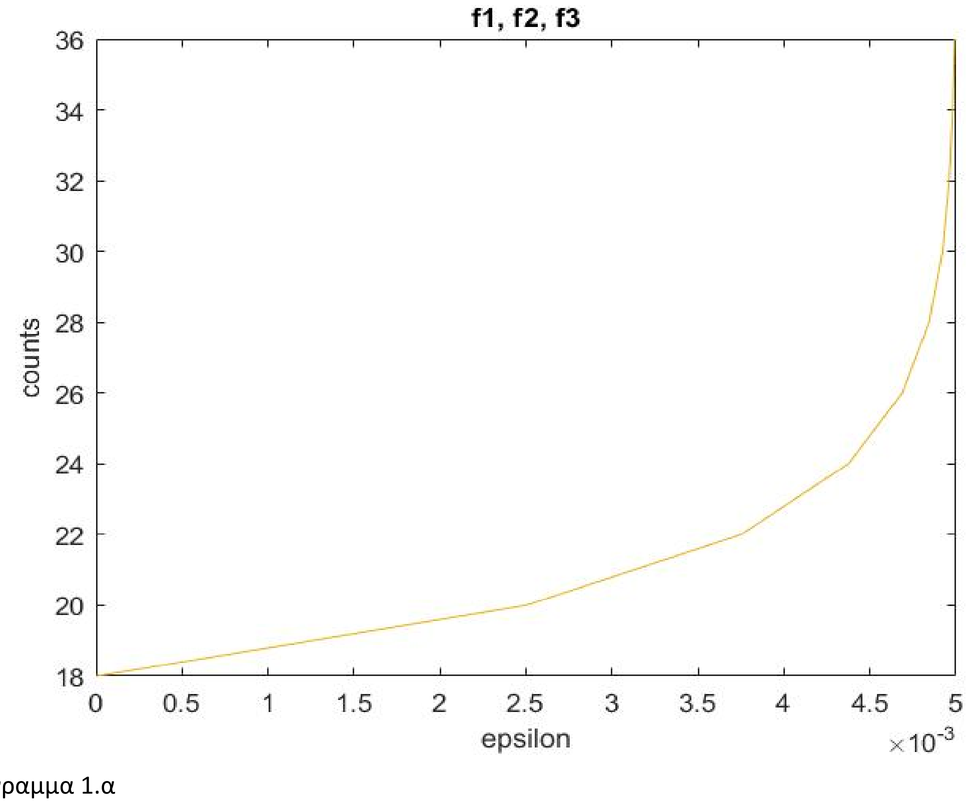
ΕΡΓΑΣΙΑ 1η
Ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης μιας μεταβλητής σε δοσμένο διάστημα.

ΘΈΜΑ 1Ο

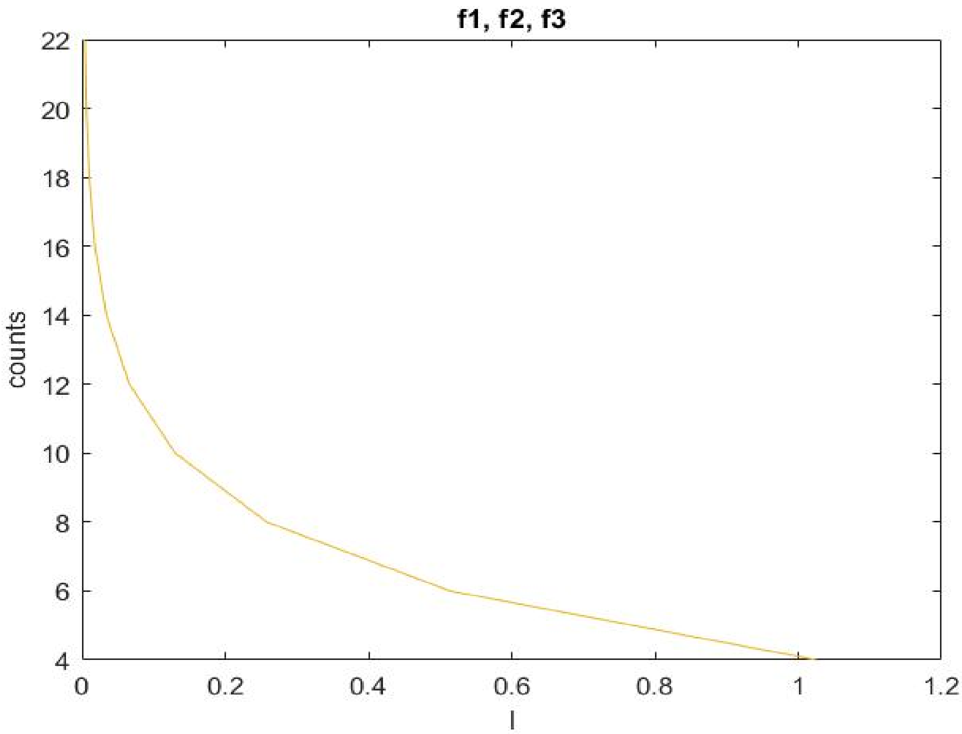
Μέθοδος της Διχοτόμου

Αρχικά, για σταθερό τελικό εύρος αναζήτησης l = 0.01 και σταθερά ε να παίρνει τιμές 0.0025, 0.0038, 0.0044, 0.0047, 0.0048, 0.0049, 0.005, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα κλήσεων των συναρτήσεων προς τις τιμές του ε είναι ίδιο και για τις τρείς δοθείσες συναρτήσεις ($f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$), διάγραμμα 1.α. Επομένως, αντιλαμβανόμαστε ότι ο αριθμός επαναλήψεων του αλγορίθμου δεν εξαρτάται από τον τύπο της συνάρτησης, αλλά μόνο από το αρχικό διάστημα [α,β]. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η τιμή της σταθεράς ε αυξάνονται οι κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή αυξάνονται και οι επαναλήψεις που απαιτούνται για την ολοκλήρωση του αλγορίθμου. Τέλος, βλέπουμε ότι δεν πρόκειται για γραμμική μεταβολή του αριθμού κλήσης της αντικειμενικής συνάρτησης, καθώς όσο αυξάνει η τιμή του ε αυξάνει και ο ρυθμός αύξησης των κλήσεων της f.



