

Εργαστήριο Ψηφιακών Συστημάτων Ελέγχου  
Ακαδημαϊκό Έτος 2015-2016

Γιώργος Μπολάτογλου

## Μοντελοποίηση και Προσομοίωση Κινούμενου Εκκρεμούς

### 5. Εκτέλεση Άσκησης

Προσομοιώστε το σύστημα του κινούμενου εκκρεμούς χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες τιμές των παραμέτρων  $M=1; m=1; l=1; B_l=0.3; B_r=0.3; g=10$ .

**Μη γραμμικό:**

```
t_in=0 ; t_fin=40 ; z0=[0 0 pi/36 0]; u=0  
[t, z] = ode45(@(t,z)odefun1(t,z,u), [t_in t_fin], z0) ;  
figure(1)  
subplot(2,2,1), plot(t,z(:,1)), title('carrier position X« O—NXX... α')  
subplot(2,2,2), plot(t,z(:,2)), title('carrier velocity')  
subplot(2,2,3), plot(t,z(:,3)), title('pendulum angle')  
subplot(2,2,4), plot(t,z(:,4)), title('pendulum angular velocity')
```

```
function zdot = odefun1(t,z,u)  
F_l=u; M=1; m=1; l=1; B_l=0.3; B_r=0.3; g=10;  
zdot(1)= z(2);  
zdot(2)=(F_l-B_l*z(2)+m*l*sin(z(3))*(z(4))^2 + ...
```

```
m*g*cos(z(3))*sin(z(3))+B_r/l*cos(z(3))*z(4))/...  
((M+m)-m*(cos(z(3)))^2);  
zdot(3)= z(4);  
zdot(4)=(-m*g*l*sin(z(3))-B_r*z(4)-m*l*cos(z(3))*zdot(2))/...  
(m*l^2);  
zdot = zdot';  
end
```

#### Γραμμικό:

```
t_in=0 ;t_fin=40 ;z0=[0 0 pi/36 0];u=0;  
[t, z] = ode45(@(t,z)odefun(t,z,u), [t_in t_fin], z0) ;  
figure(1)  
subplot(2,2,1),plot(t,z(:,1)),title('carrier position')  
subplot(2,2,2),plot(t,z(:,2)),title('carrier velocity')  
subplot(2,2,3),plot(t,z(:,3)),title('pendulum angle')  
subplot(2,2,4),plot(t,z(:,4)),title('pendulum angular velocity')  
  
function zdot = odefun(t,z,u)  
F_l=u;M=100;m=1;l=1;B_l=0.3;B_r=0.3;g=10;  
zdot(1)= z(2);  
zdot(3)= z(4);  
zdot(2)= (F_l-B_l*zdot(1)+(B_r*zdot(3))/l+m*g*z(3))/M;  
zdot(4)= -(B_r*zdot(3))/(m*l.^2)-...  
(g*z(3))/l-...
```

$(F_l - B_l \cdot \dot{z}(1) + (B_r \cdot \dot{z}(3)) / l + m \cdot g \cdot z(3)) / (M \cdot l);$

$\dot{z} = \dot{z}';$

end

## 5.1 Υπολογισμός συνάρτησης μεταφοράς Εξισώσεις χώρου κατάστασης

Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές  $M=1, m=1, l=1, B_l=0.3, B_r=0.3, g=10$  στις σχέσεις (6) με (9) έχουμε:

$$\Delta \dot{\chi} = \Delta \ddot{\chi}$$

$$\Delta \ddot{\chi} = -0.3\Delta \dot{\chi} + 10\Delta \theta + 0.3\Delta \dot{\theta} + \Delta F$$

$$\Delta \dot{\theta} = \Delta \ddot{\theta}$$

$$\Delta \ddot{\theta} = -0.3\Delta \dot{\chi} - 20\Delta \dot{\theta} - 0.6\Delta \ddot{\theta} - \Delta F$$

$$\Delta \dot{z} = A\Delta z + B\Delta F$$

$$Y = C\Delta z + D\Delta F$$

Απο τα παραπάνω προκύπτουν:

$$\Delta z = \begin{bmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \dot{\chi} \\ \Delta \theta \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 10 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.3 & -20 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 10 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.3 & -20 & -0.6 \end{bmatrix} * \Delta z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} * \Delta F$$

$$D = [0]$$

Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς  $\frac{\Delta \chi}{\Delta F}(s)$  έχουμε  $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$

Άρα,

$$Y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] * \Delta z$$

Για  $\frac{\Delta \theta}{\Delta F}(s)$  έχουμε  $C = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$

Άρα,

$$Y = [0 \ 0 \ 1 \ 0] * \Delta z$$

Για να υπολογίσουμε τις ζητούμενες συναρτήσεις μεταφοράς χρησιμοποιούμε τον εξής κώδικα στην matlab:

Για  $\frac{\Delta x}{\Delta F}(s)$ :

```
A = [0 1 0 0; 0 -0.3 10 0.3; 0 0 0 1; 0 0.3 -20 -0.6];
```

```
B = [0 1 0 -1]';
```

```
C = [1 0 0 0];
```

```
D = [0];
```

```
sys = ss(A,B,C,D);
```

```
[num, den]=ss2tf(A,B,C,D);
```

```
sys = tf(num,den)
```

και μας δίνει την συνάρτηση μεταφοράς  $\frac{\Delta x}{\Delta F}(s)$

```
sys =
```

```
s^2 + 0.3 s + 10
```

```
-----
```

```
s^4 + 0.9 s^3 + 20.09 s^2 + 3 s
```

$$\frac{\Delta x}{\Delta F}(s) = \frac{s^2 + 0.3s + 10}{s^4 + 0.9s^3 + 20.09s^2 + 3s}$$

Για  $\frac{\Delta\theta}{\Delta F}(s)$ :

$$A = [0 \ 1 \ 0 \ 0; 0 \ -0.3 \ 10 \ 0.3; 0 \ 0 \ 0 \ 1; 0 \ 0.3 \ -20 \ -0.6];$$

$$B = [0 \ 1 \ 0 \ -1]';$$

$$C = [0 \ 0 \ 1 \ 0]; \% \text{αλλάζει μόνο ο C και παίρνει την τιμή 1 μόνο το } \Delta\theta$$

$$D = [0];$$

$$\text{sys} = \text{ss}(A,B,C,D);$$

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(A,B,C,D);$$

$$\text{sys} = \text{tf}(\text{num}, \text{den})$$

και μας δίνει την συνάρτηση μεταφοράς  $\frac{\Delta\theta}{\Delta F}(s)$

$$\text{sys} =$$

$$-s^2 + 1.11e-16 s + 1.185e-15$$

-----

$$s^4 + 0.9 s^3 + 20.09 s^2 + 3 s$$

Παρατηρούμε πως στον αριθμητή οι όροι του  $s$  και του 1 είναι πάρα πολύ μικροί και προσεγγιστικά θα τους πάρουμε ίσους με το 0 για να έχουμε zero-pole cancelation με τον ένα πόλο του παρονομαστή.

Άρα,

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta F}(s) = \frac{-s}{s^3 + 0.9s^2 + 20.09s + 3}$$

## 5.2) Απόκριση μηδενικής διέγερσης

Προσμοιώνουμε το σύστημα για

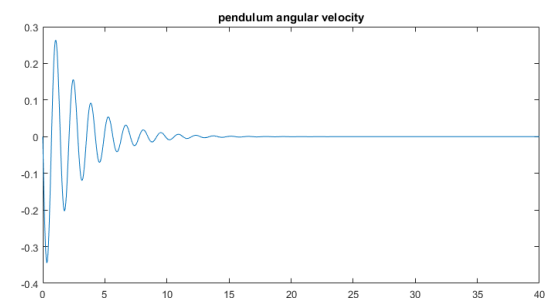
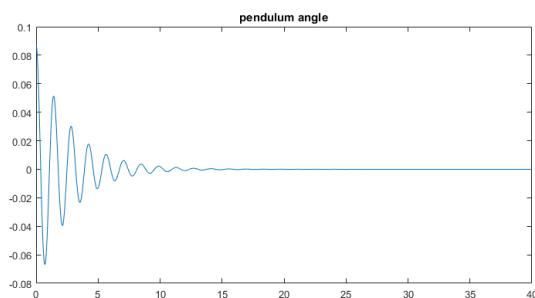
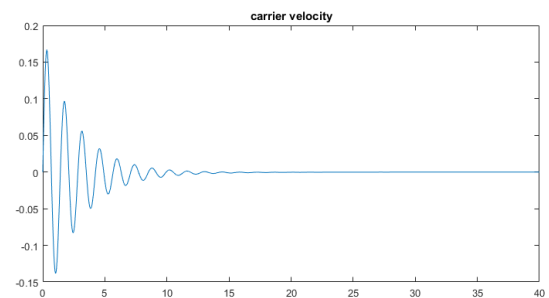
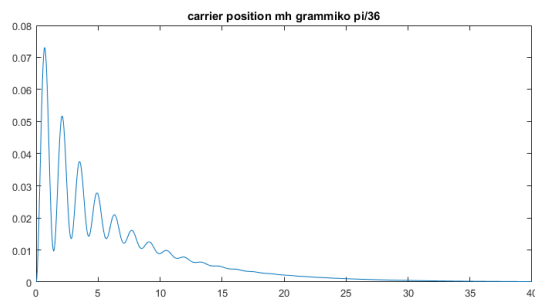
$z(t_{init}) = [0, 0, \theta(t_{init})^\circ, 0]$ , όταν  $\theta(t_{init})^\circ = 5, 10, 20, 50, 90^\circ$ .

Χρησιμοποιούμε τον κώδικα της matlab από την 5 που αναγράφεται παραπάνω και μεταβάλλουμε το  $\theta(t_{init})$  στο  $z_0 = [0 \ 0 \ \theta(t_{init}) \ 0]$ .

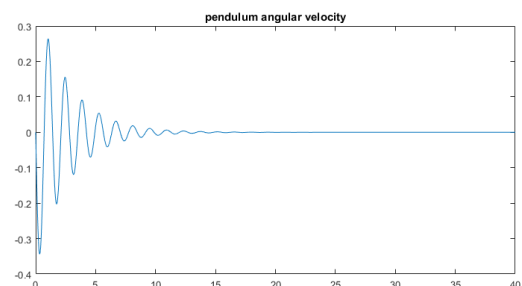
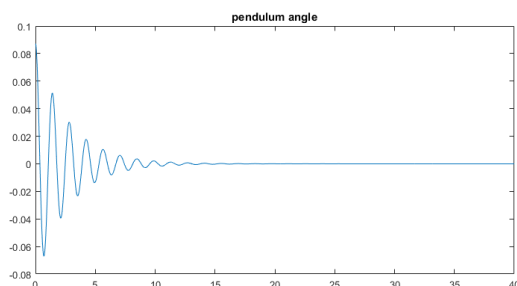
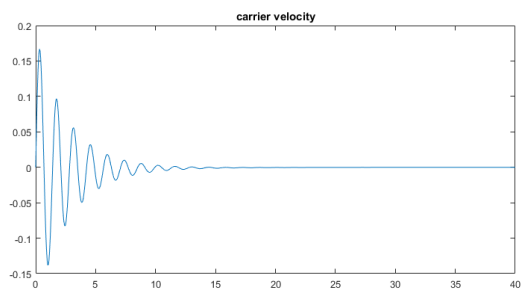
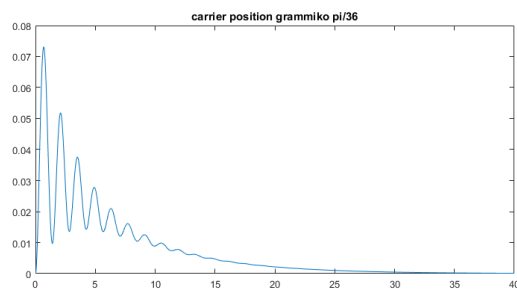
Για το γραμμικό και το μη γραμμικό τα διαγράμματα που προκύπτουν εμφανίζονται παρακάτω:

Για  $\theta = 5^\circ$ :

### Μη γραμμικό

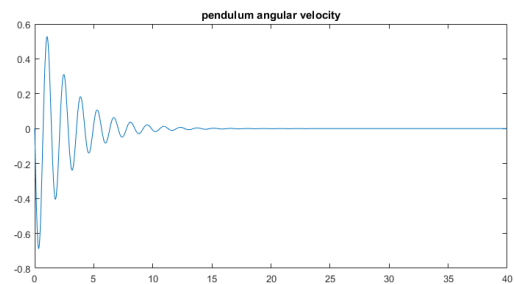
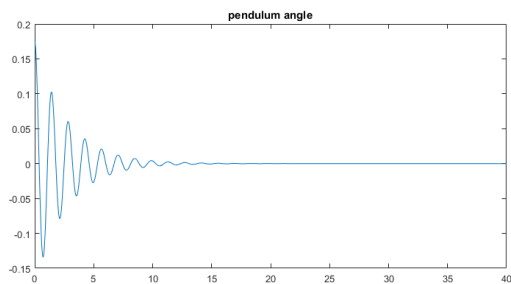
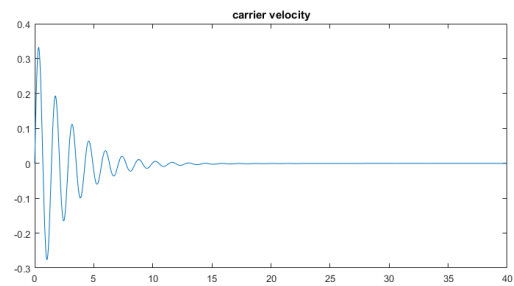
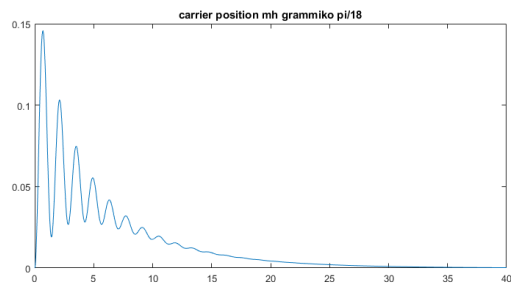


### Γραμμικό

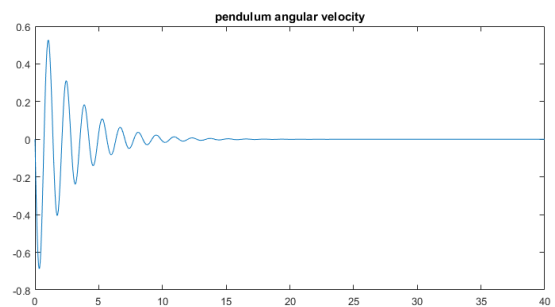
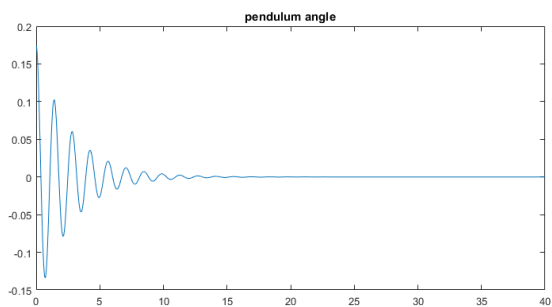
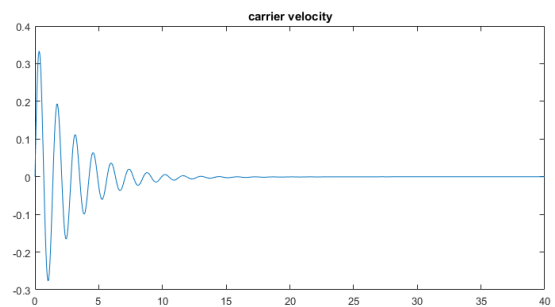
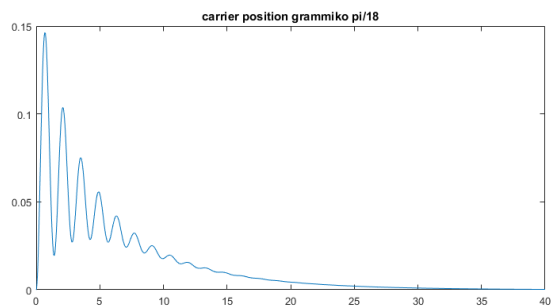


Για  $\theta=10^\circ$ :

### Μη γραμμικό



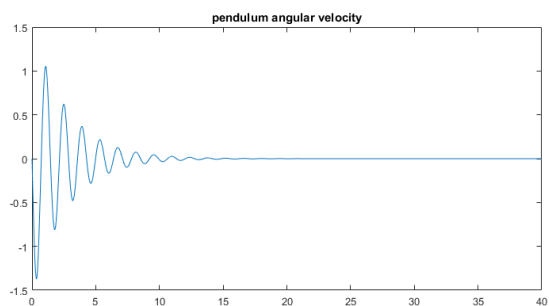
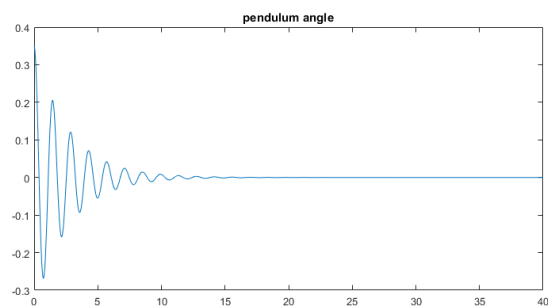
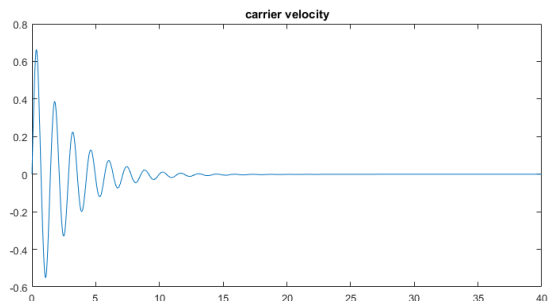
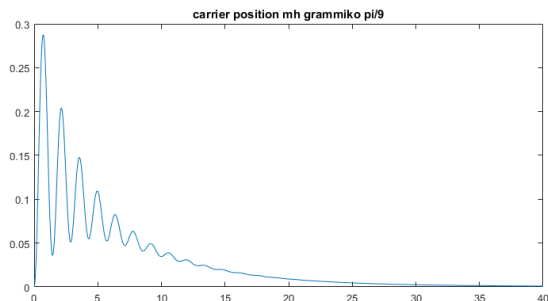
### Γραμμικό



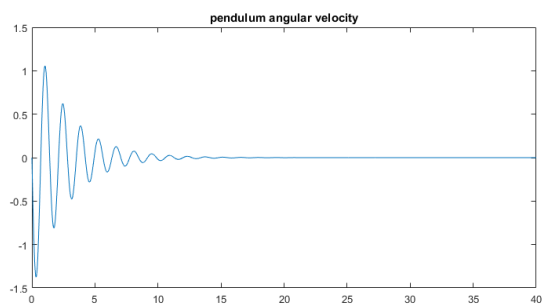
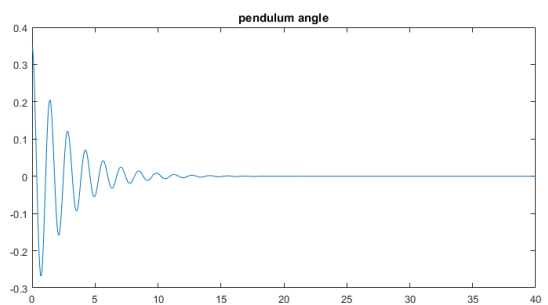
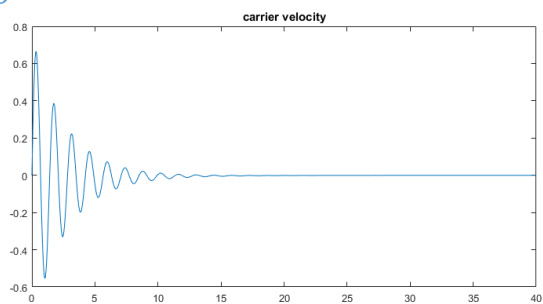
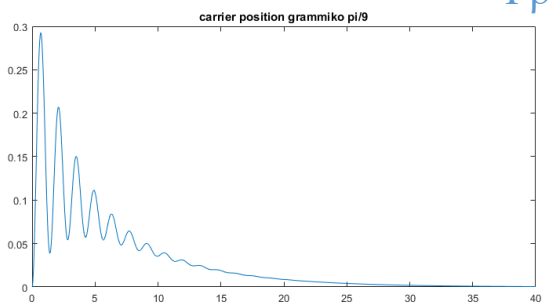


Για  $\theta=20^\circ$ :

### Μη γραμμικό

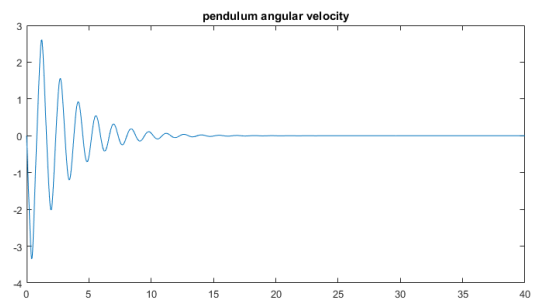
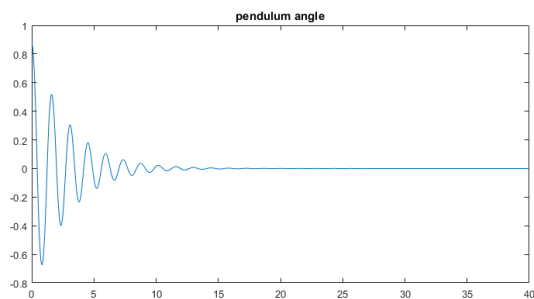
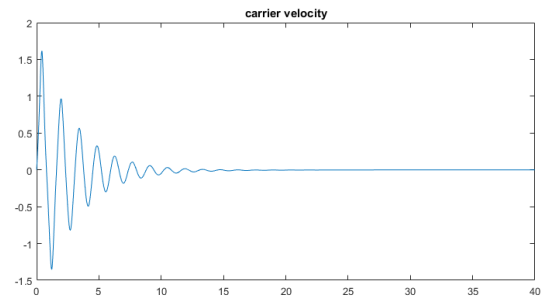
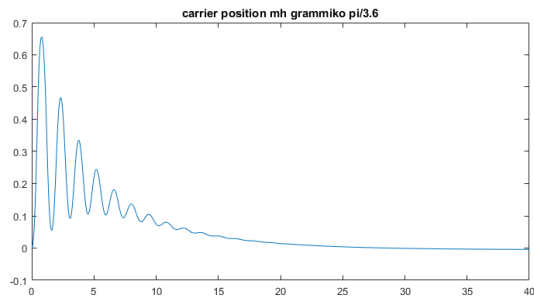


