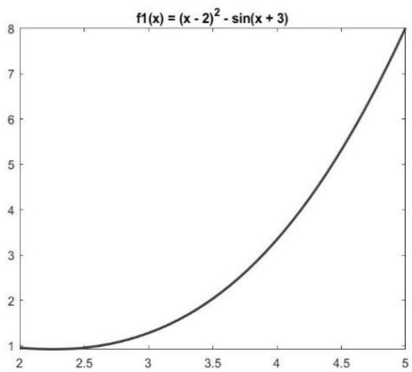
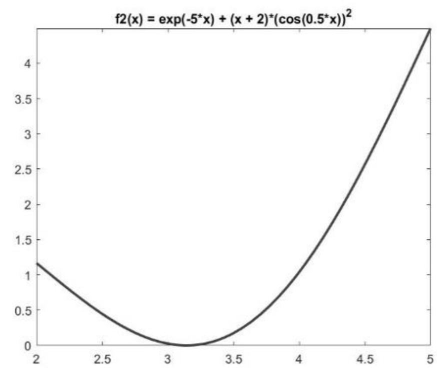
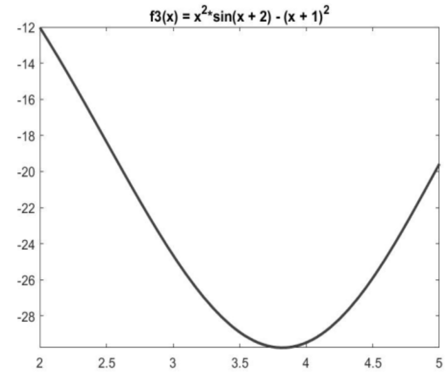
Η παρούσα εργασία ασχολείται με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης σχεδόν-κυρτών συναρτήσεων. Οι σχεδόν-κυρτές συναρτήσεις που θα εξετασθούν είναι οι εξής:

- $f1(x) = (x-2)^2 - sin(x+3)$
- $f2(x) = exp(-5*x) + (x+2)*\left(cos^2(0.5*x)\right)$
- $f3(x) = x^2 * sin(x+2) - (x+1)^2$

Παρακάτω παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών στο διάστημα [2, 5] στο οποίο θα τις μελετήσουμε:







Ξεκινώντας από το διάστημα αυτό και χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες μεθόδους ελαχιστοποίησης, θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε σε ένα διάστημα μήκους της επιλογής μας, στο οποίο θα περιέχεται η τετμημένη του (τοπικού) ελαχίστου των συναρτήσεων. Θα προσεγγίσουμε δηλαδή το x το οποίο ελαχιστοποιεί την εκάστοτε f(x) με ακρίβεια της επιλογής μας.

Αρχικά, μέσω θεωρητικής προσέγγισης, προκύπτουν οι εξής θέσεις τοπικών ελαχίστων:

- $f1$ = min για $x \approx 2.26057$
- $f2$ = min για $x \approx 3.14159$
- $f3$ = min για $x \approx 3.81992$

Σε αυτά τα x θα προσπαθήσουμε να πλησιάσουμε στην κάθε περίπτωση με τη χρήση των παρακάτω μεθόδων:

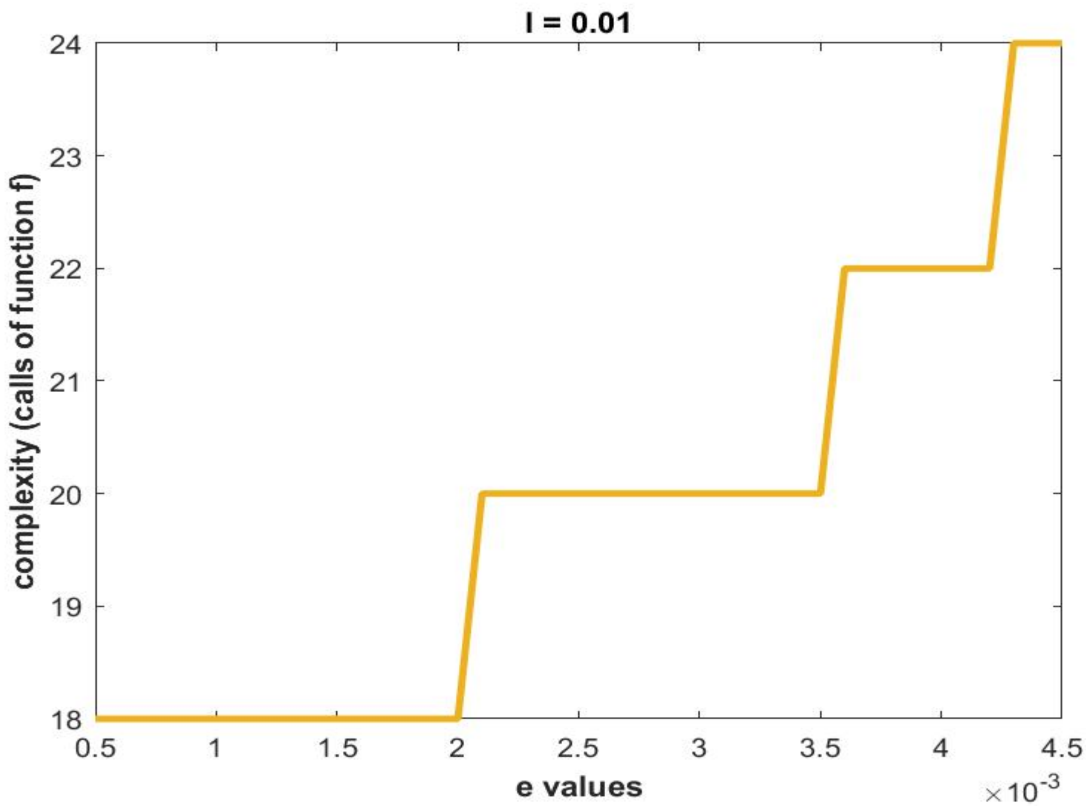
- Μέθοδος της διχοτόμου
- Μέθοδος του χρυσού τομέα
- Μέθοδος Fibonacci
- Μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγων

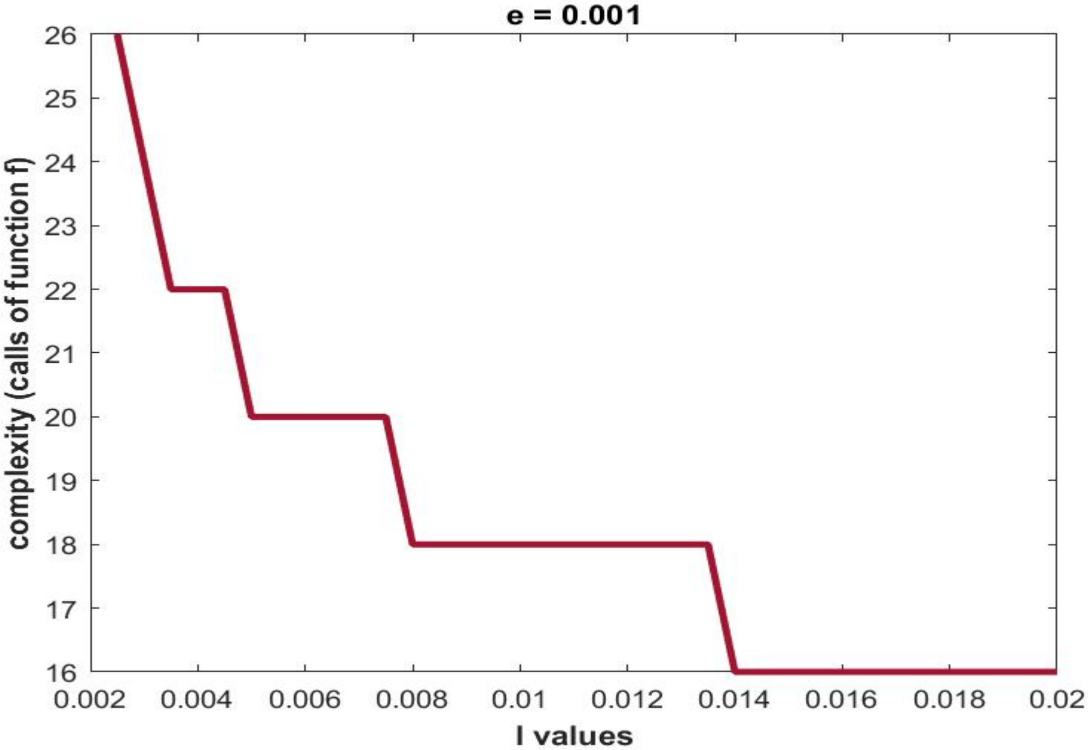
Μέσω της υλοποίησης σε Matlab των παραπάνω μεθόδων, μελετήσαμε το πλήθος των υπολογισμών τιμών της εκάστοτε αντικειμενικής συνάρτησης fi (ως ένα μέτρο της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου), ως συνάρτηση του επιλεγμένου τελικού εύρους αναζήτησης l. Να σημειωθεί πως στην τέταρτη μέθοδο μετράμε τον αριθμό των κλήσεων της παραγώγου της fi. Επίσης, αποκλειστικά για την πρώτη μέθοδο μελετήσαμε την πολυπλοκότητα ως συνάρτηση και της επιλεγμένης σταθεράς ε, που καθορίζει την απόσταση των x1κ και x2κ από τη διχοτόμο του διαστήματος [ακ, βκ] σε κάθε επανάληψη κ. Τέλος, για κάθε μέθοδο μελετήσαμε την μεταβολή των άκρων του διαστήματος [ακ, βκ] ως συνάρτηση του αριθμού επαναλήψεων κ.

