_{\nu r}\delta\omega^r\right]
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Ορίζουμε τον **τανυστή ενέργειας και ορμής** ως εξής:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}(\partial^\nu \phi^a) - g^{\mu\nu}\mathcal{L}, \tag{2.55}$$

οπότε η μεταβολή της δράσης γράφεται:

$$\delta S = \int_\Omega^4 x \delta\omega^r \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} F_r^a - \Theta^{\mu\nu} X_{\nu r} \right]. \tag{2.56}$$

Αν ορίσουμε τις ποσότητες

$$J_r^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} F_r^a - \Theta^{\mu\nu} X_{\nu r}, \tag{2.57}$$

η μεταβολή της δράσης γράφεται:

$$\delta S = \int_{\partial\Omega} da_\mu \delta\omega^r J_r^\mu = \int_\Omega d^4x \delta\omega^r \partial_\mu J_r^\mu. \tag{2.58}$$

Αν υπάρχει κάποια συμμετρία που επιβάλλει την ισότητα $\delta S = 0$, το ολοκλήρωμα θα μηδενίζεται για κάθε επιλογή όγκου και απειροστών $\delta\omega^r$, οπότε προκύπτουν οι νόμοι διατήρησης, οι

$$\partial_\mu J_r^\mu = 0, \tag{2.59}$$

μέσω και του θεωρήματος του Gauss. Αυτό το αποτέλεσμα λέγεται **θεώρημα της Noether** και το J_r^μ λέγεται **ρεύμα Noether.** Υπάρχει το ενδεχόμενο η μεταβολή της δράσης να μην είναι μηδέν, αλλά να ισούται με το ολοκλήρωμα μιας ολικής παραγώγου:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \partial_\mu J_r^\mu = -\int_\Omega d^4x \partial_\mu Y_r^\mu. \tag{2.60}$$

Σ' αυτήν την περίπτωση το διατηρούμενο ρεύμα είναι το άθροισμα $J_r^\mu + Y_r^\mu$:

$$J_r^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} F_r^a - \Theta^{\mu\rho} X_{\rho r} + Y_r^\mu. \tag{2.61}$$

Η διατήρηση του ρεύματος Noether συνεπάγεται εύκολα τη διατήρηση των **φορτίων Noether**: αν

$$Q_r = \int d^3x J_r^0, \tag{2.62}$$

τότε

$$\frac{dQ_r}{dt} = \int d^3x \partial_0 J_r^0 = -\int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_r. \tag{2.63}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορεί να μετατραπεί σε επιφανειακό ολοκλήρωμα, το οποίο μηδενίζεται, αν το ρεύμα μηδενίζεται αρκετά γρήγορα σε μεγάλες αποστάσεις, άρα:

$$\frac{dQ_r}{dt} = 0. \tag{2.64}$$

2.3.1 Παράδειγμα 1: Χωροχρονικές μετατοπίσεις

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$x_\mu \to x_\mu + \Delta_\mu, \tag{2.65}$$

όπου η Δ_μ είναι απειροστή και σταθερή. Σ' αυτήν την περίπτωση $\delta x_\mu = \Delta_\mu = X_{\mu r}\delta\omega^r$, οπότε $X_{\mu r} = g_{\mu r}$, $\delta\omega^\nu = \Delta^\nu$. Επίσης $\delta\phi = 0$, με την έννοια ότι $\phi'(x') = \phi(x)$. Δηλαδή $F^a_\nu = 0$, οπότε:

$$\partial_\mu J^\mu_\nu = 0 \Rightarrow \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}F_\nu - \Theta^{\mu\rho}X_{\rho\nu}\right] = 0 \Rightarrow \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}0 - \Theta^{\mu\rho}g_{\rho\nu}\right] = 0$$
$$\Rightarrow \partial_\mu\Theta^\mu_\nu = 0,$$

οπότε και η παράσταση

$$p_\nu \equiv \int d^3x\Theta^0_\nu,$$

δηλαδή η τετραορμή του πεδίου, διατηρείται. Παρατηρούμε ότι

$$p_0 = \int d^3x\Theta^0_0 = \int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}\partial_0\phi - g^0_0\mathcal{L}\right] = \int d^3x[\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}] = \int d^3x\mathcal{H} = H,$$

δηλαδή ότι η p_0 ταυτίζεται με τη Χαμιλτονιανή.

2.3.2 Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμοί του Lorentz

Οι απειροστοί μετασχηματισμοί του Lorentz μπορούν να γραφτούν με τη μορφή:

$$x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu}x^\nu \Rightarrow \delta x_\mu = \frac{1}{2}(\delta^\rho_\mu x^\sigma - \delta^\sigma_\mu x^\rho)\omega_{\rho\sigma} \equiv X^{\rho\sigma}_\mu\omega_{\rho\sigma}, \tag{2.66}$$

όπου τα $\omega_{\mu\nu}$ είναι απειροστές θετικές σταθερές. Σ' αυτήν την περίπτωση τα ω έχουν διπλούς δείκτες, όπως επίσης και τα X :

$$X^{\rho\sigma}_\mu = \frac{1}{2}(\delta^\rho_\mu x^\sigma - \delta^\sigma_\mu x^\rho). \tag{2.67}$$

Πρέπει

$$g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \Rightarrow g_{\mu\nu}(x^\mu + \omega^{\mu\rho}x_\rho)(x^\nu + \omega^{\nu\sigma}x_\sigma) = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$$
$$\Rightarrow g_{\mu\nu}\omega^{\mu\rho}x_\rho x^\nu + g_{\mu\nu}x^\mu\omega^{\nu\sigma}x_\sigma \approx 0 \Rightarrow \omega_{\mu\rho}x^\rho x^\nu + \omega_{\mu\sigma}x^\nu x^\sigma \approx 0.$$

Αφού αυτό ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή των x_k και οι δείκτες είναι βουβοί, συμπεραίνουμε ότι

$$\omega^{\nu\mu} = -\omega^{\mu\nu}. \tag{2.68}$$

Οι μεταβολές των πεδίων εκφράζονται γενικά συναρτήσει ενός πίνακα σπιν:

$$\delta\phi^a = \frac{1}{2}\omega_{\lambda\rho}\left(\Sigma^{\lambda\rho}\right)^a{}_b\phi^b \equiv F^{a\lambda\rho}\omega_{\lambda\rho}, \tag{2.69}$$

όπου, βέβαια, και ο πίνακας Σ είναι αντισυμμετρικός ως προς λ και ρ και διαιρούμε με το δύο γιατί μετράμε διπλά τα ζευγάρια $\lambda,\ \rho$. Συνεπώς

$$F^{a\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(\Sigma^{\rho\sigma}\right)^a{}_b\,\phi^b \tag{2.70}$$

και, βέβαια, η σχέση

$$J^\mu_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}F^a_r - \Theta^{\mu\nu}X_{\nu r}$$

γράφεται:

$$J^{\mu\rho\sigma} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}F^{a\rho\sigma} - \Theta^{\mu\lambda}X^{\rho\sigma}_\lambda \tag{2.71}$$

Μ΄ αυτά τα δεδομένα η έκφραση για το ρεύμα Noether

$$J^\mu_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}F^a_r - \Theta^{\mu\nu}X_{\nu r}$$

μεταπίπτει στην:

$$J^{\mu\rho\sigma} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}F^{a\rho\sigma} - \Theta^{\mu\lambda}X^{\rho\sigma}_\lambda \tag{2.72}$$

και η έκφραση για τη διατήρηση του ρεύματος Noether γράφεται:

$$\partial_\mu J^{\mu\rho\sigma} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\left(\Sigma^{\lambda\rho}\right)^a{}_b\,\phi^b - \left(\Theta^{\mu\lambda}x^\rho - \Theta^{\mu\rho}x^\lambda\right)\right] = 0.$$

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό

$$\mathcal{M}^{\mu\lambda\rho} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\left(\Sigma^{\lambda\rho}\right)^a{}_b\,\phi^b - \left(\Theta^{\mu\lambda}x^\rho - \Theta^{\mu\rho}x^\lambda\right), \tag{2.73}$$

η εξίσωση διατήρησης γίνεται:

$$\partial_\mu\mathcal{M}^{\mu\lambda\rho} = 0 \tag{2.74}$$

και τα διατηρούμενα φορτία θα είναι τα:

$$J^{\lambda\rho} = \int d^3x\mathcal{M}^{0\lambda\rho}. \tag{2.75}$$

Οι χωρικές συνιστώσες των J^{kl} σχετίζονται με τη στροφορμή $\left(J^m = \frac{1}{2}\epsilon^{klm}J_{kl}\right)$, ενώ οι ποσότητες J^{0k} σχετίζονται με τους μετασχηματισμούς Lorentz.

