

# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ (Queuing Systems)

## Ασκήσεις – Παραδείγματα

Εφαρμογές Συστημάτων Αναμονής  $M/M/1$ ,  $M/M/1/K$ ,  
 $M/M/m$  (Erlang-C),  $M/M/N/K$ ,  $M/M/m/m$  (Erlang-B)

# Παράδειγμα 1 : Πιθανότητες και εξισώσεις καταστάσεων ισορροπίας

- 10 τερματικά τροφοδοτούν κοινό στατιστικό πολυπλέκτη πακέτου (μεταγωγέα – switch ή δρομολογητή – router) που εξυπηρετεί δεδομένα σε πακέτα των 1000 bits κατά μέσο όρο. Η έξοδος του πολυπλέκτη είναι γραμμή των 10 Mbps (Megabits per sec). Τα τερματικά θεωρούνται ανεξάρτητα και ισότιμα.
- Α) Προσεγγίστε τον πολυπλέκτη σαν ουρά M/M/1. Βρείτε το μέσο όρο ροής των δεδομένων ανά τερματικό ώστε η γραμμή να έχει χρησιμοποίηση 50%.
- Β) Αν ο πολυπλέκτης δεν δύναται να αποθηκεύει πάνω από 3 πακέτα (μαζί με το πακέτο υπό εξυπηρέτηση) και ο μέσος ρυθμός ροής πακέτων ανά τερματικό είναι 500 packets/sec, βρείτε τα χαρακτηριστικά της ουράς. Υποθέστε Poisson διαδικασία άφιξης πακέτων και εκθετικά κατανομημένους χρόνους εξυπηρέτησης πακέτων.

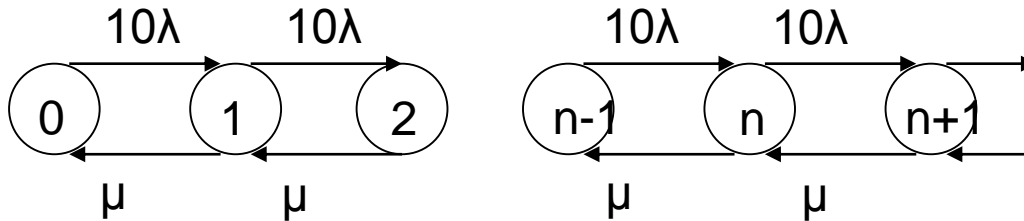
# Λύση – Τμήμα Α

Χρησιμοποιείται μοντέλο M/M/1

Η ροή πακέτων ανά τερματικό είναι  $\lambda$ .

Ζητούμενο:  $\lambda = ?$  pak/sec,

Ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι:  $\mu = (10000 \text{ kbits/sec}) / (1 \text{ kbits/pkt}) = 10000 \text{ pkts/sec}$

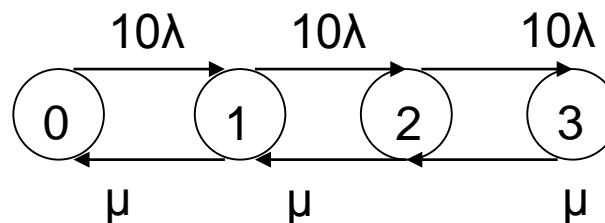


Η αθροιστική ροή πακέτων (από όλα τα τερματικά) στον πολυπλέκτη είναι:  $10\lambda$ .

Ο βαθμός χρησιμοποίησης είναι:  $u = (10\lambda) / \mu = 0.5 \rightarrow (10\lambda) / 10000 = 0.5$   
 $\rightarrow \lambda = 500 \text{ pkts/sec}$

# Λύση – Τμήμα Β

Χρησιμοποιείται μοντέλο M/M/1/3  
 $\lambda=500$  pkts/sec,  $\mu=10000$  pkts/sec



$$\begin{aligned} 10\lambda P_0 &= \mu P_1 & \rightarrow P_1 &= (10\lambda/\mu)P_0 & \rightarrow P_1 &= 0.5P_0 \\ 10\lambda P_1 &= \mu P_2 & \rightarrow P_2 &= (10\lambda/\mu)P_1 & \rightarrow P_2 &= 0.25P_0 \\ 10\lambda P_2 &= \mu P_3 & \rightarrow P_3 &= (10\lambda/\mu)P_2 & \rightarrow P_3 &= 0.125P_0 \end{aligned}$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1 \quad \rightarrow \quad P_0 = 8/15, P_1 = 4/15, P_2 = 2/15, P_3 = 1/15$$

Μέσο μήκος ουράς:  $E(n) = 0 \cdot (8/15) + 1 \cdot (4/15) + 2 \cdot (2/15) + 3 \cdot (1/15) = 11/15$  pkts