Διάγραμμα 1.α

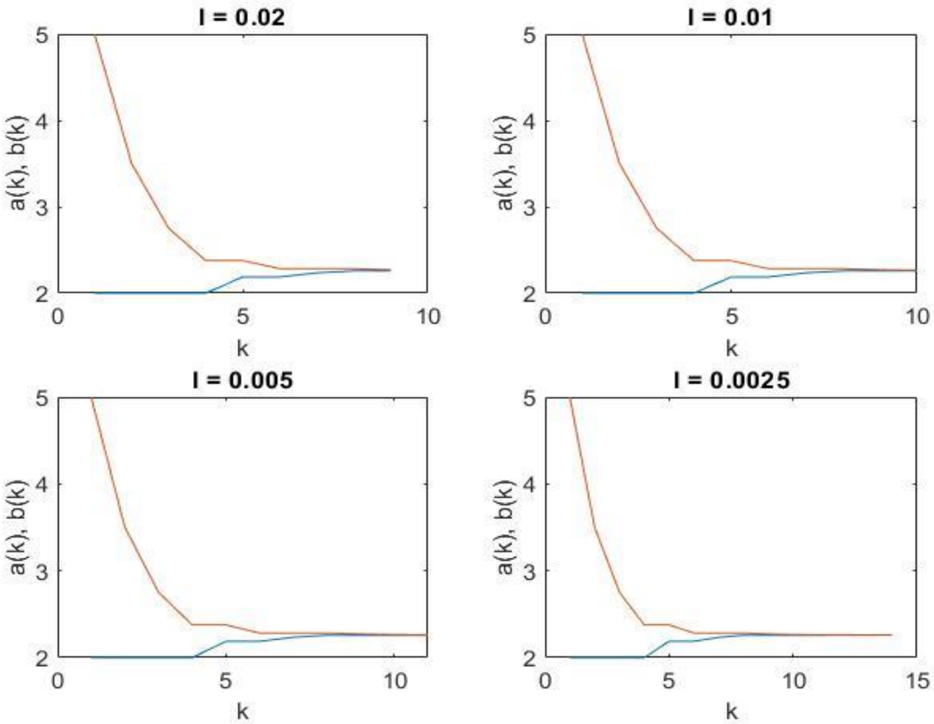
Με παρόμοιο τρόπο, για σταθερό ε = 0.001 και l να παίρνει τιμές 0.004, 0.006, 0.01, 0.018, 0.034, 0.066, 0.13, 0.258, 0.514, 1,026, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα κλήσεων των συναρτήσεων προς τις τιμές του l είναι ίδιο και για τις τρείς δοθείσες συναρτήσεις ($f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$), όπως προηγουμένως, διάγραμμα 1.β. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνει η τιμή του εύρους αναζήτησης l, μειώνονται οι κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή μειώνονται οι επαναλήψεις που απαιτούνται για την ολοκλήρωση του αλγορίθμου. Τέλος, βλέπουμε ότι δεν πρόκειται για γραμμική μεταβολή του αριθμού κλήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης, καθώς όσο αυξάνει η τιμή του l, μειώνεται ο ρυθμός μείωσης των κλήσεων της f.



Διάγραμμα 1.β

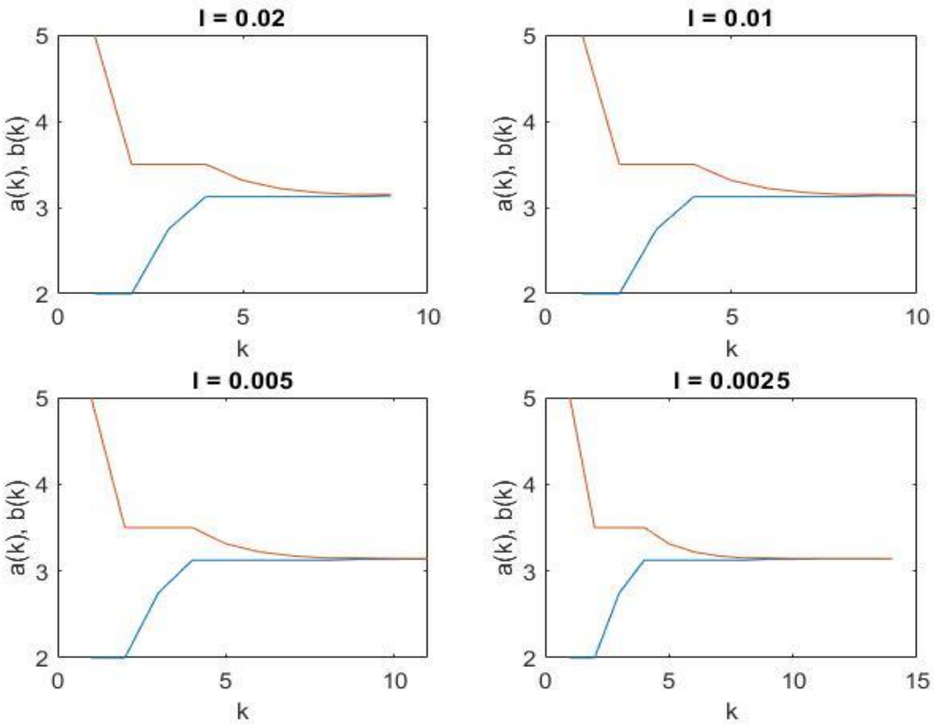
Στα επόμενα 3 διαγράμματα φαίνονται οι σχέσεις των άκρων α, β συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων, k, για τις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ αντίστοιχα. Παρουσιάζονται τέσσερα διαφορετικά διαγράμματα για κάθε συνάρτηση, ένα για κάθε μια από τις τέσσερις διαφορετικές τιμές του l (0.02, 0.01, 0.005, 0.0025). Με μπλε χρώμα παρουσιάζεται η μεταβολή του άκρου α και με κόκκινο χρώμα η μεταβολή του β. Αναμενόμενο είναι ότι τα δύο άκρα δεν μεταβάλλονται ποτέ ταυτόχρονα, καθώς πάντα το ένα από τα δύο μένει σταθερό. Τέλος βλέπουμε ότι το «μοτίβο» μεταβολής των α, β δεν αλλάζει για διαφορετικές τιμές του l για κάθε συνάρτηση. Αυτό που επηρεάζεται είναι ο αριθμός επαναλήψεων k μέχρι να φτάσουμε στο επιθυμητό διάστημα, που όπως είναι φανερό όσο μικρότερο είναι τόσο περισσότερες επαναλήψεις απαιτούνται.

