Γ. ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΑΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΕΔΙΟΥ

ΑΘΗΝΑ, 2019

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

1.1 Λαγκρανζιανή διατύπωση

Επαναλαμβάνουμε κάποια στοιχεία αναλυτικής δυναμικής που είναι χρήσιμα στην ανάπτυξη θεμάτων που θα μας απασχολήσουν αργότερα. Στη διατύπωση του Lagrange γίνεται αποκλειστική χρήση των γενικευμένων συντεταγμένων $q_1, q_2, \ldots, q_n$, που είναι ισάριθμες με τους βαθμούς ελευθερίας και συνδέονται με τις ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες με τις σχέσεις:

$$x_\nu = x_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

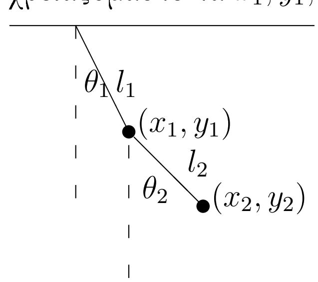
$$y_\nu = y_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

$$z_\nu = z_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

ή, πιό συνοπτικά:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Ο δείκτης ν υποδηλώνει τα διάφορα σωματίδια που συναποτελούν το σύστημα, που έχει n βαθμούς ελευθερίας. Για παράδειγμα, θεωρούμε το διπλό εκκρεμές που είναι περιορισμένο να κινείται στο επίπεδο xy. Αν θέλαμε να το περιγράψουμε με ορθογώνιες συντεταγμένες, θα χρειαζόμαστε τα x_1, y_1, x_2 και y_2.



Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες θ_1 και θ_2 των δύο νημάτων με την κατακόρυφο και να εκφράσουμε τις ορθογώνιες συντεταγμένες με τις σχέσεις:

$$x_1 = l_1 \cos\theta_1$$
$$y_1 = l_1 \sin\theta_1$$
$$x_2 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2$$
$$y_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2$$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για το σωματίδιο ν γράφεται:

$$m_\nu \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial t^2} = \vec{F}_\nu.$$

Είναι εύκολο ν΄ αποδειχτεί ότι για την κινητική ενέργεια

$$T = \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)^2$$

ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\frac{\partial T}{\partial q_a} = \sum_\nu m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_a \partial t}\right), \; \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} = \sum_\nu m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right). \tag{1.1}$$

Ο νόμος του Νεύτωνα συνεπάγεται ότι:

$$m_\nu \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial t^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) = \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow m_\nu \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) - m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_a \partial t}\right) = \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_\nu \frac{d}{dt}\left(m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) - \sum_\nu m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_a \partial t}\right) = \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right).$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.1) η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right). \tag{1.2}$$

Αυτές οι σχέσεις είναι μια πρώτη μορφή των εξισώσεων Lagrange. Η έκφραση $p_a \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}$ λέγεται *γενικευμένη ορμή*, ενώ το δεύτερο μέλος $f_a \equiv \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right)$ λέγεται *γενικευμένη δύναμη*.

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε τη σπουδαία ειδική περίπτωση που η δύναμη παράγεται από δυναμικό: $\vec{F}_\nu = -\vec{\nabla}_\nu V$. Η γενικευμένη δύναμη γίνεται:

$$\sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) = -\sum_\nu \vec{\nabla}_\nu V \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) =$$

$$= -\sum_\nu \left[\frac{\partial V}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_a} + \frac{\partial V}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_a} + \frac{\partial V}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_a}\right] = -\frac{\partial V}{\partial q_a}.$$

Μ' αυτό το δεδομένο, η σχέση (1.2) γράφεται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = -\frac{\partial V}{\partial q_a} \to \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_a} = 0,$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι το δυναμικό εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες q_a και όχι από τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_a$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$L \equiv T - V$$

που ονομάζεται *Λαγκρανζιανή συνάρτηση* και οι εξισώσεις του Lagrange παίρνουν την πιο συνηθισμένη τους μορφή:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0. \tag{1.3}$$

Παράδειγμα: Για το απλό εκκρεμές η κινητική ενέργεια είναι: $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$ και η δυναμική ενέργεια: $V = mg(l - l\cos\theta)$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο. Η Λαγκρανζιανή είναι, λοιπόν: $L = T - V = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mg(l - l\cos\theta)$. Ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις ότι $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$ εφαρμόζουμε την εξίσωση (1.3) και βρίσκουμε:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \to \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$

που για μικρές γωνίες απομάκρυνσης μεταπίπτει στη γνωστή: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$. Από πλευράς ορολογίας το θ είναι η γενικευμένη συντεταγμένη, το $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} = ml(l\dot{\theta}) = mlv$, δηλαδή η γενικευμένη ορμή, δεν είναι άλλη από τη στροφορμή. Η γενικευμένη δύναμη ισούται με $-\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgl\sin\theta$, που είναι η προβολή της δύναμης κατά μήκος της τροχιάς.

1.1.1 Περιορισμοί πάνω στις γενικευμένες συντεταγμένες

Αν υπάρχουν (δύο, έστω) σχέσεις που συνδέουν τις γενικευμένες συντεταγμένες μεταξύ τους, και που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή:

$$[\sum_{a=1}^{n} A_a dq_a + A dt = 0,\ \sum_{a=1}^{n} B_a dq_a + B dt = 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\sum_{a=1}^{n} A_a \dot{q}_a + A = 0,\ \sum_{a=1}^{n} B_a \dot{q}_a + B = 0],$$

οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι πια ανεξάρτητες και οι εξισώσεις (1.2) πρέπει να τροποποιηθούν στις:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = \sum_{\nu} \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) + \lambda_1 A_a + \lambda_2 B_a,\ a = 1, \ldots, n.$$

Επίσης, οι εξισώσεις (1.3) που αναφέρονται σε διατηρητικά συστήματα, τροποποιούνται στις:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_a}=\lambda_1 A_a+\lambda_2 B_a,\ a=1,\ldots,n.$$

Οι σταθερές λ_1 και λ_2 είναι πολλαπλασιαστές Lagrange και οι παραστάσεις $\lambda_1 A_a$ και $\lambda_2 B_a$ είναι οι γενικευμένες δυνάμεις που απαιτούνται για να επιβληθούν οι περιορισμοί. Ας επικεντρώσουμε στην τελευταία μορφή των εξισώσεων και ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο σε βαρυτικό πεδίο που κινείται υποχρεωτικά σ΄ ένα παραβολοειδές εκ περιστροφής με εξίσωση

$$x^2+y^2\equiv\rho^2=az\rightarrow 2\rho d\rho-adz=0.$$

Η Λαγκρανζιανή θα γραφτεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2\right)-mgz.$$

Είναι προφανές ότι

$$q_1=\rho, q_2=\phi, q_3=z,\ A_1=2\rho, A_2=0, A_3=-a$$

και ότι έχουμε μόνο έναν περιορισμό, άρα μας χρειάζεται μόνο το λ_1. Οι εξισώσεις κίνησης

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_a}=\lambda_1 A_a,\ a=1,2,3$$

είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \rho}=\lambda_1 2\rho,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=-a\lambda_1,$$

που μετά τις πράξεις γίνονται:

$$m\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2\right)=2\lambda_1\rho,\ m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})=0,\ m\ddot{z}=-mg-\lambda_1 a.$$

Ο περιορισμός $\rho^2=az$ συνεπάγεται την

$$2\rho\dot{\rho}-a\dot{z}=0,$$

που, μαζί με τις εξισώσεις κίνησης, συναποτελεί τις τέσσερεις εξισώσεις που είναι απαραίτητες για τον προσδιορισμό των τεσσάρων αγνώστων ρ,ϕ,z και λ_1.

