Chapitre 19 : Fonctions continues sur un intervalle

I - Généralités sur les fonctions réelles continues sur un intervalle

1) Fonctions continues changeant de signe sur un intervalle

Théorème 1 : (existence de solution à l'équation $f(x) = 0$. Preuve algorithmique par dichotomie.)

Conséquences, applications classiques

Corollaire 1 : (théorème des valeurs intermédiaires)

Corollaire 2 : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(I)$ est un intervalle.

2) Fonctions réelles continues sur un segment

Théorème 2 : (l'image d'un segment par une application continue est un segment)

II - Continuité et monotonie

1) Résultats généraux

Théorème 3 : Image d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ par une fonction continue strictement monotone f.

Théorème 4 : (théorème de la bijection)

2) Fonctions réciproques d'une bijection continue

a) Fonctions racines n-ièmes

b) La fonction arctan

Exemples de compétences attendues

❶ savoir justifier qu'une fonction continue s'annule et savoir utiliser l'algorithme de dichotomie,

❷ savoir que l'image d'un intervalle (resp. d'un segment) par une fonction continue est un intervalle (resp. un segment),

❸ savoir rédiger et utiliser le théorème de la bijection.

❹ Connaître les propriétés de la fonction arctan (variations, valeurs remarquables, imparité...).

Questions de cours possibles :

- Donner le code Python de l'algorithme de dichotomie et savoir l'expliquer.
- Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle.
- Si a, b sont deux réels tels que $a \leqslant b$, montrer que si $f : [a, b] \to [a, b]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Chapitre 20 : **Fonctions dérivables**

I - Définitions et propriétés élémentaires

1) Notion de dérivée

2) Propriétés élémentaires

II - Opérations sur les dérivées

1) Opérations algébriques

2) Dérivée d'une fonction réciproque

III - Accroissements finis

1) Le théorème de Rolle

2) La formule des accroissements finis

3) Dérivée et variation des fonctions

IV - Dérivées d'ordre supérieur

1) Fonctions de classe C^n

Dérivées n-ième de cos, sin, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \ln x$.

2) Les théorèmes généraux (pour les fonctions de classe C^n ou C^∞)

3) Fonctions réciproques

Exemples de compétences attendues

❶ Savoir étudier les variations d'une fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles,

❷ Savoir rédiger et utiliser le théorème de Rolle,

❸ Savoir rédiger et utiliser le théorème des accroissements finis,

❹ Savoir justifier la dérivabilité d'une bijection réciproque f^{-1} et utiliser la formule $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$,

❺ Connaître les dérivées successives de quelques fonctions usuelles (cos, sin, ln, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, ln, exp).

Questions de cours possibles :

- Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.
- Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis (en utilisant le théorème de Rolle).
- Énoncer précisément le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque f^{-1} (avec la formule pour $(f^{-1})'$).

Chapitre 21 Compléments sur l'intégration

I - Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

1) Définition et premières propriétés

2) Existence de primitives et premiers exemples

II - Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1) Définition, lien avec la notion de primitive

2) Propriétés fondamentales de l'intégrale

3) Interprétation géométrique de la notion d'intégrale pour une fonction continue

4) Théorème de la valeur moyenne, sommes de Riemann

III - Méthodes de calcul intégral

1) Intégration de fonctions rationnelles

a) Intégration des fonctions du type $t \longmapsto (t-a)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$

b) Intégration des fonctions du type $f : t \longmapsto \frac{at+b}{t^2+pt+q}$ (seulement le cas où $p^2 - 4q \geqslant 0$).

2) Intégration par parties

3) Changement de variable

IV - Extension de la notion d'intégrale

Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

V - Equations autonomes du type $y' = g(y)$

Éléments de résolution de ces équations. Cas de l'équation de Verhulst et de l'équation de Gompertz.

Exemples de compétences attendues

❶ Connaître les propriétés usuelles de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

❷ Savoir étudier une fonction définie par une intégrale fonction de ses bornes.

❸ Savoir utiliser et rédiger une intégration par parties.

❹ Savoir reconnaître et calculer une somme de Riemann.

❺ Savoir effectuer un changement de variable.

❻ Savoir calculer une primitive d'une fonction de la forme $x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+px+q}$ avec $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ dans le cas où le dénominateur n'a que des racines **réelles** (décomposition en éléments simples).

❼ Connaître (et savoir mener) la méthode de résolution d'équations autonomes simples.

Questions de cours possibles :

- Énoncer **correctement** et démontrer la formule d'intégration par partie.
  Énoncer **correctement** et démontrer la formule de changement de variable.
- Énoncer correctement les formules sur les sommes de Riemann (cas où on travaille sur le segment $[0, 1]$) et application à un calcul simple de limite d'une somme de Riemann quand le pas tend vers 0.