### Γραμμικό

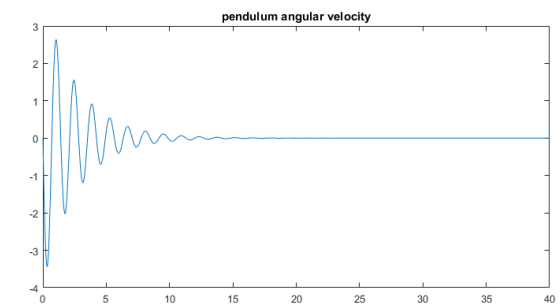
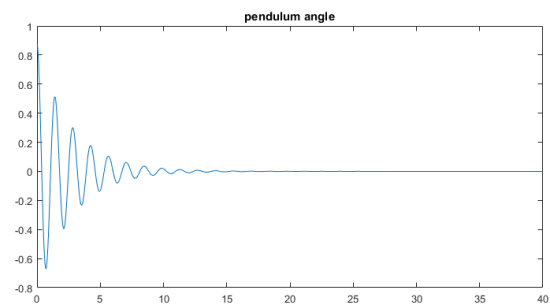
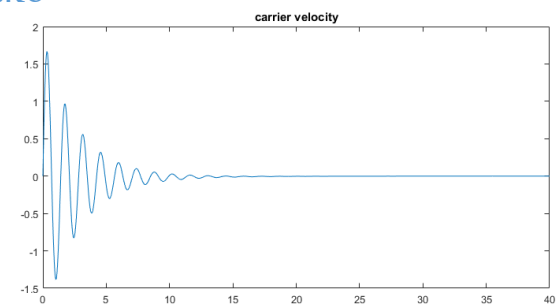
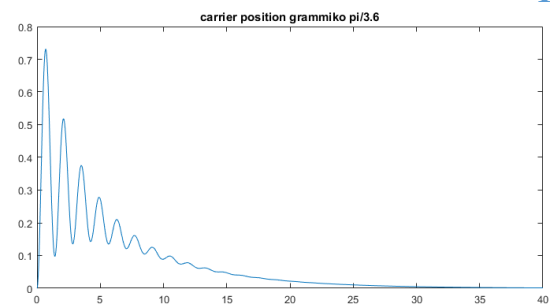


Για  $\theta=50^\circ$ :

### Μη γραμμικό

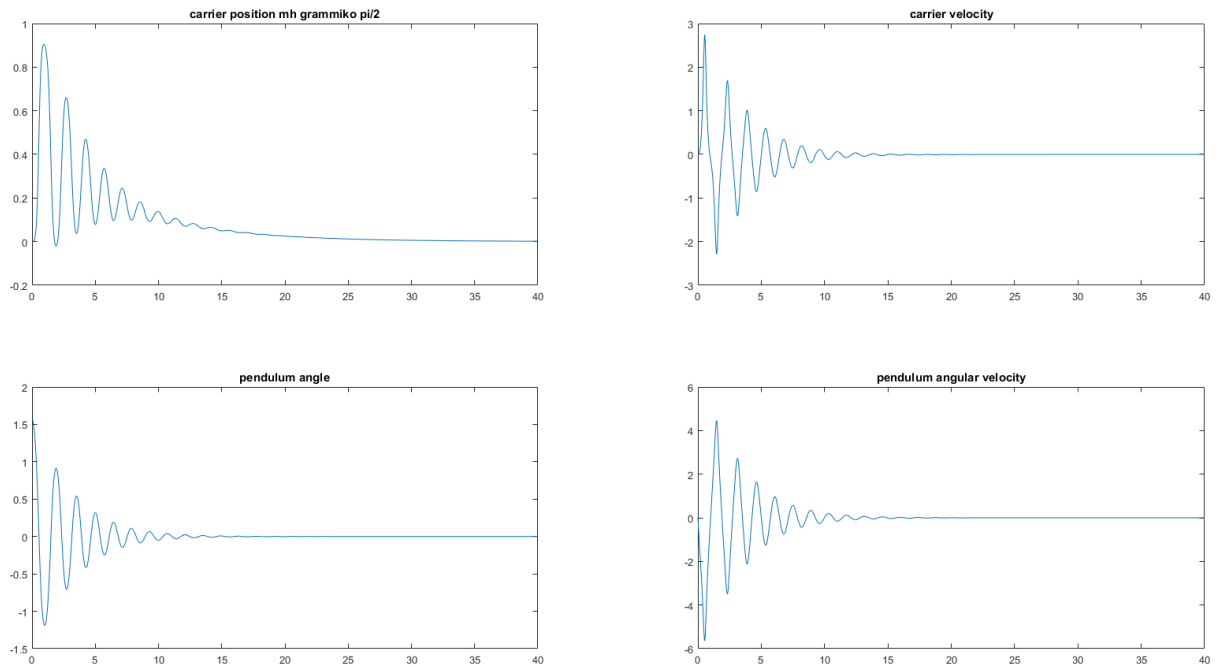


### Γραμμικό

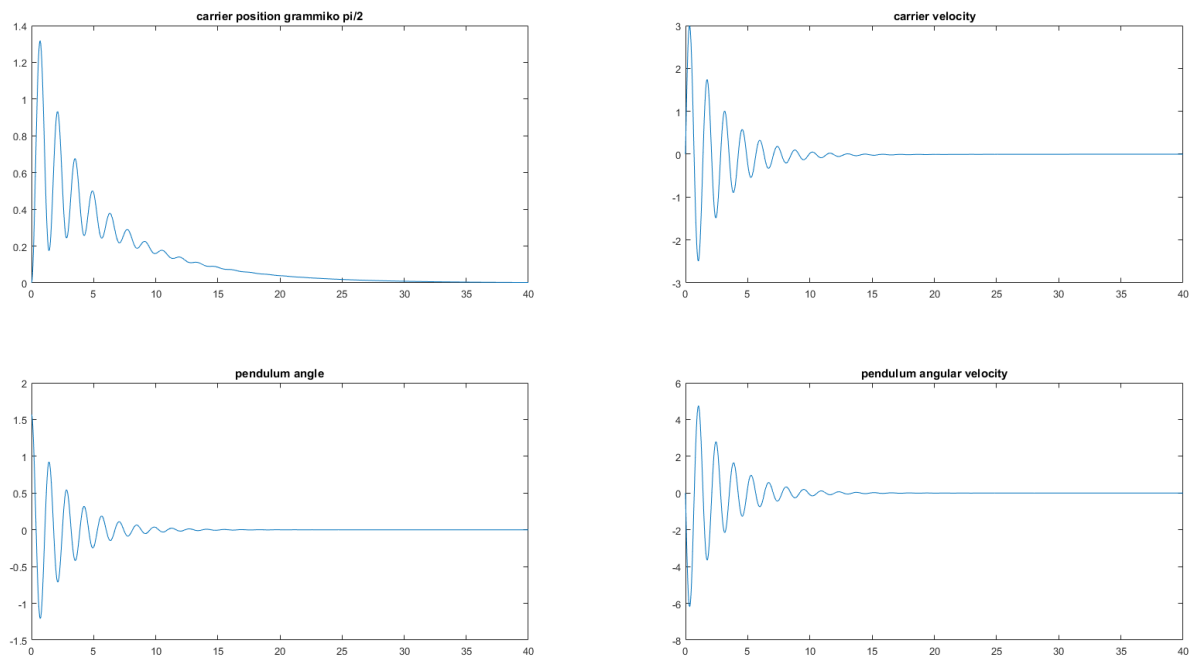


Για  $\theta=90^\circ$ :

### Μη γραμμικό



### Γραμμικό



### **Σύγκριση μη γραμμικού-γραμμικού-Σχόλια**

Παρατηρούμε πως στις μικρές γωνίες δεν υπάρχει σχεδόν καμία διαφορά απ' το μη γραμμικό στο γραμμικό. Ελάχιστα στην  $50^\circ$  και κυρίως στην  $90^\circ$  παρατηρούμε ουσιαστικές διαφορές και στα 4 γραφήματα.

Αυτό συμβαίνει διότι για μικρές μεταβολές της γωνίας ( $< 50$ ) το σύστημά μας δεν βγαίνει από την γραμμική περιοχή και ως εκ τούτου η απόκριση του μη γραμμικού συμπίπτει με του γραμμικού.

Αντίθετα για μεγαλύτερες τιμές βγαίνει και έχουμε τις αποκλίσεις που φαίνονται στα παραπάνω σχήματα (Για  $\theta=90^\circ$  και  $\theta=50^\circ$ ).

### 5.3)

Υπολογισμός επικρατούντων πόλων της  $\frac{\Delta\theta}{\Delta F}(s)$ :

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta F}(s) = \frac{-s}{s^3 + 0.9s^2 + 20.09s + 3}$$

Οι ρίζες του παρονομαστή είναι και οι πόλοι του συστήματος:

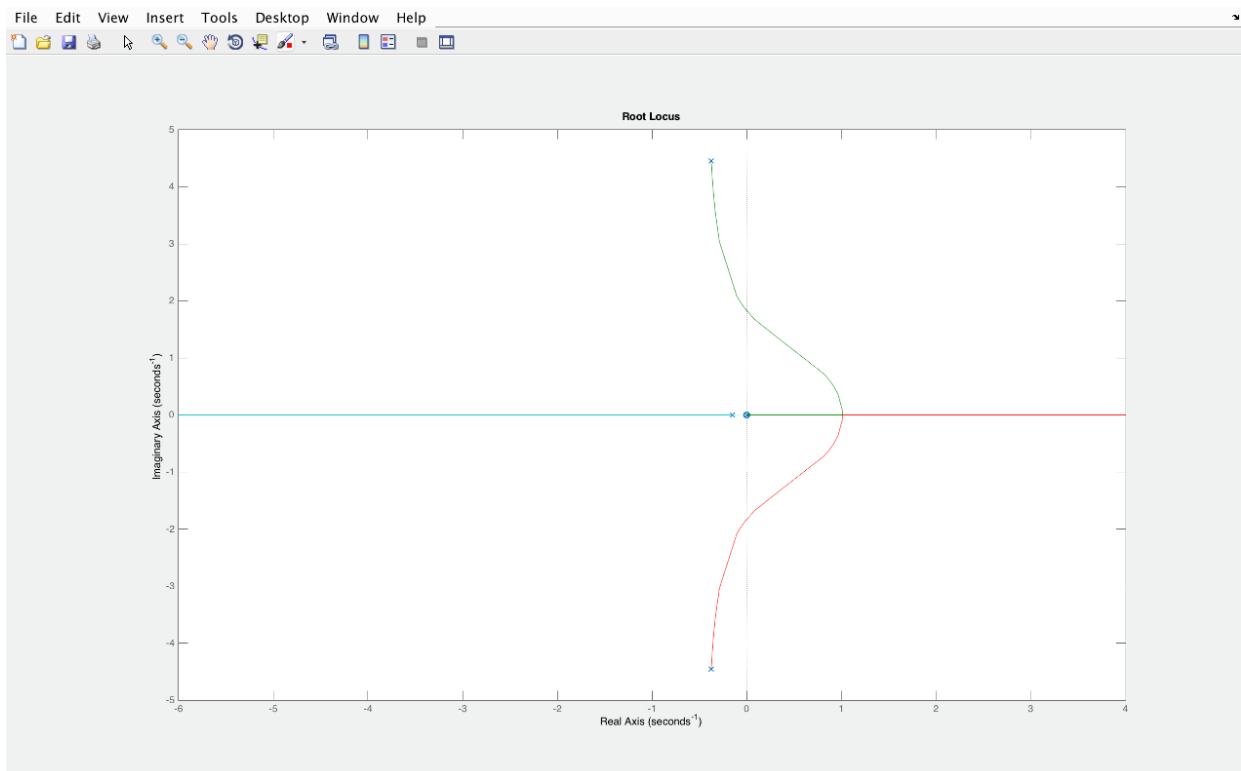
**$s = -0, 15017$**

**$s = -0, 374915 + j4, 45386$**

**$s = -0, 374915 - j4, 45386$**

Έχουμε, λοιπόν, 1 πραγματικό πόλο και 2 συζυγείς μιγαδικούς πόλους.

Με την εντολή **rl locus(sys)** στον παραπάνω κώδικα για τον υπολογισμό της  $\frac{\Delta\theta}{\Delta F}(s)$  στην matlab παίρνουμε τον παρακάτω γεωμετρικό τόπο ριζών της συνάρτησης μεταφοράς.