Για την $f_1(x) = (x-2)^2 - \sin(x+3)$,



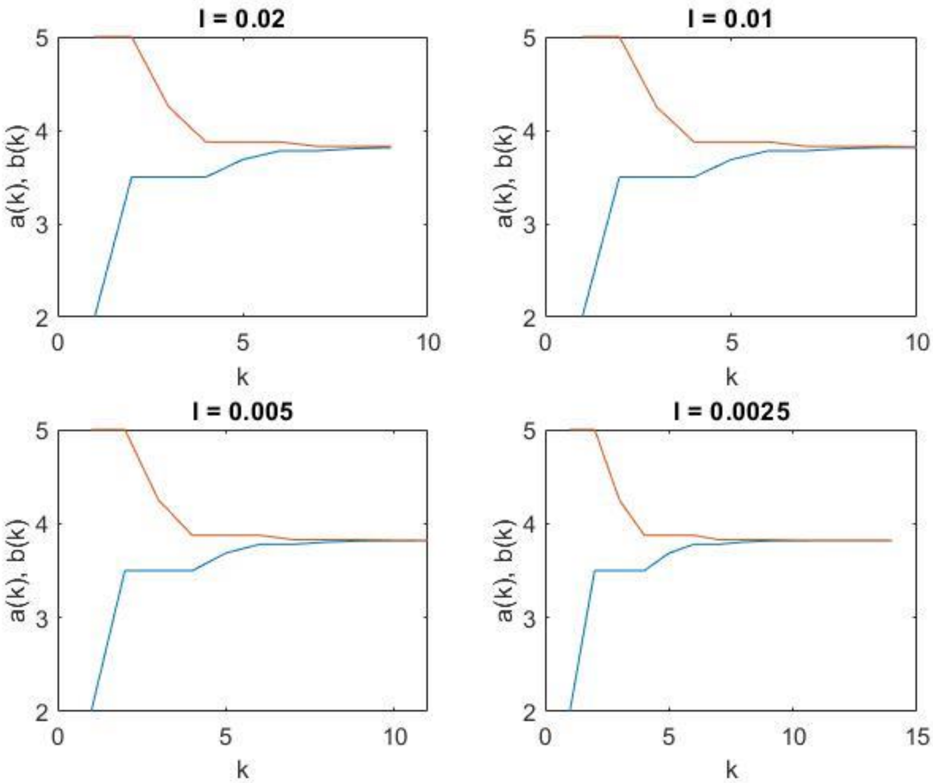
Διάγραμμα 1.γ

Για την $f_2(x) = e^{-5x} + (x+2)\cos^2(0.5x)$,



Διάγραμμα 1.δ

Και για την $f_3(x) = x^2\sin(x+2) - (x+1)^2$,

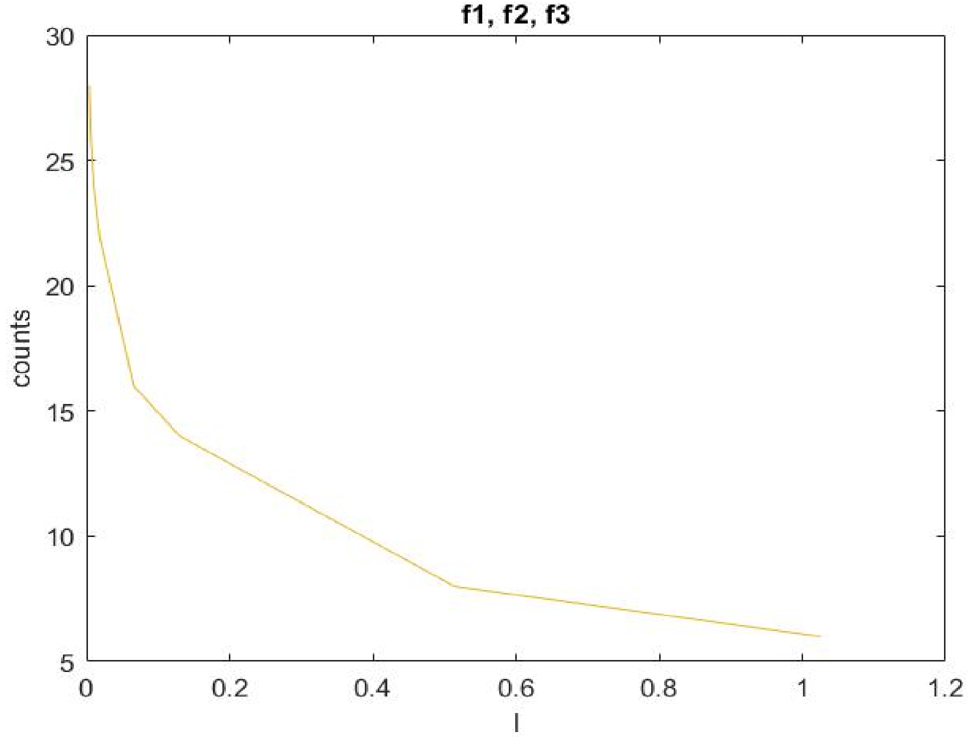


Διάγραμμα 1.ε

<u>ΘΈΜΑ 2^Ο</u>

<u>Μέθοδος του Χρυσού Τομέα</u>

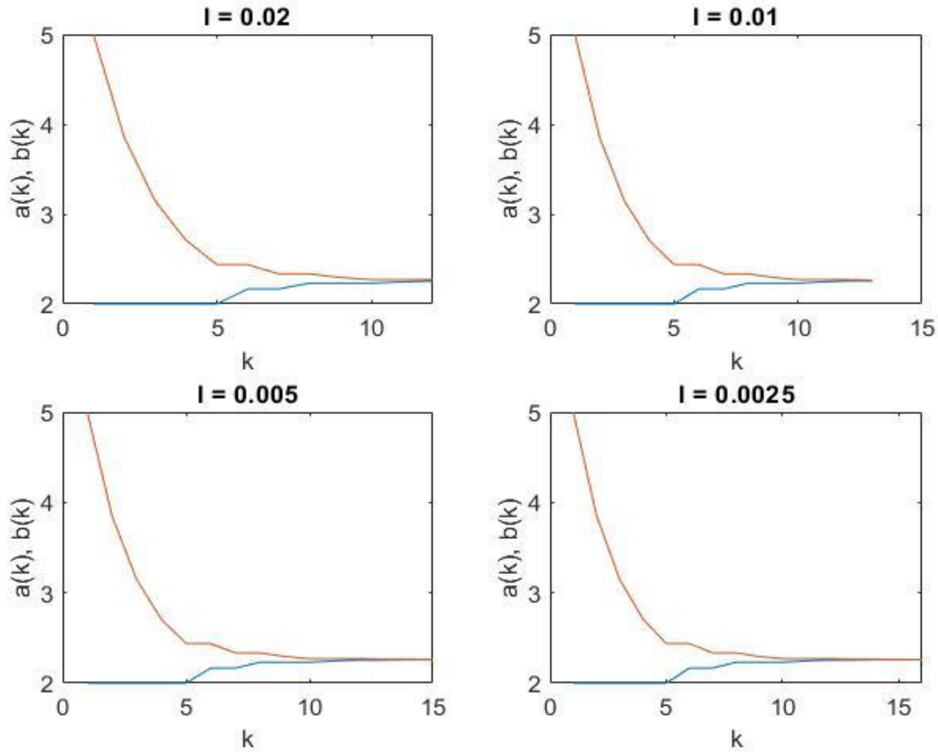
Το αρχικό διάστημα [α,β] είναι γνωστό και ίσο με [2,5], η σταθερά αναλογίας γ = 0.618, και το l παίρνει τιμές 0.004, 0.006, 0.01, 0.018, 0.034, 0.066, 0.13, 0.258, 0.514, 1,026. Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα κλήσεων των συναρτήσεων προς τις τιμές του l είναι ίδιο και για τις τρείς δοθείσες συναρτήσεις ($f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$), όπως προηγουμένως, διάγραμμα 2.α. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνει η τιμή του εύρους αναζήτησης l, μειώνονται οι κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή μειώνονται οι επαναλήψεις που απαιτούνται για την ολοκλήρωση του αλγορίθμου. Τέλος, βλέπουμε ότι δεν πρόκειται για γραμμική μεταβολή του αριθμού κλήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης, καθώς όσο αυξάνει η τιμή του l, μειώνεται ο ρυθμός μείωσης των κλήσεων της f.



