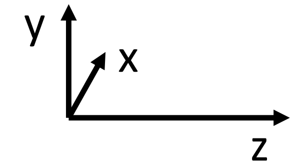
transverse mass M_T



Στους επιταχυντές παίρνουμε κατά συνθήκη τον άξονα της δέσμης σαν άξονα-z

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta z) \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma(z - \beta ct) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'/c &= \gamma\left(E/c - \beta p_z\right) \\ p'_x &= p_x \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= \gamma(p_z - \beta\, E/c) \end{aligned}$$

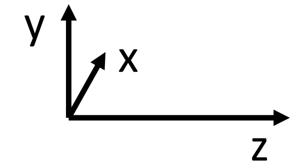
$$E^2 = p_x^2c^2 + p_y^2c^2 + p_z^2c^2 + M^2c^4$$

ορίζουμε την εγκάρσια μάζα, transverse mass, M_T

$$M_T^2c^4 = p_x^2c^2 + p_y^2c^2 + M^2c^4$$

Πρόκειται για ποσότητα που αποτελείται αποκλειστικά από αμετάβλητες ποσότητες σε σχέση με παρατηρητές που κινούνται παράλληλα με τον άξονα-z.

rapidity



ορίζουμε μια ποσότητα που ονομάζεται ωκίτητα (rapidity) **y**:

$$y = \frac{1}{2} ln\left(\frac{E + p_z c}{E - p_z c}\right)$$

Ποια η χρησιμότητα της y ; Έστω ότι μελετάμε το προϊόν κάποιας αλληλεπίδρασης που έχουν πολύ μεγάλη ενέργεια.

Έστω ότι αυτό το σωματίδιο κινείται κάθετα στην κατεύθυνση της δέσμης στο xy επίπεδο

$$\Longrightarrow p_z \rightarrow 0 \text{ and } y \rightarrow 0$$

Έστω ότι αυτό το σωματίδιο κινείται πολύ κοντά με τον άξονα +z

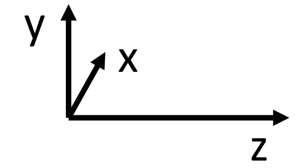
$$\Longrightarrow \mathrm{E} \cong cp_z \text{ and } \ y \rightarrow \infty$$

Έστω ότι αυτό το σωματίδιο κινείται πολύ κοντά με τον άξονα -z

$$\Longrightarrow \mathrm{E} \cong -cp_z \text{ and } \ y \rightarrow -\infty$$

y σχετίζεται με την γωνία μεταξύ του επιπέδου xy και της κατεύθυνσης του σωματιδίου

rapidity



Από τον ορισμό

$$y = \frac{1}{2} ln\left(\frac{E+p_z c}{E-p_z c}\right) = ln\sqrt{\frac{E+p_z c}{E-p_z c}} = ln\left(\frac{E+p_z c}{\sqrt{E^2-p_z^2 c^2}}\right) = ln\left(\frac{E+p_z c}{M_T c^2}\right)$$

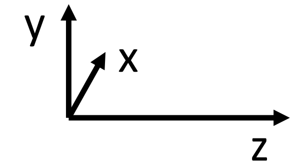
Επίσης χρησιμοποιώντας $\tanh\theta = {(e^{\theta}-e^{-\theta})}/{(e^{\theta}+e^{-\theta})}$

$$y = ln\left(\frac{E+p_z c}{M_T c^2}\right) = \tanh^{-1}\left(\tanh\left(ln\left(\frac{E+p_z c}{M_T c^2}\right)\right)\right)$$

$$= \tanh^{-1}\left(\frac{exp\left(ln\left(\frac{E+p_z c}{M_T c^2}\right)\right) - exp\left(-ln\left(\frac{E+p_z c}{M_T c^2}\right)\right)}{exp\left(ln\left(\frac{E+p_z c}{M_T c^2}\right)\right) + exp\left(-ln\left(\frac{E+p_z c}{M_T c^2}\right)\right)}\right)$$

=...

$$\Longrightarrow y = \tanh^{-1}\left(\frac{p_z c}{E}\right)$$



rapidity

Πως μετασχηματίζεται η rapidity με τους μετασχηματισμούς του Lorentz ; Από τον ορισμό

$$y = \frac{1}{2} ln\left(\frac{E + p_z c}{E - p_z c}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2} ln\left(\frac{\left(\gamma \mathrm{E}/c\right) - \beta\gamma p_z + \gamma p_z - \left(\gamma\beta \mathrm{E}/c\right)}{\left(\gamma \mathrm{E}/c\right) - \beta\gamma p_z - \gamma p_z + \left(\gamma\beta \mathrm{E}/c\right)}\right)$$