Γνωρίζουμε από την θεωρία πως οι επικρατούντες πόλοι είναι οι πιο «αργοί» πόλοι, δηλαδή οι πόλοι, οι οποίοι έχουν το πραγματικό τους μέρος πιο κοντά στην αρχή των αξόνων. Η επίδραση των επικρατούντων πόλων είναι ότι κυριαρχούν στη μεταβατική απόκριση του συστήματος σε σχέση με τους άλλους πόλους.

Στην περίπτωσή μας λοιπόν οι **κυρίαρχοι πόλοι είναι οι 2 συζυγείς μιγαδικούς πόλοι:**

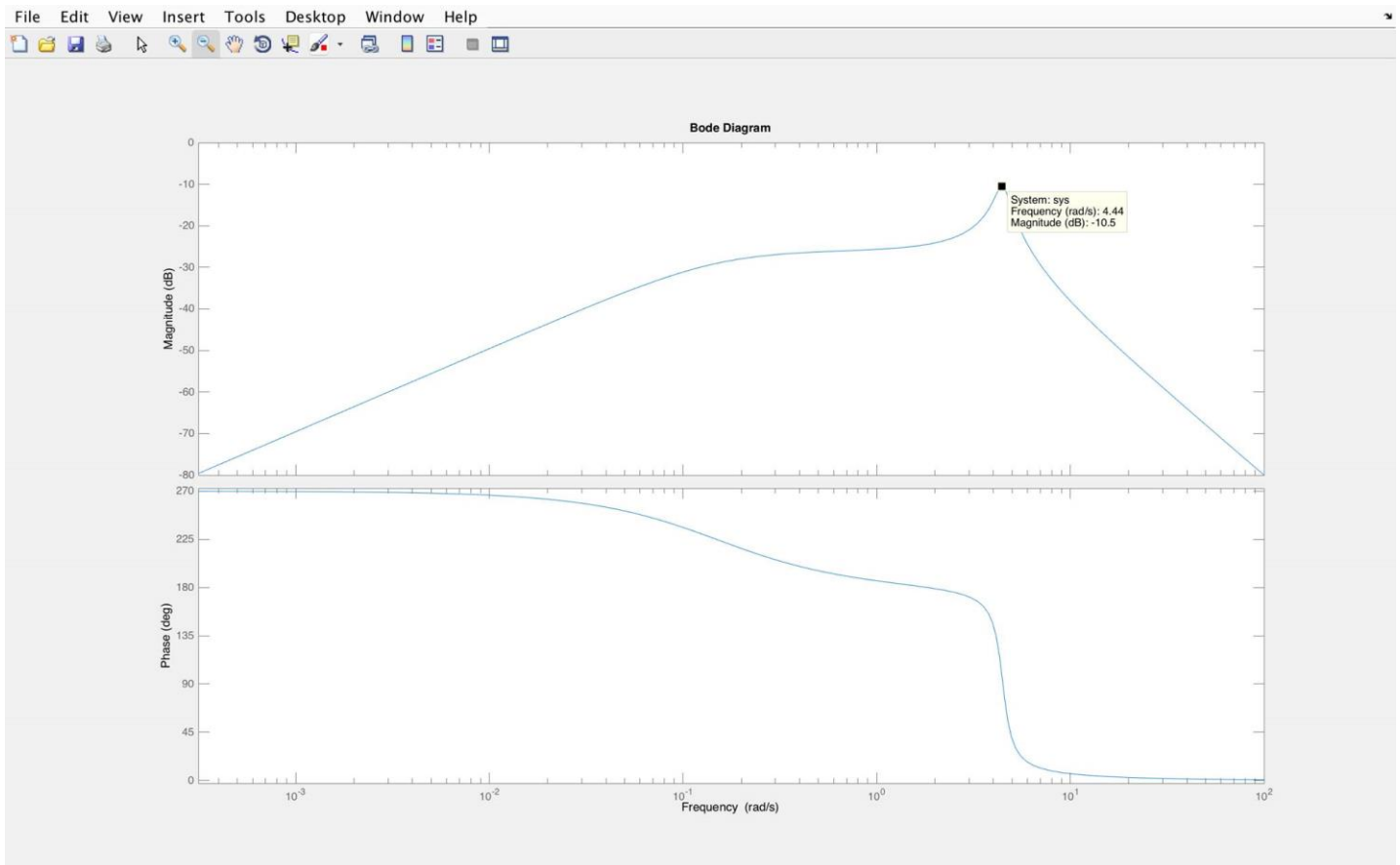
**$s = -0, 374915 + j4, 45386$**

**$s = -0, 374915 - j4, 45386$**

Με την εντολή **bode(sys)** στην Matlab παίρνουμε τον παρακάτω γεωμετρικό τόπο ριζών της συνάρτησης μεταφοράς.

Το σημείο καμπής στο bode διάγραμμα της συνάρτησης μεταφοράς δίνει και την ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης.

$$\omega=4.44$$



### Υπολογισμός $\omega$ και $\zeta$ θεωρητικά:

Η δευτεροβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση του που προκύπτει αν λάβουμε υπόψη μόνο τους επικρατούντες πόλους είναι:

$$s^2 + 0.74983s + 20.399$$

Γνωρίζουμε ότι:  $\omega_n^2=20.399$  και  $2\zeta\omega_n=0,74983$

Άρα προκύπτει:

$$\omega_n=4.5165$$

$$\zeta = \frac{0.74983}{2*4.5165}=0.083$$

### "Υποφαινόμενη" ταλάντωση μη γραμμικού για $\theta=5$

Παίρνουμε προσεγγιστικά τα 2 peaks:  $p1=0.087$ ,  $p2=0.05$

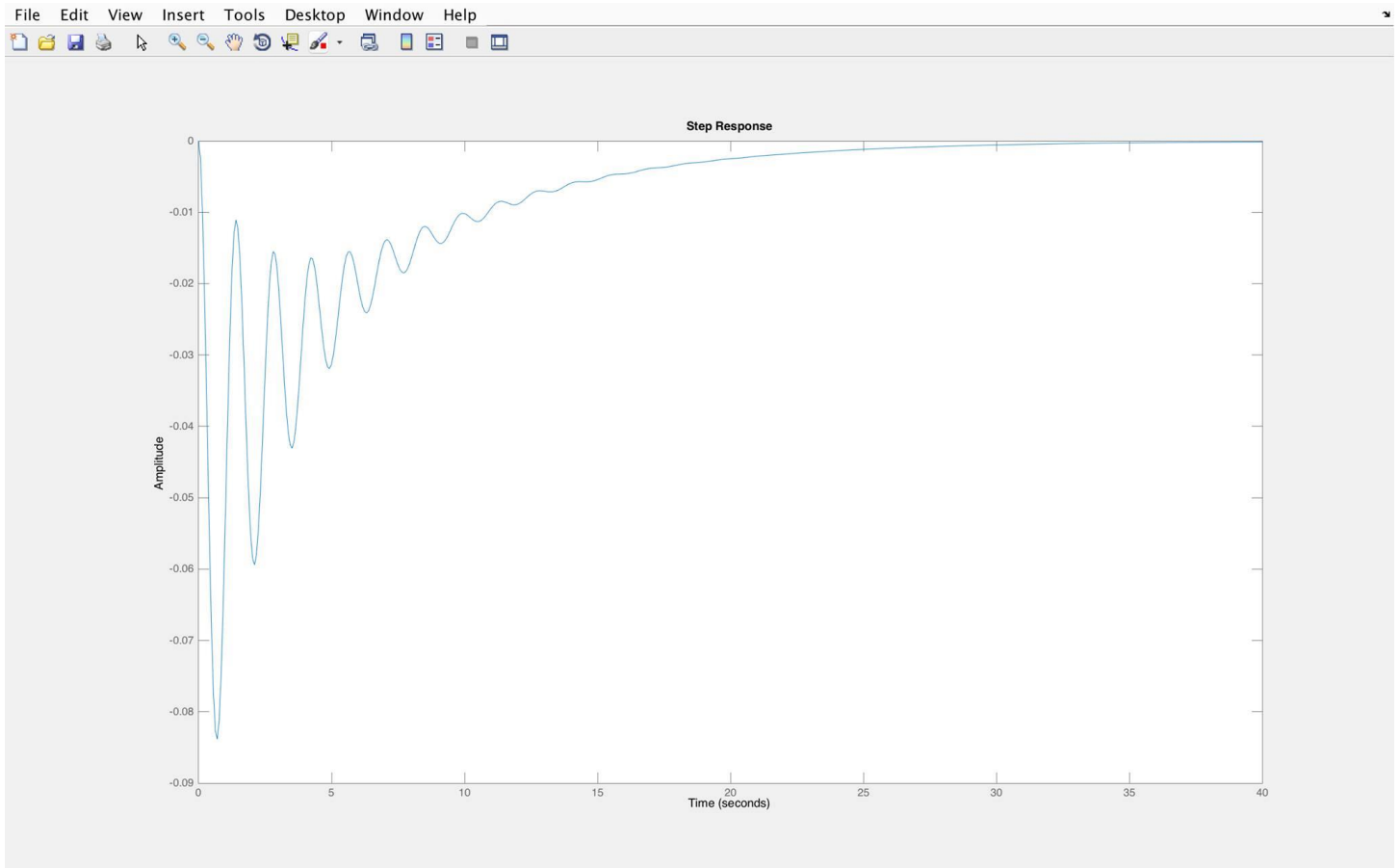
περίοδος  $\tau=2,11-0,7252=1,3848\text{s}$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow \tau=2\pi/\omega \rightarrow \omega=4,537 \text{ rad/s} \quad \text{αφού } \zeta^2 \text{ τείνει στο } 0.$$

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\zeta^* 2\pi \rightarrow -0.554 = -\zeta^* 2\pi \rightarrow \zeta = 0,088$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές της ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης και του συντελεστή απόσβεσης της υποφαινόμενης ταλάντωσης είναι ίδιες με αυτές του γραμμικού.

### Step response γραμμικού





#### 5.4)

Αντικαθιστώντας τώρα τις μεταβλητές **M=100**, **m=1**, **l=1**, **B\_l=0.3**, **B\_r=0.3**, **g=10** στις σχέσεις (6) με (9) και εκτελώντας τις πράξεις έχουμε:

$$\Delta \dot{\chi} = \Delta \ddot{\chi}$$

$$\Delta \ddot{\chi} = -0,01\Delta F - 0,003\Delta \dot{\chi} + 0,003\Delta \dot{\theta} + 0,1\Delta \theta$$

$$\Delta \dot{\theta} = \Delta \ddot{\theta}$$

$$\Delta \ddot{\theta} = 0,003\Delta \dot{\chi} - 0,303\Delta \dot{\theta} - 10,01\Delta \theta - 0,01\Delta F$$

$$\Delta z = \begin{bmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \dot{\chi} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.003 & 0,1 & 0.003 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.003 & -10,01 & -0.303 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \\ 0 \\ -0,01 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$D = [0]$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς έχουμε τον εξής κώδικα στην Matlab:

```
A = [0 1 0 0; 0 -0.003 0.1 0.003; 0 0 0 1; 0 0.003 -10.01 -0.303];
```

```
B = [0 0.01 0 -0.01]';
```