Πιθανότητα απωλειών:  $P_{bl} = P_3 = 1/15$

Ρυθμαπόδοση:  $\gamma = 10\lambda(1 - P_{bl}) = 5000 \cdot (14/15) = 14000/3$  pkts/sec  
( $\gamma = \mu(1 - P_0)$ )

Μέση Καθυστέρηση:  $E(\tau) = E(n)/\gamma = (11/15)/(1400/3) = 11/7000$  sec

## Παράδειγμα 2: Μοντελοποίηση - Σύγκριση

Δύο υπολογιστές επικοινωνούν με μια γραμμή 64 kbps (kbits/sec) και υποστηρίζει 8 συνόδους (sessions). Αν το μέσο μήκος πακέτου είναι 150 bytes, ο ρυθμός άφιξης ανά σύνοδο (arrival rate/session) είναι 4 packets/second και ακολουθεί Poisson κατανομή, και ο χρόνος εξυπηρέτησης πακέτου είναι εκθετικά κατανεμημένος:

Είναι καλύτερα το δίκτυο να παρέχει σε κάθε σύνοδο το δικό της αφιερωμένο (dedicated, αποκλειστική πρόσβαση) 8 kbps κανάλι, ή είναι προτιμότερο όλες οι σύνοδοι να μοιράζονται όλη τη χωρητικότητα της γραμμής?

Θεωρείστε ότι ο χρόνος καθυστέρησης του πακέτου είναι το πιο σημαντικό κριτήριο.

# Λύση

Ας θεωρήσουμε πρώτα το δίκτυο να παρέχει σε κάθε σύνοδο το δικό της (αποκλειστική πρόσβαση) dedicated 8 kbits/sec κανάλι. Τότε κάθε υποσύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν ένα ξεχωριστό M/M/1 σύστημα με  $\lambda=4$  packets/sec και ρυθμό εξυπηρέτησης 8 kbits/sec ή ισοδύναμα

$$\mu = \frac{8 \times 10^3}{150 \times 8} \frac{\text{packets}}{\text{sec}} \Rightarrow \mu = 6.67 \text{ packets / sec}$$

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = 0.375 \text{ seconds} = 375 \text{ msec}$$

Θεωρώντας την περίπτωση όπου οι σύνοδοι μοιράζονται όλη τη χωρητικότητα της γραμμής τότε συγχωνεύουμε όλες τις συνόδους και μοντελοποιούμε το σύστημα σαν M/M/1 σύστημα: με  $\lambda=8 \times 4=32$  packets/second και ρυθμό εξυπηρέτησης 64 kbits/sec ή ισοδύναμα

$$\mu = \frac{64 \times 10^3}{150 \times 8} = 53.33 \text{ packets / sec}$$

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = 0.0468 \text{ seconds} = 46.8 \text{ msec}$$

Προτιμότερη είναι η δεύτερη λύση αφού μειώνει την καθυστέρηση σημαντικά

## Παράδειγμα 3: Μοντελοποίηση Τηλεφωνικής Ζεύξης

Μια τηλεφωνική εταιρεία εγκαθιστά σύνδεση μεταξύ δύο πόλεων όπου η αναμενόμενη κίνηση ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό 30 calls/min. Η διάρκεια των κλήσεων είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 3 min. Πόσα κυκλώματα θα πρέπει να παρέχει η εταιρεία ώστε να εγγυηθεί ότι η πιθανότητα απόρριψης κλήσης (blocking) (επειδή όλα τα κυκλώματα είναι κατειλημμένα) είναι μικρότερη του 1%

# Λύση

Θεωρούμε ένα σύστημα M/M/m/m όπου m είναι ο αριθμός κυκλωμάτων (γραμμών) που παρέχει η εταιρεία. Πρέπει να βρούμε τον μικρότερο αριθμό m για τον οποίο  $p_m < 0.01$  όπου  $p_m$

$$p_m = \frac{(\lambda / \mu)^m / m!}{\sum_{n=0}^m (\lambda / \mu)^n / n!}$$

Έχουμε  $\lambda = 30$  calls/min,  $1/\mu = 3$  min, άρα  
 $\rho = \lambda/\mu = 30 \cdot 3 = 90$  Erlangs.

Με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση υπολογίζουμε την τιμή του m.