1.2 Χαμιλτονιανή διατύπωση

Ξεκινώντας από τον ορισμό των γενικευμένων ορμών $p_a\equiv\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}$ μπορεί κανείς (τουλάχιστον κατ΄ αρχήν) να εκφράσει τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_a$ συναρτήσει των απομακρύνσεων q_a και των γενικευμένων ορμών p_a. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό Legendre της Λαγκρανζιανής, που θα τον λέμε Χαμιλτονιανή συνάρτηση, με τη σχέση:

$$H(p_a, q_a, t) \equiv \sum_{a=1}^{n} p_a \dot{q}_a - L(q_a, \dot{q}_a, t).$$

Επισημαίνουμε ότι οι γενικευμένες ταχύτητες του δεξιού μέλους πρέπει να αντικατασταθούν όπως εξηγήσαμε λίγο πριν, οπότε, αν και στο δεξιό μέλος εμφανίζονται οι γενικευμένες ταχύτητες, η Χαμιλτονιανή τελικά είναι συνάρτηση των γενικευμένων ορμών, των απομακρύνσεων και ενδεχομένως του χρόνου.

Η Χαμιλτονιανή προσφέρει μια εναλλακτική διατύπωση της κλασικής μηχανικής. Για να το δούμε, θεωρούμε το διαφορικό της H :

$$dH = \sum_a dp_a \dot{q}_a + \sum_a p_a d\dot{q}_a - \sum_a \frac{\partial L}{\partial q_a} dq_a - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d\dot{q}_a - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Ο ορισμός της γενικευμένης ορμής δείχνει ότι ο δεύτερος και ο τέταρτος όρος του δεξιού μέλους αλληλοαναιρούνται. Επί πλέον, οι εξισώσεις του Lagrange γράφονται: $\frac{\partial L}{\partial q_a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) = \frac{dp_a}{dt} \equiv \dot{p}_a$. Η έκφραση για το διαφορικό γράφεται, λοιπόν:

$$dH = \sum_a \dot{q}_a dp_a - \sum_a \dot{p}_a dq_a - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Εξ άλλου, αν λάβουμε υπ' όψη ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές της Χαμιλτονιανής είναι οι p_a, q_a και t, το διαφορικό γράφεται εναλλακτικά με τη μορφή:

$$dH = \sum_a \frac{\partial H}{\partial p_a} dp_a + \sum_a \frac{\partial H}{\partial q_a} dq_a + \frac{\partial H}{\partial t} dt,$$

οπότε, συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις για το διαφορικό συνάγουμε τις σχέσεις:

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \ \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a} \tag{1.4}$$

και $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$. Οι εξισώσεις (1.4) λέγονται εξισώσεις του Hamilton και είναι μια ισοδύναμη διατύπωση με τη Λαγκρανζιανή. Αποδεικνύεται ότι, για διατηρητικά συστήματα, ισχύει:

$$H = T + V.$$

Για το παράδειγμα του απλού εκκρεμούς η λαγκρανζιανή, όπως έχουμε ήδη πει είναι: $L = T - V = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mg(l - l\cos\theta)$ και η συζυγής ορμή $p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \to \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$. Άρα: $H \equiv p_\theta\dot{\theta} - L = (ml^2\dot{\theta})\dot{\theta} - \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mg(l - l\cos\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mg(l - l\cos\theta)$. Βέβαια, όπως είπαμε, η Χαμιλτονιανή πρέπει να εκφράζεται ως συνάρτηση της απομάκρυνσης θ και της συζυγούς ορμής p_θ, οπότε αντικαθιστούμε το $\dot{\theta}$ με το ίσο του $\frac{p_\theta}{ml^2}$ και καταλήγουμε στην τελική έκφραση:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mg(l - l\cos\theta).$$

Ο κινητικός όρος είναι της μορφής $\frac{L^2}{2I}$, αφού $p_\theta = L$, δηλαδή η στροφορμή, και $ml^2 = I$, δηλαδή η ροπή αδράνειας περί το σημείο εξάρτησης. Οι εξισώσεις του Χάμιλτον δίνουν:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2},\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta.$$

Πρόκειται για δύο εξισώσεις πρώτης τάξης ως προς το χρόνο, από τις οποίες είναι εύκολο να καταλήξουμε στην ισοδύναμη εξίσωση Lagrange: αρκεί να αντικαταστήσουμε στη δεύτερη εξίσωση του Χάμιλτον το p_θ όπως δίνεται από την πρώτη: $\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = -mgl\sin\theta \to \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$.

1.3 Αγκύλες Poisson

Αν έχουμε δύο ποσότητες F και G που εξαρτώνται από τις απομακρύνσεις q_a, τις συζυγείς ορμές p_a και το χρόνο t, η αγκύλη Poisson ορίζεται ως εξής:

$$[F,G] = \sum_a \left(\frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial G}{\partial q_a} - \frac{\partial F}{\partial q_a}\frac{\partial G}{\partial p_a} \right).$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ιδιότητες:

$$[F,G] = -[G,F],\ [F_1+F_2,G] = [F_1,G]+[F_2,G],$$
$$[F,[G,H]] + [G,[H,F]] + [H,[F,G]] = 0,\ [A,BC] = [A,B]C + B[A,C],$$
$$[F,q_r] = \frac{\partial F}{\partial p_r},\ [F,p_r] = -\frac{\partial F}{\partial q_r}.$$

Ίσως η πιο σπουδαία ιδιότητά τους είναι ότι, για οποιαδήποτε συνάρτηση $f(q_a,p_a,t)$ ισχύει:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H,f]. \tag{1.5}$$

Πράγματι:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial q_a}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial p_a}{\partial t} \right) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial H}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial H}{\partial q_a} \right) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + [H,f],$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις εξισώσεις του Χάμιλτον:

$$\frac{\partial q_a}{\partial t} \equiv \dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a},\ \frac{\partial p_a}{\partial t} \equiv \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}.$$

Το 1925 ο Dirac παρατήρησε ότι οι διάφορες σχέσεις της κβαντικής μηχανικής είναι δυνατόν να προκύψουν αν κανείς αντικαταστήσει τις αγκύλες Poisson με τους αντίστοιχους μεταθέτες διά $i\hbar$:

$$[A,B]_{Poisson} \Rightarrow \frac{[A,B]}{i\hbar}.$$

Ένα πρώτο παράδειγμα είναι η κλασική σχέση $[x_i, p_j] = \delta_{ij}$ που με την αντικατάσταση που περιγράψαμε δίνει την $\frac{[x_i,p_j]}{i\hbar} = \delta_{ij} \to [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, που είναι η βασική σχέση στην οποία βασίζεται η κβαντική μηχανική. Άλλο σημαντικό παράδειγμα είναι η σχέση (1.5), όπως διαμορφώνεται για μια ποσότητα $F(q_a, p_a)$ που δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο. Η κλασική εξίσωση κίνησης (1.5) γράφεται: $\frac{dF}{dt} = [H, F]$, και με την αντικατάσταση $[H, F] \to \frac{[\hat{H},\hat{F}]}{i\hbar}$ παίρνουμε την αντίστοιχη κβαντική εξίσωση κίνησης για τον τελεστή $\hat{F}$:

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = i\hbar[\hat{H}, \hat{F}],$$

που δεν είναι τίποτ΄ άλλο από την εξίσωση για την κίνηση του κβαντικού τελεστή $\hat{F}$ στην εικόνα του Heisenberg. Η κβαντική εξίσωση είναι γενικότερη από την κλασική, με την έννοια ότι ισχύει και για τελεστές όπως το σπιν, που δεν έχουν κλασικό ανάλογο.