Διάγραμμα 2.α

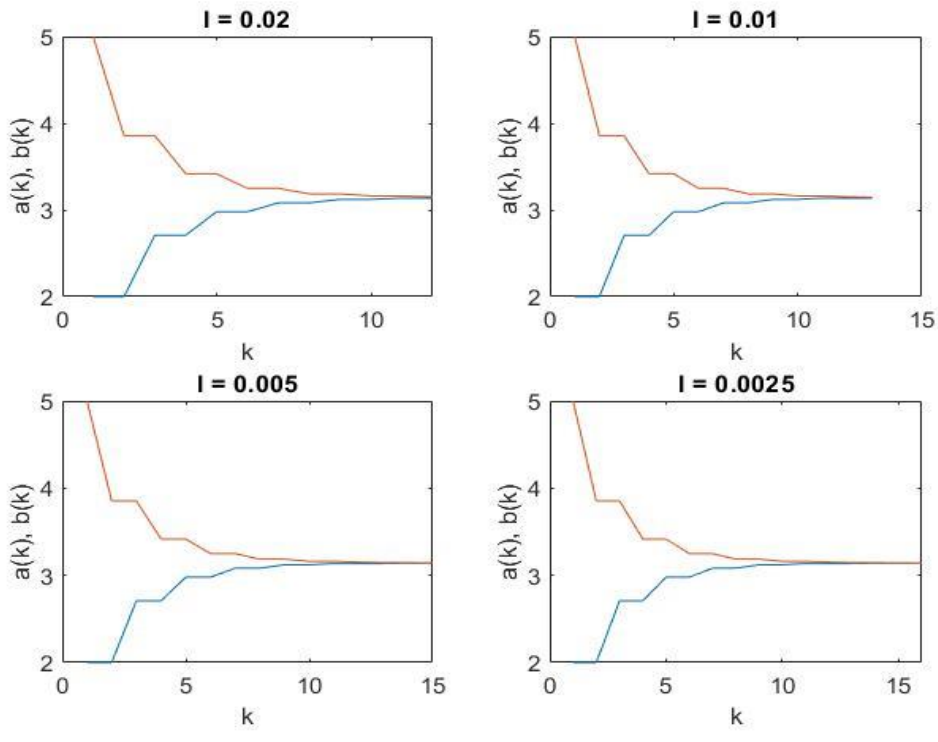
Στα επόμενα 3 διαγράμματα φαίνονται οι σχέσεις των άκρων α, β συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων, k, για τις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ αντίστοιχα. Παρουσιάζονται τέσσερα διαφορετικά διαγράμματα για κάθε συνάρτηση, ένα για κάθε μια από τις τέσσερις διαφορετικές τιμές του l (0.02, 0.01, 0.005, 0.0025). Με μπλε χρώμα παρουσιάζεται η μεταβολή του άκρου α και με κόκκινο χρώμα η μεταβολή του β. Αναμενόμενο είναι ότι τα δύο άκρα δεν μεταβάλλονται ποτέ ταυτόχρονα, καθώς πάντα το ένα από τα δύο μένει σταθερό στην τιμή που είχε στην προηγούμενη επανάληψη. Τέλος βλέπουμε ότι το «μοτίβο» μεταβολής των α, β δεν αλλάζει για διαφορετικές τιμές του l για κάθε συνάρτηση. Αυτό που επηρεάζεται είναι ο αριθμός επαναλήψεων k μέχρι να φτάσουμε στο επιθυμητό διάστημα, που όπως είναι φανερό όσο μικρότερο είναι τόσο περισσότερες επαναλήψεις απαιτούνται.

