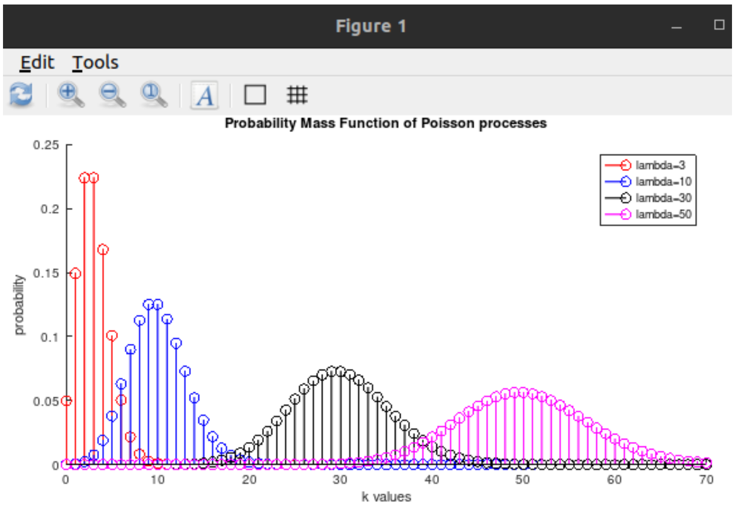
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΡΟΗ Δ - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ (QUEUING SYSTEMS)

ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ 03120827

ΑΝΑΦΟΡΑ 1ΗΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

Α) Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή Poisson εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι: $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$
Η κατανομή αυτή χαρακτηρίζεται από την παράμετρο λ>0.
Υλοποιούμε 4 κατανομές Poisson με λ = 3, 10, 30, 50. Αυτές παρουσιάζονται στο επόμενο διάγραμμα με τιμές από το 0 έως το 70:



Πάνω δεξιά στο διάγραμμα φαίνεται η αντιστοίχιση των τιμών της παραμέτρου λ στις γραφικές.

Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνουμε το λ τόσο μειώνεται η μέγιστη τιμή των γραφικών και τόσο περισσότερο απλώνονται στον οριζόντιο άξονα. Ουσιαστικά σαν να συμπιέζουμε προς τα κάτω τις γραφικές όσο μεγαλώνει το λ. Η μέγιστη τιμή κάθε γραφικής παρατηρείται στο λ που της αντιστοιχεί.
Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε για το ερώτημα αυτό είναι ο εξής:

```
#Ερωτημα Α
# TASK: In a common diagram, design the Probability Mass Function of Poisson processes
# with lambda parameters 3, 10, 30, 50. In the horizontal axes, choose k parameters
# between 0 and 70.

k = 0:1:70;
lambda = [3, 10, 30, 50];

for i = 1 : columns(lambda)
  poisson(i, :) = poisspdf(k, lambda(i)); # Ορίζω την Poisson
endfor

colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i = 1 : columns(lambda)
  stem(k, poisson(i, :), colors(i), "linewidth", 1.2); # Για να φτιαξω τις γρφικες χρησιμοποιω την stem
endfor
hold off;

title("Probability Mass Function of Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=3", "lambda=10", "lambda=30", "lambda=50");
```

Β) Η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ έχει:
Μέση τιμή E[X]=λ
Διακύμανση Var[X] = σ^2 = λ
Οι τιμές προκύπτουν από την θεωρητική ανάλυση της κατανομής Poisson
Με χρήση του Octave υπολογίζουμε τις τιμές αυτές για λ=30:

Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι το εξής:

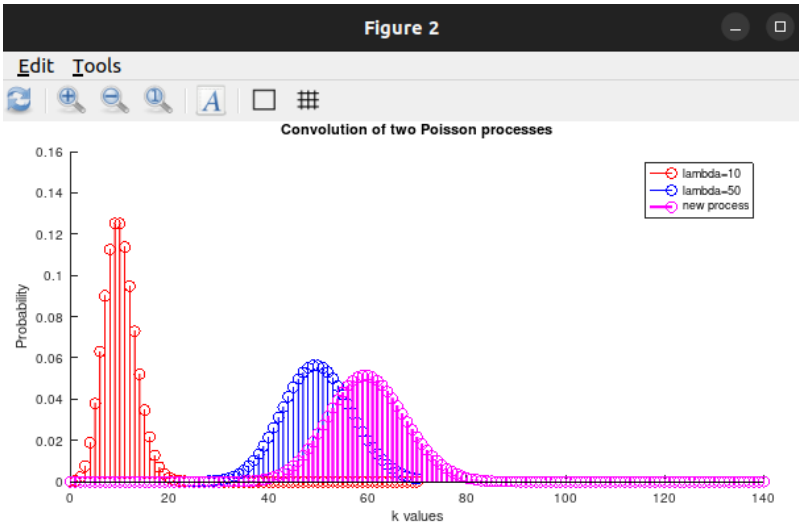
```
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value = 30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance = 30.000
>>
```

Παρατηρούμε ότι η θεωρητική ανάλυση και το πειραματικό αποτέλεσμα συμφωνούν.

Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε για το ερώτημα αυτό είναι ο εξής:

```
#Ερωτημα Β
# TASK: regarding the poisson process with parameter lambda 30, compute its mean
# value and variance

index = find(lambda == 30);
chosen = poisson(index, :); #Διαλεγω απο αυτες που εχω φτιαξει την Poisson με λ=30
mean_value = 0;
for i=0:(columns(poisson(index, :)) - 1) #Υπολογισμος Μεσης Τιμης
  mean_value = mean_value + i .* poisson(index,i+1);
endfor

display("mean value of Poisson with lambda 30 is");
display(mean_value);

second_moment = 0;
for i = 0 : (columns(poisson(index, :)) - 1)
  second_moment = second_moment + i .* i .* poisson(index, i + 1);
endfor

variance = second_moment - mean_value .^ 2;
display("Variance of Poisson with lambda 30 is");
display(variance);
```

Γ) Για να υπολογίσουμε την κατανομή που προκύπτει από την συνέλιξη των δυο κατανομων Poisson που επιλέξαμε, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση conv. Ετσι προκύπτουν οι εξής 3 γραφικές:



Κατανομή για λ=10 / Κατανομή για λ=50 / Κατανομή από την συνέλιξη

Η νέα κατανομή που προκύπτει είναι κατανομή Poisson με παράμετρο λ, η οποία ισούται με λ1 + λ2 των αρχικών κατανομών μας. Επομένως έχει κέντρο το λ=60. Εκεί εμφανίζει και την μέγιστη τιμή της.

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με την θεωρητική ανάλυση της κατανομής Poisson η οποία δείχνει ότι αν έχουμε 2 Τ.Μ. X και Y που ακολουθούν κατανομή Poisson με παραμέτρους λ1 και λ2 αντίστοιχα τότε η υπέρθεση τους X+Y ακολουθά κατανομή Poisson με λ = λ1+λ2. Βασική προϋπόθεση της παραπάνω πρότασης είναι 2 κατανομές που χρησιμοποιούμε για την υπέρθεση να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε για το ερώτημα αυτό είναι ο εξής:

```
#Ερωτημα Γ
# TASK: consider the convolution of the Poisson distribution with lambda 20 with
# the Poisson distribution with lambda 30.

first = find(lambda == 10);
second = find(lambda == 50);
poisson_first = poisson(first, :);
poisson_second = poisson(second, :);
# Δημιουργω την Υπερθεση
composed = conv(poisson_first, poisson_second);
new_k = 0 : 1 : (2 * 70);

figure(2);
hold on;
stem(k, poisson_first(:), colors(1), "linewidth", 1.2);
stem(k, poisson_second(:), colors(2), "linewidth", 1.2);
stem(new_k, composed, "mo", "linewidth", 2);
hold off;
title("Convolution of two Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("lambda=10", "lambda=50", "new process");
```

Δ) Μια διακριτή Τ.Μ. X λέμε πως έχει διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p, για κάποια n≥1 και 0<p<1 , αν έχει σύνολο τιμών το S = {0, 1, ..., n} και πυκνότητα:

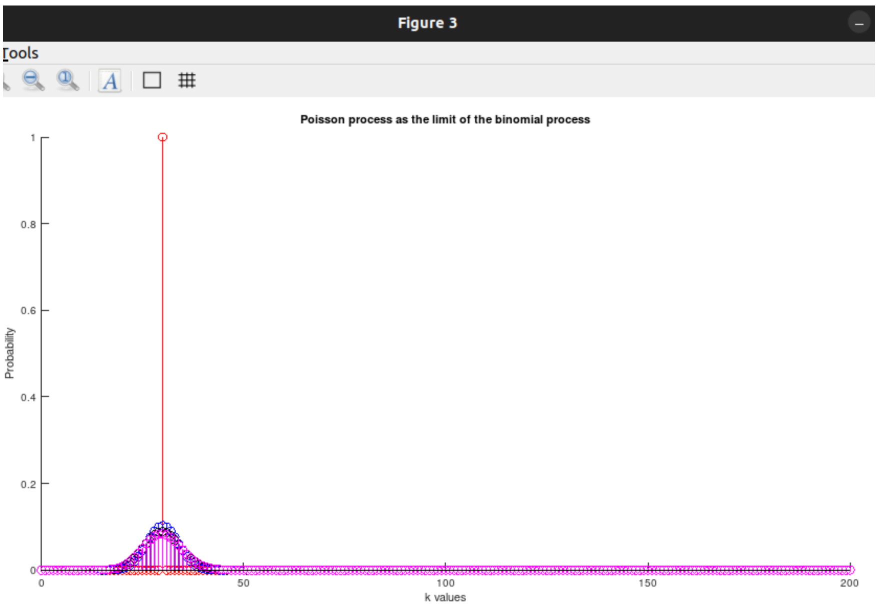
$$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Λέμε δηλαδή ότι Y ~ Διων(n, p).
Μπορούμε να προσεγγίσουμε μία κατανομή Poisson με παράμετρο λ ως το όριο μιας διωνυμικής κατανομής παραμέτρων εάν:
1. $n \to \infty$
2. $p \to 0$
3. $\lambda = np$

Προσέγγιση της Poisson στη διωνυμική στο Octave:
Χρειαζόμαστε μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί διωνυμική κατανομή και ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:
1. Το n αρκετά μεγάλο: $n \geq 100$
2. Το p αρκετά μικρό: $p < \frac{1}{25}$
3. Το np τάξη του 1

Αυτή η κατανομή μπορεί να προσεγγιστεί από μια κατανομή Poisson με λ=np

Στο Octave σχεδιάζουμε μια κατανομή Poisson με λ=30. Έπειτα σχεδιάζουμε την εξέλιξη της διωνυμικής κατανομής καθώς προσεγγίζει την επιθυμητή κατανομή Poisson (για n = 30, 60, 90, 120 και 150).
Το αποτέλεσμα φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα.



Παρατηρούμε ότι το κέντρο των γραφικών είναι όντως στο λ=30.

Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε για το ερώτημα αυτό είναι ο εξής:

```
#Ερωτημα Δ
# TASK: show that Poisson process is the limit of the binomial distribution.
k = 0 : 1 : 200;
# Define the desired Poisson Process
lambda = 30;
i = 1 : 1 : 5;
n = lambda .* i;
p = lambda ./ n; #λ=np

figure(3);
title("Poisson process as the limit of the binomial process");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
hold on;
for i = 1 : 4
  binomial = binopdf(k, n(i), p(i));
  stem(k, binomial, colors(i), 'linewidth', 1.2);
endfor
hold off;
```