2.3.3 Παράδειγμα 3: Εσωτερικές συμμετρίες

Πολύ συνηθισμένες είναι οι εσωτερικές συμμετρίες, που συνδέουν μεταξύ τους πεδία στο ίδιο χωροχρονικό σημείο. Σε απειροστή εκδοχή, ο μετασχηματισμός

$$\phi^a(x) \to \phi^a(x) + F^a_r\delta\omega^r, \tag{2.76}$$

χωρίς καμμιά αλλαγή στις συντεταγμένες ($X_{\mu\nu} = 0$), αφήνει τη δράση αναλλοίωτη, με αντίστοιχα διατηρούμενα ρεύματα τα:

$$J_r^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} F_r^a. \tag{2.77}$$

2.3.4 Συμμετρικός τανυστής ενέργειας - ορμής

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι ο τανυστής ενέργειας - ορμής $\Theta^{\mu\nu}$ δεν είναι υποχρεωτικά συμμετρικός ως προς την εναλλαγή των δεικτών μ και ν. Αυτό μπορεί να διορθωθεί ως εξής: ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι αυτός ο τανυστής ενέργειας - ορμής δεν είναι μοναδικός, γιατί μπορεί κανείς να τον τροποποιήσει προσθέτοντας έναν όρο

$$\partial_\lambda B^{\lambda\mu\nu}, \quad B^{\lambda\mu\nu} = -B^{\mu\lambda\nu},$$

οπότε:

$$\partial_\mu \partial_\lambda B^{\lambda\mu\nu} = 0.$$

Δηλαδή ο τανυστής

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda B^{\lambda\mu\nu}, \tag{2.78}$$

που ονομάζεται κανονικός τανυστής ενέργειας - ορμής, ικανοποιεί την

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0. \tag{2.79}$$

Η κατά τ΄ άλλα αυθαίρετη συνάρτηση $B^{\lambda\mu\nu}$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε ο $T^{\mu\nu}$ να είναι συμμετρικός:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \Rightarrow \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda B^{\lambda\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} + \partial_\lambda B^{\lambda\nu\mu} \Rightarrow \partial_\lambda B^{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda B^{\lambda\nu\mu} = \Theta^{\nu\mu} - \Theta^{\mu\nu}, \tag{2.80}$$

όπου ο μόνος άγνωστος είναι η $B^{\lambda\mu\nu}$.

Από τις σχέσεις $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$ και $\partial_\mu \mathcal{M}^{\mu\lambda\rho} = 0$ και τον ορισμό

$$\mathcal{M}^{\mu\lambda\rho} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \left(\Sigma^{\lambda\rho}\right)^a{}_b \phi^b - (\Theta^{\mu\lambda} x^\rho - \Theta^{\mu\rho} x^\lambda) = S^{\mu\lambda\rho} - (\Theta^{\mu\lambda} x^\rho - \Theta^{\mu\rho} x^\lambda),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό

$$S^{\mu\lambda\rho} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \left(\Sigma^{\lambda\rho}\right)^a{}_b \phi^b,$$

προκύπτει η σχέση:

$$\Theta^{\lambda\rho} - \Theta^{\rho\lambda} = -\partial_\mu S^{\mu\lambda\rho}.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.78) καταλήγουμε στην

$$-\partial_\mu B^{\mu\lambda\rho} + \partial_\mu B^{\mu\rho\lambda} = -\partial_\mu S^{\mu\lambda\rho}.$$

Αρκεί να εντοπίσουμε μία λύση της εξίσωσης αυτής (δεν ενδιαφέρει η γενική λύση). Μια τέτοια λύση είναι η:

$$B^{\mu\rho\lambda} = \frac{1}{2}(S^{\rho\lambda\mu} + S^{\lambda\rho\mu} - S^{\mu\lambda\rho}). \tag{2.81}$$

Αυτός ο τανυστής είναι γνωστός με το όνομα **Belifante-Rosenberg** και είναι αντισυμμετρικός σε εναλλαγή των δύο πρώτων δεικτών μ και ρ, όπως θα έπρεπε. Αν εκφράσουμε την ποσότητα $\mathcal{M}^{\mu\lambda\rho}$ συναρτήσει του συμμετρικού τανυστή $T^{\mu\lambda}$ βρίσκουμε τη σχέση:

$$\mathcal{M}^{\lambda\mu\nu} = x^{\mu}T^{\lambda\nu} - x^{\nu}T^{\lambda\mu} + \partial_{\rho}(x^{\nu}B^{\rho\lambda\mu} - x^{\mu}B^{\rho\lambda\nu}). \tag{2.82}$$

Κεφάλαιο 3

Βαθμωτά Πεδία

3.1 Εξίσωση Klein-Gordon

Για να βρει κανείς μια κυματική εξίσωση που να συμβαδίζει με την ειδική θεωρία της σχετικότητας, πρέπει κατ΄ αρχάς να εγκαταλείψει τη μη σχετικιστική σχέση διασποράς $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ και να υιοθετήσει τη σχετικιστική εξίσωση $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$, που στο φυσικό σύστημα μονάδων μπορεί να γραφτεί με τη μορφή: $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. Στη συνέχεια αντικαθιστά κανείς το E με τον τελεστή $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ ή $i\frac{\partial}{\partial t}$ και το $\vec{p}$ με τον τελεστή $-i\hbar\vec{\nabla}$ ή $-i\vec{\nabla}$. Προκύπτει η εξίσωση Klein-Gordon: $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\vec{\nabla}^2\phi + m^2\phi$, που μπορεί να γραφτεί ως:

$$\boxed{\left(\partial_{tt} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right)\phi = 0.} \tag{3.1}$$

Προφανώς ισχύει και η μιγαδική συζυγής εξίσωση:

$$\left(\partial_{tt} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right)\phi^* = 0. \tag{3.2}$$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την (3.1) με $i\phi^*$ και την (3.2) με $i\phi$ και να αφαιρέσουμε:

$$\begin{aligned} i\phi^* * \left(\partial_{tt}\phi - \vec{\nabla}^2\phi + m^2\phi\right) - (i\phi) * \left(\partial_{tt}\phi^* - \vec{\nabla}^2\phi^* + m^2\phi^*\right) = 0 \\ \Rightarrow -\left(i\phi\partial_{tt}\phi^* - i\phi^*\partial_{tt}\phi\right) + \left(i\phi\vec{\nabla}^2\phi^* - i\phi^*\vec{\nabla}^2\phi\right) = 0 \\ \Rightarrow \partial_t\left[i\left(\phi^*\partial_t\phi - \phi\partial_t\phi^*\right)\right] + \vec{\nabla}\cdot\left[-i\left(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

Πρόκειται για μιά εξίσωση συνέχειας, που για να τη δει κανείς καθαρά αρκεί να κάνει τις αναγκαίες ταυτοποιήσεις:

$$\rho \equiv i\left(\phi^*\partial_t\phi - \phi\partial_t\phi^*\right), \quad \vec{J} \equiv -i\left(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*\right), \tag{3.3}$$

οπότε η εξίσωση θα πάρει την οικεία μορφή της εξίσωσης συνέχειας:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0. \tag{3.4}$$

Δηλαδή η πυκνότητα πιθανότητας θα ισούται με ρ και η πυκνότητα ρεύματος πυκνότητας πιθανότητας θα ισούται με $\vec{J}$. Αυτά μπορούν να γραφτούν και σε μορφή τετραδιανύσματος:

$$\boxed{J^\mu = (\rho, \vec{J}) = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*), \quad \partial_\mu J^\mu = 0}. \tag{3.5}$$

Ας εξετάσουμε τώρα μερικά χαρακτηριστικά των λύσεων της εξίσωσης (3.1). Οι λύσεις θα έχουν τη μορφή επίπεδων κυμάτων

$$\phi(t, \vec{x}) = N e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}. \tag{3.6}$$

Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση Klein-Gordon (3.1) αυτή τη λύση, θα προκύψει η σχέση:

$$\left[-E^2 - (-\vec{p}^2) + m^2\right] N e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})} = 0 \Rightarrow E^2 = \vec{p}^2 + m^2. \tag{3.7}$$

Δηλαδή, για να είναι πράγματι λύση η λύση των επίπεδων κυμάτων, πρέπει να ισχύει η σχετικιστική σχέση διασποράς, το οποίο είναι θετικό στοιχείο. Ο επόμενος έλεγχος έχει να κάνει με τα μεγέθη ρ και $\vec{J}$. Αν αντικαταστήσουμε τη λύση (3.6) στις εκφράσεις (3.3) θα προκύψει ότι:

$$\rho = 2|N|^2 E, \quad \vec{J} = 2|N|^2 \vec{p}, \tag{3.8}$$

που μπορεί να γραφτεί και ως

$$J^\mu = 2|N|^2 p^\mu. \tag{3.9}$$

Παρατηρούμε ότι το $\rho \equiv J^0$ μετασχηματίζεται ως η μηδενική συνιστώσα τετραδιανύσματος, δηλαδή $\rho \to \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}}$. Αυτό συνεπάγεται ότι ο αριθμός ρd^3x είναι αναλλοίωτος κατά Lorentz, όπως θα έπρεπε, αφού $d^3x \to d^3x\sqrt{1-v^2}$.