Για την $f_1(x) = (x-2)^2 - \sin(x+3)$,



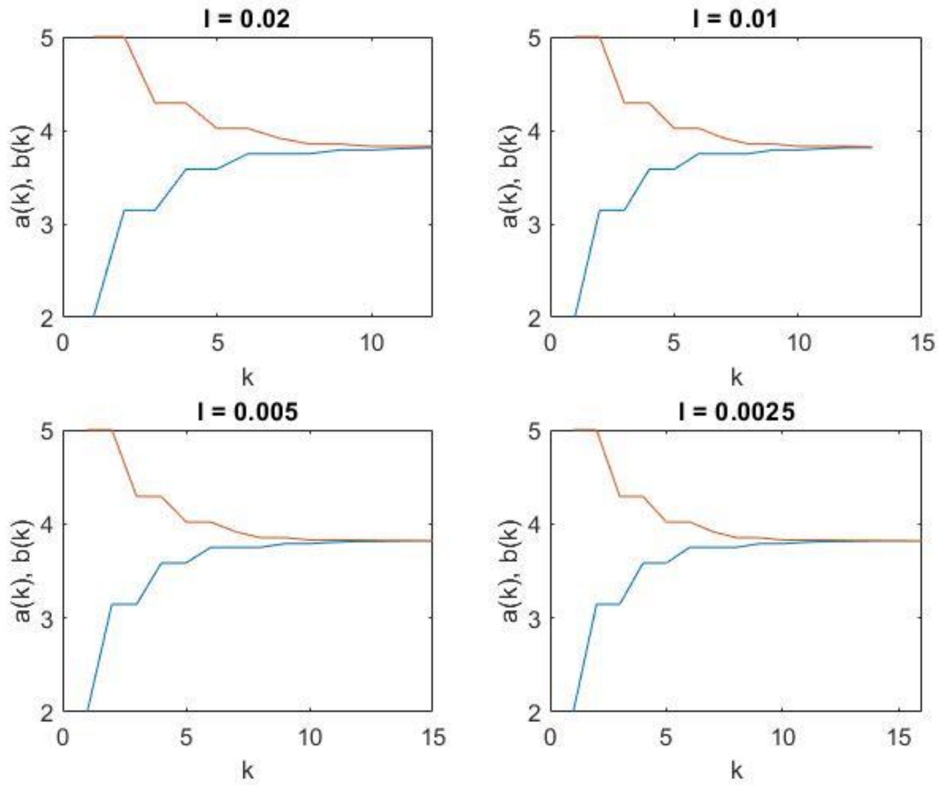
Διάγραμμα 2.β

Για την $f_2(x) = e^{-5x} + (x+2)\cos^2(0.5x)$,



Διάγραμμα 2.γ

Και για την $f_3(x) = x^2\sin(x+2) - (x+1)^2$,

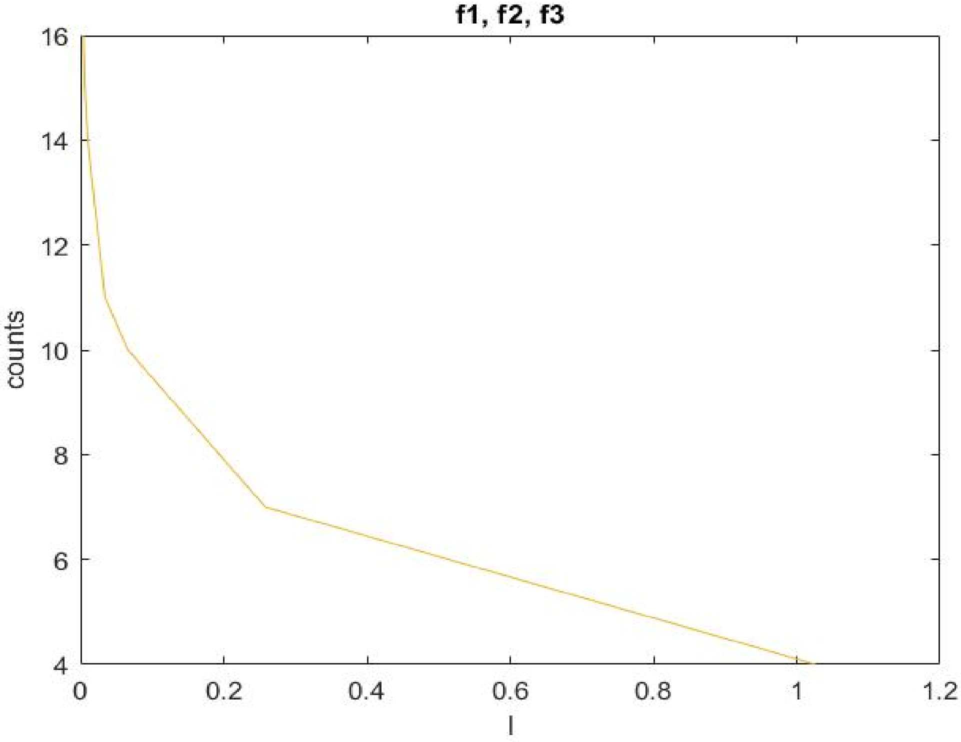


Διάγραμμα 2.δ

<u>ΘΈΜΑ 3^Ο^</u>

<u>Μέθοδος Fibonacci</u>

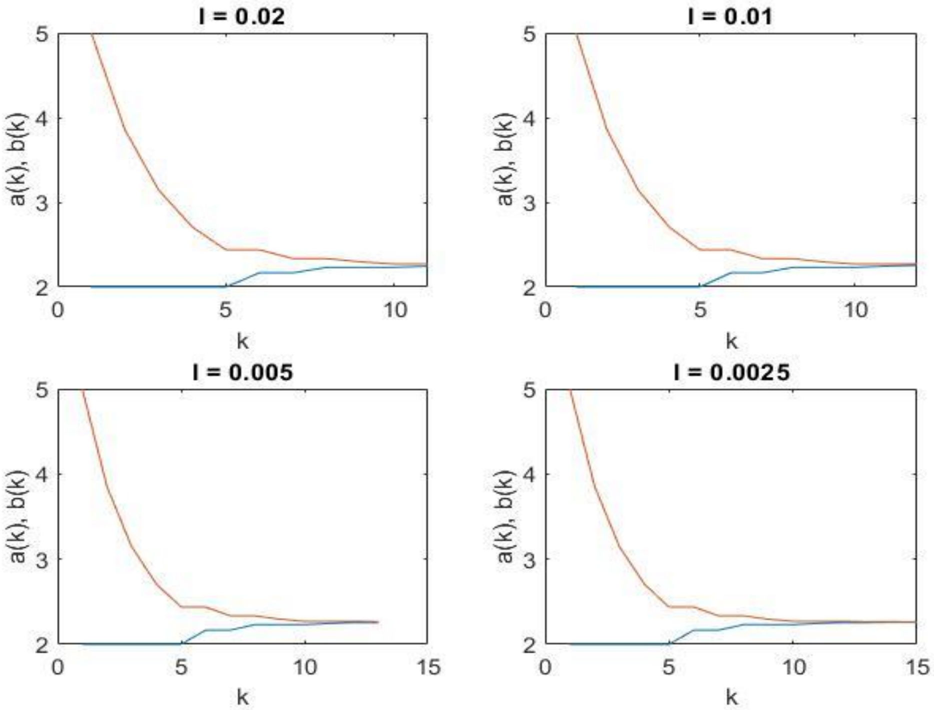
Το αρχικό διάστημα [α,β] είναι γνωστό και ίσο με [2,5] και το l παίρνει τιμές 0.004, 0.006, 0.01, 0.018, 0.034, 0.066, 0.13, 0.258, 0.514, 1,026. Η ακολουθία Fibonacci σε μορφή κώδικα μπορεί να βρεθεί μέσα στο αρχείο Fibonacci_1.m και Fibonacci_2.m. Όσων αφορά το διάγραμμα κλήσεων των συναρτήσεων προς τις τιμές του l, παρατηρούμε ότι είναι ίδιο και για τις τρείς δοθείσες συναρτήσεις ($f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$), διάγραμμα 3.α. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνει η τιμή του εύρους αναζήτησης l, μειώνονται οι κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή μειώνονται οι επαναλήψεις που απαιτούνται για την ολοκλήρωση του αλγορίθμου. Τέλος, βλέπουμε ότι δεν πρόκειται για γραμμική μεταβολή του αριθμού κλήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης, καθώς όσο αυξάνει η τιμή του l, μειώνεται ο ρυθμός μείωσης των κλήσεων της f.



