Logique et raisonnements, vocabulaire des ensembles

Petit problème : *Décomposition d'un nombre entier dans une base*

Soit $b \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On appelle *décomposition de a en base b* toute écriture de a sous la forme :

$$a = \sum_{k=0}^{m} r_k b^k = r_0 \times b^0 + r_1 \times b^1 + \cdots + r_m \times b^m \text{ où } \forall k \in [\![0, m]\!],\ r_k \in [\![0, b-1]\!] \text{ et } r_m \neq 0.$$

Dans cet exercice, on se propose de montrer que, pour tout entier $b \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$, tout entier naturel non nul a admet une décomposition unique en base b.

Exemples :

$123 = 3 \times 1 + 2 \times 10 + 1 \times 100 = 3 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^2$: c'est la décomposition de 123 en base 10 (on dit aussi décomposition de 123 dans le système décimal).

Pour décomposer 179 en base 3, on effectue des divisions euclidiennes par 3 successives (on divise les quotients successifs) :

$$\begin{aligned} 179 &= 3 \times 59 + 2 = 3 \times (3 \times 19 + 2) + 2 = 3^2 \times 19 + 3 \times 2 + 2 \\ &= 3^2 \times (3 \times 6 + 1) + 3 \times 2 + 2 = 3^3 \times 6 + 3^2 + 3 \times 2 + 2 \\ &= 3^3 \times (3 \times 2) + 3^2 + 3 \times 2 + 2 = 2 \times 3^4 + 3^2 + 2 \times 3 + 2 \\ &= 2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^2 + 0 \times 3^3 + 2 \times 3^4. \end{aligned}$$

Exercice 1 : **Petit problème, partie 1**

1. *Division euclidienne*

   Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que $a - b \times \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \in [\![0, b-1]\!]$.

   (b) On a montré à la question précédente que si $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$, alors $a = b \times q + r$ où $r \in [\![0, b-1]\!]$.
   Réciproquement, on suppose que $a = b \times q + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, b-1]\!]$.
   Montrer que $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ (cela montre l'unicité de l'écriture de a sous la forme $b \times q + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, b-1]\!]$).

   q est appelé le *quotient* de la division euclidienne de a par b, b est appélé le *diviseur*, a le *dividende* et r le *reste* de la division euclidienne de a par b.

   Exemples :

   si $a = 123$ et $b = 8$, $123 = 8 \times 15 + 3$ (ici 15 est le quotient et 3 est le reste de la division de 123 par 8),

   si $a = 14$ et $b = 3$, $14 = 3 \times 4 + 2$ (ici 4 est le quotient et 2 est le reste de la division euclidienne de 14 par 3).

2. *Existence d'une décomposition en base b*

   Soit $b \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. Montrer par récurrence forte que tout nombre entier naturel non nul a admet une décomposition en base b.

Exercice 2 : **Petit problème, partie 2**

Unicité de la décomposition en base b

Soit $b \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $a \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a admet la décomposition en base b :

$$a = \sum_{k=0}^{m} r_k b^k = r_0 \times b^0 + r_1 \times b^1 + \cdots + r_m \times b^m \text{ (où } \forall k \in [\![0,m]\!],\ r_k \in [\![0,b-1]\!] \text{ et } r_m \neq 0)$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \left\lfloor \frac{u_n}{b} \right\rfloor \end{cases}$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - b \times u_{n+1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in [\![0,m]\!]$, $u_n = \sum\limits_{k=n}^{m} r_k b^{k-n} = r_n \times b^0 + r_{n+1} \times b^1 + \cdots + r_m \times b^{m-n}$.

   (on pourra procéder par *récurrence finie*. La seule différence avec une récurrence ordinaire est que, dans l'étape d'hérédité, on supposera la propriété vraie pour un n appartenant à $[\![0,m-1]\!]$ avant de la montrer au rang $n+1$).

2. En déduire : $\forall n \in [\![0,m]\!]$, $v_n = r_n$.

   On vient donc de montrer que les coefficients $r_0, r_1, \ldots, r_m$ dépendent de a et b et sont uniquement déterminés par ceux-ci.

3. (a) Décomposer 1523 en base 5.

   (b) Décomposer 1400 en base 4.

Exercice 3 :

Soit E un ensemble. Étant données X, Y deux parties de E, on définit la partie $X\Delta Y$ de E par : $X\Delta Y = (X \cup Y)\backslash(X \cap Y)$.

1. Montrer que $X\Delta Y = (X\backslash Y) \cup (Y\backslash X)$ et représenter sur un dessein cet ensemble.

2. Soit A et B deux parties de E.

   (a) Déterminer $A\Delta\varnothing$.

   (b) Déterminer $A\Delta A$. Réciproquement, montrer $A\Delta B = \varnothing \Rightarrow A = B$. Conclure : que venons-nous de démontrer ?

3. Si U, V, W sont trois parties de E, on admet que $(U\Delta V)\Delta W = U\Delta(V\Delta W)$ (associativité de Δ).

   Soit A, B et C trois parties de E. Déduire des questions 2) a) et 2) b) l'implication suivante : $A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B = C$.