1.4 Δυναμικά που εξαρτώνται από ταχύτητα

Είδαμε ότι κατ΄ αρχήν, για να γραφτεί η σχέση (1.2) με τη μορφή η σχέση (1.3), πρέπει το σύστημα να είναι διατηρητικό. Παρ΄ όλ΄ αυτά, η κλάση των δυναμικών που επιτρέπουν μια τέτοια μεταγραφή μπορεί να διευρυνθεί στην $U(q_\nu,\ \dot{q}_\nu)$, αν περιλάβουμε τις γενικευμένες δυνάμεις που δίνονται από την έκφραση:

$$F_\nu = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\nu}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_\nu}. \tag{1.6}$$

Σ΄ αυτήν την περίπτωση η σχέση

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_a}\right) \tag{1.7}$$

γίνεται: Κλασικό παράδειγμα είναι, βέβαια, η δύναμη Lorentz. Θα αποδείξουμε ότι το δυναμικό

$$V = qA_0 - \frac{q}{c}\vec{A} \cdot \vec{v}$$

δίνει τη δύναμη Lorentz, αν εφαρμοστεί ο κανόνας που προαναφέραμε. Ξεκινάμε με τις επί μέρους παραγωγίσεις, περιοριζόμενοι στην κατεύθυνση x. Οι άλλες κατευθύνσεις γίνονται παρόμοια.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = q\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \cdot \vec{v},$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_x} = -\frac{q}{c}A_x \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial v_x}\right) = -\frac{q}{c}\frac{dA_x}{dt} = -\frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{q}{c}\vec{v} \cdot \vec{\nabla}A_x,$$

οπότε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial v_x}\right) - \frac{\partial V}{\partial x} = -q\frac{\partial A_0}{\partial x} + \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \cdot \vec{v} - \frac{q}{c}\frac{dA_x}{dt}$$

$$= -q\frac{\partial A_0}{\partial x} + \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\cdot\vec{v} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}A_x.$$

$$= -q\frac{\partial A_0}{\partial x} + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial A_y}{\partial x}v_y + \frac{\partial A_z}{\partial x}v_z\right) - \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

$$= -q\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}v_x + \frac{q}{c}\frac{\partial A_y}{\partial x}v_y + \frac{q}{c}\frac{\partial A_z}{\partial x}v_z - \frac{q}{c}v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{q}{c}v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{q}{c}v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

$$= -q\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{q}{c}\frac{\partial A_y}{\partial x}v_y + \frac{q}{c}\frac{\partial A_z}{\partial x}v_z - \frac{q}{c}v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{q}{c}v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

Μένει ν′ αποδειχτεί ότι η τελευταία παράσταση ισούται με τη συνιστώσα x της δύναμης Lorentz

$$F_x = qE_x + \frac{q}{c}(\vec{v}\times\vec{B})|_x = -q\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{q}{c}v_yB_z - \frac{q}{c}v_zB_y$$

$$= -q\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{q}{c}v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{q}{c}v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$= -q\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{q}{c}v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{q}{c}v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{q}{c}v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{q}{c}v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

Αυτή η ισότητα είναι προφανής.

1.5 Αρχή του Hamilton

Θεωρούμε υλικό σημείο που διατρέχει την τροχιά $C:\ q(t)$ μεταξύ των δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2. Ορίζουμε τη δράση που σχετίζεται με την κίνηση αυτή μέσω της σχέσης:

$$S[q] = \int_C L dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q,\ \dot{q},t)dt, \quad L(q,\ \dot{q},t) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - V(q), \tag{1.8}$$

όπου η έκφραση $L(q,\ \dot{q},t)$ είναι η Λαγκρανζιανή και, βέβαια, $V(q)$ είναι η δυναμική ενέργεια του κινητού σε κάθε σημείο. Είναι προφανές ότι η δράση $S[q]$ εξαρτάται από την έκφραση $q(t)$, που θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της τροχιάς. Ας υποθέσουμε ότι είναι γνωστή η τροχιά $C:\ q(t)$, η οποία δίνει ως αποτέλεσμα για τη δράση την ποσότητα $S_0[q]$. Έστω τώρα ότι θεωρούμε μια τροχιά ελαφρά διαφορετική από την $q(t)$, την

$$q(t) + \delta q(t),\ \dot{q}(t) + \delta\dot{q}(t),\ \delta q(t_1) = 0,\ \delta q(t_2) = 0.$$

Η δράση θα αλλάξει και θα γίνει, μετά το ανάπτυγμα κατά Taylor:

$$S[q+\delta q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t)+\delta q(t),\ \dot{q}(t)+\delta\dot{q}(t),\ t)dt \approx \int_{t_1}^{t_2}\left[L + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\right]dt$$

$$= S_0[q] + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \right] dt$$

$$= S_0[q] + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \right] dt$$

$$= S_0[q] + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_2} - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \right] dt.$$

Όμως $\delta q(t_2) = \delta q(t_1) = 0$, οπότε οι επιφανειακοί όροι μηδενίζονται και καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$S[q + \delta q] - S_0[q] = \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \right] dt.$$

Τελικά:

$$S[q + \delta q] - S_0[q] \approx \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial L}{\partial q} \right] \delta q(t) dt. \tag{1.9}$$

Αν απαιτήσουμε η δράση να είναι αναλλοίωτη κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό (αρχή του Hamilton), πρέπει το ολοκλήρωμα να μηδενίζεται για κάθε επιλογή του $\delta q(t)$, οπότε πρέπει:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q},$$

που δεν είναι τίποτ΄ άλλο από τις εξισώσεις Euler - Lagrange. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αρχή του Hamilton και οι εξισώσεις Euler - Lagrange είναι ισοδύναμες διατυπώσεις της κλασικής μηχανικής. Βέβαια, η απόδειξη προϋποθέτει τη γενίκευση σε περισσότερες από μία γενικευμένες συντεταγμένες, η οποία δεν είναι δύσκολο να γίνει.

Κεφάλαιο 2

Κλασική Θεωρία Πεδίου

2.1 Συνεχή μηχανικά συστήματα

Η κλασική Μηχανική μπορεί να γενικευτεί σε συνεχή μηχανικά συστήματα, όπως μια παλλόμενη χορδή. Εισαγωγικά μπορούμε να θεωρήσουμε N σωματίδια μάζας m, τα οποία απέχουν αποστάσεις a το ένα από το άλλο, συνδέονται μεταξύ τους με όμοια ελατήρια σταθεράς ελατηρίου k και τα οποία κινούνται σε μία διάσταση. Αν ονομάσουμε η_i την απομάκρυνση του σωματιδίου i από τη θέση ισορροπίας του, η Λαγκρανζιανή του συστήματος, σύμφωνα με όσα έχουμε ήδη πει, γράφεται:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}[m\dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{n+1} - \eta_i)^2] = \sum_{i=1}^{N} a\frac{1}{2}\left[\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2 - ka\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}\right)^2\right]. \tag{2.1}$$

Ο πρώτος όρος είναι η κινητική ενέργεια του κάθε σωματιδίου, ενώ ο δεύτερος είναι η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στην επίδραση του ελατηρίου.[1] Διαπιστώνουμε ότι η Λαγκρανζιανή μπορεί να γραφτεί με τη μορφή:

$$L = \sum_{i=1}^{N} a\mathcal{L}_i,\ \ \mathcal{L}_i \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2 - ka\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}\right)^2\right]. \tag{2.2}$$

Η παράσταση $\mathcal{L}_i$ ονομάζεται (γραμμική) Λαγκρανζιανή πυκνότητα, δηλαδή Λαγκρανζιανή ανά μονάδα μήκους.

Από το διακριτό σύστημα που μόλις περιγράψαμε μπορούμε να περάσουμε σ΄ ένα συνεχές σύστημα μέσω μιας διαδικασίας ορίου: θεωρούμε ότι $N \to \infty$, με τρόπο ώστε το συνολικό μήκος L του συστήματος να μένει αναλλοίωτο, ενώ η παράμετρος a να γίνεται απειροστά μικρή ($L = Na$). Στο όριο το a μπορεί να θεωρηθεί ότι μετατρέπεται σ΄ ένα διαφορικό ολοκλήρωσης dx, το πηλίκο $\frac{m}{a}$ πηγαίνει στο πεπερασμένο όριο μ, που

[1] Σημειώνουμε ότι έχουμε χειριστεί κάπως χαλαρά το θέμα των οριακών συνθηκών, πιο συγκεκριμένα το τί γίνεται στις θέσεις $i = 1$ και $i = N$, τί σημαίνει η_{N+1} κλπ, αλλά αυτού του είδους τα προβλήματα δεν έχουν σχέση με το θέμα μας και δεν θα μας απασχολήσουν. Για πληρότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε περιοδικές οριακές συνθήκες, ότι δηλαδή η επόμενη της θέσης N είναι η θέση 1 και ότι η προηγούμενη της θέσης 1 είναι η θέση N.