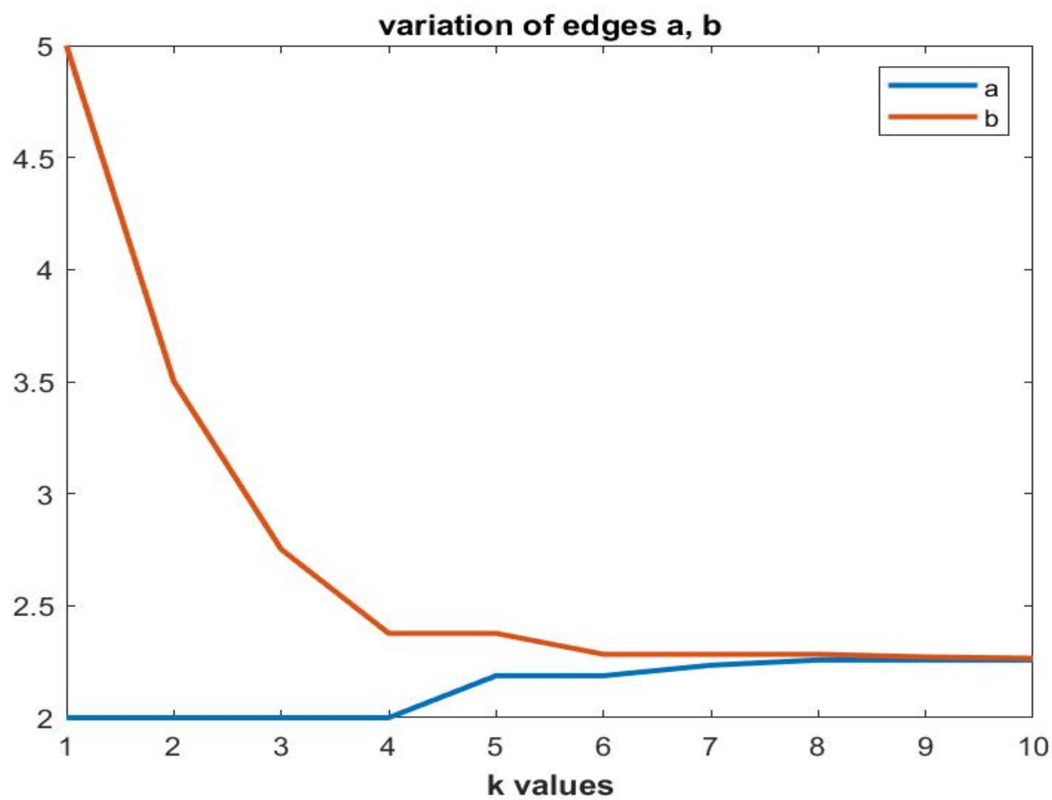
Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με γραφικές παραστάσεις παρακάτω:

- $f1(x) = (x-2)^2 - sin(x+3)$

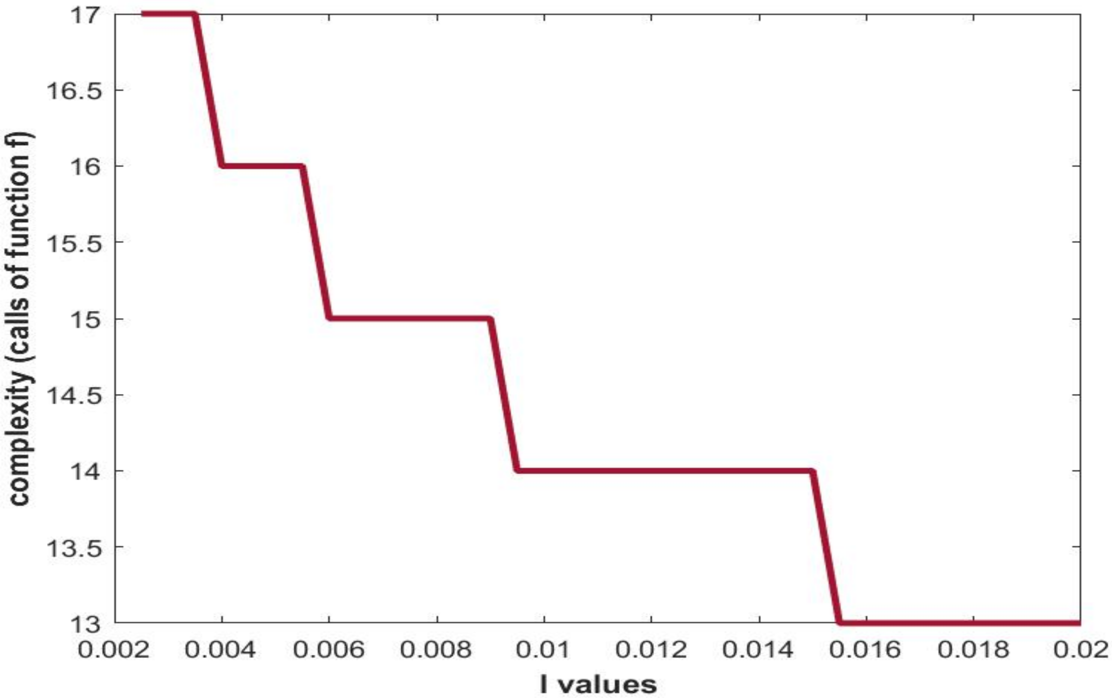
i) Μέθοδος της διχοτόμου (f1)

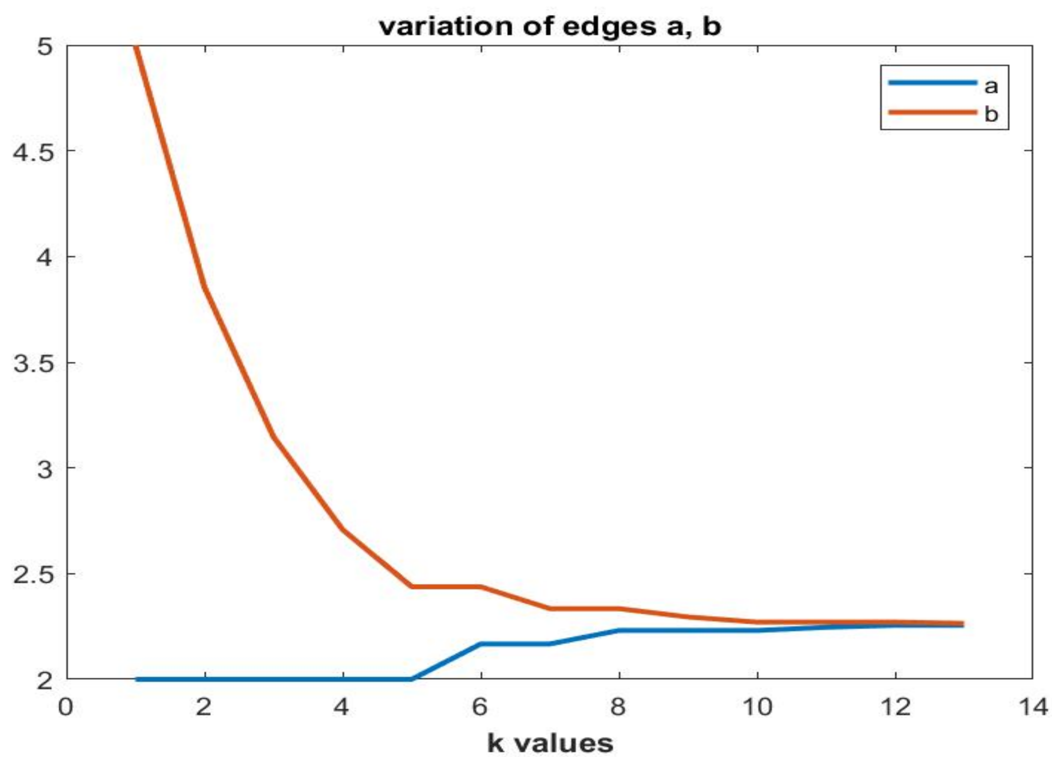



e = 0.001
complexity (calls of function f)
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
0.002
0.004
0.006
0.008
0.01
0.012
0.014
0.016
0.018
0.02
l values

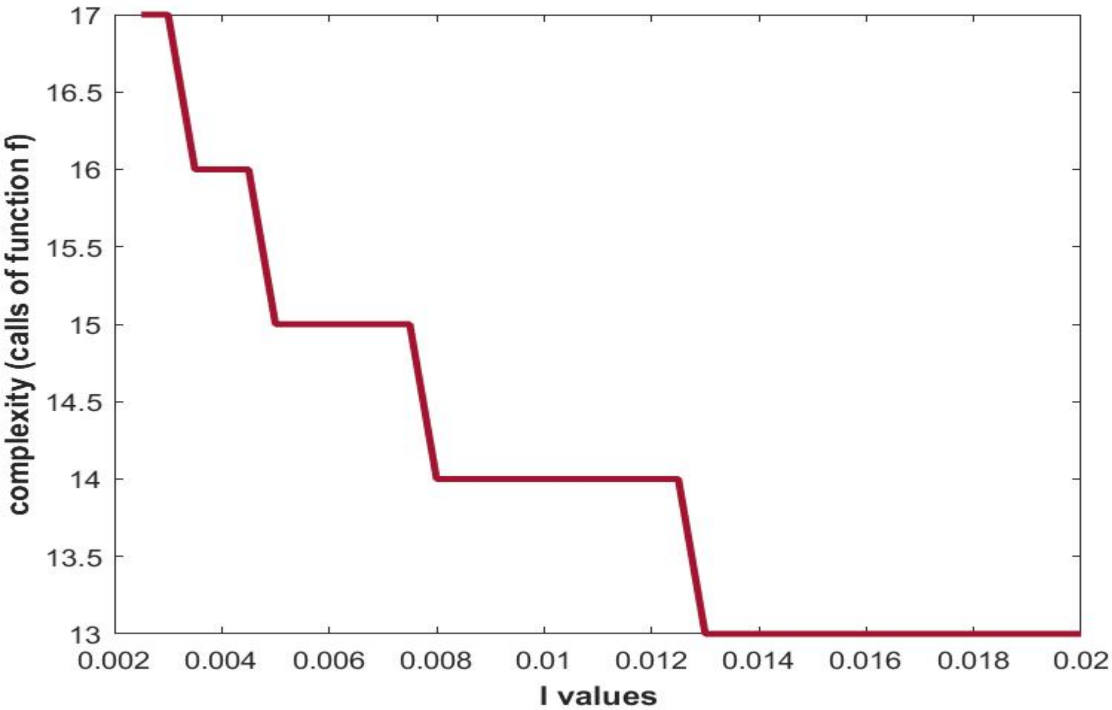

variation of edges a, b
a
b
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
k values