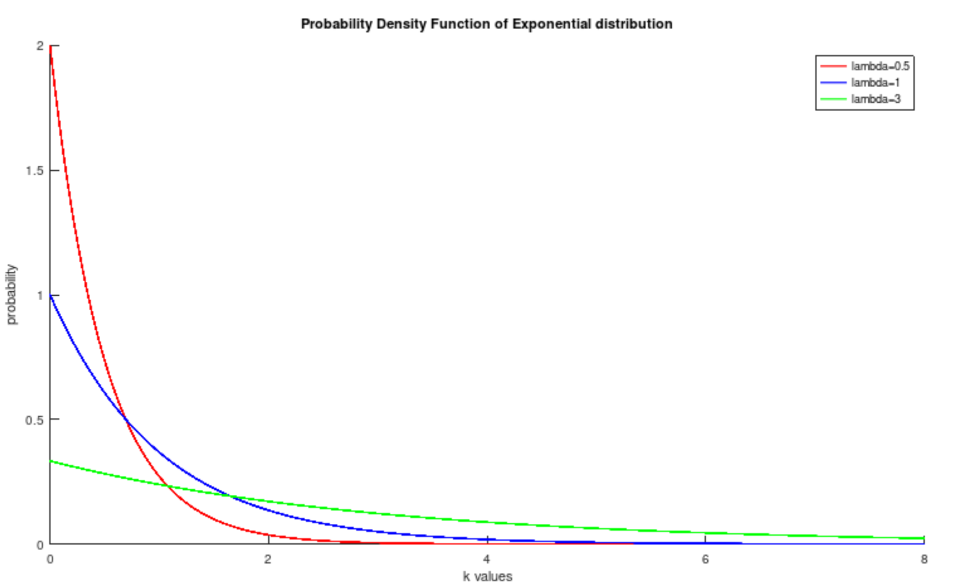
* Σχόλιο: Για την άσκηση αυτή μας είχε δοθεί έτοιμος ο κώδικας (αρχείο demo1a.m)

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Α) Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί εκθετική κατανομή εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Η κατανομή αυτή χαρακτηρίζεται από την παράμετρο λ>0.
Υλοποιούμε 3 εκθετικές κατανομές Poisson με 1/λ = 0.5 , 1, 3. Αυτές παρουσιάζονται στο επόμενο διάγραμμα με τιμές από το 0 έως το 8:



Παρατηρούμε ότι οι γραφικές έχουν τομή με τον κατακόρυφο άξονα για x=0 στα σημεία για τα λ που τους αντιστοιχούν (δηλαδή 2, 1, 1/3).
Για να υλοποιήσουμε τις γραφικές χρησιμοποιούμε k = 0:0.00001:8 ώστε να προσεγγίσουμε την συνεχή εκθετική κατανομή ως διακριτή με πολύ μικρό σφάλμα.

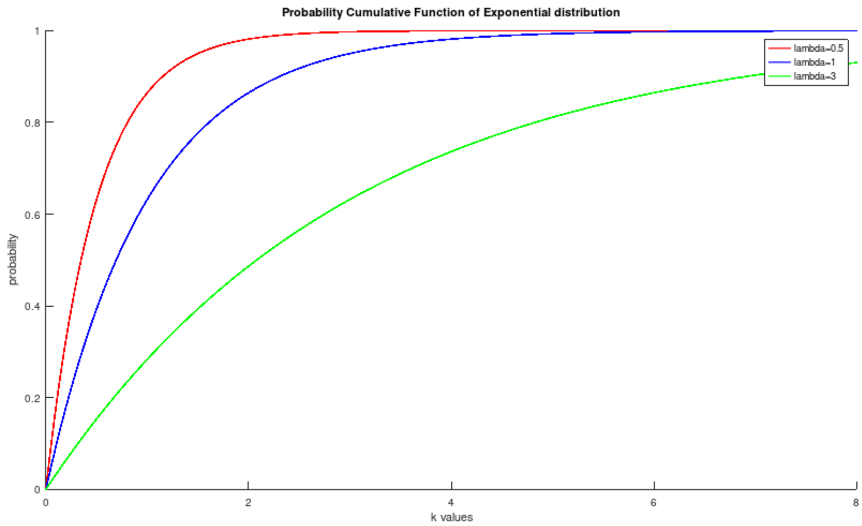
Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε για το ερώτημα αυτό είναι ο εξής:

```
#Ερώτημα A
k = 0:0.00001:8;
lambda = [0.5,1,3];

for i=1:columns(lambda)
  expo(i,:) = exppdf(k,lambda(i));
endfor

colors="rbg";
figure(1);
hold on;
for i=1:columns(lambda)
  plot(k,expo(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);  #χρησιμοποιώ plot και οχι stem
endfor

hold off;

title("Probability Density Function of Exponential distribution");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=0.5","lambda=1","lambda=3");
```

