

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής

15/5/2023

Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems)

4η Ομάδα Ασκήσεων

Ανάλυση και Σχεδιασμός τηλεφωνικού κέντρου

Στην άσκηση αυτή θα ασχοληθείτε με την ανάλυση και το σχεδιασμό ενός τηλεφωνικού κέντρου, που μοντελοποιείται ως μία ουρά M/M/c/c, δηλαδή ουρά που διαθέτει c εξυπηρετητές ίδιων δυνατοτήτων και μέγιστη χωρητικότητα c πελάτες. Οι αφίξεις στο σύστημα ακολουθούν την κατανομή Poisson με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό λ και οι εξυπηρετήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό μ .

(1) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων του συστήματος M/M/c/c και να αποδείξετε ότι η πιθανότητα απόρριψης (blocking probability) ενός πελάτη από το σύστημα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο (τύπος Erlang-B):

$$P_{\text{blocking}} = B(\rho, c) = \frac{\rho^c / c!}{\sum_{k=0}^c \rho^k / k!}, \quad \text{όπου } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Ποιος είναι ο μέσος ρυθμός απωλειών πελατών από την ουρά; Στη συνέχεια, να υλοποιήσετε τη συνάρτηση `erlangb_factorial`, η οποία θα δέχεται ως ορίσματα την ένταση του φορτίου ρ και τον αριθμό των εξυπηρετητών c και θα υπολογίζει με τη βοήθεια του παραπάνω επαναληπτικού τύπου την πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα $B(\rho, c)$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε την ορθότητα της συνάρτησής σας με τη συνάρτηση `erlangb` του πακέτου `queueing` του Octave.

(2) Για τον τύπο Erlang-B ισχύει ο ακόλουθος επαναληπτικός τύπος:

$$B(\rho, 0) = 1$$

$$B(\rho, n) = \frac{\rho B(\rho, n-1)}{\rho B(\rho, n-1) + n}, \quad n = 1, 2, \dots, c$$

Να υλοποιήσετε με επαναληπτικό τρόπο τη συνάρτηση `erlangb_iterative`, η οποία θα δέχεται ως ορίσματα την ένταση του φορτίου ρ και τον αριθμό των εξυπηρετητών c και θα υπολογίζει με τη

βοήθεια του παραπάνω επαναληπτικού τύπου την πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα $B(\rho, c)$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε την ορθότητα της συνάρτησής σας με τη συνάρτηση `erlangb` του πακέτου `queueing` του Octave.

(3) Να συγκρίνετε τις εξόδους των συναρτήσεων `erlangb_factorial(1024,1024)` και `erlangb_iterative(1024,1024)`. Τι παρατηρείτε; Γιατί συμβαίνει αυτό;

(4) Να υποθέσετε ότι καλείστε να σχεδιάσετε από την αρχή το τηλεφωνικό δίκτυο μίας εταιρείας στην οποία απασχολούνται 200 εργαζόμενοι. Κάθε εργαζόμενος διαθέτει και μία εξωτερική γραμμή, δηλαδή η εταιρεία πληρώνει για 200 γραμμές. Στην προσπάθειά σας να σχεδιάσετε ένα πιο οικονομικό δίκτυο, κάνετε μετρήσεις στην ώρα αιχμής και βρίσκετε ότι ο πιο απαιτητικός χρήστης χρησιμοποιεί συνολικά το τηλέφωνό του για εξωτερικές κλήσεις κατά μέσο όρο 23 λεπτά σε μία ώρα.

(α) Χρησιμοποιώντας ως πρότυπο τον πιο απαιτητικό χρήστη, να προσδιορίσετε τη συνολική ένταση του φορτίου που καλείται να εξυπηρετήσει το τηλεφωνικό δίκτυο της εταιρείας.

(β) Να κάνετε το διάγραμμα της πιθανότητας απόρριψης πελάτη από το σύστημα ως προς τον αριθμό των τηλεφωνικών γραμμών, επιλέγοντας από 1 έως 200 τηλεφωνικές γραμμές. Για τον υπολογισμό της πιθανότητας αυτής να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση `erlangb_iterative`.

(γ) Να προσδιορίσετε τον κατάλληλο αριθμό τηλεφωνικών γραμμών που θα χρησιμοποιήσετε ώστε η πιθανότητα απόρριψης τηλεφωνικής κλήσης να είναι μικρότερη από 1%.

Σύστημα εξυπηρέτησης με δύο ανόμοιους εξυπηρετητές

Να θεωρήσετε ένα σύστημα εξυπηρέτησης που αποτελείται από δύο εξυπηρετητές 1 και 2 χωρίς δυνατότητα αναμονής πελατών. Όταν και οι δύο εξυπηρετητές είναι διαθέσιμοι, ένας πελάτης δρομολογείται πάντα στον εξυπηρετητή 1. Σε περίπτωση που ο εξυπηρετητής 1 δεν είναι διαθέσιμος, ένας νέος πελάτης δρομολογείται στον εξυπηρετητή 2. Σε περίπτωση που και οι δύο εξυπηρετητές δεν είναι διαθέσιμοι, ένας νέος πελάτης απορρίπτεται χωρίς επανάληψη προσπάθειας εξυπηρέτησης. Οι αφίξεις πελατών στο σύστημα ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = 1$ πελάτες/sec. Οι εξυπηρετήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες με μέσους χρόνους εξυπηρέτησης $1/\mu_1 = 1.25$ sec και $1/\mu_2 = 2.5$ sec αντίστοιχα, δηλαδή ο εξυπηρετητής 2 είναι χαμηλότερων δυνατοτήτων από τον εξυπηρετητή 1.

(1) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων του συστήματος στην κατάσταση ισορροπίας και να βρείτε:

(α) Τις εργοδικές πιθανότητες του συστήματος.

(β) Την πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα.

(γ) Το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα.

(2) Να βρείτε τα ζητούμενα του προηγούμενου ερωτήματος με τη μέθοδο της προσομοίωσης συστημάτων αναμονής. Για το σκοπό αυτής της άσκησης, σας δίνεται το αρχείο **demo4.m**, δηλαδή ένα πρόγραμμα σε Octave, που δε χρησιμοποιεί έτοιμα πακέτα προσομοίωσης. Το αρχείο αυτό περιλαμβάνει κενά στα **thresholds** που αφορούν το πώς αποφασίζουμε να μεταβούμε από τη μία κατάσταση του συστήματος στην άλλη.

(α) Να συμπληρώσετε τα κενά του προγράμματος.

(β) Ποια είναι τα κριτήρια σύγκλισης της προσομοίωσής σας;

(γ) Να επιβεβαιώσετε ότι οι πιθανότητες που υπολογίζονται από το πρόγραμμα συμφωνούν με τις πιθανότητες που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα, λαμβάνοντας υπόψη και το κριτήριο σύγκλισης της προσομοίωσης.