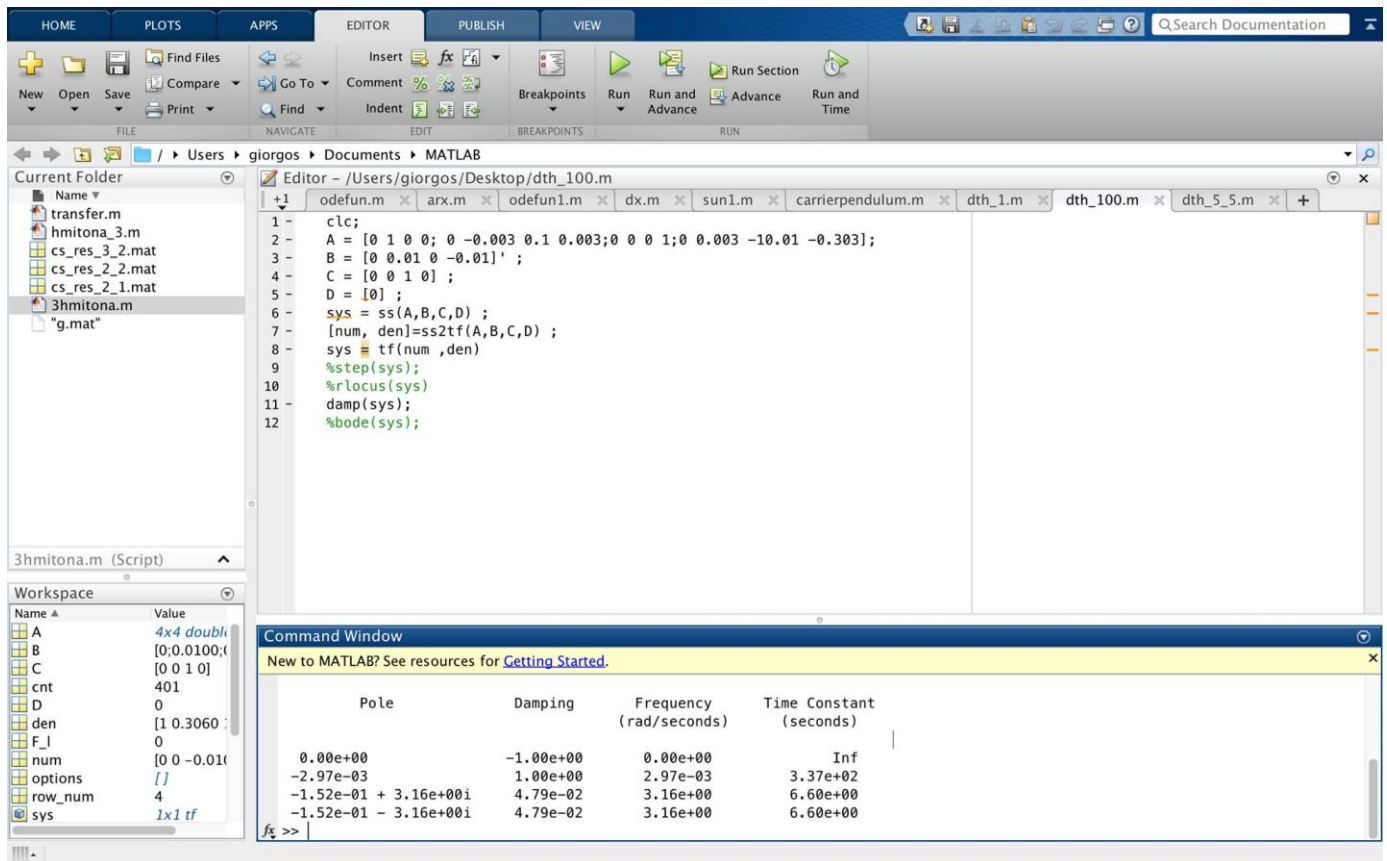
```
C = [0 0 1 0];
```

```
D = [0];
```

```
sys = ss(A,B,C,D);
```

```
[num, den]=ss2tf(A,B,C,D);
```

```
sys = tf(num,den);
```



**damp(sys);**

Όπως βλέπουμε από την παραπάνω φωτογραφία έχουμε

κυρίαρχοι πόλοι οι δύο μιγαδικοί:

**-0,152+j3,16**

**-0,152-j3,16**

Ιδιοσυχνότητα  **$\omega=3.16$**

**Υπολογισμός θεωρητικά από την χαρακτηριστική εξίσωση**

$$s^2 - 0,3s + 10,$$

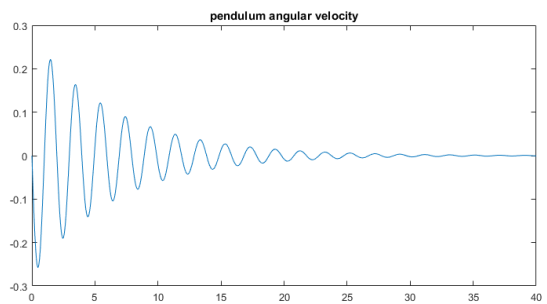
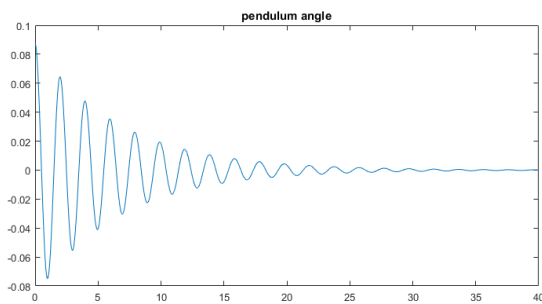
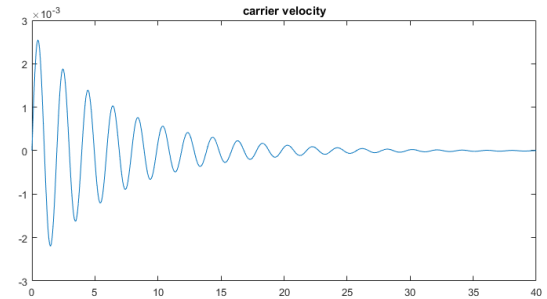
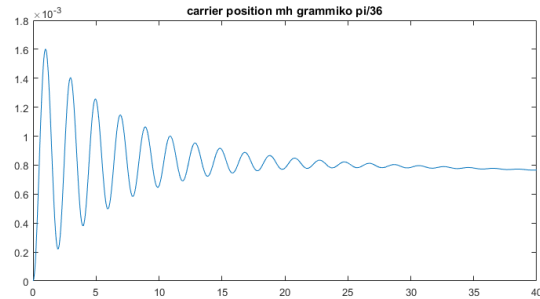
$$\text{όπου } \omega = \sqrt{10} = 3,16$$

$$2\zeta\omega=0,3 \Rightarrow \zeta=0,047 \text{ ο συντελεστής απόσβεσης.}$$

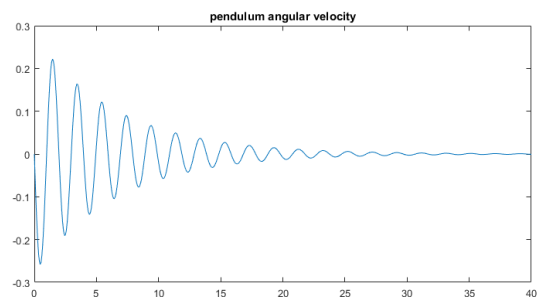
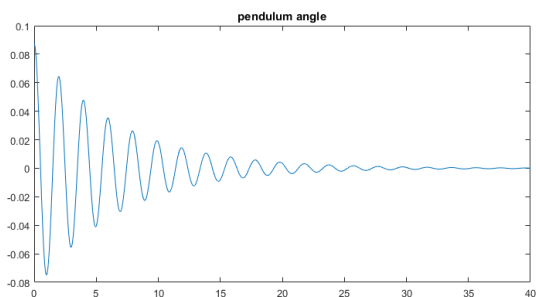
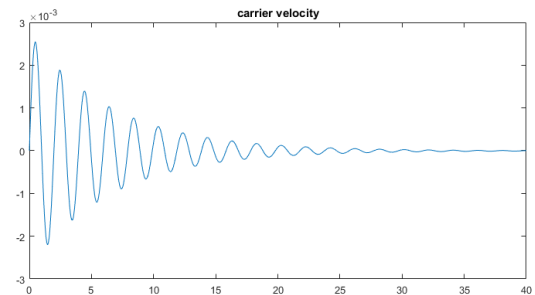
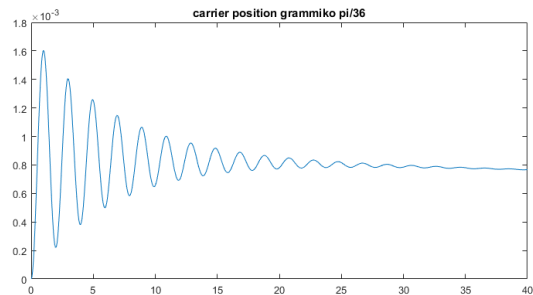
Επαναλάβαμε το πείραμα της άσκησης 5.2 με την μόνη διαφορά ότι το  $M$  είναι πολύ μεγαλύτερο από την αρχή ( $M=100$ ).

Για  $\theta=5^\circ$ :

### Μη γραμμικό

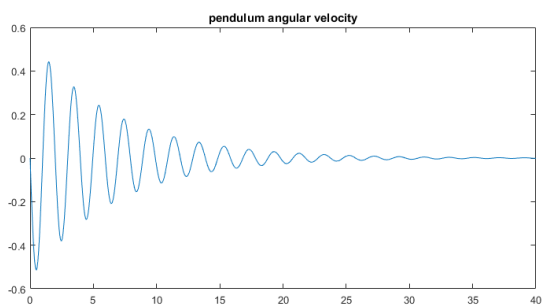
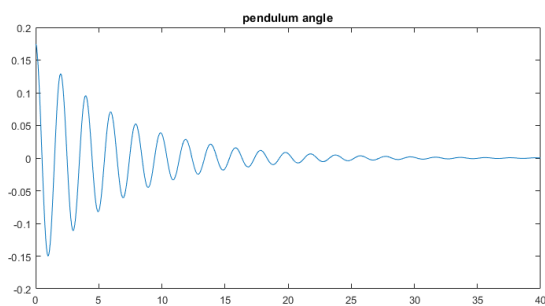
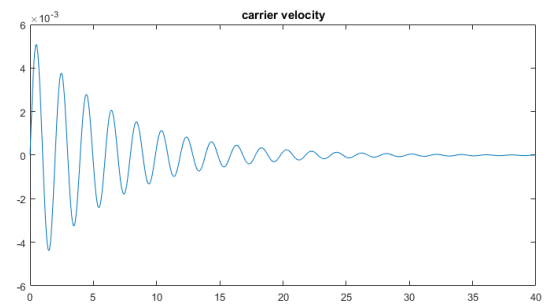
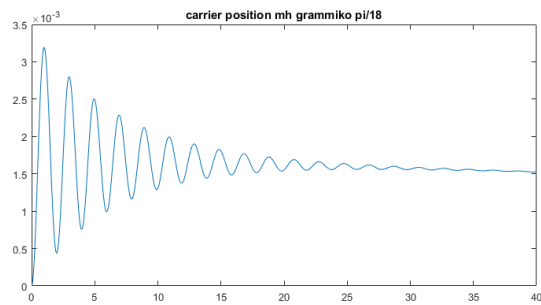


### Γραμμικό

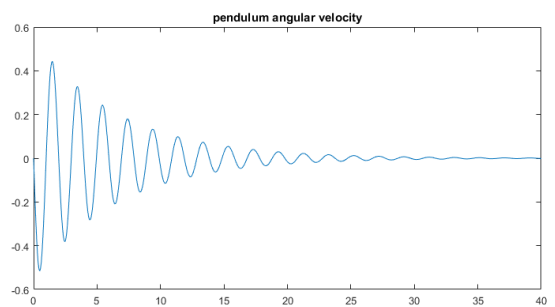
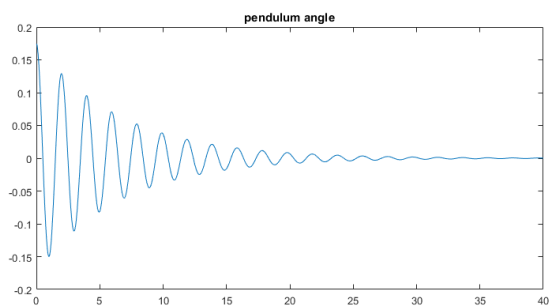
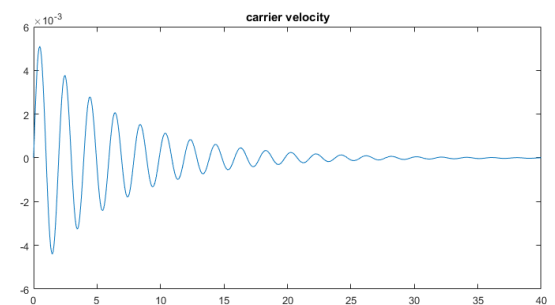
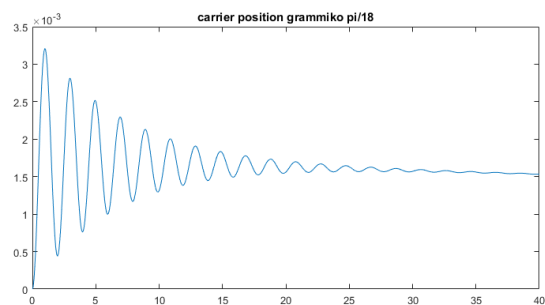