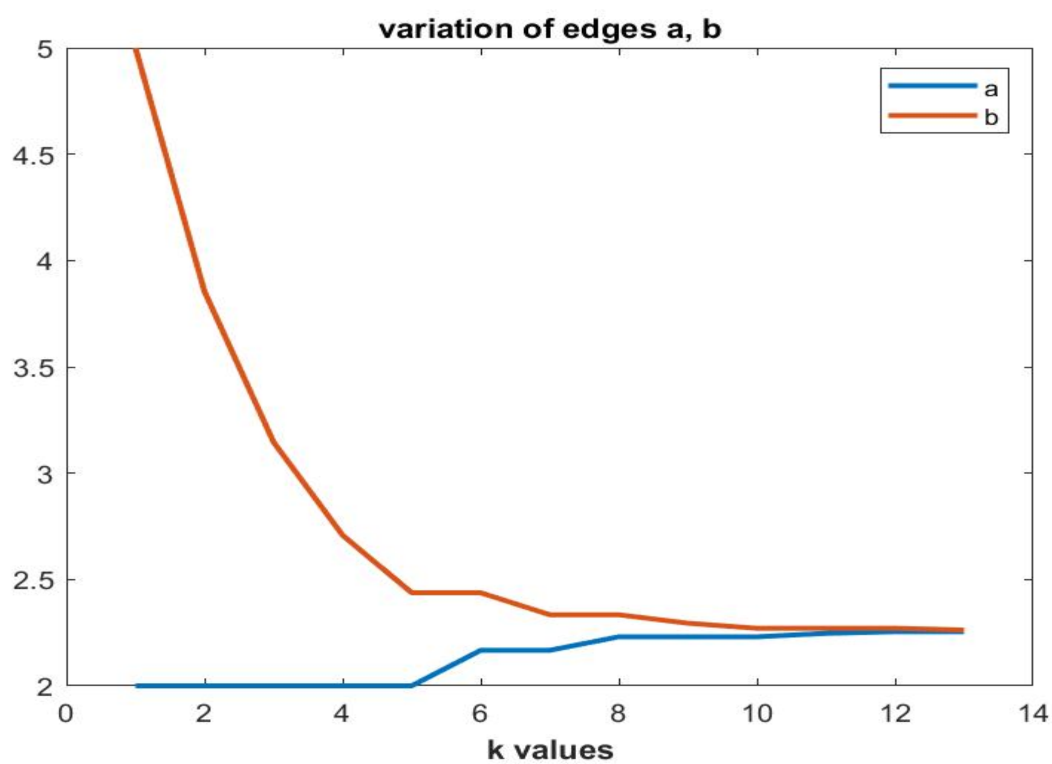
ii) Μέθοδος του χρυσού τομέα (f1)



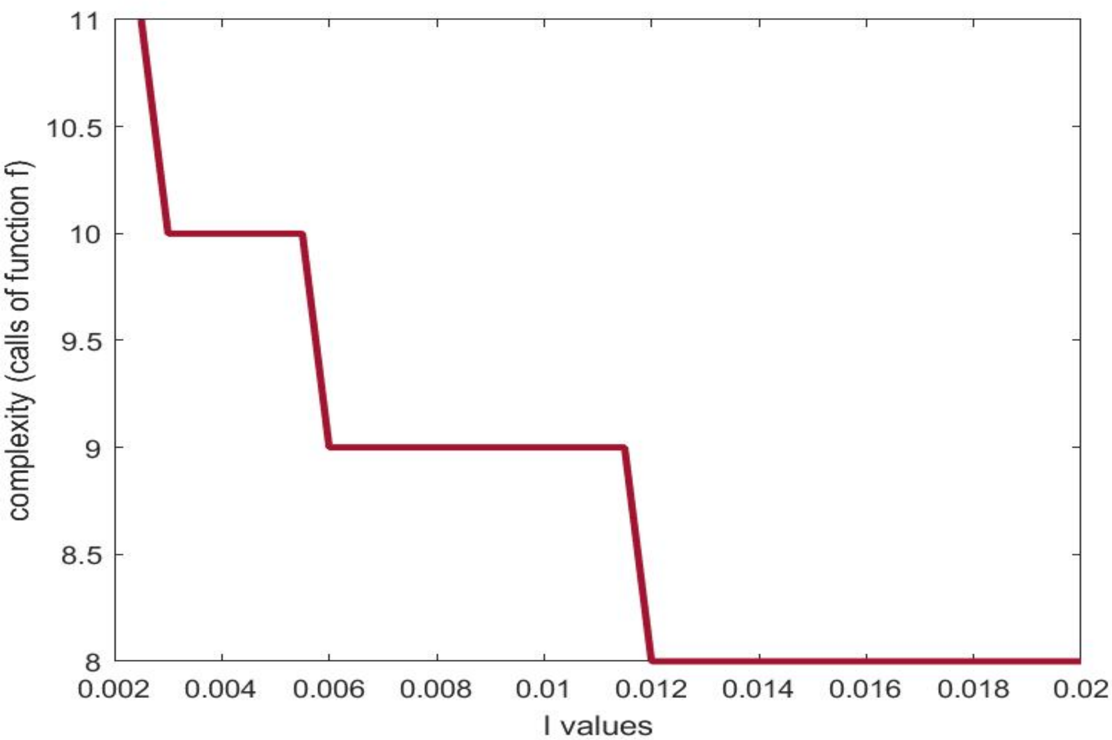


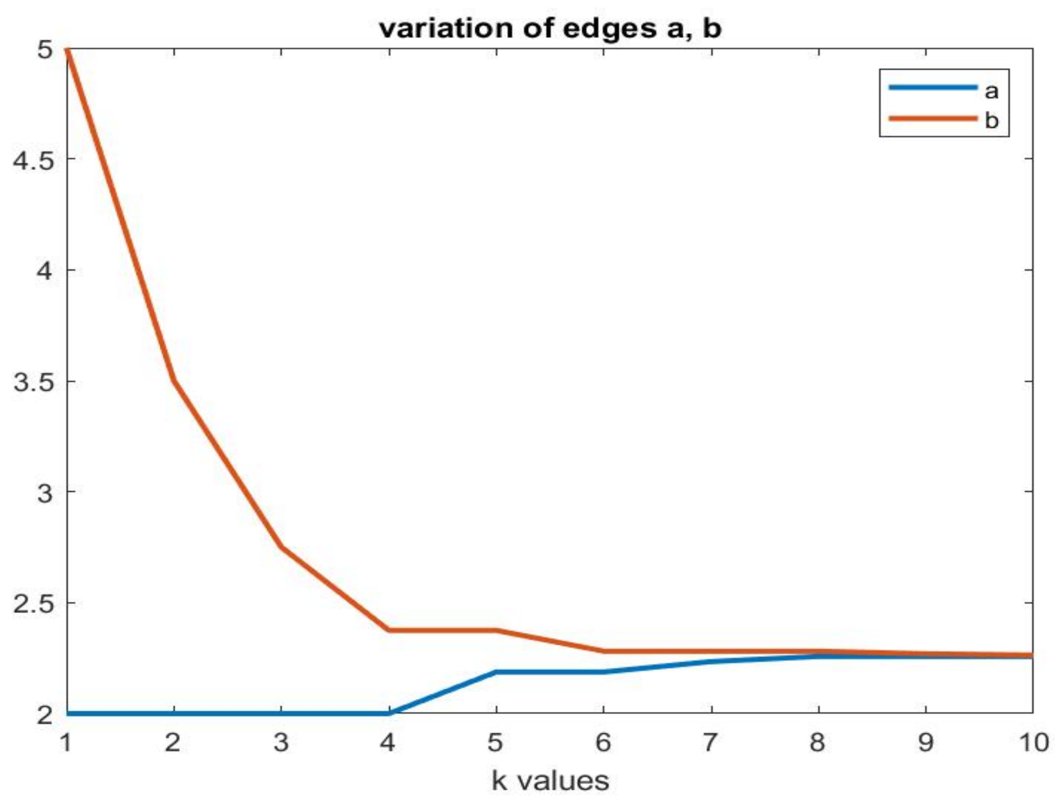
iii) Μέθοδος Fibonacci (f1)





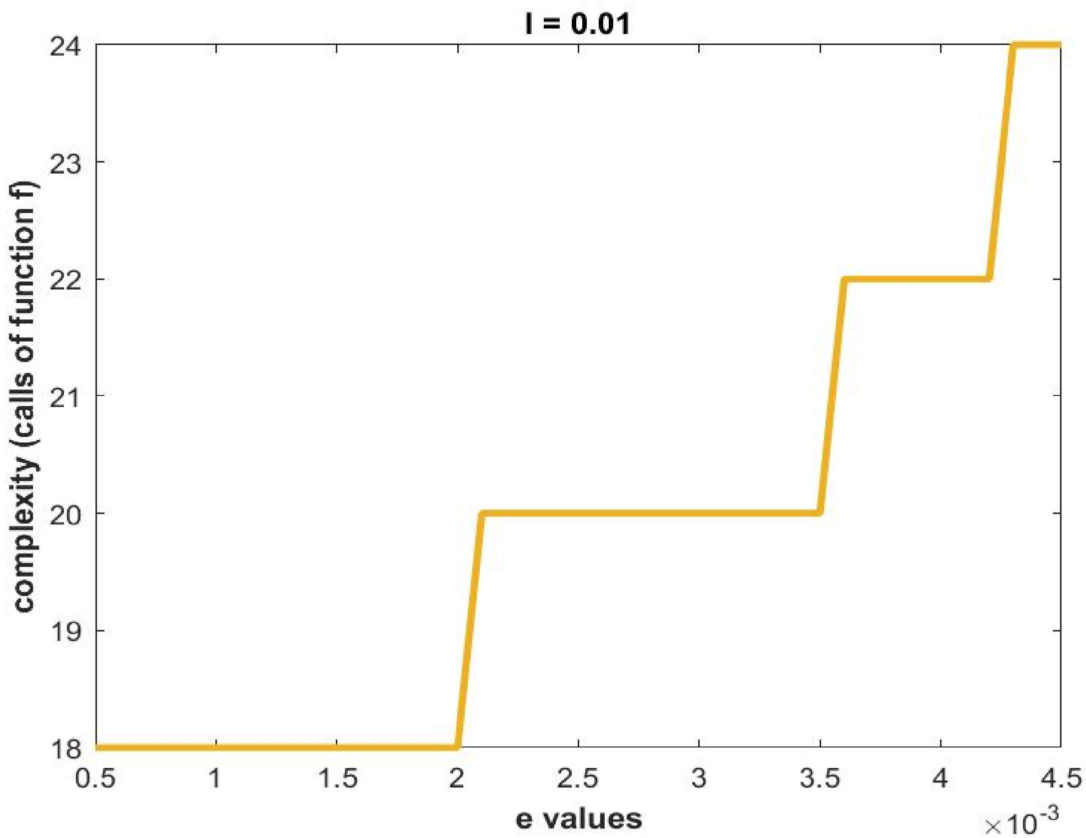
iv) Μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγων (f1)