Η μακράν πιο σημαντική παρατήρηση είναι ότι η τελευταία εξίσωση στην (3.7) έχει ως λύσεις τις $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, δηλαδή εκτός από τις ευπρόσδεκτες θετικές ενέργειες εμφανίζονται και οι προβληματικές **αρνητικές ενέργειες.** Επί πλέον, λόγω της σχέσης $\rho = 2|N|^2 E$, οι αρνητικές ενέργειες συνδέονται με αρνητικές πυκνότητες πιθανότητας (!) Μ' άλλα λόγια, η εξίσωση Klein-Gordon δείχνει να έχει τραγικά προβλήματα ήδη από τη γένεσή της και πάντως σ' ένα πολύ πρώιμο στάδιο, που είναι τόσο σοβαρά που απειλούν την ίδια την επιβίωσή της ως αξιόπιστη σχετικιστική εξίσωση. Αυτά τα προβλήματα ήταν που ανάγκασαν τον Schrödinger (που στην πραγματικότητα είχε επινοήσει την εξίσωση Klein-Gordon πριν από τους Klein και Gordon) να την εγκαταλείψει και να άσχοληθεί με τη μη σχετικιστική εξίσωση που φέρει το όνομά του. Το πρόβλημα με τις αρνητικές πιθανότητες μπορεί με κάποιαν έννοια να αντιμετωπιστεί, με ένα τέχνασμα που πρότειναν οι Pauli και Weißkopf: πολλαπλασίασαν την πυκνότητα με το φορτίο q του σωματιδίου και ερμήνευσαν την έκφραση $\rho \equiv iq\left(\phi^* \partial_t \phi - \phi \partial_t \phi^*\right) \to 2q|N|^2 E$ που προέκυψε ως πυκνότητα φορτίου αντί για πυκνότητα πιθανότητας (αντίστοιχα χειρίστηκαν και την πυκνότητα ρεύματος), οπότε οι τυχόν αρνητικές της τιμές δε δημιουργούσαν εννοιολογικό πρόβλημα. Όμως το πρόβλημα των αρνητικών ενεργειών παρέμενε και απαιτούσε μια πιο ριζική αλλαγή αντίληψης.

3.2 Αντισωματίδια

Τελικά η ιδέα που χρειαζόταν προτάθηκε από τους Stückelberg, το 1941, και Feynman, το 1948. Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο με φορτίο $+q$ και τετραορμή $(E, \vec{p})$. Η πυκνότητες φορτίου και ρεύματος μπορεί να γραφτούν με τη μορφή:

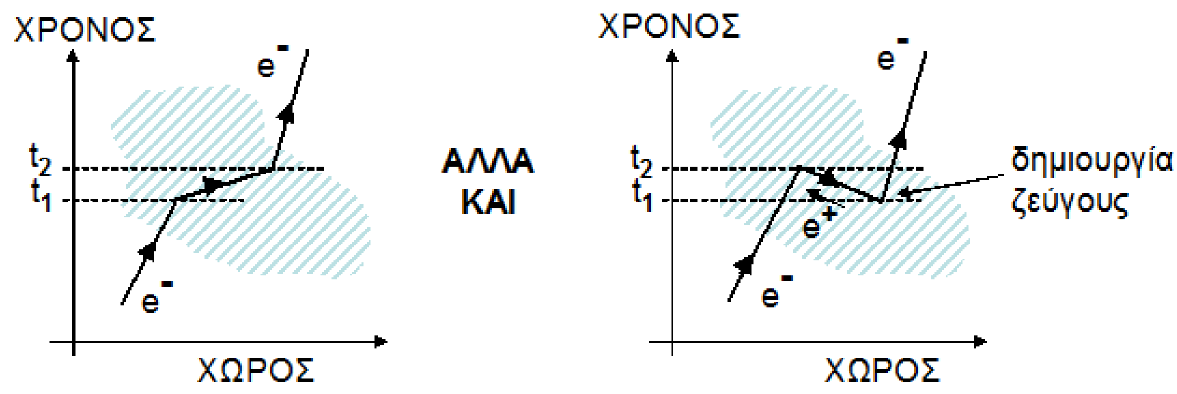
$$J^\mu(+q) = +2q|N|^2 \, (E, \vec{p})\,.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα **αντι-σωματίδιο** με φορτίο $-q$ και την ίδια τετραορμή $(E, \vec{p})$. Οι πυκνότητες θα γίνουν:

$$J^\mu(-q) = -2q|N|^2 \, (E, \vec{p}) = +2q|N|^2 \, (-E, -\vec{p})\,,$$

το οποίο είναι ακριβώς το ίδιο με το ρεύμα ενός **σωματιδίου** με τετραορμή $(-E, -\vec{p})$. Στον προσδιορισμό του φυσικού νοήματος αυτής της ταύτισης θα μας βοηθήσει η απλή παρατήρηση ότι $e^{-i(-E)(-t)} = e^{-i(+E)(+t)}$, που υποδεικνύει ότι ένα σωματίδιο, με ενέργεια $-E$, που διαδίδεται ανάστροφα στο χρόνο περιγράφει το αντίστοιχο αντισωματίδιο με ενέργεια $+E$, που διαδίδεται κατά την ορθή φορά του χρόνου. Η ερμηνεία που δόθηκε ήταν ότι **καταστάσεις σωματιδίων με αρνητική ενέργεια που διαδίδονται στο χρόνο κατά την ανάστροφη φορά περιγράφουν καταστάσεις αντισωματιδίων με θετική ενέργεια που διαδίδονται στο χρόνο κατά την ορθή φορά.** Για παράδειγμα, η εκπομπή ενός αντιηλεκτρονίου (ποζιτρονίου) με ενέργεια $E > 0$ ταυτίζεται με την απορρόφηση ενός ηλεκτρονίου με ενέργεια $-E < 0$. Αυτό σημαίνει ότι **οι κυματοσυναρτήσεις μας μπορούν στην πραγματικότητα να περιγράφουν καταστάσεις πολλών σωματιδίων και αντισωματιδίων.** Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να θεωρήσει τη σκέδαση ενός σωματιδίου από κάποιο εξωτερικό δυναμικό. Θεωρούμε ότι το σωματίδιο σκεδάζεται δύο φορές από το δυναμικό, τις χρονικές στιγμές t_1 και $t_2 > t_1$, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1.

Η πιο συνηθισμένη αλληλουχία των γεγονότων θα ήταν να γίνει πρώτα μια σκέδαση τη χρονική στιγμή t_1 και να ακολουθήσει η δεύτερη σκέδαση τη χρονική στιγμή t_2. Όμως, η ερμηνεία των Stückelberg και Feynman μας δίνει το δικαίωμα να θεωρήσουμε και τη δυνατότητα το σωματίδιο να αλληλεπιδράσει τη χρονική στιγμή t_2, να διαδοθεί ανάστροφα στο χρόνο μέχρι τη χρονική στιγμή t_1, να αλληλεπιδράσει ξανά, και να διαδοθεί στη συνέχεια κατά την ορθή φορά μέχρι την τελική κατάσταση. Το



Σχήμα 3.1:

κομμάτι της διαδρομής που περιλαμβάνει διάδοση κατά την ανάστροφη φορά του χρόνου θα ερμηνευτεί ως διάδοση του αντίστοιχου αντισωματιδίου κατά την ορθή φορά του χρόνου. Δηλαδή η δεύτερη δυνατότητα μπορεί να γίνει κατανοητή ως εξής: Το αρχικό σωματίδιο κινείται αρχικά χωρίς να αλληλεπιδρά καθόλου, μέχρι και μετά το χρόνο t_1. Αυτή τη χρονική στιγμή δημιουργείται από το κενό μέσω του δυναμικού ένα ζευγάρι σωματιδίου-αντισωματιδίου, το οποίο διαδίδεται κατά την ορθή φορά του χρόνου. Τη χρονική στιγμή t_2 το παραχθέν αντισωματίδιο (του ζεύγους) συναντά το αρχικό σωματίδιο και εξουδετερώνονται αμοιβαία, ενώ το σωματίδιο (του ζεύγους) συνεχίζει την πορεία του και προβάλλει ως το σωματίδιο της τελικής κατάστασης. Ίσως να αναρωτηθεί κανείς πώς συνέπεσε το ζεύγος να δημιουργηθεί από το κενό την κατάλληλη χρονική στιγμή, έτσι ώστε το αντισωματίδιο να βρεθεί τη χρονική στιγμή t_2 στην κατάλληλη θέση ώστε να αλληλεπιδράσει με το εισερχόμενο σωματίδιο και να αλληλοεξαϋλωθούν. Μα αυτό ακριβώς μας λέει ότι πρέπει να αλλάξουμε αντίληψη σχετικά με το τι λέμε κενό: δεν είναι ο άδειος χώρος, αλλά ένα περίπλοκο σύστημα, που μέσα του γεννιούνται και αλληλοεξαϋλώνονται συνεχώς σωματίδια και αντισωματίδια. Κάποια από αυτά είναι ενδεχόμενο να αλληλεπιδράσουν με εισερχόμενα σωματίδια, όπως στο παράδειγμά μας, και να επηρεάσουν κάποια αντίδραση. Όμως η δραστηριότητα της συνεχούς δημιουργίας και καταστροφής είναι ασταμάτητη και μας δείχνει ότι το κενό είναι στην πραγματικότητα μια πολύ σύνθετη οντότητα. Για τη δεύτερη δυνατότητα παρατηρούμε ότι, μεταξύ των δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2, υπάρχουν τρία σωματίδια, αντί για ένα: το αρχικό συν το ζεύγος σωματιδίου-αντισωματιδίου που γεννιέται από το κενό με τη βοήθεια του δυναμικού. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η εξίσωση Klein-Gordon, αν υιοθετήσει κανείς αυτήν την ερμηνεία, δεν είναι πια μια εξίσωση που περιγράφει **ένα μόνο** σωματίδιο (όπως, ας πούμε, η εξίσωση του Schrödinger) αλλά πρέπει να θεωρηθεί ως έκφραση μιας θεωρίας πολλών σωματιδίων, ή αλλιώς μιας **κβαντικής θεωρίας πεδίου**.

3.3 Βαθμωτό πραγματικό πεδίο: Κβάντωση και ανάπτυγμα Fourier

Έχουμε ήδη εξηγήσει (και αποτυπώσει στην εξίσωση (3.6)) ότι η λύση της εξίσωσης Klein-Gordon είναι της μορφής

$$Ne^{-i(E_p t-\vec{p}\cdot\vec{x})} = Ne^{-ip\cdot x}, \quad p\cdot x \equiv E_p t - \vec{p}\cdot\vec{x}.$$

Έχουμε συμβολίσει με E_p την ποσότητα $+\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$, που προκύπτει από τη σχέση (3.7). Υπάρχει επίσης η λύση με αρνητική ενέργεια, η $Ne^{+ip\cdot x}$, η οποία θα ερμηνευτεί ως αντισωματίδιο με θετική ενέργεια. Ο χώρος των λύσεων της εξίσωσης Klein-Gordon εξαντλείται από τις $e^{-ip\cdot x}$ και $e^{+ip\cdot x}$, οπότε η γενική λύση θα δίνεται από μια άπειρη υπέρθεση καταστάσεων με τη μορφή:

$$\phi(x) = \int d^3p \left[A(\vec{p})e^{-ip\cdot x} + A^*(\vec{p})e^{+ip\cdot x}\right], \quad E_p = +\sqrt{\vec{p}^2+m^2}. \tag{3.10}$$

Παρατηρούμε ότι, για να εκφράσουμε τη γενική λύση, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τόσο τις λύσεις με θετική ενέργεια, όσο και εκείνες με αρνητική ενέργεια. Δεν γίνεται δηλαδή απλά να αγνοήσουμε τις λύσεις αρνητικής ενέργειας, όσο ενοχλητικές και αν είναι. Αυτός ήταν και ο λόγος τόσο μεγάλης προσπάθειας για μια φυσικά αποδεκτή ερμηνεία μέσω των αντισωματιδίων. Άλλη μία παρατήρηση έχει να κάνει με τη μορφή της λύσης (3.10): ο συντελεστής του δεύτερου εκθετικού επελέγη να είναι ο A^* και όχι ένας αυθαίρετος συντελεστής B. Αυτό έγινε διότι επιμένουμε η λύση για το βαθμωτό πεδίο να είναι πραγματική. Θα μπορούσε και να μην είναι (θα το δούμε αργότερα), αλλά σε πρώτη φάση θα ασχοληθούμε με το πραγματικό πεδίο. Αυτό εξαντλεί ό,τι θα είχαμε να πούμε για τις λύσεις της κλασικής εξίσωσης.

Όμως, αυτό που θέλουμε να περιγράψουμε είναι ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο (θα εξετάσουμε αργότερα και ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο), το $\hat{\phi}(x)$. Αυτό προκύπτει αν θεωρήσει κανείς τη Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{3.11}$$

(που γεννά την εξίσωση Klein-Gordon αν πάρουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange) και ορίσουμε τη συζυγή ορμή

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \dot{\phi}(x). \tag{3.12}$$

Στη συνέχεια, επικαλούμαστε τη στοιχειώδη Κβαντική Μηχανική, όπου η κβάντωση επιτελείται με το αξίωμα $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$, δηλαδή η μετατόπιση x μετατρέπεται στον τελεστή της μετατόπισης $\hat{x}$ και η ορμή p μετατρέπεται στον τελεστή της ορμής $\hat{p}$. Σε πλήρη αντιστοιχία, απαιτούμε να ικανοποιούνται οι σχέσεις μετάθεσης:

$$\boxed{[\hat{\phi}(t,\vec{x}),\hat{\phi}(t,\vec{y})] = 0, \quad [\hat{\pi}(t,\vec{x}),\hat{\pi}(t,\vec{y})] = 0,}$$

$$\boxed{[\hat{\phi}(t,\vec{x}),\hat{\pi}(t,\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).} \tag{3.13}$$

Αυτές οι σχέσεις αναφέρονται **στον ίδιο χρόνο** (equal time commutation relations).

Ας σκεφτούμε τι κάναμε: πήραμε ένα κλασικό πεδίο, το $\phi(t,\vec{x})$. Αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι περιγράφει κάποιο είδος κλασικού ρευστού με άπειρους βαθμούς ελευθερίας (που ταυτοποιούνται από το $\vec{x}$) και το ϕ είναι η τιμή κάποιου χαρακτηριστικού μεγέθους του ρευστού, π.χ. της πυκνότητάς του, που εξαρτάται γενικά και από το χρόνο. Στη συνέχεια κβαντώνουμε αυτό το σύστημα. Όμως πρέπει να θυμηθούμε ότι το πεδίο ϕ στην πραγματικότητα δεν προέκυψε από μετρήσεις ενός κλασικού ρευστού, αλλά είναι κυματοσυνάρτηση ενός άλλου συστήματος, για το οποίο έχει προηγηθεί η κβάντωση της τετραορμής, δηλαδή οι αντικαταστάσεις $p^0 \to i\frac{\partial}{\partial t}$ και $\vec{p} \to -i\vec{\nabla}$. Δηλαδή δίνεται η εντύπωση ότι **ξανακβαντώνουμε ένα ήδη κβαντισμένο σύστημα.** Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως **δεύτερη κβάντωση.** Βέβαια η εντύπωση αυτή είναι απατηλή, επομένως ο όρος είναι μάλλον ατυχής, αλλά είναι πια καθιερωμένος.

Το σύστημα είναι πια κβαντισμένο. Όμως, όλη αυτή η κατασκευή κινδυνεύει να παρεξηγηθεί ως ένα καθαρά φορμαλιστικό δημιούργημα, αν δεν τη συνδέσουμε με κάτι γνωστό. Σ' αυτό θα μας βοηθήσει η γενική λύση (3.10) της κλασικής εξίσωσης. Το αριστερό μέλος είναι μια κλασική συνάρτηση. Αν θέλουμε το αριστερό μέλος να αποκτήσει τα χαρακτηριστικά πεδίου, κάποια στοιχεία του δεξιού μέλους πρέπει επίσης να προαχθούν σε πεδία. Αυτά τα στοιχεία θα είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης $A(\vec{p})$ και $A^*(\vec{p})$. Είναι αξιοσημείωτο ότι το βάρος της μετατροπής σε κβαντικό σύστημα δε θα το σηκώσουν τα εκθετικά, που είναι οι λύσεις της εξίσωσης Klein-Gordon, αλλά οι σταθερές ολοκλήρωσης! Για να φτάσουμε στην τελική έκφραση που θέλουμε, θα κάνουμε και μια ανακλιμάκωση:

$$A(\vec{p}) \to \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}\hat{a}(p), \quad A^*(\vec{p}) \to \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}\hat{a}^\dagger(p).$$

Δηλαδή οι συντελεστές $A(\vec{p})$ και $A^*(\vec{p})$ γίνονται τελεστές (που θα δούμε ότι είναι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής) και το ανάπτυγμα Fourier του κβαντικού πεδίου $\hat{\phi}(x)$ θα είναι:

$$\boxed{\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}[\hat{a}(p)e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger(p)e^{+ip\cdot x}].} \tag{3.14}$$