## Παράδειγμα 4: (a) Αξιολόγηση Δρομολογητή

Ένας δρομολογητής πακέτων μπορεί να επεξεργάζεται πακέτα με μέσο ρυθμό 300 pkts/sec (packets per second). Τα πακέτα καταφθάνουν στον δρομολογητή κατά μέσο όρο με ρυθμό 200 pkts/sec. Αν μοντελοποιήσουμε το σύστημα σαν M/M/1

- Μέσος # πακέτων στο σύστημα:

$$N = \lambda / (\mu - \lambda) = 200 / (300 - 200) = 2 \text{ πακέτα}$$

- Μέσος # πακέτων σε αναμονή:

$$N_Q = \lambda^2 / [\mu(\mu - \lambda)] = 200^2 / [300(300 - 200)] = 1.33 \text{ πακέτα}$$

- Μέσος χρόνος πακέτου στο σύστημα:

$$T = 1 / (\mu - \lambda) = 1 / (300 - 200) = 0.01 \text{ sec} = N / \lambda \text{ (Νόμος Little)}$$

- Μέσος χρόνος αναμονής (στην ουρά):

$$W = \lambda / [\mu(\mu - \lambda)] = 2 / 300 = 0.00666 \text{ sec} = N_Q / \lambda \text{ (Νόμος Little)}$$

- Πιθανότητα να είναι ο εξυπηρετητής απασχολημένος

$$\rho = \lambda / \mu = 2 / 3$$

- Πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο

$$P_0 = 1 - \rho = 0.333$$

## Παράδειγμα 4: (b) Βελτίωση Επίδοσης

Για να βελτιώσουμε την απόδοση του συστήματος έχουμε δύο επιλογές:

- Να εγκαταστήσουμε ένα γρηγορότερο επεξεργαστή (αντικαθιστώντας τον παλαιό)
- Να εγκαταστήσουμε και έναν δεύτερο εξυπηρετητή

### 1η Επιλογή

Αντικατάσταση του υπάρχοντος εξυπηρετητή με άλλον γρηγορότερο με ρυθμό  $\mu = 400$  pkts/second

Επαναπροσδιορισμός της απόδοσης του συστήματος M/M/1 με  $\lambda = 200$  pkts/sec,  $\mu = 400$  pkts/sec και άπειρο μήκος ουράς

### 2η Επιλογή

Έχουμε ένα σύστημα με δύο εξυπηρετητές, ο κάθε ένας με ρυθμό  $\mu = 200$  pkts/sec. Η άφιξη των πακέτων γίνεται σε μία ουρά (buffer) με ρυθμό  $\lambda = 200$  pkts/second και μετά δρομολογούνται στον πρώτο εξυπηρετητή που είναι ελεύθερος. Το σύστημα αυτό το μοντελοποιούμε σαν M/M/2 με άπειρο μήκος ουράς

**ΑΣΚΗΣΗ:** Ποίες είναι οι επιδόσεις (μέση καθυστέρηση) των δύο εναλλακτικών; Γιατί;

## Παράδειγμα 5: Μοντελοποίηση-διάγραμμα καταστάσεων

Μηνύματα παραδίδονται σε ένα σύστημα αναμονής που αποτελείται από δύο εξυπηρετητές και κοινό χώρο αναμονής. Η διαδικασία άφιξης των μηνυμάτων είναι Poisson ( $\lambda=1$  πελάτης/sec) και οι χρόνοι εξυπηρέτησης μηνυμάτων είναι εκθετικά κατανεμημένοι. Για τον πρώτο εξυπηρετητή ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι:  $\mu_\alpha$  και για το δεύτερο είναι:  $\mu_\beta$ . ( $\mu_\alpha=\mu_\beta=\mu=1$ )

Κάθε καινούριο μήνυμα εξυπηρετείται πάντα από τον πρώτο εξυπηρετητή, αν αυτός είναι ελεύθερος. Αν ο πρώτος εξυπηρετητής είναι απασχολημένος τότε το μήνυμα εξυπηρετείται από τον δεύτερο εξυπηρετητή. Αν και οι δύο εξυπηρετητές είναι απασχολημένοι το μήνυμα αποθηκεύεται στην ουρά.

Βρείτε τις εργοδικές πιθανότητες καταστάσεως και τους βαθμούς χρησιμοποίησης των δυο εξυπηρετητών.

# ΑΣΚΗΣΗ 1

- Θεωρήστε ένα σύστημα παρόμοιο με ένα  $M/M/1$  με τη διαφορά ότι όταν το σύστημα αδειάζει η εξυπηρέτηση των πελατών αρχίζει όταν  $k$  πελάτες είναι παρόντες στο σύστημα ( $k$  γνωστό). Όταν η εξυπηρέτηση ξεκινήσει συνεχίζει κανονικά μέχρι το σύστημα να αδειάσει ξανά.
- Α) Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων του συστήματος.
- Β) Βρείτε τις εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων του αριθμού πελατών στο σύστημα
- Γ) Βρείτε το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα και τη μέση καθυστέρηση ανά πελάτη.

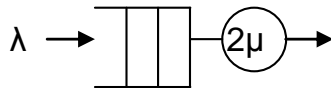
## ΑΣΚΗΣΗ 2

A) Δίνονται  $K$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , καθεμιά εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο  $\lambda$ . Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τυχαίας μεταβλητής  $\min(X_1, X_2, \dots, X_k)$ .