δεν είναι τίποτ΄ άλλο από τη γραμμική πυκνότητα, η παράσταση $\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}$ συγκλίνει στην παράγωγο $\frac{\partial\eta}{\partial x}$, ενώ το γινόμενο ka τείνει σ΄ ένα πεπερασμένο όριο Y, που ερμηνεύεται ως το μέτρο ελαστικότητας του Young. (Υπενθυμίζουμε ότι το τελευταίο ορίζεται μέσω της σχέσης $F = Y\frac{\Delta l}{l} \to Y\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}$. Η δύναμη που απαιτείται για την επιμήκυνση ισούται με: $F = k(\eta_{i+1}-\eta_i) = ka\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}$, απ΄ όπου προκύπτει η ταυτοποίηση του Y με το ka). Τελικά:

$$L = \int \mathcal{L}dx, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\dot{\eta}^2 - Y\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{2.3}$$

Φυσικά το η είναι συνάρτηση των x και t, αλλά πρέπει να θεωρηθεί ως γενικευμένη συντεταγμένη, κάτι σαν τα q_i ενός διακριτού συστήματος.

Η αρχή των μεταβολών

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} Ldt = 0 \tag{2.4}$$

γράφεται, για το συνεχές μηχανικό σύστημα, με τη μορφή:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} dt \int dx\mathcal{L}\left(\eta, \dot{\eta}, \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = 0. \tag{2.5}$$

Η μεταβολή μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2, καθώς και στα όρια της χωρικής ολοκλήρωσης. Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_1}^{t_2} Ldt &= \delta\int_{t_1}^{t_2} dt\int dx\mathcal{L}\left(\eta, \dot{\eta}, \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\int dx\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)}\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\right]\\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\int dx\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\right\} - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)}\right\}\right]\delta\eta.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Στην τελευταία σειρά φαίνεται το αποτέλεσμα των παραγοντικών ολοκληρώσεων, αφού έχει ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι το $\delta\eta$ μηδενίζεται στα άκρα, επομένως και οι επιφανειακοί όροι μηδενίζονται. Αφού το $\delta\eta$ είναι αυθαίρετο, η τελευταία ισότητα συνεπάγεται ότι μηδενίζεται η ολοκληρωτέα παράσταση:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)}\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\right\} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} = 0. \tag{2.7}$$

Η ισότητα αυτή λέγεται **εξίσωση των Euler και Lagrange.** Για την Λαγκρανζιανή πυκνότητα $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\dot{\eta}^2 - Y\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]$ του παραδείγματός μας προκύπτουν οι σχέσεις: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)} = \mu\dot{\eta} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)}\right\} = \mu\ddot{\eta}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)} = -Y\frac{\partial \eta}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}\right\} = -Y\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0$, οπότε βρίσκουμε την εξίσωση Euler-Lagrange

$$Y\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0, \tag{2.8}$$

που δεν είναι άλλη από την κυματική εξίσωση για τη διάδοση των διαταραχών σε μονοδιάστατο μέσον, που προβλέπει ταχύτητα ίση με $\sqrt{\frac{Y}{\mu}}$. Σε ευθεία αναλογία με την Μηχανική των υλικών σημείων μπορούμε να ορίσουμε τη Χαμιλτονιανή γραμμική πυκνότητα μέσω της σχέσης:

$$\mathcal{H} \equiv \dot{\eta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} - \mathcal{L}, \tag{2.9}$$

που, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, δίνει:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}Y\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2, \tag{2.10}$$

όπου οι δύο όροι μπορούν να ταυτοποιηθούν με την κινητική και τη δυναμική ενέργεια της χορδής. Η παράσταση

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \tag{2.11}$$

λέγεται συζυγής ορμή και η Χαμιλτονιανή γραμμική πυκνότητα γράφεται:

$$\mathcal{H} \equiv \pi\dot{\eta} - \mathcal{L}. \tag{2.12}$$

Η έκφραση $\dot{\eta}$ απαλείφεται από την έκφραση για τη Χαμιλτονιανή γραμμική πυκνότητα με τη βοήθεια της εξίσωσης (2.11), οπότε η $\mathcal{H}$ εξαρτάται τελικά από τις θέσεις η και τις ορμές π.

2.1.1 Συναρτησιακή παράγωγος

Σ' αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να εισαγάγουμε μια καινούργια μαθηματική έννοια, η οποία θα φωτίσει πληρέστερα την αναλογία της κλασικής θεωρίας πεδίου με την κλασική μηχανική των υλικών σημείων. Ξεκινάμε με μια προσέγγιση:

$$L = \int \mathcal{L}dx \approx \sum_i \mathcal{L}\left[\eta_i,\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_i,\ \dot{\eta}_i,\ t\right]\delta x_i. \tag{2.13}$$

Η ολοκληρωτέα παράσταση στην (2.6) θα γραφτεί προσεγγιστικά:

$$\int dx\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}\right\} - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)}\right\}\right]\delta\eta$$

$$= \sum_i\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}\right\}\right]_i \delta\eta_i\delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i}\delta\dot{\eta}_i\delta x_i.$$

Η μεταβολή στην Λαγκρανζιανή προέρχεται από ανεξάρτητες μεταβολές του $\delta\eta_i$ και του $\delta\dot{\eta}_i$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι όλες αυτές οι μεταβολές μηδενίζονται, εκτός από μία συγκεκριμένη $\delta\eta_i$, την $\delta\eta_{i_0}$. Τότε

$$\delta\mathcal{L} \approx \left[\left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i}\right|_{i_0} - \frac{\partial}{\partial x}\left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\right|_{i_0} \right] \delta\eta_{i_0}\delta x_{i_0} \Rightarrow \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\eta_{i_0}\delta x_{i_0}} \approx \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i}\right|_{i_0} - \frac{\partial}{\partial x}\left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\right|_{i_0}. \tag{2.14}$$

Στο όριο των απειροστών $\delta\eta_{i_0}$ και δx_{i_0} η ποσότητα αυτή ονομάζεται **συναρτησιακή παράγωγος ως προς το** $\eta(x)$ και συμβολίζεται ως εξής:

$$\frac{\delta L}{\delta\eta(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta(x)} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}. \tag{2.15}$$

Αν, τώρα, υποθέσουμε ότι όλες οι μεταβολές μηδενίζονται εκτός από από μία συγκεκριμένη $\delta\dot{\eta}_i$, την $\delta\dot{\eta}_{i_0}$, θα προκύψει:

$$\delta L \approx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}_{i_0}}\delta\dot{\eta}_{i_0}\delta x_{i_0} \Rightarrow \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\eta}_{i_0}\delta x_{i_0}} \approx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}_{i_0}},$$

οπότε, πηγαίνοντας στο όριο, ορίζεται η **συναρτησιακή παράγωγος ως προς το** $\dot{\eta}(x)$ μέσω της σχέσης:

$$\frac{\delta L}{\delta\dot{\eta}(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}(x)}. \tag{2.16}$$

Παρατηρούμε ότι, παρ΄ όλον ότι η L είναι αριθμός και όχι συνάρτηση, οι συναρτησιακές παράγωγοι είναι συναρτήσεις του x, γιατί παραγωγίζουμε συναρτησιακά σε συγκεκριμένο σημείο. Χρησιμοποιώντας αυτό το νέο μαθηματικό αντικείμενο, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (2.7) των Euler και Lagrange με πολύ απλούστερη μορφή. Η

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)}\right\} + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta}\right\} = 0$$

γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta L}{\delta\dot{\eta}} - \frac{\delta L}{\delta\eta} = 0. \tag{2.17}$$

Αυτή η μορφή βρίσκεται πολύ κοντά στην αντίστοιχη εξίσωση (1.3), που διέπει την κίνηση ενός υλικού σημείου. Φυσικά και:

$$\delta L = \int\left(\frac{\delta L}{\delta\eta(x)}\delta\eta(x) + \frac{\delta L}{\delta\dot{\eta}(x)}\delta\dot{\eta}(x)\right)dx. \tag{2.18}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε πιο φορμαλιστικά την διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως και να ορίσουμε την συναρτησιακή παράγωγο ως εξής:

$$\delta L = L[\eta + \epsilon\delta(x-y)] - L[\eta] = \int dx\frac{\delta L}{\delta\eta(x)}\epsilon\delta(x-y) = \epsilon\frac{\delta L}{\delta\eta(y)}. \tag{2.19}$$

Στο όριο που το ϵ τείνει στο μηδέν:

$$\frac{\delta L}{\delta\eta(y)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{L[\eta+\epsilon\delta(x-y)] - L[\eta]}{\epsilon}. \tag{2.20}$$

Σημειώνουμε ότι το όριο $\epsilon \to 0$ προηγείται οποιασδήποτε άλλης διαδικασίας ορίου. Αυτό μπορεί να γίνει σαφέστερο στο ειδικό παράδειγμα $L = \int dx\eta^2(x)$. Ακολουθώντας τα προηγούμενα βήματα βρίσκουμε:

$$\frac{\delta L}{\delta\eta(y)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int dx(\eta+\epsilon\delta(x-y))^2 - (\eta)^2}{\epsilon} \tag{2.21}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int dx[\eta^2(x) + \epsilon^2[\delta(x-y)]^2 + 2\eta(x)\epsilon\delta(x-y) - \eta^2(x)]}{\epsilon} \tag{2.22}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int dx[2\eta(x)\epsilon\delta(x-y)]}{\epsilon} = 2\eta(y). \tag{2.23}$$

Αν δεν είχαμε πραγματοποιήσει πρώτα το όριο στο ϵ, θα έπρεπε να αντιμετωπίσουμε την πολύ προβληματική έκφραση $[\delta(x-y)]^2$. Σημειώνουμε επί πλέον ότι η συναρτησιακή παράγωγος ικανοποιεί ως επί το πλείστον τις ιδιότητες της συνηθισμένης παραγώγου. Παραδείγματα:

$$L = L_1 L_2 \Rightarrow \frac{\delta L}{\delta\eta(x)} = \frac{\delta L_1}{\delta\eta(x)}L_2 + L_1\frac{\delta L_2}{\delta\eta(x)}, \tag{2.24}$$

$$\frac{\delta L_1[L_2[\eta]]}{\delta\eta(y)} = \int d\eta \frac{\delta L_1[L_2]}{\delta L_2[\eta]}\frac{\delta L_2[\eta]}{\delta\eta(y)}. \tag{2.25}$$

Η γενίκευση σε τρεις διαστάσεις είναι πολύ απλή (το dx γίνεται d^3x κλπ).

2.2 Χαμιλτονιανή διατύπωση

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι:

$$H = \int dx\mathcal{H}, \quad \mathcal{H}(x) = \pi(x)\dot{\eta}(x) - \mathcal{L}, \quad \pi(x) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\eta}(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}(x)}. \tag{2.26}$$

Εξετάζουμε στη συνέχεια τη μεταβολή της L :

$$\delta L = \int\left(\frac{\delta L}{\delta\eta(x)}\delta\eta(x) + \frac{\delta L}{\delta\dot{\eta}(x)}\delta\dot{\eta}(x)\right)dx = \int\left(\dot{\pi}(x)\delta\eta(x) + \pi(x)\delta\dot{\eta}(x)\right)dx \tag{2.27}$$

$$= \int\left(\dot{\pi}(x)\delta\eta(x) + \delta[\pi(x)\dot{\eta}(x)] - \dot{\eta}(x)\delta\pi(x)\right)dx \tag{2.28}$$

$$= \int\delta[\pi(x)\dot{\eta}(x)]dx + \int\left(\dot{\pi}(x)\delta\eta(x) - \dot{\eta}(x)\delta\pi(x)\right)dx. \tag{2.29}$$

Όμως

$$\int dx\delta[\pi(x)\dot{\eta}(x)] = \int dx[\delta\mathcal{H} + \delta\mathcal{L}] = \delta H + \delta L,$$

οπότε:

$$\delta L = \delta H + \delta L + \int (\dot{\pi}\delta\eta - \dot{\eta}\delta\pi)\, dx \Rightarrow \delta H = \int (-\dot{\pi}\delta\eta + \dot{\eta}\delta\pi)\, dx \tag{2.30}$$

Εξ άλλου:

$$\delta H = \int \left(\frac{\delta H}{\delta\eta}\delta\eta + \frac{\delta H}{\delta\pi}\delta\pi \right) dx, \tag{2.31}$$

οπότε, συγκρίνοντας με την προηγούμενη σχέση (2.30) παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\dot{\eta}(x) = \frac{\delta H}{\delta\pi(x)}, \quad \dot{\pi}(x) = -\frac{\delta H}{\delta\eta(x)}. \tag{2.32}$$

Με τη βοήθεια των τελευταίων σχέσεων μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής ενός συναρτησοειδούς $F = \int dx \mathcal{F}(\eta, \pi, t)$, που εξαρτάται από τα $\eta(x)$ και $\pi(x)$:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \int \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \pi}\dot{\pi} \right) dx = \frac{\partial F}{\partial t} + \int \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\frac{\delta H}{\delta \pi} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \pi}\frac{\delta H}{\delta \eta} \right) dx \tag{2.33}$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \tag{2.34}$$

2.2.1 Είδη μεταβολών

Εισάγουμε σ′ αυτήν την παράγραφο ένα τροποποιημένο είδος μεταβολής, την

$$\tilde{\delta} f(x) \equiv \tilde{f}(x) - f(x) = [\tilde{f}(\tilde{x}) - f(x)] - [\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(x)] = \delta f(x) - \partial_\mu f(x) \delta x^\mu, \tag{2.35}$$

όπου η $f(x)$ είναι μια συνάρτηση που μετατρέπεται στην $\tilde{f}(x)$ κατά τον μετασχηματισμό συντεταγμένων και η πράξη $\tilde{\delta}$ εκφράζει την τοπική αλλαγή της συνάρτησης. Η $\tilde{\delta}$ μετατίθεται με τις μερικές παραγώγους, αφού η μεταβολή γίνεται στο ίδιο σημείο. Γράφουμε μαζί τους ορισμούς των μεταβολών δ και $\tilde{\delta}$:

$$\delta f(x) \equiv \tilde{f}(\tilde{x}) - f(x), \quad \tilde{\delta} f(x) \equiv \tilde{f}(x) - f(x), \quad \tilde{\delta} f(x) = \delta f(x) - \partial_\mu f(x) \delta x^\mu. \tag{2.36}$$

Βέβαια, αν η $f(x)$ είναι βαθμωτή συνάρτηση, η $\tilde{f}(\tilde{x})$ ορίζεται ίση με την $f(x)$, οπότε:

$$\delta f(x) = 0, \quad \tilde{\delta} f(x) \approx -f'(x) \delta x. \tag{2.37}$$