Όπως έχουμε εξηγήσει, $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ οπότε και $\hat{\pi}(x) = \dot{\hat{\phi}}(x)$ και τελικά:

$$\hat{\pi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}[(-iE_p)\hat{a}(p)e^{-ip\cdot x} + (+iE_p)\hat{a}^\dagger(p)e^{+ip\cdot x}]. \tag{3.15}$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι σχέσεις μετάθεσης των $\hat{a}(p)$ και $\hat{a}^\dagger(p)$ που απαιτούνται για να ικανοποιηθούν οι σχέσεις μετάθεσης (3.13) των $\hat{\phi}(t,\vec{x})$ και $\hat{\pi}(t,\vec{x})$ είναι:

$$\boxed{[\hat{a}(p),\hat{a}(p')]=0, \quad [\hat{a}^\dagger(p),\hat{a}^\dagger(p')]=0, \quad [\hat{a}(p),\hat{a}^\dagger(p')]=\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}').} \tag{3.16}$$

Πιό εύκολο είναι να δείξει κανείς το αντίστροφο: ξεκινώντας από τις (3.16) να δείξει τις (3.13). Δίνουμε ένα δείγμα [συμβολισμοί: $x\equiv(t,\vec{x}),\ y\equiv(t,\vec{y})$]:

$$[\hat{\phi}(t,\vec{x}),\hat{\pi}(t,\vec{y})] = \Bigg[\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}[\hat{a}(p)e^{-ip\cdot x}+\hat{a}^\dagger(p)e^{+ip\cdot x}],$$

$$\int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}}[(-iE_{p'})\hat{a}(p')e^{-ip'\cdot y}+(+iE_{p'})\hat{a}^\dagger(p')e^{+ip'\cdot y}\Bigg]$$

$$= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}\int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}}$$

$$[\hat{a}(p)e^{-ip\cdot x}+\hat{a}^\dagger(p)e^{+ip\cdot x},(-iE_{p'})\hat{a}(p')e^{-ip'\cdot y}+(+iE_{p'})\hat{a}^\dagger(p')e^{+ip'\cdot y}]$$

$$= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}\int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}}$$

$$\Big\{(+iE_{p'})e^{-ip\cdot x}e^{+ip'\cdot y}[\hat{a}(p),\hat{a}^\dagger(p')]+(-iE_{p'})e^{+ip\cdot x}e^{-ip'\cdot y}[\hat{a}^\dagger(p),\hat{a}(p')]\Big\}$$

$$= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}\int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}}$$

$$\Big\{(+iE_{p'})e^{-ip\cdot x}e^{+ip'\cdot y}\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')+(-iE_{p'})e^{+ip\cdot x}e^{-ip'\cdot y}(-\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}'))\Big\}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}(iE_p)\left\{e^{-ip\cdot x}e^{+ip\cdot y}+e^{+ip\cdot x}e^{-ip\cdot y}\right\}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}(iE_p)\left\{e^{-i(E_pt-\vec{p}\cdot\vec{x})}e^{+i(E_pt-\vec{p}\cdot\vec{y})}+e^{+i(E_pt-\vec{p}\cdot\vec{x})}e^{-i(E_pt-\vec{p}\cdot\vec{y})}\right\}$$

$$= \frac{i}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left\{e^{+i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}+e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\right\} = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}),$$

όπως θα έπρεπε. Χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{+i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).$$

Ξεκινώντας από τις σχέσεις (3.11) και (3.12) μπορούμε να δείξουμε για τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα ότι:

$$\mathcal{H}\equiv\pi\dot{\phi}-\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[\pi^2+(\vec{\nabla}\phi)^2+m^2\phi^2\right], \tag{3.17}$$

όπου αντικαταστήσαμε παντού το $\dot{\phi}$ με το π, αφού η Χαμιλτονιανή εκφράζεται συναρτήσει της ορμής και όχι της ταχύτητας. Η Χαμιλτονιανή μπορεί να εκφραστεί και συναρτήσει των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, αν θεωρήσουμε ότι έχουμε κάνει τη (δεύτερη) κβάντωση και τα πεδία $\hat{\pi}$ και $\hat{\phi}$ έχουν προαχθεί σε τελεστές: απλά αντικαθιστά κανείς στον ορισμό (3.17) της Χαμιλτονιανής τα αναπτύγματα (3.14) και (3.15), οπότε θα προκύψει:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int d^3pE_p\left[\hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p) + \hat{a}(p)\hat{a}^\dagger(p).\right] \tag{3.18}$$

Με τη βοήθεια τώρα της σχέσης (3.18) μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger(p')] = +E_{p'}\hat{a}^\dagger(p'), \quad [\hat{H}, \hat{a}(p')] = -E_{p'}\hat{a}(p'). \tag{3.19}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μια ιδιοκατάσταση $|E_p>$, με ιδιοτιμή της Χαμιλτονιανής ίση με E_p : $\hat{H}|E_p>= E_p|E_p>$. Αν δράσουμε και με τα δύο μέλη της πρώτης εξίσωσης (3.19) πάνω στην $|E_p>$ θα προκύψει:

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger(p')|E_p>) - \hat{a}^\dagger(p')(\hat{H}|E_p>) = +E_{p'}(\hat{a}^\dagger(p')|E_p>)$$

$$\Rightarrow \hat{H}(\hat{a}^\dagger(p')|E_p>) - E_p(\hat{a}^\dagger(p')|E_p>) = +E_{p'}(\hat{a}^\dagger(p')|E_p>)$$

$$\Rightarrow \hat{H}(\hat{a}^\dagger(p')|E_p>) = (E_p + E_{p'})(\hat{a}^\dagger(p')|E_p>).$$

Δηλαδή η νέα κατάσταση $\hat{a}^\dagger(p')|E_p>$ που δημιουργείται από τη δράση του τελεστή $\hat{a}^\dagger(p')$ θα έχει ενέργεια $E_p+E_{p'}$. Ακολουθώντας εντελώς αντίστοιχα βήματα βρίσκουμε ότι η κατάσταση $\hat{a}(p')|E_p>$ που δημιουργείται από τη δράση του τελεστή $\hat{a}(p')$ θα έχει ενέργεια $E_p - E_{p'}$.

Έχουμε, επομένως, πλήρη αντιστοιχία με τον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή: ο τελεστής $\hat{a}^\dagger(p')$ δημιουργεί ένα σωματίδιο με ορμή p', δηλαδή είναι τελεστής δημιουργίας, ενώ ο τελεστής $\hat{a}(p')$ καταστρέφει ένα σωματίδιο με ορμή p', άρα είναι τελεστής καταστροφής. Να επισημάνουμε εδώ παρεμπιπτόντως ότι αυτό που ονομάζουμε **σωματίδιο** σ' αυτή τη διατύπωση είναι μια οντότητα **με καθορισμένη ορμή και όχι καθορισμένη θέση,** δηλαδή διαφέρει πάρα πολύ από τη συνήθη εικόνα που έχουμε για το σωματίδιο, ότι δηλαδή είναι κάτι που είναι χωρικά καλά εντοπισμένο.

Μια ακόμα παρατήρηση προκύπτει άν ξαναθυμηθούμε τη σχέση (3.14), όπου βλέπουμε ότι ο τελεστής καταστροφής πολλαπλασιάζει το εκθετικό με τη θετική συχνότητα. Άρα η συνιστώσα του πεδίου με θετική συχνότητα καταστρέφει το σωματίδιο, ενώ η συνιστώσα με την αρνητική συχνότητα συνδέεται με τον τελεστή δημιουργίας και το κατασκευάζει. Το σωματίδιο **έχει πάντα θετική ενέργεια,** απλά οι δύο συνιστώσες (θετική ή αρνητική συχνότητα) σηματοδοτούν το αν το σωματίδιο καταστρέφεται ή δημιουργείται.