Για  $\theta=10^\circ$ :

## Μη γραμμικό

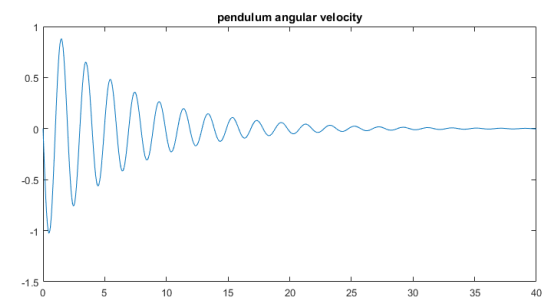
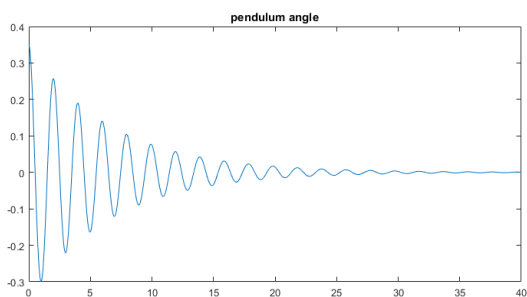
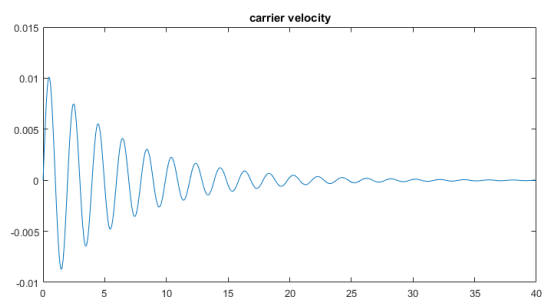
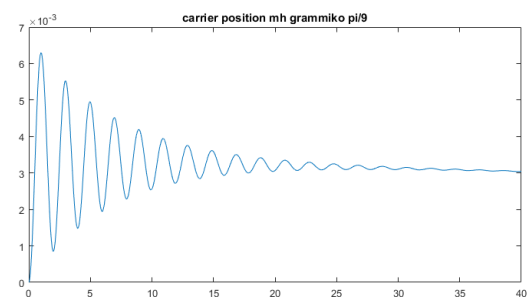


## Γραμμικό

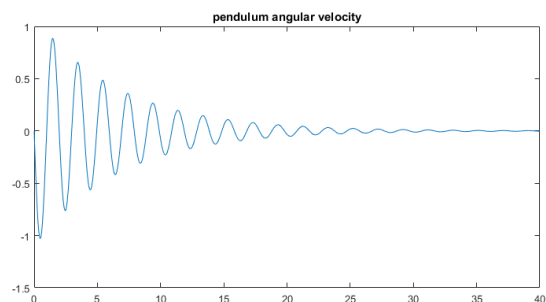
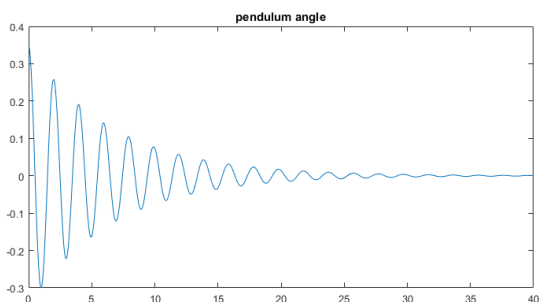
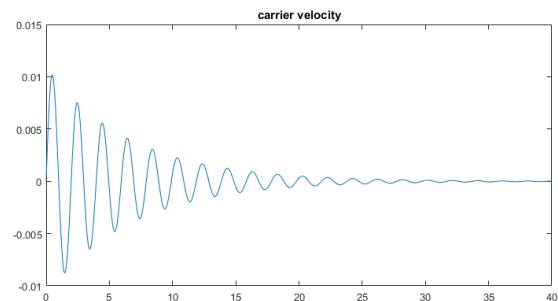
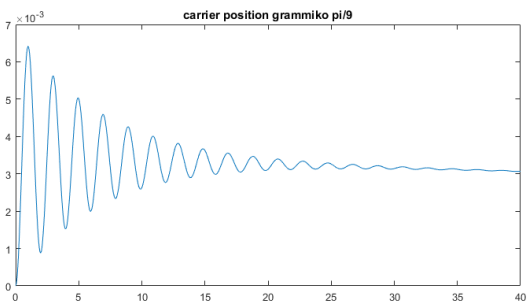


Για  $\theta=20^\circ$ :

## Μη γραμμικό

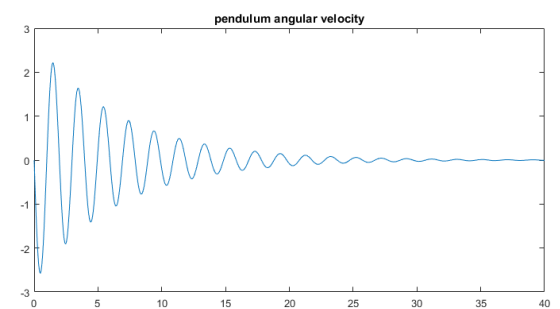
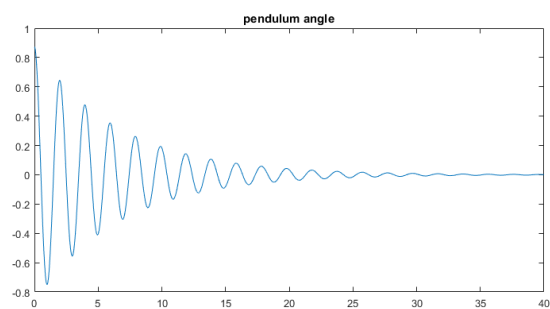
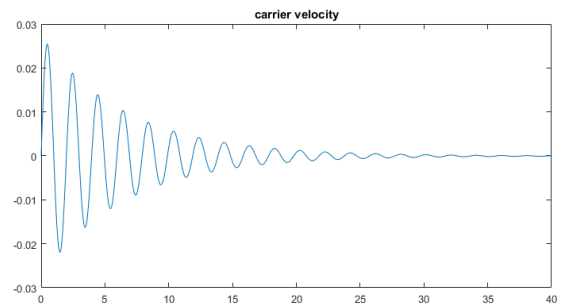
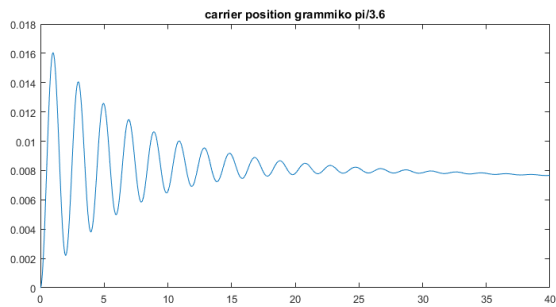


## Γραμμικό

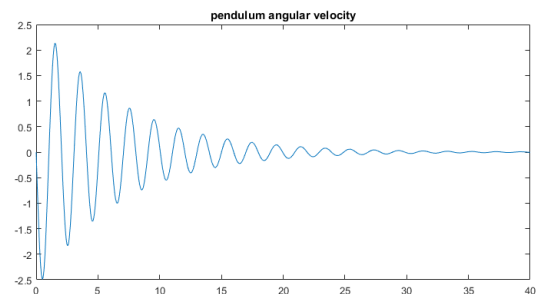
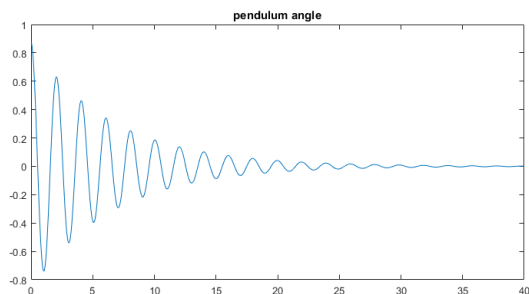
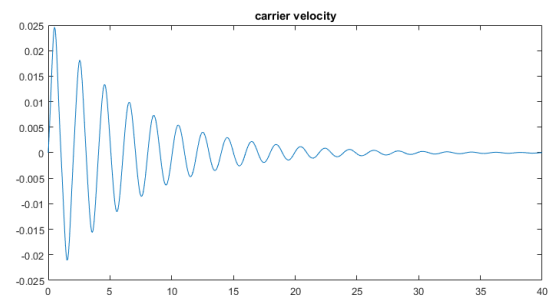
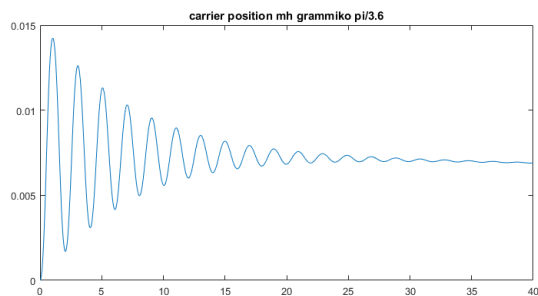


Για  $\theta=50^\circ$ :

## Γραμμικό

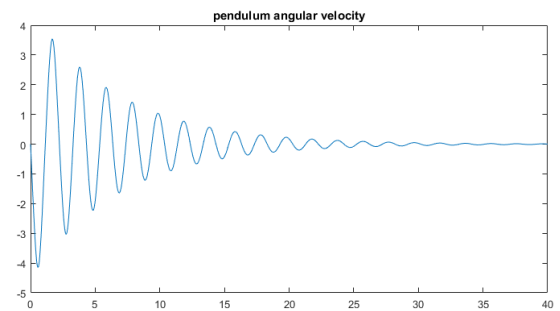
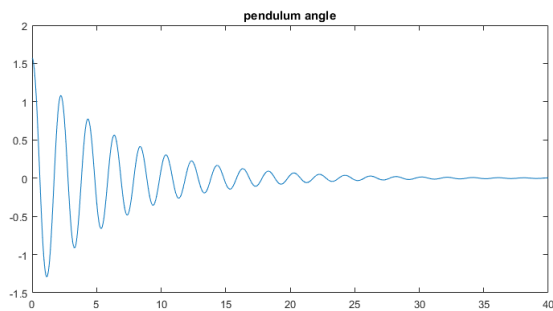
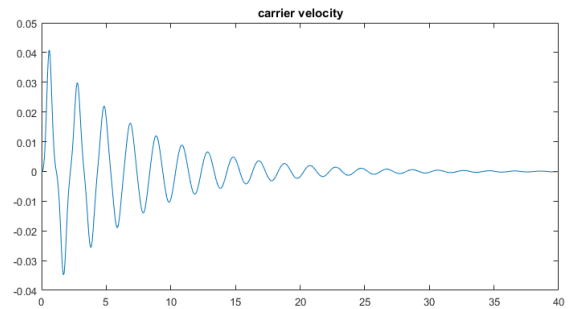
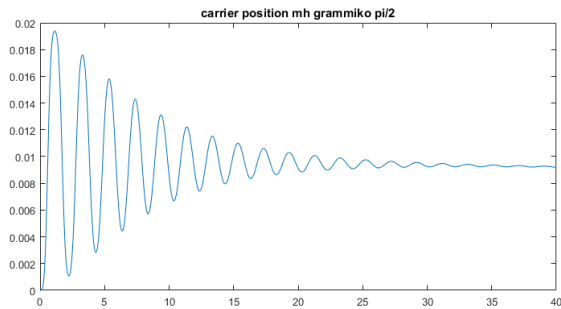