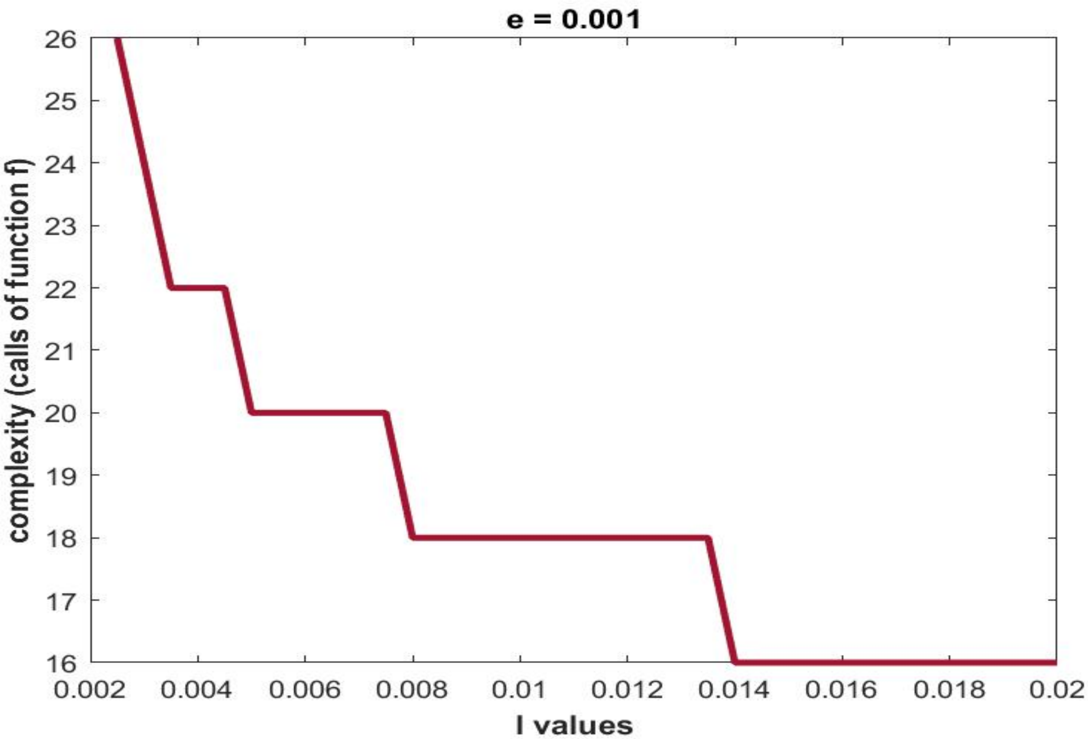


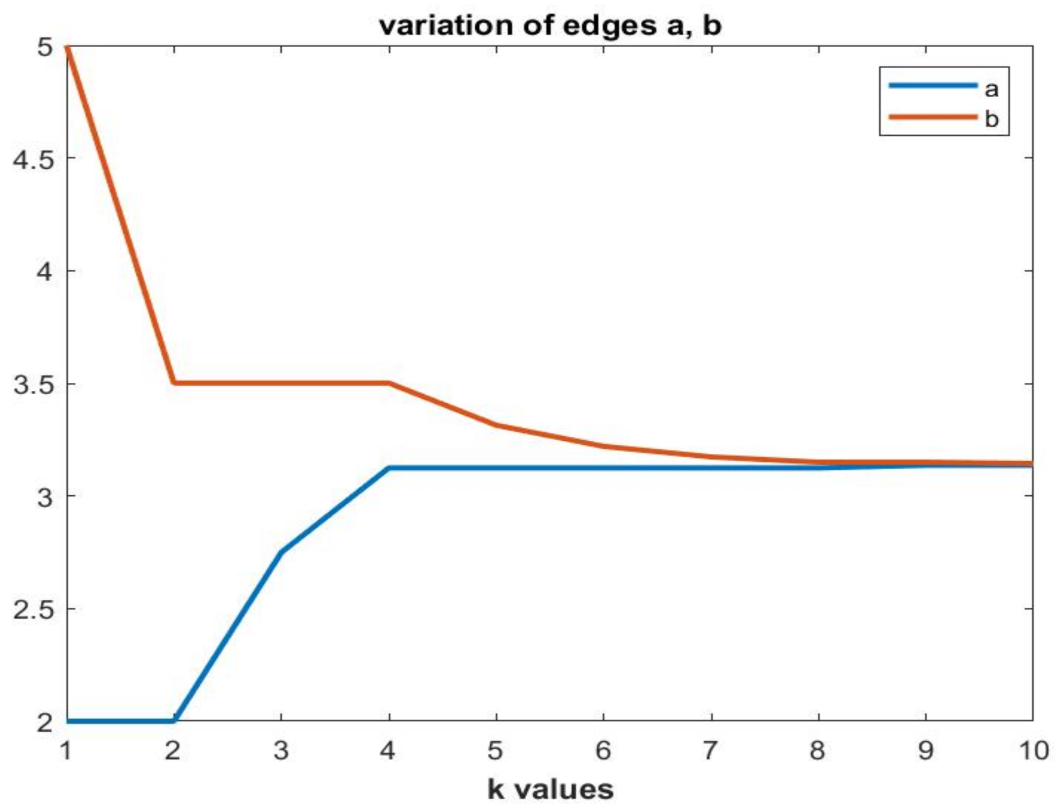


- $f2(x) = exp(-5 * x) + (x + 2) * \left(cos^2(0.5 * x)\right)$

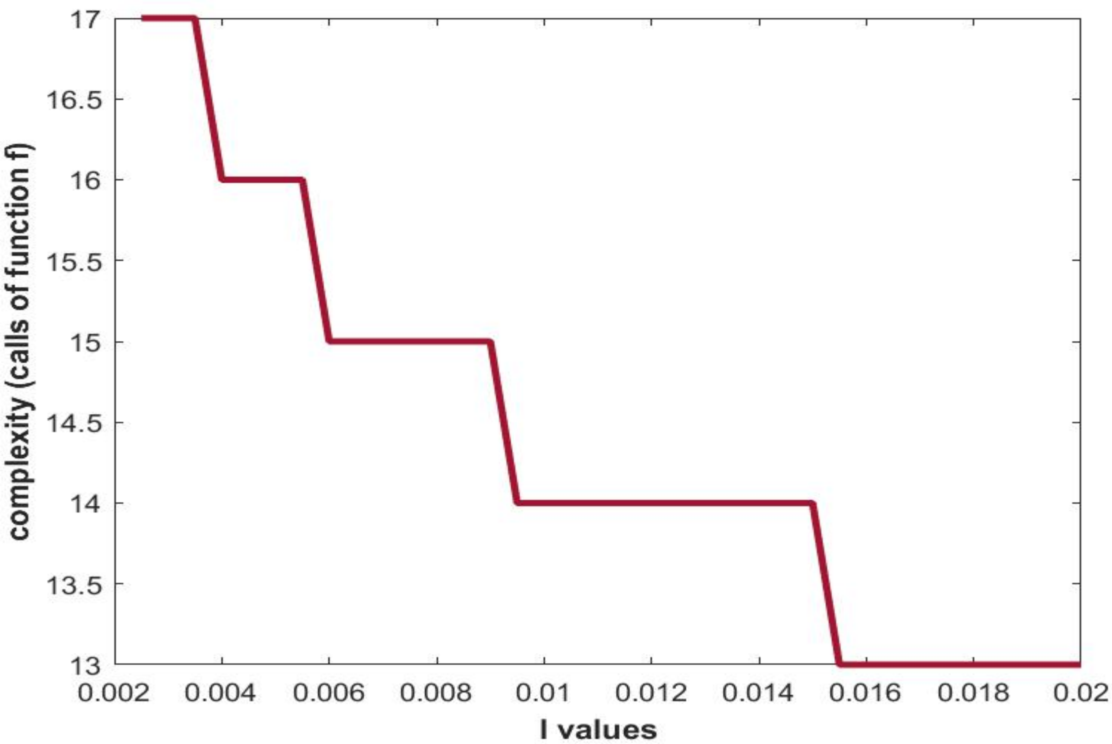
i) Μέθοδος της διχοτόμου (f2)

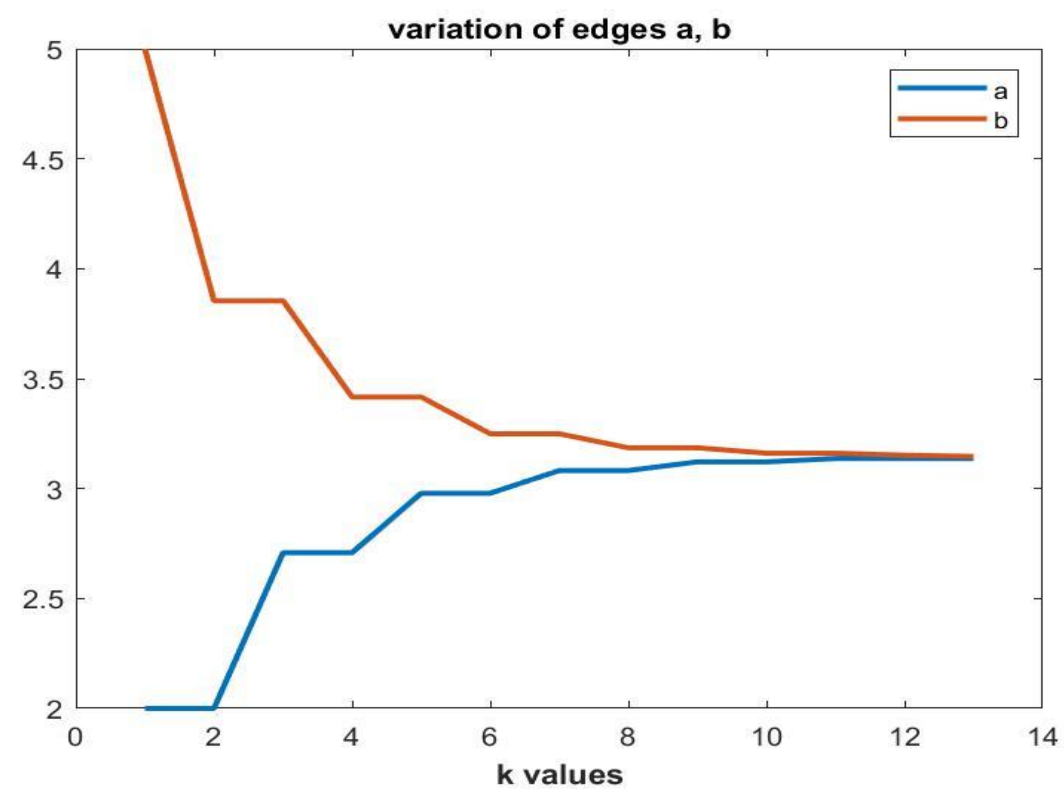



e = 0.001
complexity (calls of function f)
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
0.002
0.004
0.006
0.008
0.01
0.012
0.014
0.016
0.018
0.02
l values