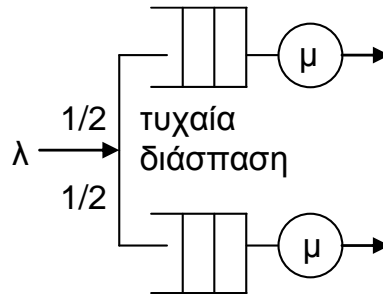
B) Μια αθλητική εγκατάσταση έχει 5 γήπεδα τένις. Αθλητές φθάνουν στα γήπεδα με ρυθμό Poisson ενός ζευγαριού ανά 10min. και κάθε ζευγάρι χρησιμοποιεί το γήπεδο κατά ένα χρονικό διάστημα εκθετικά κατανομημένο με μέση τιμή 40min. Υποθέστε ότι ένα ζευγάρι αθλητών φθάνει στην εγκατάσταση και βρίσκει όλα τα γήπεδα απασχολημένα και  $k$  ακόμα ζευγάρια περιμένουν στην αναμονή. Πόσο πρέπει να περιμένει κατά μέσο όρο το ζευγάρι που μόλις έφθασε για να παίξει σε ένα γήπεδο;

# ΑΣΚΗΣΗ 3

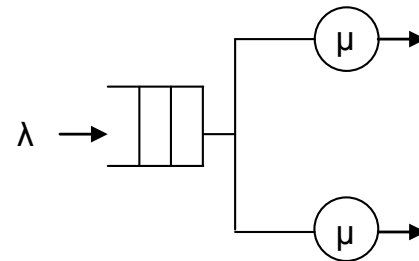
- Για κάθε ένα από τα συστήματα του σχήματος, υπολογίστε το μέσο χρόνο πακέτου στο σύστημα. Συγκρίνετε και επιλέξτε το καλύτερο και το χειρότερο.
- 



A) M/M/1



B)



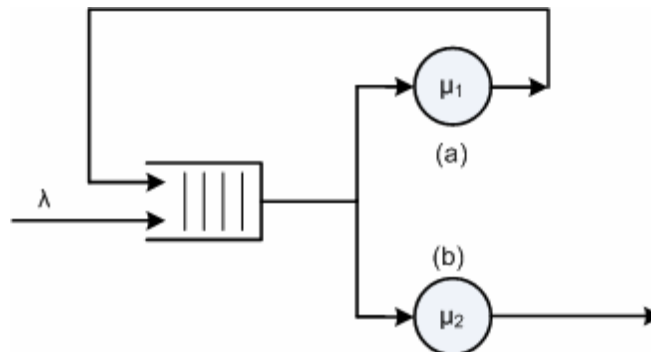
Γ) M/M/2

## ΑΣΚΗΣΗ 4

Θεωρείστε το σύστημα δύο εξυπηρετητών του παρακάτω σχήματος. Όταν και οι δύο εξυπηρετητές είναι ανενεργοί, ένα εισερχόμενο πακέτο δρομολογείται πάντα στον δεύτερο εξυπηρετητή (b). Ένας δρομολογητής δεν μπορεί να είναι ανενεργός αν υπάρχει πακέτο στην ουρά αναμονής. Αναχωρήσεις από τον εξυπηρετητή (a), παραμένουν στο σύστημα. Πακέτα που ολοκληρώνουν την εξυπηρέτησή τους στον (b), φεύγουν από το σύστημα.

A) Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων του συστήματος.

B) Βρείτε τις εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων συναρτήσει μόνο της πιθανότητας άδειου συστήματος και των  $\rho_1 = \lambda / \mu_1$ ,  $\rho_2 = \lambda / \mu_2$ ,  $w = \mu_2 / \mu_1$ .



## ΑΣΚΗΣΗ 5

- Θεωρήστε ένα σύστημα αναμονής  $M/M/2/10$  με 2 εξυπηρετητές και μέγιστο αριθμό πελατών 10 (συμπεριλαμβανομένων αυτών που εξυπηρετούνται).

Εφόσον ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι μικρότερος ή ίσος του  $k=4$ , οι αφίξεις δρομολογούνται πάντα στον εξυπηρετητή  $a$  ο δε  $b$  παραμένει ανενεργός (idle).

Ο εξυπηρετητής  $b$  ενεργοποιείται μόνο όταν ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ξεπεράσει το κατώφλι  $k=4$ .

Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων του συστήματος (Θεωρήστε ότι ο ρυθμός άφιξης πελατών στο σύστημα είναι  $\lambda$ , ο ρυθμός εξυπηρέτησης του εξυπηρετητή  $a$  είναι  $\mu_a$  και ο ρυθμός εξυπηρέτησης του εξυπηρετητή  $b$  είναι  $\mu_b$ ).