Όμως σε λιγότερο τετριμένες περιπτώσεις τα πράγματα δεν είναι έτσι. Ας θεωρήσουμε την επίδραση μιας τρισδιάστατης στροφής $\vec{r} \to \tilde{\vec{r}} \equiv R\vec{r}$ σ′ ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{V}(\vec{r})$. Εξ ορισμού:

$$\tilde{\vec{V}}(\tilde{\vec{r}}) = R\vec{V}(\vec{r}) \Rightarrow \tilde{\vec{V}}(\vec{r}) = R\vec{V}(R^{-1}\vec{r}).$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει, αν θέσουμε $\tilde{\vec{r}} \to \tilde{\vec{r}}_1 \equiv R^{-1}\vec{r}$. Τότε:

$$\tilde{\vec{V}}(R\tilde{\vec{r}}_1) = R\vec{V}(\vec{r}_1) \Rightarrow \tilde{\vec{V}}(RR^{-1}\vec{r}) = R\vec{V}(R^{-1}\vec{r}) \Rightarrow \tilde{\vec{V}}(\vec{r}) = R\vec{V}(R^{-1}\vec{r}).$$

Άρα:

$$\tilde{\delta}\vec{V} = \tilde{\vec{V}}(\vec{r}) - \vec{V}(\vec{r})$$

$$= [\tilde{\vec{V}}(\tilde{\vec{r}}) - \vec{V}(\vec{r})] - [\tilde{\vec{V}}(\tilde{\vec{r}})] = [\tilde{\vec{V}}(\tilde{\vec{r}}) -] = \delta\vec{V}(\vec{r}) - (\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}(\vec{r}). \qquad (2.38)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί κατά συνιστώσες:

$$\tilde{\delta}V_x = -(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})V_x + \delta V_x, \tilde{\delta}V_y = -(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})V_y + \delta V_y, \tilde{\delta}V_z = -(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})V_z + \delta V_z. \quad (2.39)$$

Για να έχουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα υπ΄ όψη, θα θεωρήσουμε μια απειροστή στροφή στις δύο διαστάσεις:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{x} = x + \epsilon y \equiv x + \delta x \\ \tilde{y} = y - \epsilon x \equiv y + \delta y \end{bmatrix}. \qquad (2.40)$$

Επίσης:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \tilde{x} - \epsilon\tilde{y} \\ y = \tilde{y} + \epsilon\tilde{x} \end{bmatrix}. \qquad (2.41)$$

Για το διανυσματικό πεδίο:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_x(\tilde{x},\tilde{y}) = V_x(x,y) + \epsilon V_y(x,y) \\ \tilde{V}_y(x,y) = V_y(x,y) - \epsilon V_x(x,y) \end{bmatrix}. \qquad (2.42)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\tilde{\vec{V}}(\vec{r}) = R\vec{V}(R^{-1}\vec{r})$, μπορούμε να καταλήξουμε στην:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_x(x,y) = V_x(x-\epsilon y, y+\epsilon x) + \epsilon V_y(x-\epsilon y, y+\epsilon x) \\ \tilde{V}_y(x,y) = V_y(x-\epsilon y, y+\epsilon x) - \epsilon V_x(x-\epsilon y, y+\epsilon x) \end{bmatrix}. \qquad (2.43)$$

Άρα:

$$\delta V_x = \tilde{V}_x(\tilde{x},\tilde{y}) - V_x(x,y) = \tilde{V}_x(x+\epsilon y, y-\epsilon x) - V_x(x,y)$$

$$\approx \epsilon y\partial_x V_x(x,y) - \epsilon x\partial_y V_x(x,y) + \epsilon V_y(x,y) = \delta x\partial_x V_x(x,y) + \delta y\partial_y V_x(x,y) + \epsilon V_y(x,y). \qquad (2.44)$$

Καταλήγουμε στη σχέση:

$$\delta V_x = (\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})V_x(x,y) + \epsilon V_y(x,y),$$

οπότε το $\epsilon V_y(x,y)$ πρέπει να ταυτιστεί με το $\tilde{\delta}V_x$, σύμφωνα και με την (2.42), αν θεωρήσουμε τα V_x και $\tilde{\delta}V_x$ στο ίδιο σημείο (x,y). Καταλήγουμε, δηλαδή, στη σχέση:

$$\delta V_x = (\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})V_x(x,y) + \tilde{\delta}V_x,$$

σε απόλυτη συμφωνία με τις (2.38) και (2.39).

2.3 Νόμοι διατήρησης: Θεώρημα της Noether

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα που περιλαμβάνει ένα σύνολο πεδίων $\phi^a(x)$, του οποίου η δυναμική περιγράφεται από τη δράση

$$S = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)), \tag{2.45}$$

όπου η $\mathcal{L}$ είναι κάποια λαγκρανζιανή πυκνότητα και Ω είναι ο τετραδιάστατος χώρος ολοκλήρωσης. Το μ παίρνει τις τιμές 0, 1, 2, 3 και χρησιμεύει ως δείκτης των συνιστωσών του χωροχρόνου. Ας εξετάσουμε έναν απειροστό μετασχηματισμό του συστήματος συντεταγμένων:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \tag{2.46}$$

κάτω από τον οποίο τα πεδία μετασχηματίζονται ως:

$$\phi^a(x) \to \phi'^a(x') + \delta\phi^a(x). \tag{2.47}$$

Αν ο χώρος ολοκλήρωσης Ω μετασχηματιστεί στον Ω', λόγω του μετασχηματισμού συντεταγμένων, τότε:

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(\phi'^a(x'), \partial'_\mu \phi'^a(x')) - \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)). \tag{2.48}$$

Αν $\delta S = 0$, η θεωρία χαρακτηρίζεται αναλλοίωτη κάτω από τον συγκεκριμένο μετασχηματισμό. Αλλάζουμε τη βουβή x' σε x στο πρώτο ολοκλήρωμα και βρίσκουμε:

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^4x \mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial_\mu \phi'^a(x)) - \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))$$

$$\Rightarrow \delta S = \int_{\Omega'} d^4x \left[\mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial_\mu \phi'^a(x)) - \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))\right] + \int_{\Omega'-\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial'_\mu \phi'^a(x)). \tag{2.49}$$

Επεξεργαζόμαστε ξεχωριστά τις συνεισφορές στο δS :

(1) Το τελευταίο ολοκλήρωμα εκτείνεται στον απειροστό όγκο $\Omega' - \Omega$, οπότε μπορεί να γραφτεί ως ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα επί το αντίστοιχο «ύψος» δx^μ :

$$\int_{\Omega'-\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial'_\mu \phi'^a(x)) = \int_{\partial\Omega} dS_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)).$$

Αντικαταστήσαμε τα $\phi'^a(x)$ με $\phi^a(x)$, γιατί πολλαπλασιάζουμε τη Λαγκρανζιανή με δx^λ, επομένως οι διαφορές που προκύπτουν είναι ανώτερης τάξης και αμελούνται. Υπενθυμίζουμε στη συνέχεια το θεώρημα του Gauss:

$$\int_{\partial\Omega} dS_\mu F^\mu = \int_\Omega d^4x \partial_\mu F^\mu, \tag{2.50}$$

για το διανυσματικό πεδίο F^μ και το στοιχείο εμβαδού dS_μ. Με βάση το θεώρημα του Gauss, θέτοντας $F^\lambda = \delta x^\mu \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))$, καταλήγουμε στην:

$$\int_{\Omega'-\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi'^a(x), \partial'_\mu \phi'^a(x)) = \int_{\partial\Omega} d^4x \partial_\mu [\delta x^\mu \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)]. \tag{2.51}$$

(2) Επιστρέφουμε στην έκφραση (2.49) και εκφράζουμε τη διαφορά των Λαγκρανζιανών συναρτήσει της μεταβολής $\tilde{\delta}$ ως εξής:

$$\mathcal{L}(\phi'^a(x),\partial_\mu\phi'^a(x))-\mathcal{L}(\phi^a(x),\partial_\mu\phi^a(x))=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a}\tilde{\delta}\phi^a+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\tilde{\delta}(\partial_\mu\phi^a)$$
$$=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\tilde{\delta}\phi^a+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\tilde{\delta}(\partial_\mu\phi^a),$$

όπου επικαλεστήκαμε το γεγονός ότι, σύμφωνα με τις εξισώσεις Euler-Lagrange, ισχύει:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a}=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}.$$