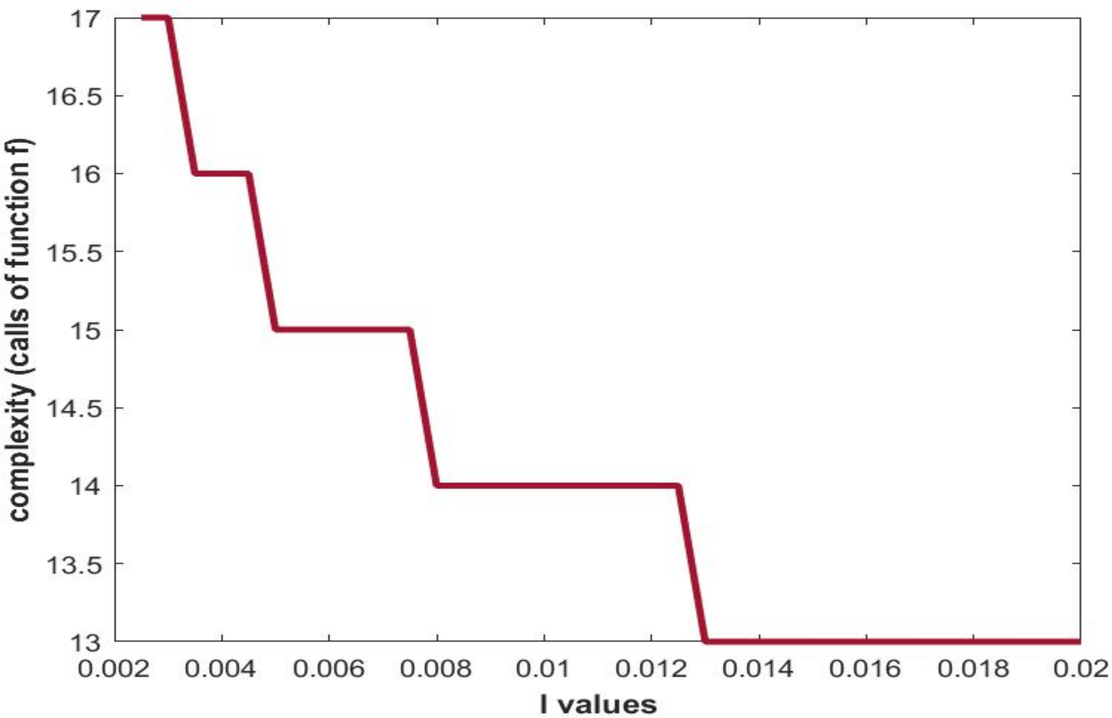

variation of edges a, b
a
b
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
k values

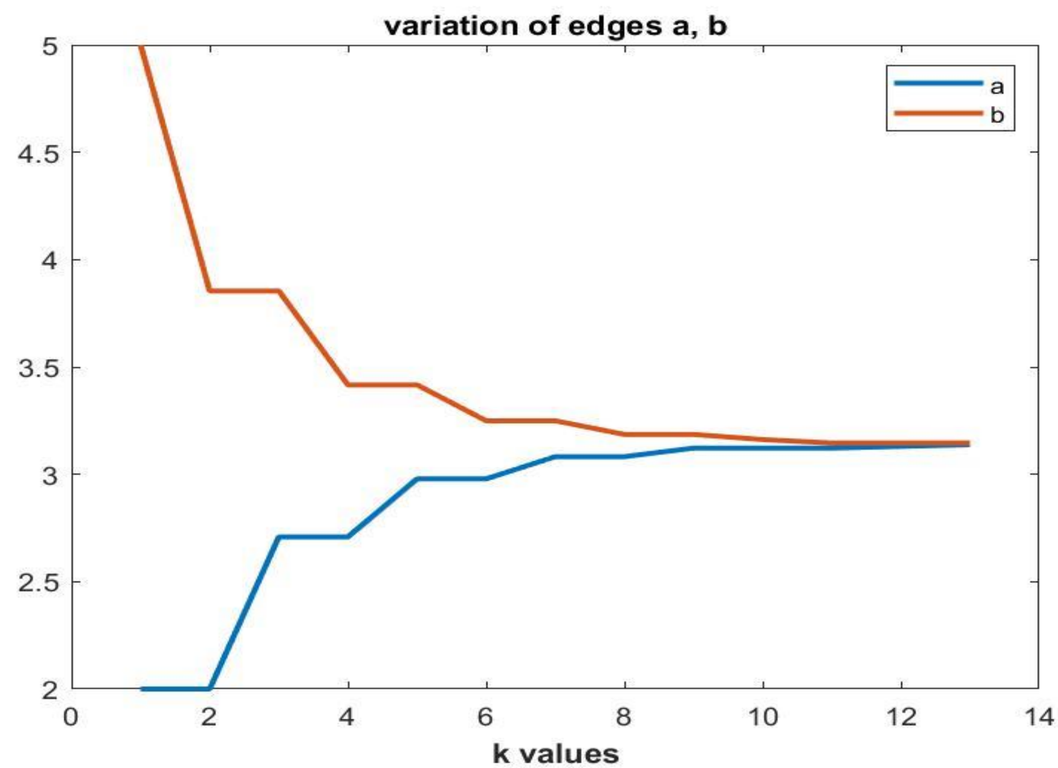
ii) Μέθοδος του χρυσού τομέα (f2)



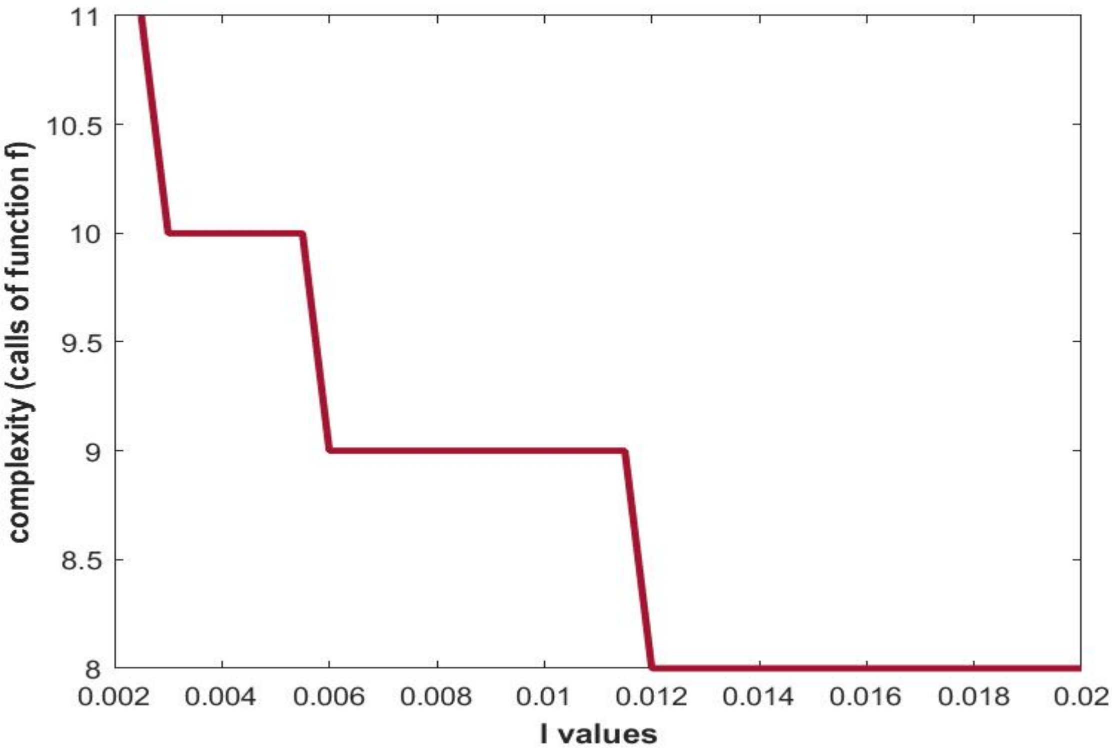


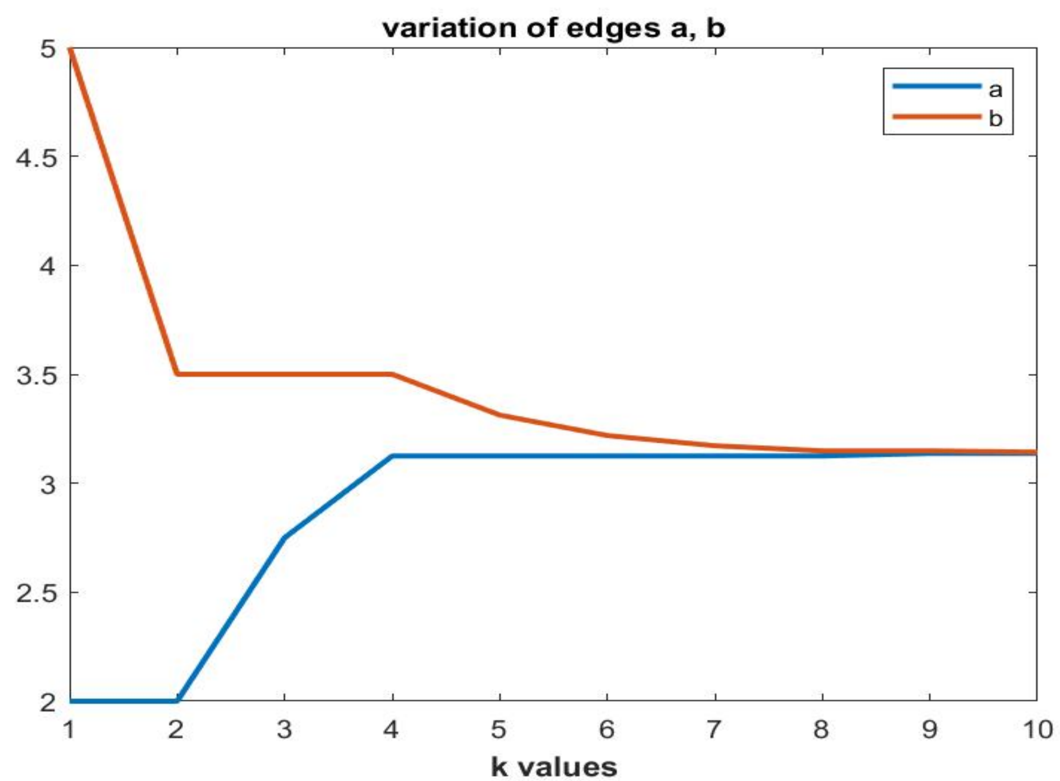
iii) Μέθοδος Fibonacci (f2)