Διάγραμμα 3.α

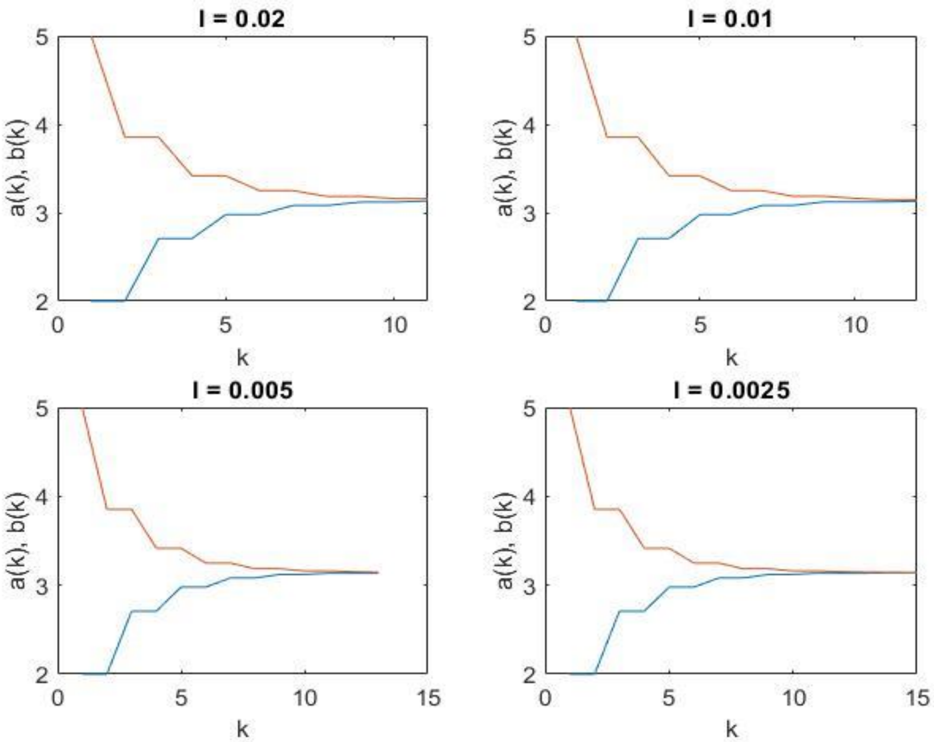
Στα επόμενα 3 διαγράμματα φαίνονται οι σχέσεις των άκρων α, β συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων, k, για τις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ αντίστοιχα. Παρουσιάζονται τέσσερα διαφορετικά διαγράμματα για κάθε συνάρτηση, ένα για κάθε μια από τις τέσσερις διαφορετικές τιμές του l (0.02, 0.01, 0.005, 0.0025). Με μπλε χρώμα παρουσιάζεται η μεταβολή του άκρου α και με κόκκινο χρώμα η μεταβολή του β. Αναμενόμενο είναι ότι τα δύο άκρα δεν μεταβάλλονται ποτέ ταυτόχρονα, καθώς πάντα το ένα από τα δύο μένει σταθερό στην τιμή που είχε στην προηγούμενη επανάληψη. Τέλος βλέπουμε ότι το «μοτίβο» μεταβολής των α, β δεν αλλάζει για διαφορετικές τιμές του l για κάθε συνάρτηση. Αυτό που επηρεάζεται είναι ο αριθμός επαναλήψεων k μέχρι να φτάσουμε στο επιθυμητό διάστημα, που όπως είναι φανερό όσο μικρότερο είναι τόσο περισσότερες επαναλήψεις απαιτούνται.