Η διαφορά των Λαγκρανζιανών γράφεται τελικά:

$$\mathcal{L}(\phi'^a(x),\partial_\mu\phi'^a(x))-\mathcal{L}(\phi^a(x),\partial_\mu\phi^a(x))=\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\tilde{\delta}\phi^a\right). \tag{2.52}$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση (2.49), λαμβάνοντας υπόψη και την (2.51), προκύπτει:

$$\delta S=\int_{\Omega'}d^4x\left[\mathcal{L}(\phi'^a(x),\partial_\mu\phi'^a(x))-\mathcal{L}(\phi^a(x),\partial_\mu\phi^a(x))\right]$$
$$+\int_{\Omega'-\Omega}d^4x\mathcal{L}(\phi'^a(x),\partial'_\mu\phi'^a(x))$$
$$=\int_\Omega d^4x\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\tilde{\delta}\phi^a\right]+\int_\Omega d^4x\partial_\mu[\delta x^\mu\mathcal{L}(\phi^a(x),\partial_\mu\phi^a(x))]$$
$$\Rightarrow\delta S=\int_\Omega d^4x\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\tilde{\delta}\phi^a+\mathcal{L}(\phi^a(x),\partial_\mu\phi^a(x))\delta x^\mu\right].$$

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2.35) και θα βρούμε:

$$\delta S=\int_\Omega d^4x\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}(\delta\phi^a-\delta x^\nu\partial_\nu\phi^a)+\mathcal{L}\delta x^\mu\right]$$
$$=\int_\Omega d^4x\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\delta\phi^a-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\partial^\nu\phi^a\delta x_\nu+g^{\mu\nu}\mathcal{L}\delta x_\nu\right].$$

Θεωρούμε ότι οι μεταβολές μπορούν να γραφτούν συναρτήσει απειροστών παραμέτρων ως:

$$\delta x_\mu=X_{\mu r}\delta\omega^r,\ \delta\phi^a=F^a_r\delta\omega^r, \tag{2.53}$$

οπότε:

$$\int_\Omega d^4x\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\delta\phi^a-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\partial^\nu\phi^a\delta x_\nu+g^{\mu\nu}\mathcal{L}\delta x_\nu\right]$$
$$=\int_\Omega d^4x\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}F^a_r\delta\omega^r\right]+\int_\Omega d^4x\partial_\mu\left[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\partial^\nu\phi^a X_{\nu r}\delta\omega^r+g^{\mu\nu}\mathcal{L}X_{\nu r}\delta\omega^r\right] \tag{2.54}$$

Ορίζουμε τον **τανυστή ενέργειας και ορμής** ως εξής:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}(\partial^\nu \phi^a) - g^{\mu\nu}\mathcal{L}, \tag{2.55}$$

οπότε η μεταβολή της δράσης γράφεται:

$$\delta S = \int_\Omega^4 x \delta\omega^r \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} F_r^a - \Theta^{\mu\nu} X_{\nu r} \right]. \tag{2.56}$$

Αν ορίσουμε τις ποσότητες

$$J_r^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} F_r^a - \Theta^{\mu\nu} X_{\nu r}, \tag{2.57}$$

η μεταβολή της δράσης γράφεται:

$$\delta S = \int_{\partial\Omega} da_\mu \delta\omega^r J_r^\mu = \int_\Omega d^4x \delta\omega^r \partial_\mu J_r^\mu. \tag{2.58}$$

Αν υπάρχει κάποια συμμετρία που επιβάλλει την ισότητα $\delta S = 0$, το ολοκλήρωμα θα μηδενίζεται για κάθε επιλογή όγκου και απειροστών $\delta\omega^r$, οπότε προκύπτουν οι νόμοι διατήρησης, οι

$$\partial_\mu J_r^\mu = 0, \tag{2.59}$$

μέσω και του θεωρήματος του Gauss. Αυτό το αποτέλεσμα λέγεται **θεώρημα της Noether** και το J_r^μ λέγεται **ρεύμα Noether.** Υπάρχει το ενδεχόμενο η μεταβολή της δράσης να μην είναι μηδέν, αλλά να ισούται με το ολοκλήρωμα μιας ολικής παραγώγου:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \partial_\mu J_r^\mu = -\int_\Omega d^4x \partial_\mu Y_r^\mu. \tag{2.60}$$

Σ' αυτήν την περίπτωση το διατηρούμενο ρεύμα είναι το άθροισμα $J_r^\mu + Y_r^\mu$:

$$J_r^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} F_r^a - \Theta^{\mu\rho} X_{\rho r} + Y_r^\mu. \tag{2.61}$$

Η διατήρηση του ρεύματος Noether συνεπάγεται εύκολα τη διατήρηση των **φορτίων Noether**: αν

$$Q_r = \int d^3x J_r^0, \tag{2.62}$$

τότε

$$\frac{dQ_r}{dt} = \int d^3x \partial_0 J_r^0 = -\int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_r. \tag{2.63}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορεί να μετατραπεί σε επιφανειακό ολοκλήρωμα, το οποίο μηδενίζεται, αν το ρεύμα μηδενίζεται αρκετά γρήγορα σε μεγάλες αποστάσεις, άρα:

$$\frac{dQ_r}{dt} = 0. \tag{2.64}$$

2.3.1 Παράδειγμα 1: Χωροχρονικές μετατοπίσεις

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$x_\mu \to x_\mu + \Delta_\mu, \tag{2.65}$$

όπου η Δ_μ είναι απειροστή και σταθερή. Σ' αυτήν την περίπτωση $\delta x_\mu = \Delta_\mu = X_{\mu r}\delta\omega^r$, οπότε $X_{\mu r} = g_{\mu r}$, $\delta\omega^\nu = \Delta^\nu$. Επίσης $\delta\phi = 0$, με την έννοια ότι $\phi'(x') = \phi(x)$. Δηλαδή $F^a_\nu = 0$, οπότε:

$$\partial_\mu J^\mu_\nu = 0 \Rightarrow \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}F_\nu - \Theta^{\mu\rho}X_{\rho\nu}\right] = 0 \Rightarrow \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}0 - \Theta^{\mu\rho}g_{\rho\nu}\right] = 0$$
$$\Rightarrow \partial_\mu\Theta^\mu_\nu = 0,$$

οπότε και η παράσταση

$$p_\nu \equiv \int d^3x\Theta^0_\nu,$$

δηλαδή η τετραορμή του πεδίου, διατηρείται. Παρατηρούμε ότι

$$p_0 = \int d^3x\Theta^0_0 = \int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}\partial_0\phi - g^0_0\mathcal{L}\right] = \int d^3x[\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}] = \int d^3x\mathcal{H} = H,$$

δηλαδή ότι η p_0 ταυτίζεται με τη Χαμιλτονιανή.

2.3.2 Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμοί του Lorentz

Οι απειροστοί μετασχηματισμοί του Lorentz μπορούν να γραφτούν με τη μορφή:

$$x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu}x^\nu \Rightarrow \delta x_\mu = \frac{1}{2}(\delta^\rho_\mu x^\sigma - \delta^\sigma_\mu x^\rho)\omega_{\rho\sigma} \equiv X^{\rho\sigma}_\mu\omega_{\rho\sigma}, \tag{2.66}$$

όπου τα $\omega_{\mu\nu}$ είναι απειροστές θετικές σταθερές. Σ' αυτήν την περίπτωση τα ω έχουν διπλούς δείκτες, όπως επίσης και τα X :

$$X^{\rho\sigma}_\mu = \frac{1}{2}(\delta^\rho_\mu x^\sigma - \delta^\sigma_\mu x^\rho). \tag{2.67}$$

Πρέπει

$$g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \Rightarrow g_{\mu\nu}(x^\mu + \omega^{\mu\rho}x_\rho)(x^\nu + \omega^{\nu\sigma}x_\sigma) = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$$
$$\Rightarrow g_{\mu\nu}\omega^{\mu\rho}x_\rho x^\nu + g_{\mu\nu}x^\mu\omega^{\nu\sigma}x_\sigma \approx 0 \Rightarrow \omega_{\mu\rho}x^\rho x^\nu + \omega_{\mu\sigma}x^\nu x^\sigma \approx 0.$$