## Μη γραμμικό

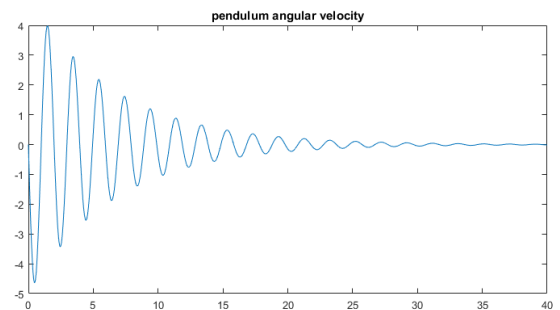
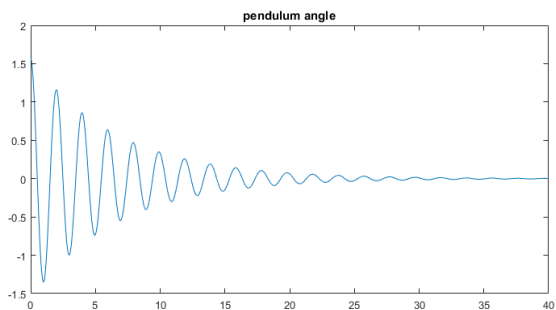
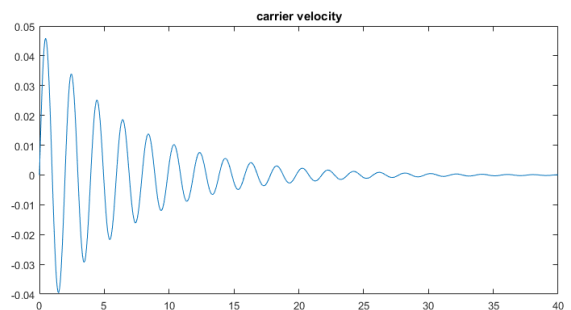
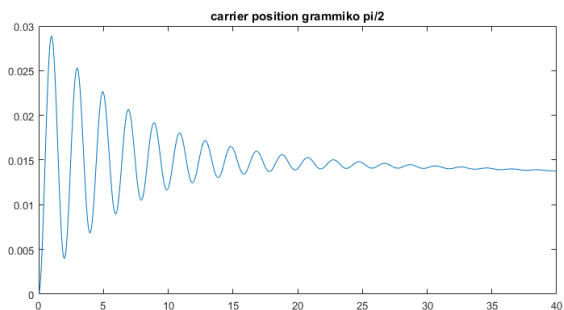


Για  $\theta=90^\circ$ :

## Μη γραμμικό

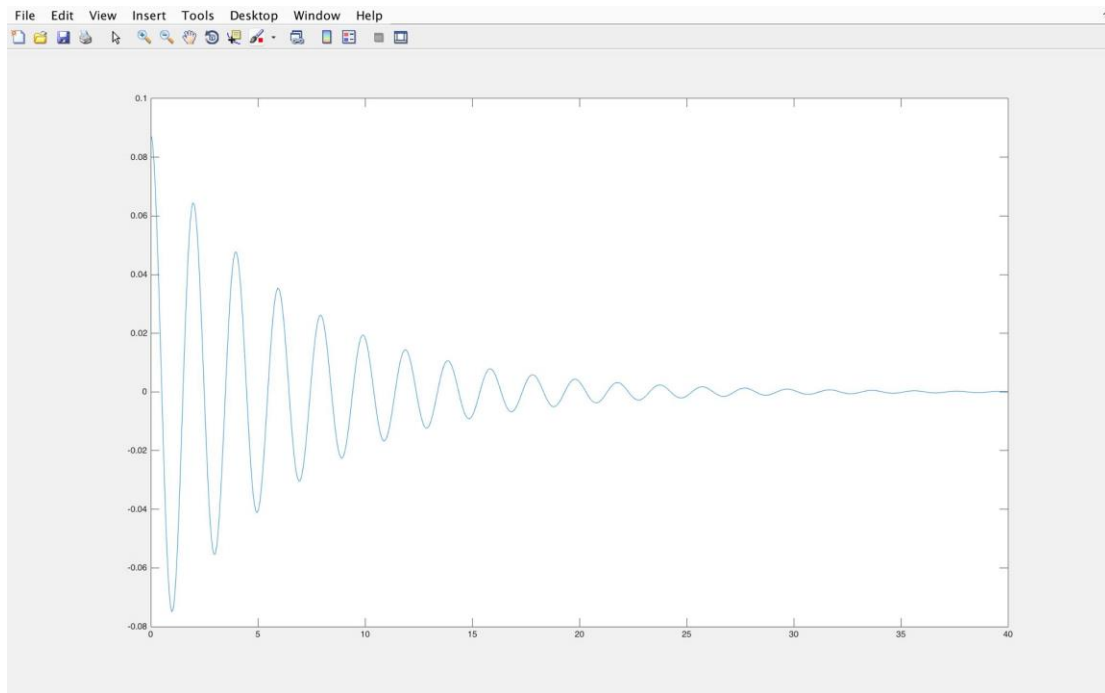


## Γραμμικό



Παρατηρούμε όπως και στο 5.2 στις μικρές γωνίες δεν υπάρχει σχεδόν καμία διαφορά απ' το μη γραμμικό στο γραμμικό. Ελάχιστα στην  $50^\circ$  και κυρίως στην  $90^\circ$  παρατηρούμε ουσιαστικές διαφορές και στα 4 γραφήματα.

Αυτό συμβαίνει διότι για μικρές μεταβολές της γωνίας ( $< 50$ ) το σύστημά μας δεν βγαίνει από την γραμμική περιοχή και ως εκ τούτου η απόκριση του μη γραμμικού συμπίπτει με του γραμμικού.



Παίρνουμε προσεγγιστικά τα 2 peaks:  $p_1 = 0.087$ ,  $p_2 = 0.065$

περίοδος  $\tau = 3 - 0.97 = 2.03$  s

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow \tau = 2\pi/\omega \rightarrow \omega = 3,095 \text{ rad/s} \quad \text{αφού } \zeta^2 \text{ τείνει στο } 0.$$

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\zeta * 2\pi \rightarrow -0.29 = -\zeta * 2\pi \rightarrow \zeta = 0,046$$

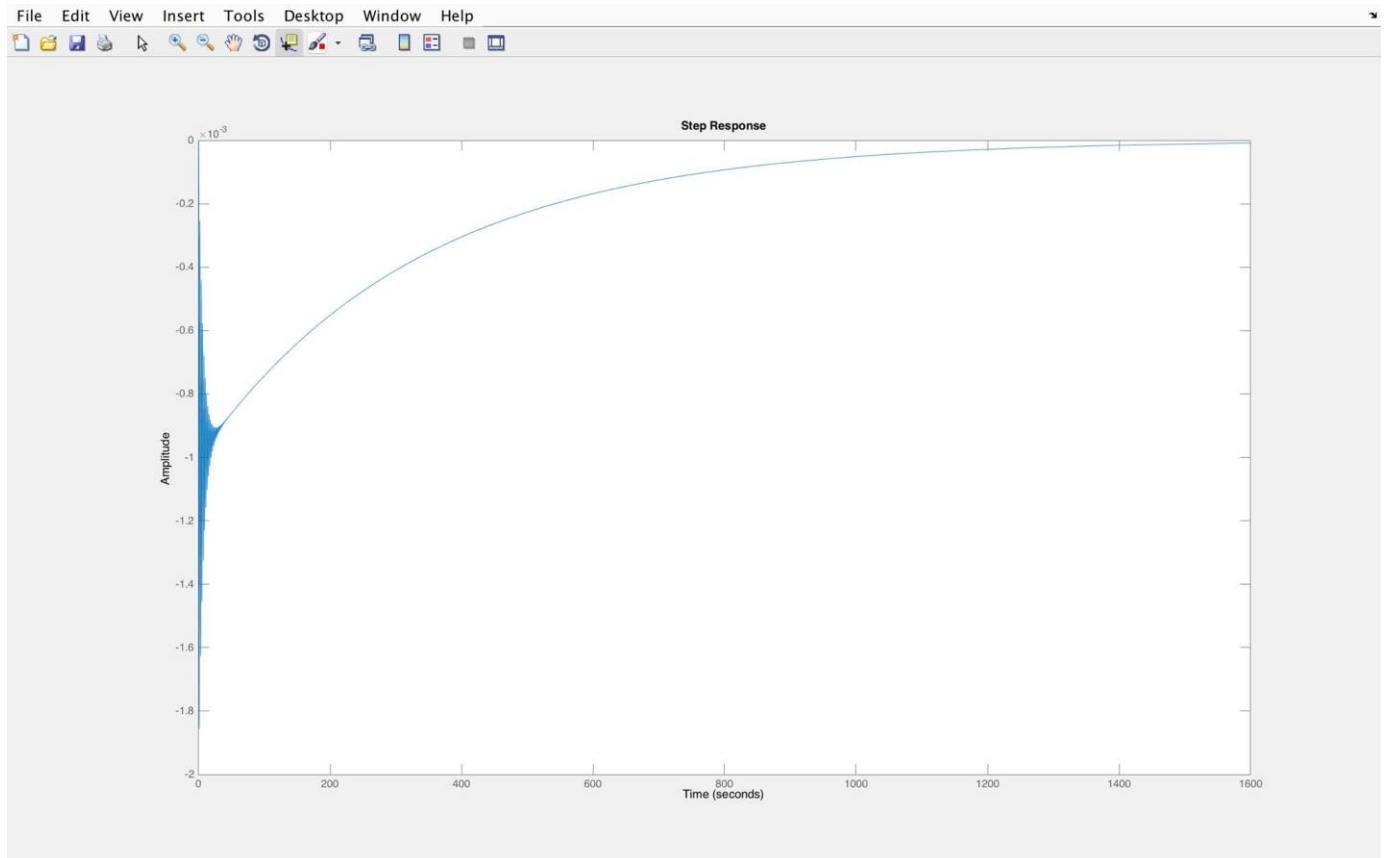
**Συντελεστής απόσβεσης γραμμικού υπολογισμένος πιο πάνω:  $\zeta = 0,047$**

Ιδιοσυχνότητα γραμμικού:  $\omega = 3,16$  rad/s

Παρατηρούμε πως οι ιδιοσυχνότητες γραμμικού και μη γραμμικού διαφέρουν. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως για πολύ μεγαλύτερο  $M$  έχουμε πολύ μεγαλύτερη αδράνεια



Τελική τιμή γραμμικού



5.5)

$$\Delta \dot{\theta} = \Delta \dot{\theta}$$

$$\Delta \ddot{\theta} = -0,3\Delta \dot{\theta} - \Delta \theta$$

$$\Delta z = \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -0.3 \end{bmatrix} * \Delta z, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \Delta z$$

The image shows a MATLAB Editor window with the script 'dth\_5\_5.m' open. The script defines a continuous-time transfer function system 'sys' using the state-space matrices A, B, C, and D. The Command Window displays the results of the system analysis, including the poles, damping, frequency, and time constant.

```

1 - A = [0 1 ; -10 -0.3];
2 - B = [0 0]' ;
3 - C = [1 0] ;
4 - D = [0] ;
5 - sys = ss(A,B,C,D)
6 - [num, den]=ss2tf(A,B,C,D) ;
7 - sys = tf(num,den)
8 - %step(sys);
9 - damp(sys);
10 - %bode(sys)
11 - rlocus(sys)