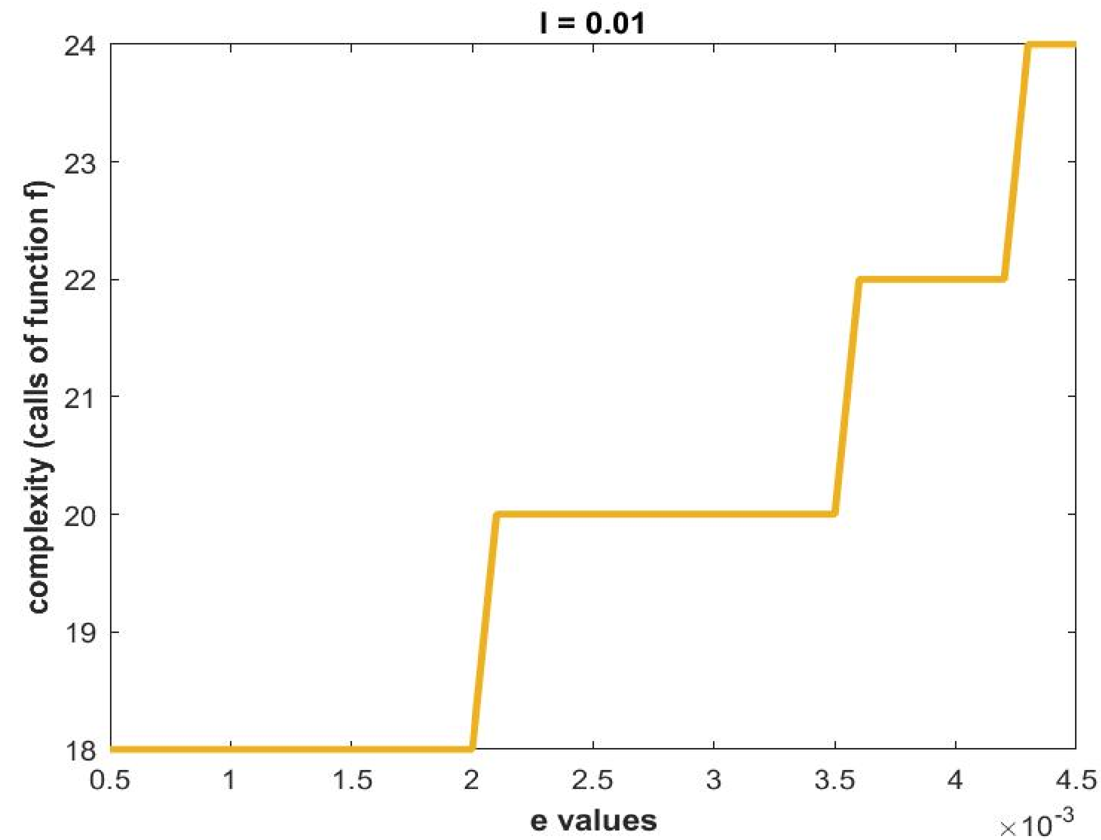
iv) Μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγων (f2)