Αφού αυτό ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή των x_k και οι δείκτες είναι βουβοί, συμπεραίνουμε ότι

$$\omega^{\nu\mu} = -\omega^{\mu\nu}. \tag{2.68}$$

Οι μεταβολές των πεδίων εκφράζονται γενικά συναρτήσει ενός πίνακα σπιν:

$$\delta\phi^a = \frac{1}{2}\omega_{\lambda\rho}\left(\Sigma^{\lambda\rho}\right)^a{}_b\phi^b \equiv F^{a\lambda\rho}\omega_{\lambda\rho}, \tag{2.69}$$

όπου, βέβαια, και ο πίνακας Σ είναι αντισυμμετρικός ως προς λ και ρ και διαιρούμε με το δύο γιατί μετράμε διπλά τα ζευγάρια $\lambda,\ \rho$. Συνεπώς

$$F^{a\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(\Sigma^{\rho\sigma}\right)^{a}{}_{b}\,\phi^{b} \tag{2.70}$$

και, βέβαια, η σχέση

$$J^{\mu}_{r} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{a})}F^{a}_{r} - \Theta^{\mu\nu}X_{\nu r}$$

γράφεται:

$$J^{\mu\rho\sigma} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{a})}F^{a\rho\sigma} - \Theta^{\mu\lambda}X^{\rho\sigma}_{\lambda} \tag{2.71}$$

Μ′ αυτά τα δεδομένα η έκφραση για το ρεύμα Noether

$$J^{\mu}_{r} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{a})}F^{a}_{r} - \Theta^{\mu\nu}X_{\nu r}$$

μεταπίπτει στην:

$$J^{\mu\rho\sigma} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{a})}F^{a\rho\sigma} - \Theta^{\mu\lambda}X^{\rho\sigma}_{\lambda} \tag{2.72}$$

και η έκφραση για τη διατήρηση του ρεύματος Noether γράφεται:

$$\partial_{\mu}J^{\mu\rho\sigma} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_{\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{a})}\left(\Sigma^{\lambda\rho}\right)^{a}{}_{b}\phi^{b} - \left(\Theta^{\mu\lambda}x^{\rho} - \Theta^{\mu\rho}x^{\lambda}\right)\right] = 0.$$

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό

$$\mathcal{M}^{\mu\lambda\rho} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{a})}\left(\Sigma^{\lambda\rho}\right)^{a}{}_{b}\phi^{b} - \left(\Theta^{\mu\lambda}x^{\rho} - \Theta^{\mu\rho}x^{\lambda}\right), \tag{2.73}$$

η εξίσωση διατήρησης γίνεται:

$$\partial_{\mu}\mathcal{M}^{\mu\lambda\rho} = 0 \tag{2.74}$$

και τα διατηρούμενα φορτία θα είναι τα:

$$J^{\lambda\rho} = \int d^{3}x\mathcal{M}^{0\lambda\rho}. \tag{2.75}$$

Οι χωρικές συνιστώσες των J^{kl} σχετίζονται με τη στροφορμή $\left(J^{m} = \frac{1}{2}\epsilon^{klm}J_{kl}\right)$, ενώ οι ποσότητες J^{0k} σχετίζονται με τους μετασχηματισμούς Lorentz.

2.3.3 Παράδειγμα 3: Εσωτερικές συμμετρίες

Πολύ συνηθισμένες είναι οι εσωτερικές συμμετρίες, που συνδέουν μεταξύ τους πεδία στο ίδιο χωροχρονικό σημείο. Σε απειροστή εκδοχή, ο μετασχηματισμός

$$\phi^{a}(x) \to \phi^{a}(x) + F^{a}_{r}\delta\omega^{r}, \tag{2.76}$$

χωρίς καμμιά αλλαγή στις συντεταγμένες ($X_{\mu\nu} = 0$), αφήνει τη δράση αναλλοίωτη, με αντίστοιχα διατηρούμενα ρεύματα τα:

$$J_r^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} F_r^a. \tag{2.77}$$

2.3.4 Συμμετρικός τανυστής ενέργειας - ορμής

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι ο τανυστής ενέργειας - ορμής $\Theta^{\mu\nu}$ δεν είναι υποχρεωτικά συμμετρικός ως προς την εναλλαγή των δεικτών μ και ν. Αυτό μπορεί να διορθωθεί ως εξής: ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι αυτός ο τανυστής ενέργειας - ορμής δεν είναι μοναδικός, γιατί μπορεί κανείς να τον τροποποιήσει προσθέτοντας έναν όρο

$$\partial_\lambda B^{\lambda\mu\nu}, \quad B^{\lambda\mu\nu} = -B^{\mu\lambda\nu},$$

οπότε:

$$\partial_\mu \partial_\lambda B^{\lambda\mu\nu} = 0.$$

Δηλαδή ο τανυστής

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda B^{\lambda\mu\nu}, \tag{2.78}$$

που ονομάζεται κανονικός τανυστής ενέργειας - ορμής, ικανοποιεί την

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0. \tag{2.79}$$

Η κατά τ΄ άλλα αυθαίρετη συνάρτηση $B^{\lambda\mu\nu}$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε ο $T^{\mu\nu}$ να είναι συμμετρικός:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \Rightarrow \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda B^{\lambda\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} + \partial_\lambda B^{\lambda\nu\mu} \Rightarrow \partial_\lambda B^{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda B^{\lambda\nu\mu} = \Theta^{\nu\mu} - \Theta^{\mu\nu}, \tag{2.80}$$

όπου ο μόνος άγνωστος είναι η $B^{\lambda\mu\nu}$.

Από τις σχέσεις $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$ και $\partial_\mu \mathcal{M}^{\mu\lambda\rho} = 0$ και τον ορισμό

$$\mathcal{M}^{\mu\lambda\rho} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \left(\Sigma^{\lambda\rho}\right)^a{}_b \phi^b - (\Theta^{\mu\lambda} x^\rho - \Theta^{\mu\rho} x^\lambda) = S^{\mu\lambda\rho} - (\Theta^{\mu\lambda} x^\rho - \Theta^{\mu\rho} x^\lambda),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό

$$S^{\mu\lambda\rho} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \left(\Sigma^{\lambda\rho}\right)^a{}_b \phi^b,$$

προκύπτει η σχέση:

$$\Theta^{\lambda\rho} - \Theta^{\rho\lambda} = -\partial_\mu S^{\mu\lambda\rho}.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.78) καταλήγουμε στην

$$-\partial_\mu B^{\mu\lambda\rho} + \partial_\mu B^{\mu\rho\lambda} = -\partial_\mu S^{\mu\lambda\rho}.$$

Αρκεί να εντοπίσουμε μία λύση της εξίσωσης αυτής (δεν ενδιαφέρει η γενική λύση). Μια τέτοια λύση είναι η:

$$B^{\mu\rho\lambda} = \frac{1}{2}(S^{\rho\lambda\mu} + S^{\lambda\rho\mu} - S^{\mu\lambda\rho}). \tag{2.81}$$

Αυτός ο τανυστής είναι γνωστός με το όνομα **Belifante-Rosenberg** και είναι αντισυμμετρικός σε εναλλαγή των δύο πρώτων δεικτών μ και ρ, όπως θα έπρεπε. Αν εκφράσουμε την ποσότητα $\mathcal{M}^{\mu\lambda\rho}$ συναρτήσει του συμμετρικού τανυστή $T^{\mu\lambda}$ βρίσκουμε τη σχέση:

$$\mathcal{M}^{\lambda\mu\nu} = x^{\mu}T^{\lambda\nu} - x^{\nu}T^{\lambda\mu} + \partial_{\rho}(x^{\nu}B^{\rho\lambda\mu} - x^{\mu}B^{\rho\lambda\nu}). \tag{2.82}$$