B) Η συνεχής κατανομή X η οποία ακολουθάει εκθετική κατανομή έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Για να δημιουργήσουμε αυτή την συνάρτηση στο octave χρησιμοποιούμε την εντολή expcdf(). Δημιουργούμε 3 συναρτήσεις με τις παραμέτρους του προηγούμενου ερωτήματος (0.5,1,3) και τις προβάλλουμε σε κοινό διάγραμμα:



Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε για το ερώτημα αυτό είναι ο εξής:

```

#Ερώτημα B
#Αθροιστική συνάρτηση κατανομής
k = 0:0.00001:8;
lambda = [0.5,1,3];

for i=1:columns(lambda)
  expo(i,:) = expcdf(k,lambda(i));
endfor

colors="rbg";
figure(2);
hold on;
for i=1:columns(lambda)
  plot(k,expo(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor

hold off;

title("Probability Cumulative Function of Exponential distribution");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=0.5","lambda=1","lambda=3");
```

Γ) Η εκθετική κατανομή χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα απώλειας μνήμης. Σύμφωνα με αυτή την ιδιότητα, αν X μια Σ.Τ.Μ που ακολουθεί την εκθετική κατανομή, η δεσμευμένη πιθανότητα η X να υπερβεί μια τιμή x+y δοθέντος ότι έχει ήδη υπερβεί την τιμή x ισούται με την πιθανότητα η X να υπερβεί το y

Πρόταση: (έλλειψη μνήμης της εκθετικής κατανομής)

Αν $X \sim \exp(\theta)$ τότε

$$P(X > x+y \mid X > x) = P(X > y)$$

Πράγματι αν υπολογίσουμε 2 πιθανότητες στο Octave, όπως τις P(X>50000|X>20000) και P(X>30000), παρατηρούμε ότι αυτές επιστρέφουν το ίδιο αποτέλεσμα:

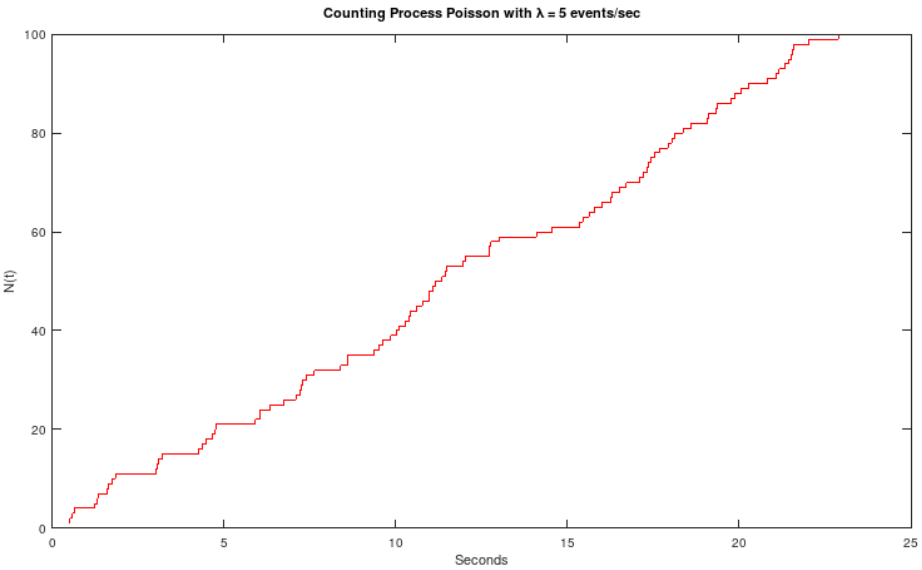
```
Command Window
p1 = 0.8869
p2 = 0.8869
>>
>> |
```

Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε για το ερώτημα αυτό είναι ο εξής:

```
#Ερώτημα Γ
#Ιδιότητα Απώλειας Μνήμης
k = 0:0.00001:8;
expo = expcdf (k,2.5);
#Υπολογισμός της P(X>30000) = 1 - F(30000)
p1 = 1-expo(30000);
display(p1);
#Υπολογισμός της P(X>50000|X>20000) = [1- F(50000)]/[1-F(20000)]
p2 = (1-expo(50000))./(1-expo(20000));
display(p2);
```

<u>ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΗ POISSON</u>

A) Οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson ακολουθούν εκθετική κατανομή
Για να σχεδιάσουμε μια διαδικασία καταμέτρησης Poisson δημιουργούμε 100 διαδοχικά τυχαία δείγματα με την εντολή exprnd().
Επίσης θεωρούμε λ=5 γεγονότα/sec
Έπειτα με το for loop αποθηκεύουμε το άθροισμα αυτών στους πίνακες.
Χρησιμοποιούμε την stair για να δημιουργήσουμε την γραφική:



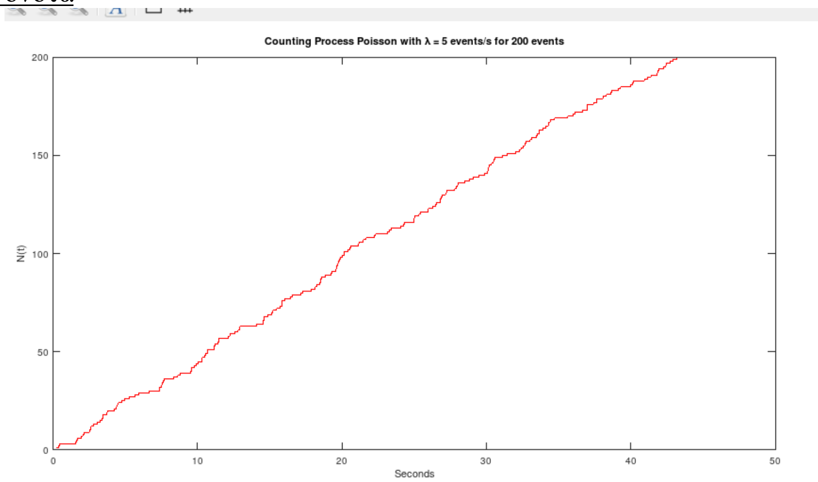
Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε για το ερώτημα αυτό είναι ο εξής:

```
#Ερώτημα A
#Counting Process Poisson
lambda = 0.2 #λ=5
r= exprnd(lambda,1,100);
#r = exprnd(mu,sz1,...,szN) generates an arrax of random numbers from the
#erponential distribution, where sz1,...,szN indicates the size of each dimension.
x = ones(100,1);
for i=1:99
  r(i+1)=r(i+1)+r(i);
  x(i+1)=x(i+1)+x(i);
endfor

figure(1);
stairs(r,x,color = 'r');
title("Counting Process Poisson with λ = 5 events/sec");
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
```

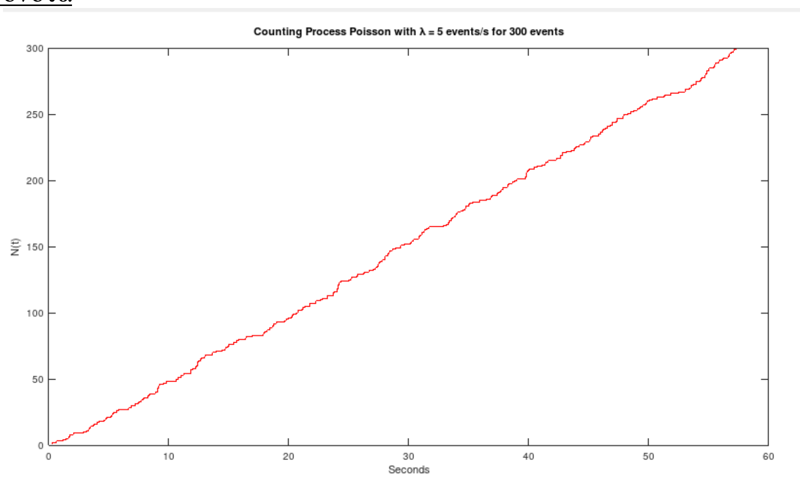
B) Ο αριθμός των γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο $\Delta T = t1 - t2$ ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο αριθμό γεγονότων $\lambda \cdot \Delta T$, όπου λ μέσος ρυθμός γεγονότων ανά δευτερόλεπτο.
Το λ αυτό προσεγγίζεται από τον μέσο όρο των γεγονότων σε όλο το χρονικό διάστημα.