```

Command Window Output:

```

New to MATLAB? See resources for Getting Started.
Continuous-time transfer function.

      Pole           Damping      Frequency      Time Constant
      (rad/seconds)      (seconds)

-1.50e-01 + 3.16e+00i    4.74e-02    3.16e+00    6.67e+00
-1.50e-01 - 3.16e+00i    4.74e-02    3.16e+00    6.67e+00

```

**Ιδιοσυχνότητα = 3,16**

**Θεωρητικά έχουμε:**

**Απ' την χαρακτηριστική εξίσωση:**

$$s^2 - 0,3s + 10,$$

$$\text{όπου } \omega = \sqrt{10} = 3,16$$

$$2\zeta\omega=0,3 \Rightarrow \zeta=0,047 \text{ ο συντελεστής απόσβεσης.}$$

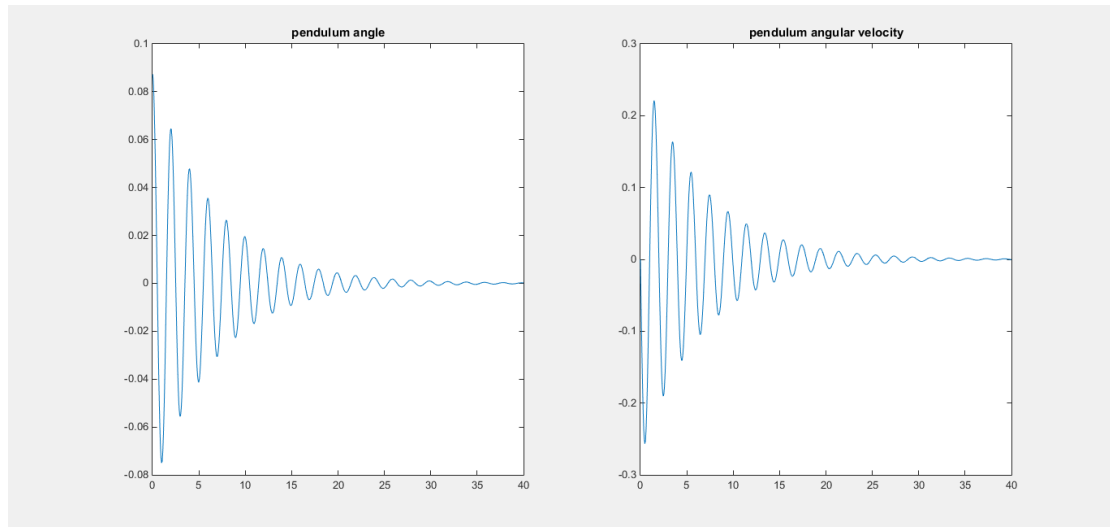
Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε στη Matlab για τα διάφορα θ:

```
t_in=0 ;  
t_fin=40 ;  
z0=[pi/36 0];  
u=0;  
[t, z] = ode45(@(t,z)odefun(t,z,u), [t_in t_fin], z0) ;  
figure(1)  
subplot(1,2,1),plot(t,z(:,1)),title('pendulum angle')  
subplot(1,2,2),plot(t,z(:,2)),title('pendulum angular velocity')
```

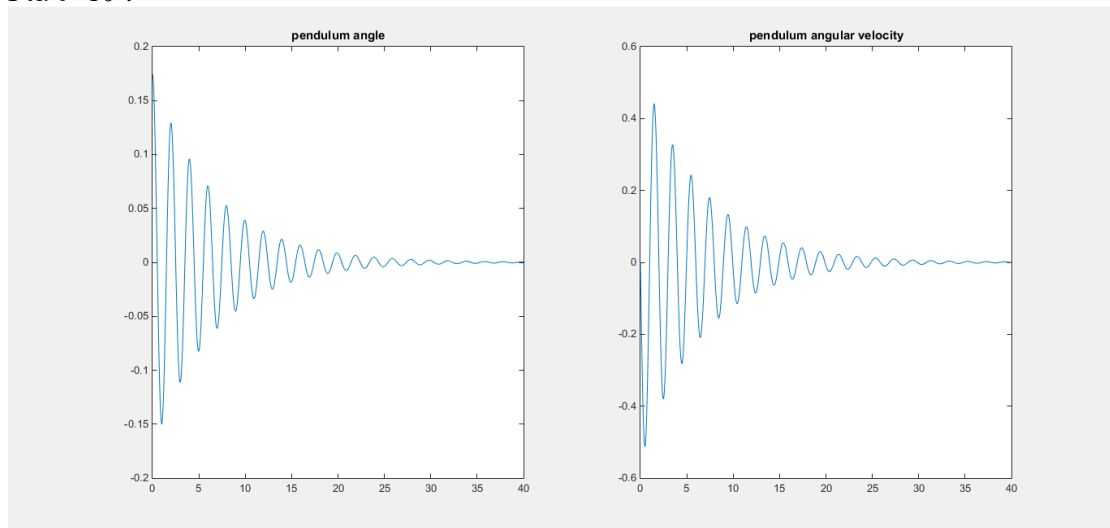
```
function zdot = odefun(t,z,u)  
F_l=u;  
m=1;  
l=1;  
B_l=0.3;  
B_r=0.3;  
g=10;  
zdot(1)= z(2);  
zdot(2)= -(B_r*z(2))/(m*l.^2)-(g*z(1))/l;  
zdot = zdot';  
end
```

Επαναλάβαμε το πείραμα της άσκησης 5.2 με την μόνη διαφορά ότι το  $M$  ήταν πολύ μεγαλύτερο από την αρχή ( $M=\infty$ ).

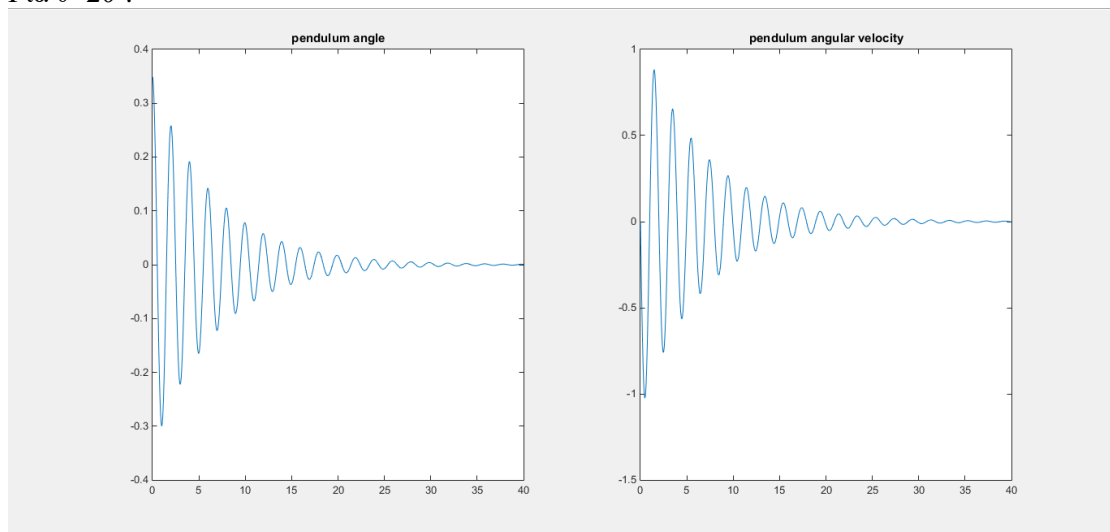
Για  $\theta=5^\circ$ :



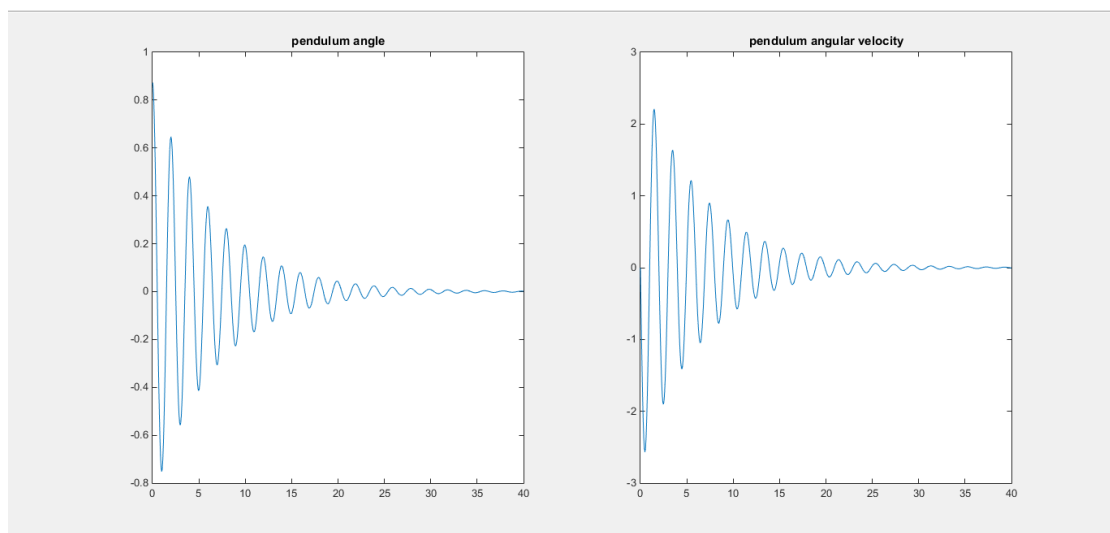
Για  $\theta=10^\circ$ :



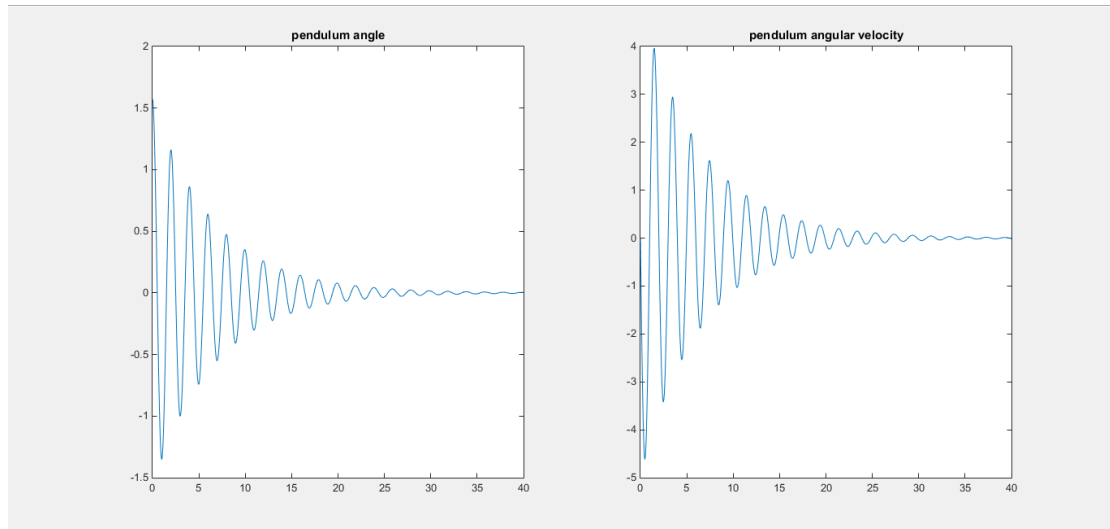
Για  $\theta=20^\circ$ :



Για  $\theta=50^\circ$ :



Για  $\theta=90^\circ$ :



Σύγκριση με 5.2:

Για  $M=\infty$  έχουμε πολύ περισσότερες ταλαντώσεις και με μεγαλύτερος πλάτος σε σχέση με το  $M=1$ .

Επίσης και ο χρόνος για τον οποίο σταθεροποιείται το σύστημα για  $M=100$  είναι αρκετές φορές μεγαλύτερος.

Τα παραπάνω ισχύουν για όλες τις τιμές που παίρνει το  $\theta$ .