3.4 Χώρος του Fock

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, οι τελεστές καταστροφής εξαφανίζουν σωματίδια με ορμή p', άρα ενέργεια $E_{p'}$, δηλαδή μειώνουν την ενέργεια κατά $E_{p'}$. Όμως αυτή η διαδικασία δεν μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον, γιατί τότε θα μπορούσαμε να αντλήσουμε άπειρη ενέργεια από το φυσικό σύστημα. Υπάρχει, επομένως, μια κατάσταση $|0>$, πάνω στην οποία αν δράσουν οι τελεστές καταστροφής (για όλες τις τιμές της τετραορμής), πρέπει να δώσουν μηδέν, ώστε να τερματιστεί η διαδικασία. Αυτή η θεμελιώδης κατάσταση ονομάζεται **κενό** της θεωρίας, συμβολίζεται με $|0>$ (ενώ ακριβέστερος θα ήταν ίσως ο συμβολισμός $|0,0,0...>$, που υποβάλλει την ιδέα ότι αυτή είναι η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας για την τετραορμή p_1, η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας για την τετραορμή p_2, η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας για την τετραορμή p_3 κλπ) και ορίζεται με βάση τη σχέση

$$\hat{a}(p)|0>=0, \quad \forall\, p. \tag{3.20}$$

Υποθέτουμε επίσης ότι η θεμελιώδης κατάσταση είναι κανονικοποιημένη:

$$<0|0>=1. \tag{3.21}$$

Η Χαμιλτονιανή (3.18) μπορεί, αν ληφθούν υπόψη οι σχέσεις μετάθεσης (3.16), να γραφτεί με την εναλλακτική μορφή:

$$\hat{H}=\int d^3pE_p\left[\hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p)+\frac{1}{2}\delta^{(3)}(\vec{0})\right]. \tag{3.22}$$

Αυτός ο τρόπος γραφής γινομένων τελεστών όπου οι τελεστές δημιουργίας βρίσκονται στα αριστερά όλων των τελεστών καταστροφής λέγεται **φυσική διάταξη** και είναι ο συνηθισμένος τρόπος γραφής στην κβαντική θεωρία πεδίου. Δηλαδή:

$$N[\hat{a}(p)\hat{a}^\dagger(p)]=N[\hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p)]=\hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p). \tag{3.23}$$

Επίσης, αυτή η γραφή δείχνει ανάγλυφα ότι το ελεύθερο βαθμωτό πεδίο, με το οποίο ασχολούμαστε, μπορεί να θεωρηθεί ως **συλλογή άπειρων το πλήθος κβαντικών αρμονικών ταλαντωτών.** Παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη τιμή της Χαμιλτονιανής στο κενό ισούται με:

$$<0|\hat{H}|0>=\int d^3pE_p\left[<0|\hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p)|0>+\frac{1}{2}\delta^{(3)}(\vec{0})<0|0>\right]=\int d^3pE_p\frac{1}{2}\delta^{(3)}(\vec{0}),$$

που είναι **άπειρο!** Αυτό δεν είναι τόσο παράδοξο όσο δείχνει: ο κάθε αρμονικός ταλαντωτής έχει ενέργεια $(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ με ελάχιστη τιμή $\to \frac{1}{2}\hbar\omega$, που στην περίπτωσή μας γράφεται: $\frac{1}{2}E_p$. Αφού, λοιπόν, οι ταλαντωτές είναι άπειροι, θα απειρίζεται και η ελάχιστη ενέργειά τους. Αυτή η άπειρη ενέργεια ονομάζεται ενέργεια μηδενικού σημείου και στις συνηθισμένες φυσικές καταστάσεις δεν έχει καμμιά επίδραση, γι΄ αυτό συνήθως παραλείπεται [1].

Από τη στιγμή που εντοπίσαμε τη θεμελιώδη κατάσταση μπορούμε να δράσουμε επάνω της με τελεστές δημιουργίας και να φτιάξουμε τις διεγερμένες καταστάσεις, δηλαδή καταστάσεις ενός σωματιδίου $|p>$, που σχετίζονται με την έκφραση $\hat{a}^\dagger(p)|0>$, καταστάσεις δύο σωματιδίων $|p_1 p_2>$, που σχετίζονται με την έκφραση $\hat{a}^\dagger(p_1)\hat{a}^\dagger(p_2)|0>$, κλπ. Οι σταθερές αναλογίας εξηγούνται λεπτομερειακά στην παράγραφο **;;**. Ο χώρος που κατασκευάζεται λέγεται **χώρος του Fock** και είναι το κατάλληλο πλαίσιο για να περιγραφούν διαδικασίες που περιλαμβάνουν μεταβαλλόμενο αριθμό σωματιδίων. Ένας τελεστής που δίνει τον αριθμό των σωματιδίων που περιέχονται σε μια κατάσταση είναι ο τελεστής αρίθμησης:

$$\hat{\mathcal{N}} \equiv \int d^3p \ \ \hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p). \tag{3.24}$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι

$$[\hat{\mathcal{N}}, \hat{a}^\dagger(p')] = +\hat{a}^\dagger(p'), \ \ [\hat{\mathcal{N}}, \hat{a}(p')] = -\hat{a}(p'),$$

οπότε

$$\hat{\mathcal{N}}|0>= 0, \ \ \hat{\mathcal{N}}|p>=|p>, \ \ \hat{\mathcal{N}}|p_1p_2>= 2|p_1p_2>, \hat{\mathcal{N}}|p_1p_2p_3>= 3|p_1p_2p_3>, \ldots,$$

όπως είπαμε.

3.5 Μιγαδικό βαθμωτό πεδίο: Αντισωματίδια

Κατ΄ αναλογία με το πραγματικό βαθμωτό πεδίο μπορούμε να ορίσουμε και το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο. Πολλά πράγματα θα είναι παρόμοια, αλλά παρουσιάζει και κάποια ενδιαφέροντα νέα χαρακτηριστικά. Έχει ενδιαφέρον, γιατί, αν θέλει κανείς να περιγράψει φορτισμένα βαθμωτά σωματίδια, αυτό είναι το πεδίο που πρέπει να χρησιμοποιήσει. Το λέμε μιγαδικό ακριβώς γιατί το ερμιτειανό συζυγές πεδίο $\hat{\phi}^\dagger$ δεν ταυτίζεται με το $\hat{\phi}$, όπως στην περίπτωση του πραγματικού πεδίου. Θα χρησιμοποιήσουμε και τα δύο γραμμικά ανεξάρτητα πεδία. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα γράφεται:

$$\boxed{\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi,} \tag{3.25}$$

ενώ το ανάπτυγμα σε τελεστές δημιουργίας και καταστροφής είναι:

$$\boxed{\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}[\hat{a}(p)e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^\dagger(p)e^{+ip\cdot x}],}$$

$$\boxed{\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}[\hat{a}^\dagger(p)e^{+ip\cdot x} + \hat{b}(p)e^{-ip\cdot x}].} \tag{3.26}$$

[1] Υπάρχει, πάντως, το πολύ γνωστό φαινόμενο Casimir, το οποίο είναι εκδήλωση της ενέργειας μηδενικού σημείου.

Παρατηρούμε εδώ ότι, σε αντίθεση με το ανάπτυγμα (3.14) για το πραγματικό πεδίο, ο τελεστής $\hat{b}^\dagger(p)$ που πολλαπλασιάζει το εκθετικό $e^{+ip\cdot x}$ με τις αρνητικές συχνότητες δεν είναι ερμιτειανός συζυγής του τελεστή $\hat{a}(p)$, που πολλαπλασιάζει το $e^{-ip\cdot x}$ των θετικών συχνοτήτων. Αυτό είναι συμβατό με την απαίτηση $\hat{\phi}^\dagger(x) \neq \hat{\phi}(x)$. Οι σχέσεις μετάθεσης είναι:

$$\boxed{[\hat{a}(p), \hat{a}(p')] = 0, \quad [\hat{a}^\dagger(p), \hat{a}^\dagger(p')] = 0, \quad [\hat{a}(p), \hat{a}^\dagger(p')] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'),}$$

$$\boxed{[\hat{b}(p), \hat{b}(p')] = 0, \quad [\hat{b}^\dagger(p), \hat{b}^\dagger(p')] = 0, \quad [\hat{b}(p), \hat{b}^\dagger(p')] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'),}$$

$$\boxed{[\hat{a}(p), \hat{b}(p')] = 0, \quad [\hat{a}^\dagger(p), \hat{b}^\dagger(p')] = 0, \quad [\hat{a}(p), \hat{b}^\dagger(p')] = 0, \quad [\hat{a}^\dagger(p), \hat{b}(p')] = 0} \tag{3.27}$$

Η θεμελιώδης κατάσταση (κενό) της θεωρίας ορίζεται μέσω των σχέσεων

$$\hat{a}(p)|0>= 0, \quad \hat{b}(p)|0>= 0, \quad \forall \;\; p. \tag{3.28}$$

και η Χαμιλτονιανή προκύπτει ίση με:

$$\boxed{\hat{H} = \int d^3p E_p \left[\hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p) + \hat{b}^\dagger(p)\hat{b}(p)\right].} \tag{3.29}$$

Εξ άλλου οι διεγερμένες καταστάσεις που περιέχουν ένα, δύο, τρία κλπ σωματίδια τύπου a ή/και b παράγονται δρώντας στη θεμελιώδη κατάσταση με τους τελεστές δημιουργίας $\hat{a}^\dagger(p)$ και $\hat{b}^\dagger(p)$, όπως και στην περίπτωση του πραγματικού βαθμωτού πεδίου.