Υπολογίζουμε τις γραφικές από τις διαδικασίες καταμέτρησης Poisson για λ=5:

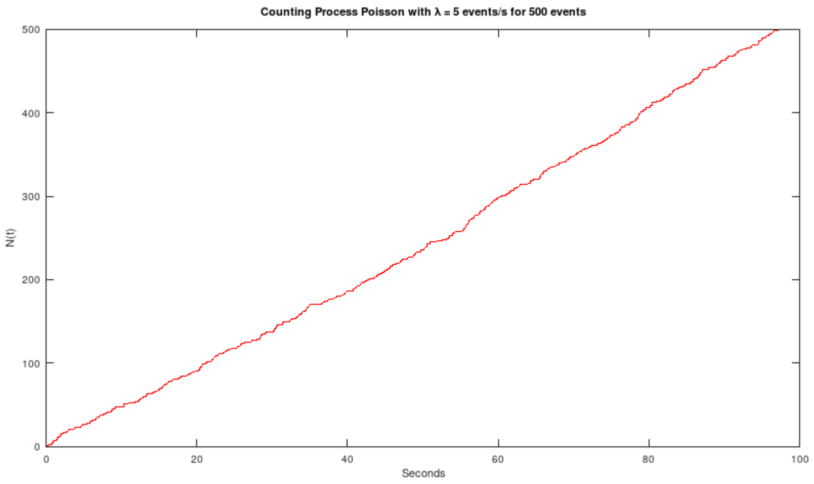
- <u>(i) - 200 Γεγονότα</u>



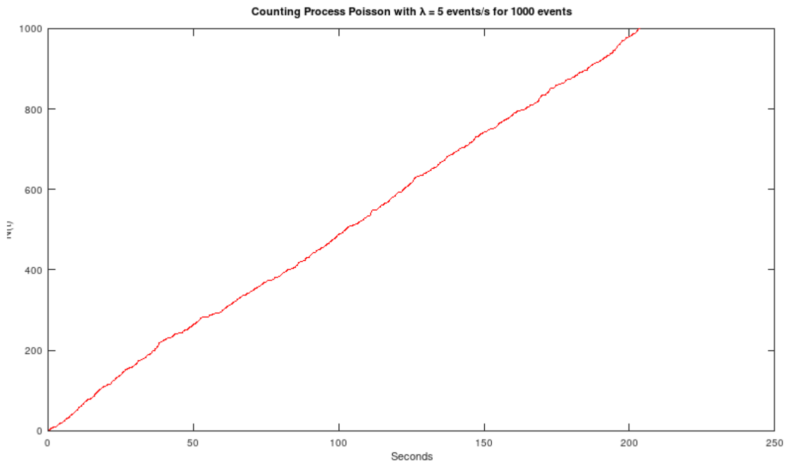
- <u>(ii) - 300 Γεγονότα</u>



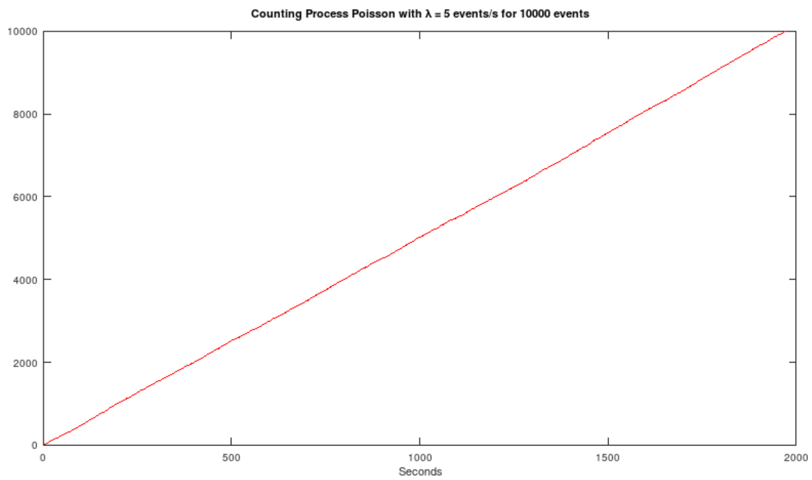
- (iii) - 500 Γεγονότα



- (iv) - 1000 Γεγονότα



- (v) - 10000 Γεγονότα



Παρατηρούμε η προσέγγιση του λ είναι ακριβέστερη με την αυξηση των γεγονότων.
Στις παραπάνω γραφικές, το λ είναι ουσιαστικά η κλίση της κάθε γραφικής. Στην τελευταία γραφικη (10000 γεγονότα) η κλίση είναι αρκετά ξεκάθαρη, οπου φαινεται οτι λ=5.
Πράγματι:

```
lambda = 0.2000
For 200 events mean =
4.7893
For 300 events mean =
5.3261
For 500 events mean =
4.8505
For 1000 events mean =
4.8251
For 10000 events mean =
5.0526
>>
```

Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε για το ερώτημα αυτό είναι ο εξής:

```

#Ερώτημα Β
#Μεσος Αριθμός Γεγονότων
#i - 200
lambda = 0.2; #λ=5
r = exprnd(lambda,1,200);
x = ones(200,1);
for i=1:199
  r(i+1) = r(i+1) + r(i);
  x(i+1) = x(i+1) + x(i);
endfor
figure(2);
stairs(r,x, color = 'r');
title("Counting Process Poisson with λ = 5 events/s for 200 events");
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
display("For 200 events mean = ");
display(200/r(200));

#ii - 300
lambda = 0.2; #λ=5
r = exprnd(lambda,1,300);
x = ones(300,1);
for i=1:299
  r(i+1) = r(i+1) + r(i);
  x(i+1) = x(i+1) + x(i);
endfor
