Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} (x^x)^x$ b) $\lim\limits_{x\to 0} x^{(x^x)}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1-2x+x^2}{1-4x+2x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$. On note C_f la courbe représentative de f.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
   (b) Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.
   (c) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
   On note toujours f la fonction ainsi prolongée.
   (d) f est-elle dérivable en 0? (après prolongement)
   (e) Peut-on prolonger f par continuité en 1? Si oui, préciser la valeur de $f(1)$ après prolongement.
2. (a) Préciser la limite de f en $+\infty$.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.
   (c) Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$ et tracer l'allure de C_f.

Exercice 3 :

Soit $f(x) = (1 + \ln x)^{\frac{1}{x-1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}} f(x)$. f est-elle prolongeable par continuité en $\frac{1}{e}$?
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. f est-elle prolongeable par continuité en 1?