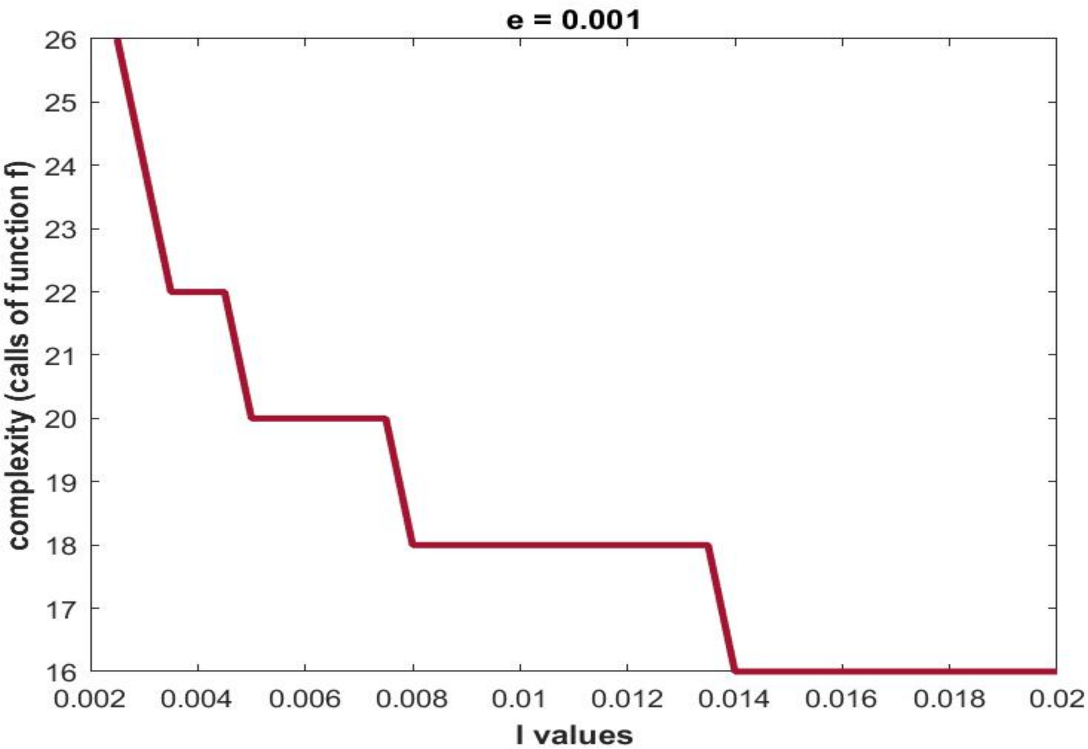


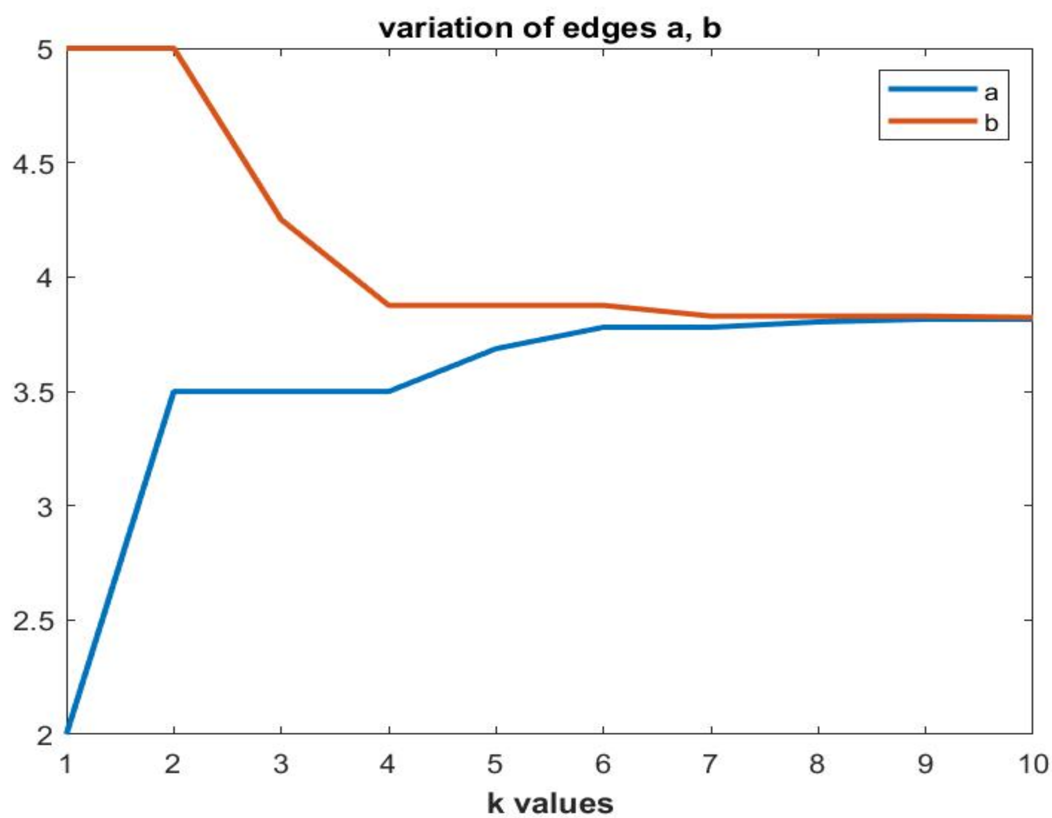


- $f3(x) = x^2 * sin(x+2) - (x+1)^2$

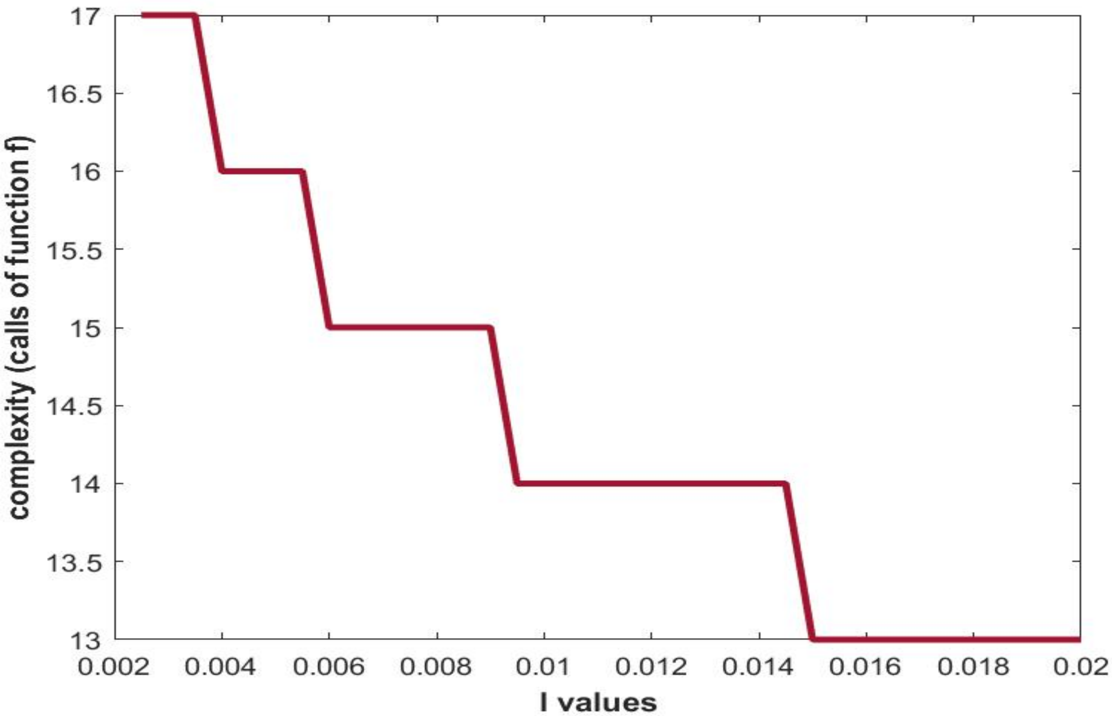
i) **Μέθοδος της διχοτόμου (f3)**

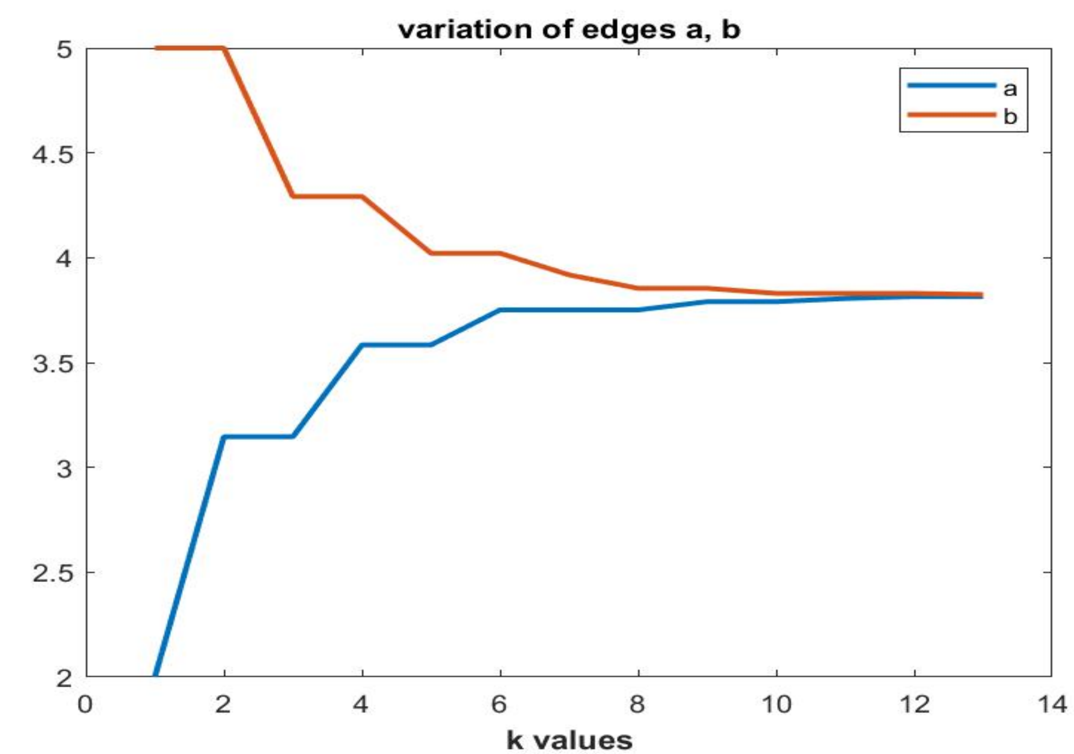



e = 0.001
complexity (calls of function f)
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
0.002
0.004
0.006
0.008
0.01
0.012
0.014
0.016
0.018
0.02
l values

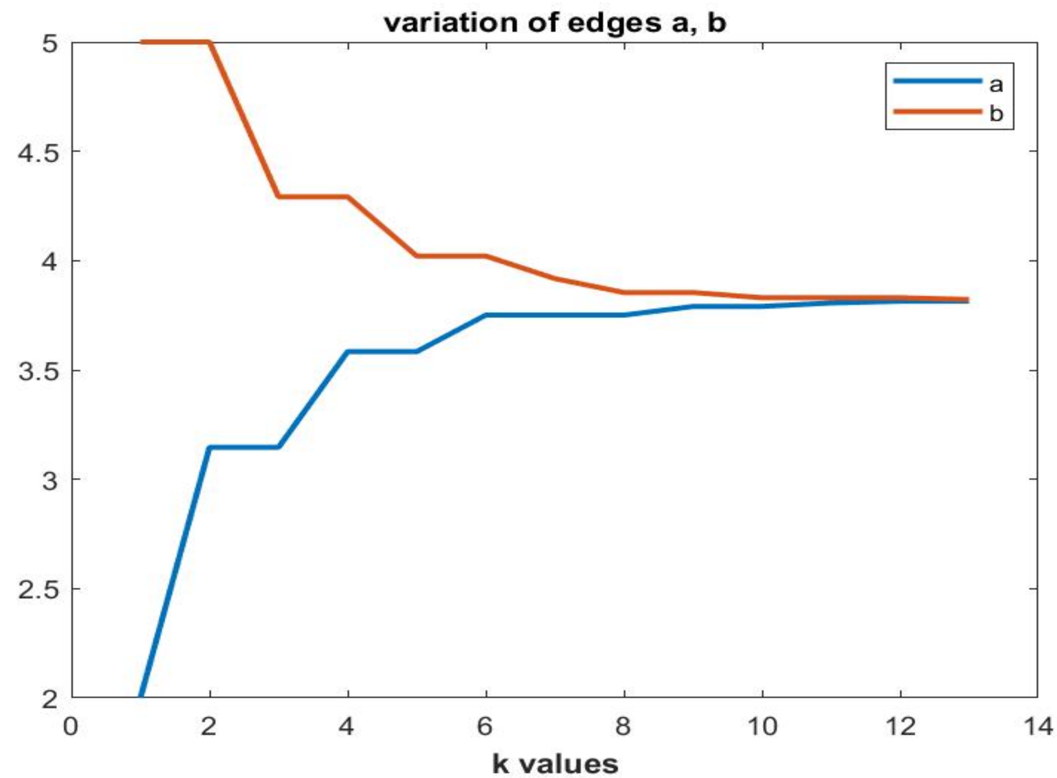

variation of edges a, b
a
b
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
k values

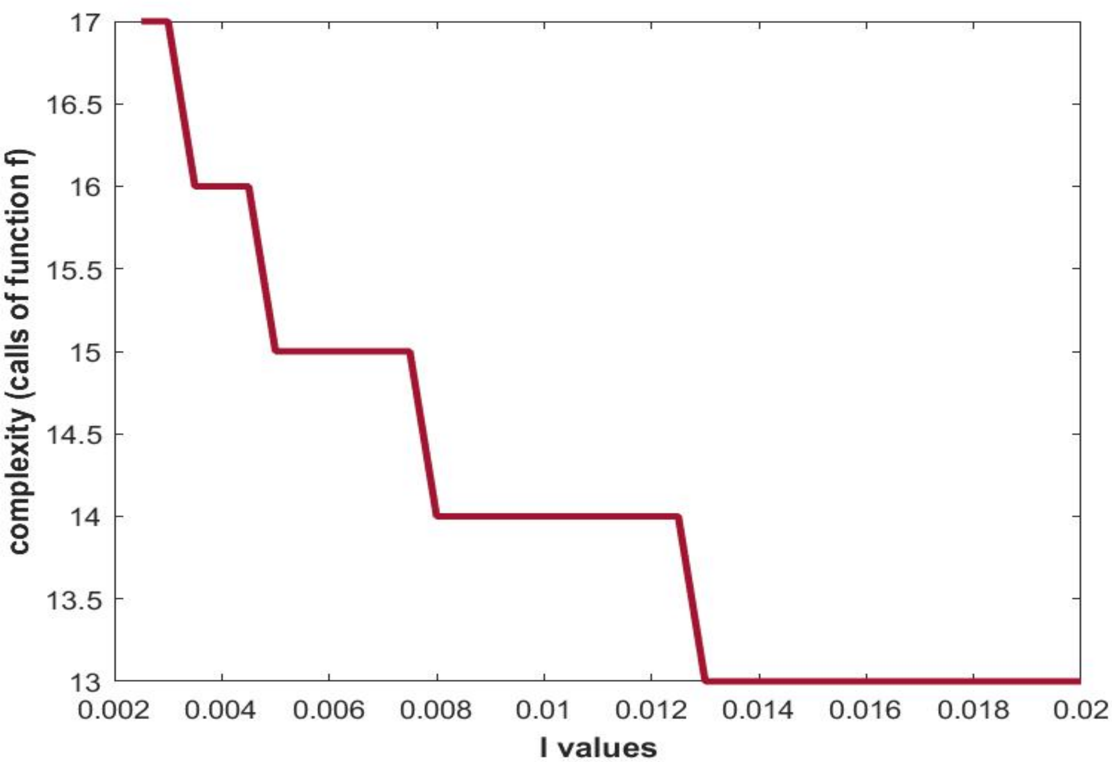
ii) Μέθοδος του χρυσού τομέα (f3)



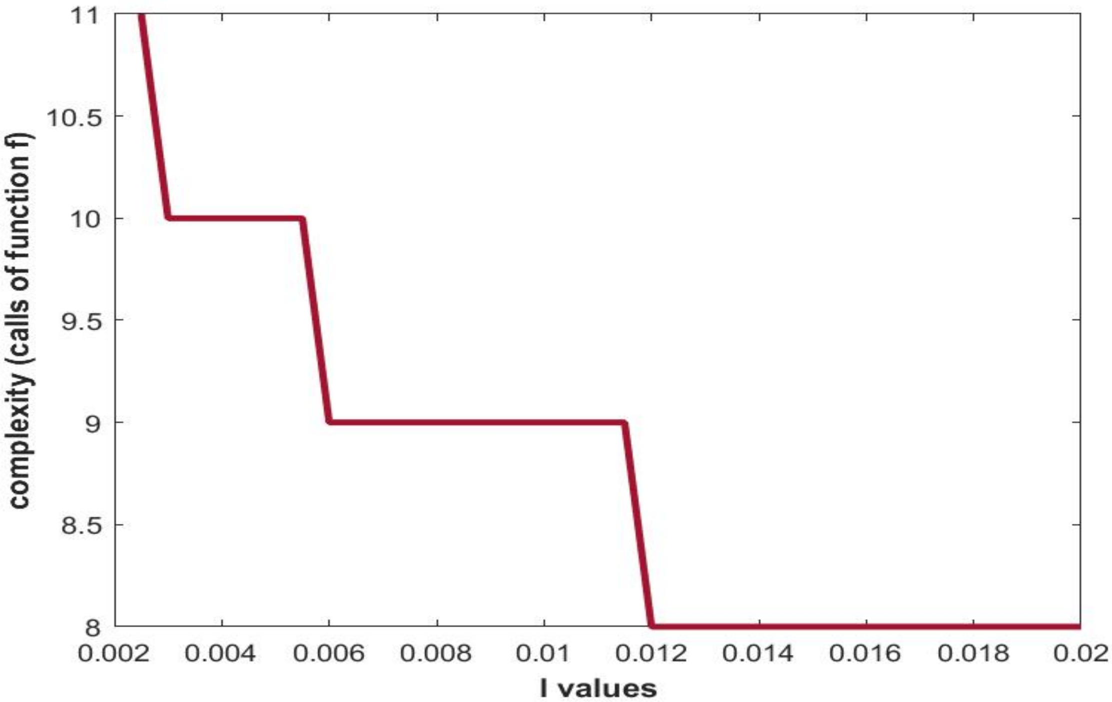


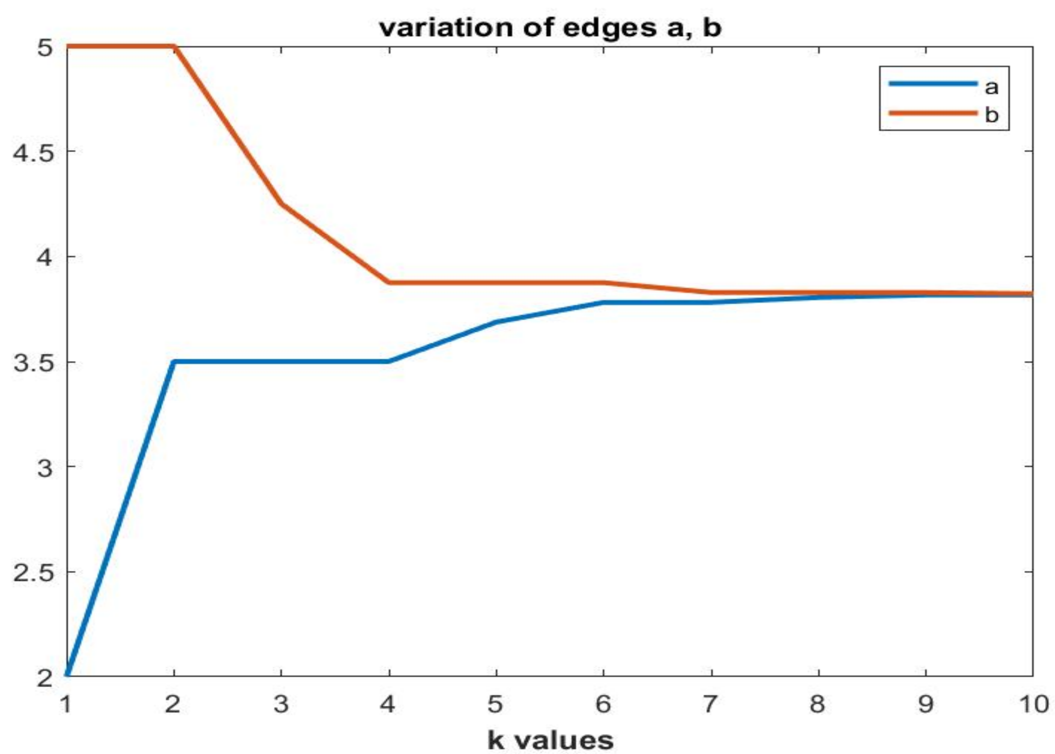
iii) Μέθοδος Fibonacci (f3)





iv) Μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγου (f3)