Είναι προφανές ότι η Λαγκρανζιανή (3.25) είναι αναλλοίωτη υπό τον μετασχηματισμό

$$\phi(x) \to e^{-iq\theta}\phi(x), \quad \phi^\dagger(x) \to e^{+iq\theta}\phi^\dagger(x),$$

με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι το θ δεν εξαρτάται από το x. Θεωρούμε τώρα απειροστούς τέτοιους μετασχηματισμούς, ώστε να εφαρμόσουμε το θεώρημα της Noether και να προσδιορίσουμε το αντίστοιχο διατηρούμενο ρεύμα. Θεωρούμε λοιπόν ότι το θ είναι απειροστό: $\theta \to \epsilon$. Τότε:

$$\phi(x) \to e^{-iq\epsilon}\phi(x) \approx \phi(x) - iq\epsilon\phi(x) \equiv \phi(x) + \epsilon F(x),$$

$$\phi^\dagger(x) \to e^{+iq\epsilon}\phi^\dagger(x) \approx \phi^\dagger(x) + iq\epsilon\phi^\dagger(x) \equiv \phi^\dagger(x) + \epsilon F^\dagger(x).$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι

$$F(x) = -iq\phi(x), \quad F^\dagger(x) = +iq\phi^\dagger(x).$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με το θεώρημα της Noether βρίσκουμε:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}F(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger(x))}F^\dagger(x)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))}(-iq\phi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger(x))}(+iq\phi^\dagger(x))$$
$$= iq\left[(\partial^\mu \phi)\phi^\dagger - (\partial^\mu \phi^\dagger)\phi\right].$$

Μπορούμε, συνεπώς να υπολογίσουμε το διατηρούμενο φορτίο:

$$Q = \int d^3x J^0 = \int d^3x iq\left[(\partial^0 \phi)\phi^\dagger - (\partial^0 \phi^\dagger)\phi\right].$$

Αν αντικαταστήσουμε το ανάπτυγμα (3.26) στην έκφραση για το διατηρούμενο φορτίο προκύπτει:

$$Q = q\int d^3p\left[\hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p) - \hat{b}^\dagger(p)\hat{b}(p)\right].$$

Ο πρώτος όρος είναι ο τελεστής αρίθμησης των κβάντων τύπου a :

$$\mathcal{N}_a \equiv \int d^3p \hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p).$$

Παρόμοια, ορίζουμε τον δεύτερο τελεστή αρίθμησης, για τα σωματίδια τύπου b :

$$\mathcal{N}_b \equiv \int d^3p \hat{b}^\dagger(p)\hat{b}(p).$$

Το διατηρούμενο φορτίο γράφεται:

$$Q = q\mathcal{N}_a - q\mathcal{N}_b.$$

Η ερμηνεία είναι πάρα πολύ ενδιαφέρουσα: η ποσότητα q είναι το φορτίο του σωματιδίου τύπου a, οπότε ο πρώτος όρος, ο $q\mathcal{N}_a$, αντιπροσωπεύει το συνολικό φορτίο αυτών των σωματιδίων. Τότε τα σωματίδια τύπου b έχουν το ακριβώς αντίθετο φορτίο και ονομάζονται **αντισωματίδια** των σωματιδίων τύπου a. Το συνολικό φορτίο των αντισωματιδίων εκφράζεται από τον δεύτερο όρο, τον $-q\mathcal{N}_b$. Αν τώρα θυμηθούμε τα αναπτύγματα (3.26), βλέπουμε ότι το πεδίο $\hat{\phi}(x)$ μπορεί να δράσει πάνω σε μια κατάσταση είτε με τον πρώτο όρο, που καταστρέφει σωματίδια είτε με τον δεύτερο όρο, που δημιουργεί αντισωματίδια. Σε οποιαδήποτε από αυτές τις δύο περιπτώσεις, το φορτίο της νέας κατάστασης θα είναι μικρότερο κατά q από εκείνο της αρχικής. Τα αντίστροφα θα συμβούν αν δράσει το πεδίο $\hat{\phi}^\dagger(x)$: είτε ο πρώτος όρος θα δημιουργήσει σωματίδια, είτε ο δεύτερος όρος θα καταστρέψει αντισωματίδια, με τελικό αποτέλεσμα η νέα κατάσταση να έχει φορτίο μεγαλύτερο κατά q από εκείνο της αρχικής.

3.6 Διαδότες

Ο διαδότης είναι ένα βασικό στοιχείο της θεωρίας διαταραχών που θα αναπτύξουμε αργότερα. Βασικά είναι ένα πλάτος μετάβασης από ένα χωροχρονικό σημείο σ' ένα άλλο. Όμως αυτή η αόριστη διατύπωση μπορεί να περιλαμβάνει διάφορες διαδικασίες και θα προσπαθήσουμε να την κάνουμε όσο πιό σαφή γίνεται.

3.6.1 Πραγματικό βαθμωτό πεδίο

Ας θεωρήσουμε το πλάτος μετάβασης ενός πραγματικού βαθμωτού πεδίου $\hat{\phi}(x)$ από το σημείο $x' \equiv (t', \vec{x}')$ στο σημείο $x \equiv (t, \vec{x})$ όπου $t < t'$. Η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου στο σημείο x' είναι $< 0|\hat{\phi}(x') = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} e^{-ip'\cdot x'} < 0|\hat{a}(p')$, ενώ εκείνη του σωματιδίου στο x είναι: $\hat{\phi}(x)|0 >= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{+ip\cdot x} \hat{a}^\dagger(p)|0 >$. Εκείνο που χρειαζόμαστε για να βρούμε το πλάτος μετάβασης είναι η προβολή της μιας κυματοσυνάρτησης πάνω στην άλλη, δηλαδή το εσωτερικό τους γινόμενο:

$$< 0|\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x)|0 >= \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{ip\cdot x} e^{-ip'\cdot x'} < 0|\hat{a}(p')\hat{a}^\dagger(p)|0 >$$

$$= \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{ip\cdot x} e^{-ip'\cdot x'} \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{ip\cdot(x-x')}, \quad t < t'. \tag{3.30}$$

Όταν $t > t'$ τα πράγματα είναι αντίστοιχα και γράφουμε τις σχέσεις χωρίς σχόλια:

$$\left\{ < 0|\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{-ip\cdot x} < 0|\hat{a}(p), \quad \hat{\phi}(x')|0 >= \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} e^{+ip'\cdot x'} \hat{a}^\dagger(p)|0 > \right\}$$

$$\Rightarrow < 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')|0 >= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} e^{-ip\cdot x} e^{ip'\cdot x'} < 0|\hat{a}(p)\hat{a}^\dagger(p')|0 >$$

$$= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} e^{-ip\cdot x} e^{ip'\cdot x'} \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip\cdot(x-x')}, \quad t > t'. \tag{3.31}$$

Τις παραστάσεις $< 0|\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x)|0 >$ (αν $t < t'$) και $< 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')|0 >$ (αν $t > t'$) μπορεί να τις καταλάβει κανείς και ως εξής: (1) Αν $t < t'$, ο τελεστής $\hat{\phi}(x)$ δρα πρώτος στο κενό και δημιουργεί ένα σωματίδιο στο σημείο $\vec{x}$, ενώ στη συνέχεια δρα ο τελεστής $\hat{\phi}(x')$ και καταστρέφει το σωματίδιο αυτό όταν φτάσει στο σημείο $\vec{x}'$. (2) Αν $t > t'$, δρα πρώτος στο κενό ο τελεστής $\hat{\phi}(x')$ και δημιουργεί ένα σωματίδιο στο σημείο $\vec{x}'$, ενώ στη συνέχεια δρα ο τελεστής $\hat{\phi}(x)$ και καταστρέφει το σωματίδιο αυτό όταν φτάσει στο σημείο $\vec{x}$. Δηλαδή συνοπτικά, **αν $t < t'$, το σωματίδιο δημιουργείται στο $\vec{x}$ και καταστρέφεται στο $\vec{x}'$, ενώ για $t > t'$, το σωματίδιο δημιουργείται στο $\vec{x}'$ και καταστρέφεται στο $\vec{x}$.**

Στην πραγματικότητα μας ενδιαφέρει το πλάτος μετάβασης μεταξύ των σημείων $\vec{x}$ και $\vec{x}'$ σε χρόνο $|t - t'|$, ανεξάρτητα από το αν προηγείται η χρονική στιγμή t ή η t'. Το μέγεθος που είναι σημαντικό είναι ο λεγόμενος **διαδότης του Feynman**, που ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$i\Delta_F(x - x') \equiv \Theta(t' - t) < 0|\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x)|0 > +\Theta(t - t') < 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')|0 > . \tag{3.32}$$

Αν ορίσουμε το **χρονολογικό γινόμενο** των δύο πεδίων μέσω της σχέσης:

$$T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')] = T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x)] \equiv \Theta(t'-t)\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x)+\Theta(t-t')\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x'), \quad (3.33)$$

η τελευταία σχέση γράφεται πιό συνεκτικά ως:

$$i\Delta_F(x-x') \equiv < 0|T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')]|0 > . \quad (3.34)$$