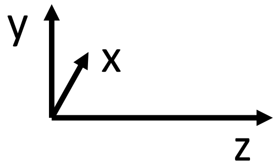
$$= \frac{1}{2} ln\left(\frac{\left(\mathrm{E}/c\right) + p_z}{\left(\mathrm{E}/c\right) - p_z}\frac{\gamma - \beta\gamma}{\gamma + \beta\gamma}\right)$$

$$= \frac{1}{2} ln\left(\frac{\mathrm{E} + p_z}{\mathrm{E} - p_z}\right) + ln\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$\Longrightarrow y' = y + ln\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$ln\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = -\tanh^{-1}\beta$$

rapidity



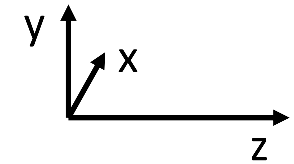
$$\Longrightarrow y' = y - \tanh^{-1}\beta$$

$$\boxed{\Longrightarrow \boldsymbol{y_2' - y_1'} = (y_2 - \tanh^{-1}\beta) - (y_1 - \tanh^{-1}\beta) = \boldsymbol{y_2 - y_1}}$$

Άρα η διαφορά μεταξύ των rapidities δυο σωματιδίων είναι αμετάβλητη !

Συνήθως δίνουμε τις συντεταγμένες ενός σωματιδίου με τον συνδυασμό (y,φ)

Pseudorapidity



Το πρόβλημα με την rapidity είναι ότι δεν μπορούμε να την μετρήσουμε εύκολα για σωματίδια πολύ μεγάλης ενέργειας (highly relativistic particles). Χρειάζεται να μετρήσουμε και την ενέργεια και την ορμή πράγμα που γίνεται εξαιρετικά δύσκολο σε μεγάλες τιμές της rapidity που η z συντεταγμένη έχει μεγάλες τιμές. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε την pseudorapitidy.

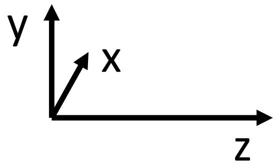
$$y = \frac{1}{2} ln\left(\frac{E+p_z c}{E-p_z c}\right)$$

$$= \frac{1}{2} ln\left(\frac{(p^2c^2+m^2c^4)^{\frac{1}{2}}+p_z c}{(p^2c^2+m^2c^4)^{\frac{1}{2}}-p_z c}\right)$$

$$= \frac{1}{2} ln\left(\frac{pc\left(1+\frac{m^2c^4}{p^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}}+p_z c}{pc\left(1+\frac{m^2c^4}{p^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}}-p_z c}\right)$$

για $pc \gg mc^2$γίνεται: $y = \frac{1}{2} ln\left(\frac{pc+p_z c+\frac{m^2c^4}{2pc}+\cdots}{pc-p_z c+\frac{m^2c^4}{2pc}+\cdots}\right) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+\frac{p_z}{p}+\frac{m^2c^4}{2p^2c^2}+\cdots}{1-\frac{p_z}{p}+\frac{m^2c^4}{2p^2c^2}+\cdots}\right)$

Pseudorapidity



Αλλά $\frac{p_z}{p} = \cos\theta$ όπου θ η γωνία μεταξύ της τροχιάς του σωματιδίου με την δέσμη.

$$1 + \frac{p_z}{p} = 1 + \cos\theta = 1 + \left(cos^2\frac{\theta}{2} - sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 2cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$1 - \frac{p_z}{p} = 1 - \cos\theta = 1 - \left(cos^2\frac{\theta}{2} - sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 2sin^2\frac{\theta}{2}$$

Οπότε

$$y = \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+\frac{p_z}{p}+\frac{m^2c^4}{2p^2c^2}+\cdots}{1-\frac{p_z}{p}+\frac{m^2c^4}{2p^2c^2}+\cdots}\right) \simeq \frac{1}{2}ln\frac{cos^2\frac{\theta}{2}}{sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\boxed{y \simeq -\frac{1}{2}\ln\tan\frac{\theta}{2} = \eta}$$