

**Exercice 1** :

1. Soit  $t \in [0, 1]$ . Pour tout réel  $x$ , on pose  $f_t(x) = x + \frac{1}{2}(t - x^2)$ .

Déterminer le tableau de variations de  $f_t$  et déterminer son ou ses points fixes sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

2. Soit  $t \in [0, 1]$ . On pose  $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0(t) = 0$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - (u_n(t))^2)$$

- (a) Calculer  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ .
- (b) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  et montrer qu'elle converge vers une limite qu'on exprimera en fonction de  $t$ .
3. (a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \sqrt{t} - u_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - u_n(t)) \times \left(1 - \frac{\sqrt{t} + u_n(t)}{2}\right).$$

- (b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], 0 \leq \sqrt{t} - u_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}.$$

- (c) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], 0 \leq \sqrt{t} - u_n(t) \leq \frac{2}{n}.$$

et retrouver le résultat du 2) b).

**Exercice 2** :

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $(E_n)$  l'équation  $\cos(x) = nx$  d'inconnue le réel  $x$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $(E_n)$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ . On la notera  $x_n$ .
- Montrer que  $x_n \in ]0, 1[$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.
- Montrer que  $(x_n)$  est strictement décroissante. En déduire que  $(x_n)$  converge. On note  $L$  sa limite.
- On suppose ici que  $L > 0$ .  
Déterminer la limite de  $\cos(x_n)$  et de  $nx_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Conclure.
- Déterminer un équivalent simple de  $x_n$ .

**Exercice 3** : (suite de l'exercice 2)

Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . On reprend la notation  $x_n$  introduite dans l'exercice 2.

Dans cette question,  $u_0 = 0$  et  $\forall p \in \mathbb{N}, u_{p+1} = \frac{\cos(u_p)}{n}$ . On cherche à montrer que  $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x_n$ .

- Montrer :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$ .
- En déduire :  $\forall p \in \mathbb{N}, |u_{p+1} - x_n| \leq \frac{1}{n} |u_p - x_n|$  puis  $\forall p \in \mathbb{N}, |u_p - x_n| \leq \frac{1}{n^p}$ .
- Conclure et donner la première valeur de l'entier naturel  $p$  (en fonction de  $n$ ) telle que  $u_p \simeq x_n$  à  $10^{-5}$  près.
- Écrire une fonction Python prenant en entrée un entier  $n \geq 2$ , un réel  $\varepsilon > 0$ , et donnant en sortie une valeur approchée de  $x_n$  à  $\varepsilon$  près.