Έχουμε ορίσει τον διαδότη έτσι, ώστε να συνεισφέρουν και οι δύο χρονικές διατάξεις εξ ίσου. Στη συνέχεια θα αντικαταστήσουμε στην (3.32) τις αναμενόμενες τιμές στο κενό με τα ίσα τους από τις εξισώσεις (3.30) και (3.31):

$$i\Delta_F(x-x') = \Theta(t'-t)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{ip\cdot(x-x')} + \Theta(t-t')\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{-ip\cdot(x-x')}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\Theta(t'-t)e^{iE_p(t-t')-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\Theta(t-t')e^{-iE_p(t-t')+i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\Theta(t'-t)e^{iE_p(t-t')+i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\Theta(t-t')e^{-iE_p(t-t')+i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}, \quad (3.35)$$

αφού η τρισδιάστατη ορμή είναι βουβή μεταβλητή και η εξάρτηση είναι τέτοια ώστε μπορούμε να αλλάξουμε το $\vec{p}$ σε $-\vec{p}$ μέσα στην ολοκλήρωση. Δηλαδή:

$$i\Delta_F(x-x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\left[\Theta(t'-t)e^{iE_p(t-t')} + \Theta(t-t')e^{-iE_p(t-t')}\right], \quad (3.36)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε μια αναπαράσταση της βηματικής συνάρτησης Θήτα, γνωστή από τη μιγαδική ανάλυση:

$$\Theta(\tau) = i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\rho}{2\pi}\frac{e^{-i\rho\tau}}{\rho+i\epsilon},$$

που μπορεί ν' αποδειχτεί πολύ εύκολα, ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος και χρησιμοποιώντας ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Αυτή η σχέση συνεπάγεται τις

$$\Theta(t-t') = i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0'}{2\pi}\frac{e^{-ip_0'(t-t')}}{p_0'+i\epsilon}, \qquad \Theta(t'-t) = -i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0'}{2\pi}\frac{e^{-ip_0'(t'-t)}}{-p_0'-i\epsilon}.$$

Αυτές οι εκφράσεις θα αντικατασταθούν στην εξίσωση (3.36) και θα δώσουν:

$$i\Delta_F(x-x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$\cdot\left[-i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0'}{2\pi}\frac{e^{-ip_0'(t'-t)}}{-p_0'-i\epsilon}e^{iE_p(t-t')} + i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0'}{2\pi}\frac{e^{-ip_0'(t-t')}}{p_0'+i\epsilon}e^{-iE_p(t-t')}\right]$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$\cdot\left[-i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0'}{2\pi}\frac{e^{-i(-p_0'-E_p)(t-t')}}{-p_0'-i\epsilon}+i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0'}{2\pi}\frac{e^{-i(p_0'+E_p)(t-t')}}{p_0'+i\epsilon}\right] \tag{3.37}$$

Στον πρώτο όρο κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $-p_0'-E_p=p_0$ ενώ στον δεύτερο όρο: $p_0'+E_p=p_0$, οπότε:

$$i\Delta_F(x-x')=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$\cdot\left[-i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\frac{e^{-ip_0(t-t')}}{p_0+E_p-i\epsilon}+i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\frac{e^{-ip_0(t-t')}}{p_0-E_p+i\epsilon}\right] \tag{3.38}$$

$$\Rightarrow i\Delta_F(x-x')=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}e^{-ip_0(t-t')+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$\cdot\frac{1}{2E_p}\lim_{\epsilon\to 0}\left[-\frac{i}{p_0+E_p-i\epsilon}+\frac{i}{p_0-E_p+i\epsilon}\right] \tag{3.39}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε ανακατασκευάσει την τετραδιάστατη εκδοχή του μετασχηματισμού Fourier:

$$\boxed{\Delta_F(x-x')=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x-x')}\tilde{\Delta}_F(p),} \tag{3.40}$$

και αποδείξαμε ότι:

$$\tilde{\Delta}_F(p)=\frac{1}{2E_p}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{p_0-(E_p-i\epsilon)}-\frac{1}{p_0+(E_p-i\epsilon)}\right]$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{p_0^2-(E_p-i\epsilon)^2}\approx\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{p_0^2-E_p^2+i(2\epsilon E_p)}. \tag{3.41}$$

Όμως το ϵ είναι απλά μια απειροστή θετική ποσότητα, οπότε και το $2\epsilon E_p$ μπορεί να παίξει ακριβώς τον ίδιο ρόλο: μ' αυτό το σκεπτικό θα συμβολίζουμε στο εξής το $2\epsilon E_p$ με ϵ για απλότητα. Εξ άλλου, όπως ξέρουμε, $E_p^2=\vec{p}^2+m^2$ και $p_0^2-\vec{p}^2=p^2$, οπότε ο διαδότης γράφεται τελικά με τη μορφή:

$$\boxed{\tilde{\Delta}_F(p)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{p_0^2-\vec{p}^2-m^2+i\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}.}$$

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι, αν δράσουμε στη συνάρτηση $\Delta_F(x)$ με τον τελεστή $\partial_{tt}-\vec{\nabla}^2+m^2$ των Klein-Gordon, θα πάρουμε συνάρτηση δέλτα. Η απόδειξη είναι πολύ απλή:

$$(\partial_{tt}-\vec{\nabla}^2+m^2)\Delta_F(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(\partial_{tt}-\vec{\nabla}^2+m^2)e^{-ip\cdot x}\tilde{\Delta}_F(p)$$

$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-p_0^2+\vec{p}^2+m^2)e^{-ip\cdot x}\tilde{\Delta}_F(p)$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-p_0^2+\vec{p}^2+m^2)e^{-ip\cdot x}\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}=-\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot x}=-\delta^{(4)}(x).$$

Συνεπώς **ο διαδότης του Feynman είναι μια συνάρτηση Green για τον τελεστή Klein-Gordon.**

3.6.2 Μιγαδικό βαθμωτό πεδίο

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τον διαδότη του Feynman για μιγαδικό βαθμωτό πεδίο. Εκτός από το ενδιαφέρον που πηγάζει από την πιθανή συμμετοχή φορτισμένων σωματιδίων σε διάφορες αλληλεπιδράσεις, παρουσιάζει και μεγάλο εννοιολογικό ενδιαφέρον, όπως θα δούμε.

Ο διαδότης ορίζεται ως:

$$i\Delta_F(x-x') \equiv \Theta(t-t') < 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(x')|0 > +\Theta(t'-t) < 0|\hat{\phi}^\dagger(x')\hat{\phi}(x)|0 > . \quad (3.42)$$

Μπορεί κανείς να δεί ότι οι αντίστοιχες παραστάσεις με δύο $\hat{\phi}$ ή με δύο $\hat{\phi}^\dagger$ μηδενίζονται.

Ξαναγράφουμε το ανάπτυγμα (3.26):

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}[\hat{a}(p)e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^\dagger(p)e^{+ip\cdot x}],$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x') = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}}[\hat{a}^\dagger(p')e^{+ip'\cdot x'} + \hat{b}(p')e^{-ip'\cdot x'}],$$

το οποίο συνεπάγεται τις σχέσεις:

$$< 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(x')|0 >= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{-ip\cdot(x-x')},$$

$$< 0|\hat{\phi}^\dagger(x')\hat{\phi}(x)|0 >= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{+ip\cdot(x-x')}.$$

Άρα ο διαδότης (3.42) γράφεται:

$$i\Delta_F(x-x') = \Theta(t-t')\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{-ip\cdot(x-x')} + \Theta(t'-t)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{+ip\cdot(x-x')}. \quad (3.43)$$

Απλή σύγκριση με την πρώτη γραμμή της (3.35) είναι αρκετή για να μας πείσει ότι είναι ακριβώς ίσος με τον διαδότη του πραγματικού βαθμωτού πεδίου.

Όμως το σημαντικότερο θέμα είναι η ερμηνεία που θα δώσει κανείς σ' αυτόν το διαδότη και πιο συγκεκριμένα στον καθένα από τους δύο όρους του. Όταν $t > t'$, δρα το πεδίο και δημιουργεί σωματίδια με τον τελεστή $\hat{a}^\dagger$ στο σημείο x', το οποίο διαδίδεται μέχρι το σημείο x, όπου το πεδίο δρα και πάλι και το καταστρέφει με τον τελεστή $\hat{a}$. Δηλαδή, **όταν $t > t'$, διαδίδονται σωματίδια από το x' μέχρι το x.**

Όταν $t < t'$, δρα το πεδίο και δημιουργεί αντισωματίδια με τον τελεστή $\hat{b}^\dagger$ στο σημείο x, το οποίο διαδίδεται μέχρι το σημείο x', όπου το πεδίο δρα και πάλι και το καταστρέφει με τον τελεστή $\hat{b}$. Δηλαδή, **όταν $t < t'$, διαδίδονται αντισωματίδια από το x μέχρι το x'.**