Για την $f_1(x) = (x-2)^2 - \sin(x+3)$,



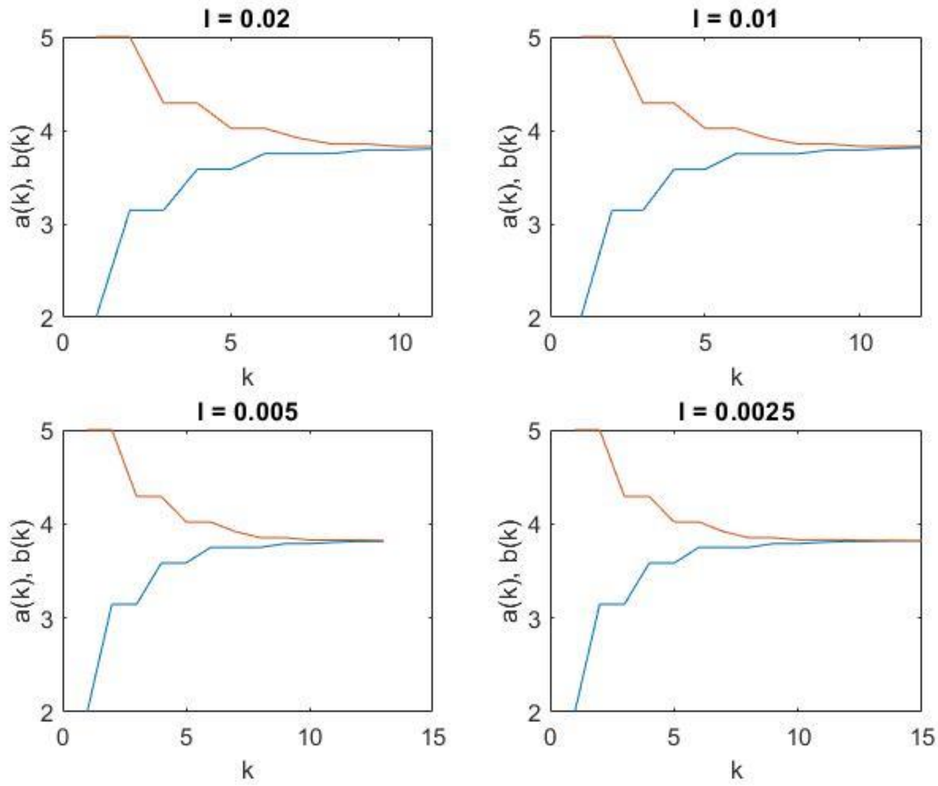
Διάγραμμα 3.β

Για την $f_2(x) = e^{-5x} + (x+2)\cos^2(0.5x)$,



Διάγραμμα 3.γ

Και για την $f_3(x) = x^2\sin(x+2) - (x+1)^2$,

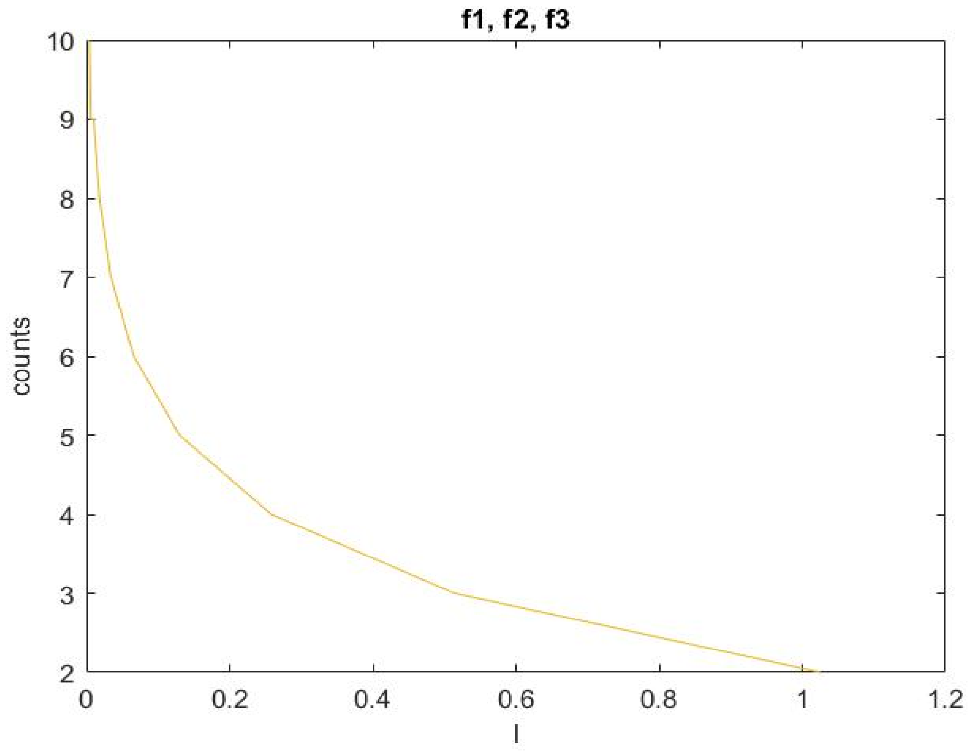


Διάγραμμα 3.δ

ΘΈΜΑ 4^{O}

Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου

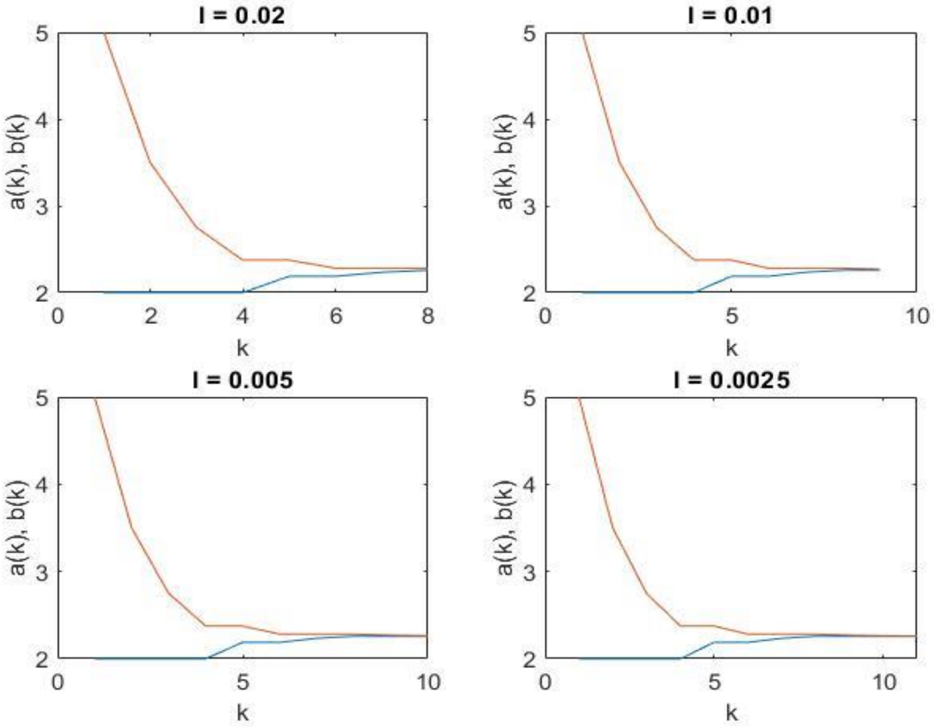
Το αρχικό διάστημα [α,β] είναι γνωστό και ίσο με [2,5] και το l παίρνει τιμές 0.004, 0.006, 0.01, 0.018, 0.034, 0.066, 0.13, 0.258, 0.514, 1,026. Όσων αφορά το διάγραμμα κλήσεων των συναρτήσεων προς τις τιμές του l, παρατηρούμε ότι είναι ίδιο και για τις τρείς δοθείσες συναρτήσεις ($f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$), διάγραμμα 4.α. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνει η τιμή του εύρους αναζήτησης l, μειώνονται οι κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή μειώνονται οι επαναλήψεις που απαιτούνται για την ολοκλήρωση του αλγορίθμου. Τέλος, βλέπουμε ότι δεν πρόκειται για γραμμική μεταβολή του αριθμού κλήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης, καθώς όσο αυξάνει η τιμή του l, μειώνεται ο ρυθμός μείωσης των κλήσεων της f.



Διάγραμμα 4.α

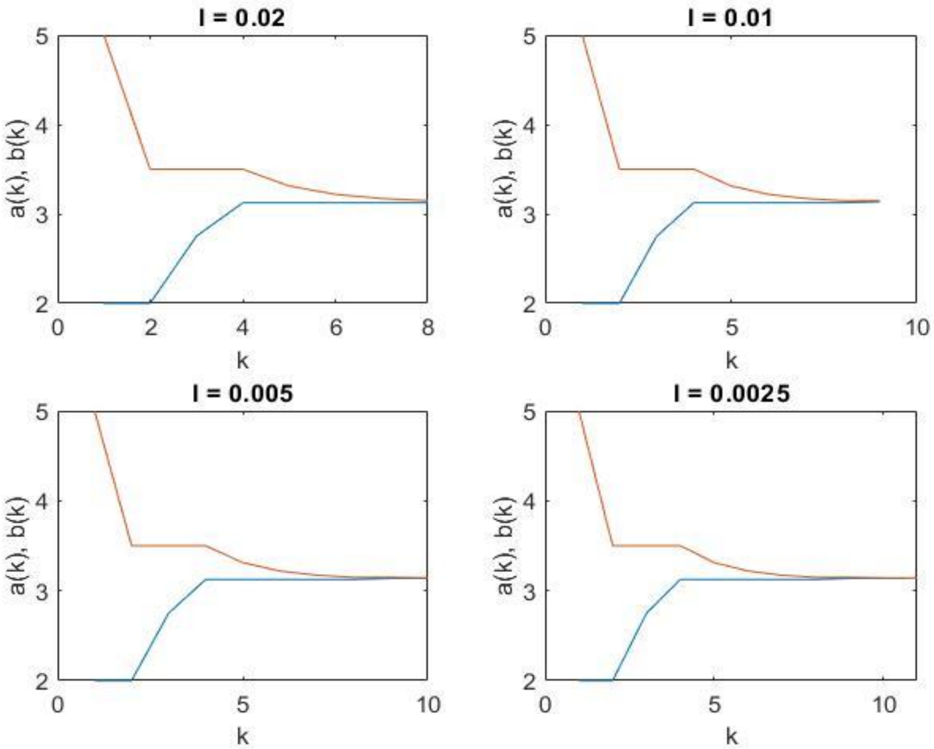
Στα επόμενα 3 διαγράμματα φαίνονται οι σχέσεις των άκρων α, β συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων, k, για τις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ αντίστοιχα. Παρουσιάζονται τέσσερα διαφορετικά διαγράμματα για κάθε συνάρτηση, ένα για κάθε μια από τις τέσσερις διαφορετικές τιμές του l (0.02, 0.01, 0.005, 0.0025). Με μπλε χρώμα παρουσιάζεται η μεταβολή του άκρου α και με κόκκινο χρώμα η μεταβολή του β. Αναμενόμενο είναι ότι τα δύο άκρα δεν μεταβάλλονται ποτέ ταυτόχρονα, καθώς πάντα το ένα από τα δύο μένει σταθερό στην τιμή που είχε στην προηγούμενη επανάληψη. Τέλος βλέπουμε ότι το «μοτίβο» μεταβολής των α, β δεν αλλάζει για διαφορετικές τιμές του l για κάθε συνάρτηση. Αυτό που επηρεάζεται είναι ο αριθμός επαναλήψεων k μέχρι να φτάσουμε στο επιθυμητό διάστημα, που όπως είναι φανερό όσο μικρότερο είναι τόσο περισσότερες επαναλήψεις απαιτούνται.