figure(3);
stairs(r,x, color = 'r');
title("Counting Process Poisson with λ = 5 events/s for 300 events");
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
display("For 300 events mean = ");
display(300/r(300));

#iii - 500
lambda = 0.2; #λ=5
r = exprnd(lambda,1,500);
x = ones(500,1);
for i=1:499
  r(i+1) = r(i+1) + r(i);
  x(i+1) = x(i+1) + x(i);
endfor
```

```
for i=1:499
  r(i+1) = r(i+1) + r(i);
  x(i+1) = x(i+1) + x(i);
endfor
figure(4);
stairs(r,x, color = 'r');
title("Counting Process Poisson with λ = 5 events/s for 500 events");
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
display("For 500 events mean = ");
display(500/r(500));

#iv - 1000
lambda = 0.2; #λ=5
r = exprnd(lambda,1,1000);
x = ones(1000,1);
for i=1:999
  r(i+1) = r(i+1) + r(i);
  x(i+1) = x(i+1) + x(i);
endfor
figure(5);
stairs(r,x, color = 'r');
title("Counting Process Poisson with λ = 5 events/s for 1000 events");
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
display("For 1000 events mean = ");
display(1000/r(1000));

#v - 10000
lambda = 0.2; #λ=5
r = exprnd(lambda,1,10000);
x = ones(10000,1);
for i=1:9999
  r(i+1) = r(i+1) + r(i);
  x(i+1) = x(i+1) + x(i);
endfor
figure(6);
stairs(r,x, color = 'r');
title("Counting Process Poisson with λ = 5 events/s for 10000 events");
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
display("For 10000 events mean = ");
display(10000/r(10000));
```