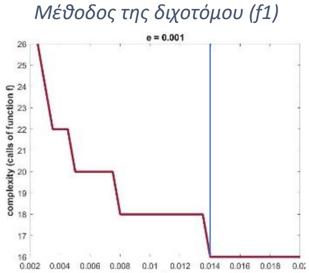
Στη συνέχεια, καταγράφονται σχόλια και παρατηρήσεις σχετικά με τα διαγράμματα:

- Στο διάγραμμα **“e values” – “complexity”** της μεθόδου της διχοτόμου, παρατηρούμε πως για σταθερό εύρος τελικού διαστήματος l = 0.01, η αύξηση της απόστασης e από τη διχοτόμο οδηγεί σε αύξηση του αριθμού των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης fi, γεγονός που καθιστά τον αλγόριθμο πιο κοστοβόρο. Παρατηρούμε επίσης, πως το διάγραμμα είναι ίδιο για τρεις διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις, επομένως το συνολικό κόστος σε κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης φαίνεται πως είναι ανεξάρτητο από τη συνάρτηση αυτή (επομένως και από τη θέση του ελαχίστου). Συμπεραίνουμε πως για σταθερή προκαθορισμένη ακρίβεια, ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης εξαρτάται μόνο από την επιλογή της στεθεράς ε. Επομένως, θα προτιμούσαμε την επιλογή μιας αρκετά μικρής τιμής για τη σταθερά ε. Σημειώνεται πως υπάρχει ένα κάτω-φράγμα στον αριθμό υπολογισμών της f, με συνέπεια από ένα σημείο και μετά να μην έχει αποτέλεσμα η μείωση του ε.

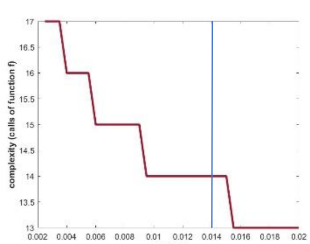
- Στο διάγραμμα **“l values” – “complexity”**, παρατηρούμε πως για συγκεκριμένη μέθοδο και για διάφορες αντικειμενικές συναρτήσεις, τα διαγράμματα ταυτίζονται και πάλι. Αρχικά θα μελετήσουμε τη Μέθοδο της διχοτόμου. Εδώ για σταθερό ε = 0.001, η αύξηση της του εύρους ακρίβειας l (δηλαδή η μείωση της ακρίβειας της προσέγγισης) οδηγεί σε αύξηση του κόστους του αλγορίθμου, όπως είναι λογικό, καθώς γίνονται περισσότερες επαναλήψεις μέχρι να οδηγηθούμε στο επιθυμητό διάστημα. Αν - επιδιώκοντας υψηλή ακρίβεια - προσπαθήσουμε να μειώσουμε το l, θα πρέπει να προσέξουμε να μην παραβιάσουμε τον περιορισμό **l $\geq$ 2ε**. Από τον περιορισμό αυτό, φαίνεται επίσης πως η μείωση του ε δίνει μεγαλύτερο περιθώριο μείωσης του l και επομένως αύξησης της ακρίβειας του υπολογισμού. Ωστόσο, με τη μείωση του l δεν υφίσταται άνω φράγμα στην αύξηση του κόστους, ενώ η μείωση του κόστους μέσω μείωσης του ε φράσσεται από κάτω. Συνεπώς, μια μεγάλη μείωση των l και ε στην προσπάθεια μας να αυξήσουμε κατά πολύ την ακρίβεια, θα καθιστούσε το πρόγραμμά μας ιδιαίτερα κοστοβόρο. Το συμπέρασμα αυτό, που λήφθηκε από την πρώτη μέθοδο, επεκτείνεται και στις άλλες τρεις μεθόδους, όπου δεν υπάρχει σταθερά ε, αλλά και πάλι η μείωση του l οδηγεί σε μη φραγμένη αύξηση της πολυπλοκότητας.

- Όσον αφορά τη σύγκριση των τεσσάρων μεθόδων ως προς το κόστος, θα θεωρήσουμε στα διαγράμματα **“l values” – “complexity”** της $f1$ τις κατακόρυφες l = 0.014. Παρατηρούμε πως για l = 0.014, η πρώτη μέθοδος έχει κόστος 16, η δεύτερη 14, η τρίτη 13 και η τέταρτη 8.

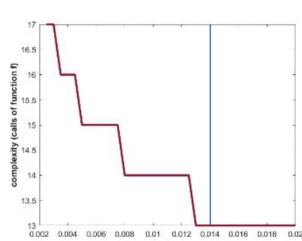
Μέθοδος της διχοτόμου (f1)



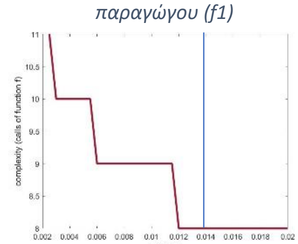
Μέθοδος του χρυσού τομέα (f1)



Μέθοδος Fibonacci (f1)



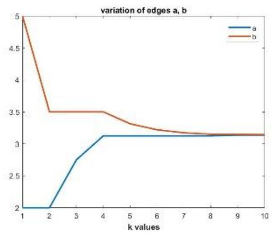
Μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγου (f1)



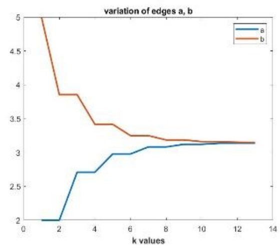
Συμπεραίνουμε πως: costDichMeth(0.014) > costGdnSecMeth(0.014) > costFibMeth(0.014) > costDerDichMeth(0.014). Η σχέση αυτή παρατηρώντας τα διαγράμματα μπορεί να γενικευθεί ως εξής: **costDichMeth(l) ≥ costGdnSecMeth(l) ≥ costFibMeth(l) ≥ costDerDichMeth(l) ∀l**. Το συμπέρασμά μας για την $f1$ ισχύει και για τις άλλες τρεις συναρτήσεις, άρα μπορούμε να το γενικεύσουμε για κάθε σχεδόν - κυρτή συνάρτηση σε διάστημα [α, β]. Επομένως, η Μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγου είναι η πιο αποτελεσματική, ακολουθεί η Μέθοδος Fibonacci, στη συνέχεια η Μέθοδος του χρυσού τομέα και η λιγότερο αποτελεσματική είναι η απλή Μέθοδος της διχοτόμου. Έτσι, επαληθεύεται και επεκτείνεται η παρατήρηση 1 της σελ. 114 του βιβλίου του κ. Ροβιθάκη «Τεχνικές Βελτιστοποίησης». Να σημειωθεί πως η σύγκριση της τέταρτης μεθόδου με τις υπόλοιπες γίνεται με την παραδοχή πως το κόστος υπολογισμού μιας τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης είναι περίπου ίσο με το κόστος υπολογισμού μιας τιμής της παραγώγου της και θεωρώντας αμελητέο το κόστος προσδιορισμού της παραγώγου.

- Το διάγραμμα **“edges (a, b)” – “k (iteration number)”** παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς αποτυπώνει τη διαδικασία σύγκλισης των άκρων ακ, βκ στη θέση του τοπικού ελαχίστου.

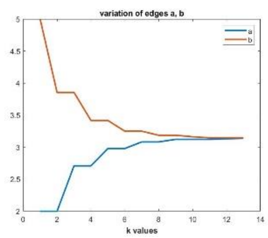
Μέθοδος της διχοτόμου (f2)



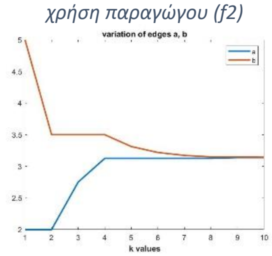
Μέθοδος του χρυσού τομέα (f2)



Μέθοδος Fibonacci (f2)



Μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγου (f2)



Μελετώντας τη μεταβολή των άκρων με τις τέσσερις μεθόδους για τη δεύτερη αντικειμενική συνάρτηση, παρατηρούμε πως τα άκρα συγκλίνουν με παρόμοιο και στις τέσσερις μεθόδους. Είναι ιδιαίτερα χαρακτηριστική ομοιότητα του διαγράμματος της πρώτης με την τέταρτη μέθοδο, αλλά και της δεύτερης με την τρίτη. Αυτό μπορεί εύκολα να αποδοθεί στην ομοιότητα των αλγορίθμων που ακολουθούν ανά ζεύγη. Τέλος παρατηρούμε πως για ίδιο l = 0.01, η πρώτη και η τέταρτη μέθοδος φτάνουν στο επιθυμητό διάστημα με λιγότερες επαναλήψεις σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους, κάτι που ισχύει και για τις άλλες δύο αντικειμενικές συναρτήσεις, οπότε ίσως μπορεί να γενικευθεί. Δηλαδή, η Μέθοδος της διχοτόμου (με ή χωρίς τη χρήση παραγώγου) χρειάζεται λιγότερες επαναλήψεις για να φτάσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα, σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους. Τέλος, παρατηρούμε πως οι θεωρητικές τιμές για τις θέσεις των ελαχίστων που αναφέρθηκαν στην αρχή της αναφοράς, βρίσκονται εντός των τελικών διαστημάτων σε κάθε περίπτωση, επομένως οι αλγόριθμοί μας πετυχαίνουν στον αρχικό στόχο.