Για την $f_1(x) = (x-2)^2 - \sin(x+3)$,



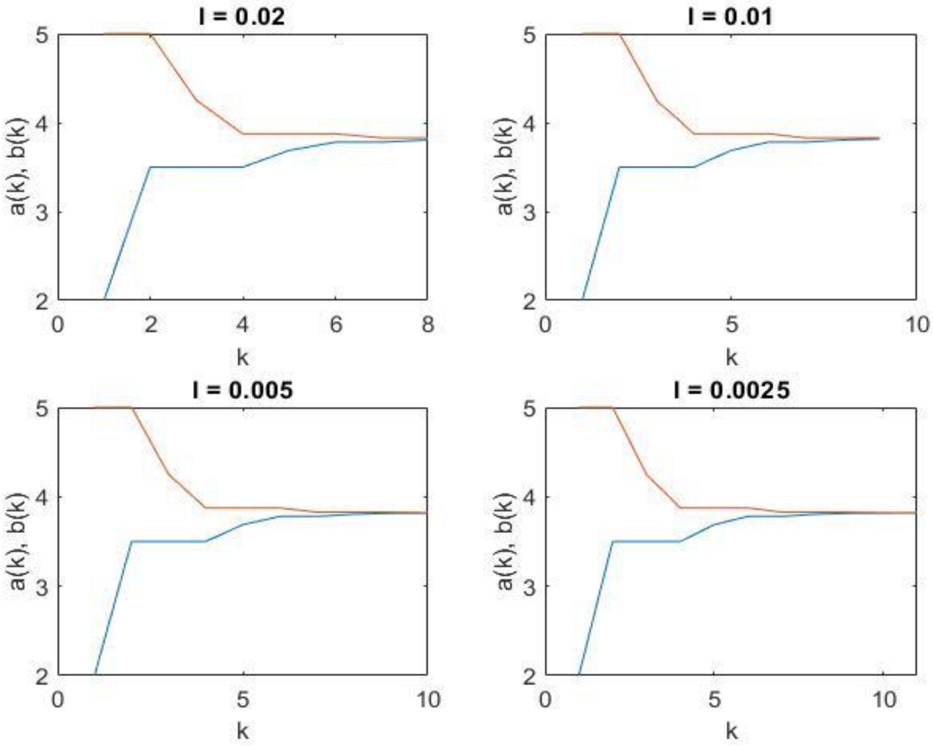
Διάγραμμα 4.β

Για την $f_2(x) = e^{-5x} + (x+2)\cos^2(0.5x)$,



Διάγραμμα 4.γ

Και για την $f_3(x) = x^2\sin(x+2) - (x+1)^2$,



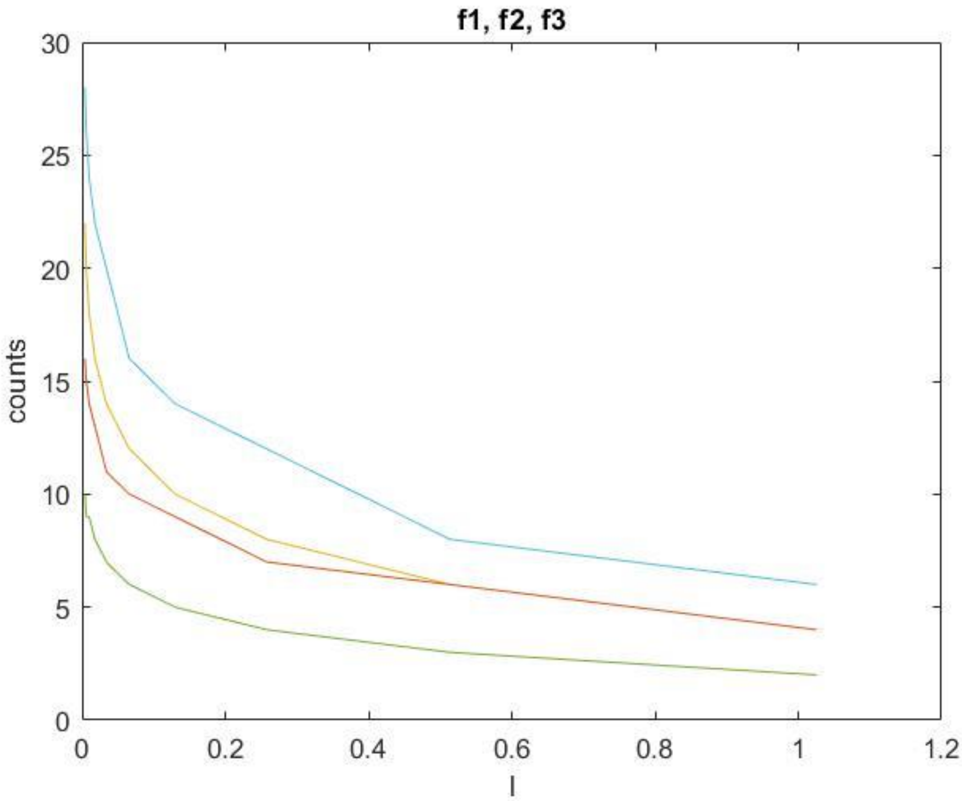
Διάγραμμα 4.δ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρατηρούμε ότι στις τέσσερις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν, για τις ίδιες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l εμφανίζουν διαφορετική ανάγκη κλήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτός είναι και ο λόγος που διαφέρουν στην αποδοτικότητα τους. Φυσικά, πιο αποδοτικός θα είναι ο αλγόριθμος εκείνος που θα απαιτεί λιγότερες κλήσεις ώστε να φτάσει συντομότερα στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Στο διάγραμμα 5.α παρουσιάζονται τα 1.β, 2.α, 3.α, 4.α συγχωνευμένα, με διαφορετικό χρώμα για κάθε καμπύλη.

Όπως εύκολα διακρίνουμε, αποδοτικότερος είναι ο αλγόριθμος που κάνει χρήση της Μεθόδου της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου (πράσινο χρώμα), καθώς ο μέγιστος αριθμός κλήσεων που απαιτεί είναι 10 (για l = 0.004). Αντίθετα ο λιγότερο αποδοτικός είναι αυτός της Μεθόδου του Χρυσού Τομέα (μπλε χρώμα), αφού για την ίδια ελάχιστη τιμή l = 0.004 απαιτεί 28 κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης. Η Μέθοδος Fibonacci (κόκκινο χρώμα) προκύπτει ότι είναι δεύτερη αποδοτικότερη, με 16 κλήσεις για l = 0.004, ενώ τρίτη πιο αποδοτική είναι η Μέθοδος της Διχοτόμου (κίτρινο χρώμα) που απαιτεί 22 κλήσεις για το ίδιο l.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι όσο αυξάνεται η τιμή του τελικού εύρους αναζήτησης l, μειώνονται οι διαφορές στον αριθμό κλήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης μεταξύ των μεθόδων. Έτσι για μικρές τιμές του l οι διαφορές αυτές είναι φανερές ενώ για μεγάλα l αυτές οι διαφορές αρχίζουν να φθίνουν μέχρι και να μηδενίζονται. Αν κανείς παρατηρήσει μόνο τις μεθόδους της διχοτόμου και του Fibonacci μπορεί να διακρίνει ότι για l = 0.514 και έπειτα και οι δύο μέθοδοι απαιτούν ίδιο αριθμό κλήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης, με συνέπεια να είναι ισοδύναμοι σε ότι αφορά την αποδοτικότητα τους.



Διάγραμμα 5.α : Μέθοδος της Διχοτόμου (κίτρινο), Μέθοδος του Χρυσού Τομέα ((μπλε), Μέθοδος Fibonacci (κόκκινο), Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου (πράσινο