

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n . Soit $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_p)$ une base de F et $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_q)$ une base de G .
On note $F+G$ l'ensemble $\{\vec{x} + \vec{y}; (\vec{x}, \vec{y}) \in F \times G\}$ et $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ la famille de vecteurs $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_p, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_q)$.
- Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n .
 - Montrer que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est génératrice de $F + G$.
 - On suppose ici : $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
 - Montrer que la famille $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est libre. Que peut-on en déduire sur la famille $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$?
 - En déduire que $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.
- On suppose ici $n = 3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3, x = y = z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3, x + y + z = 0\}$.
 - Déterminer $F \cap G$.
 - Déterminer une base de F et une base de G .
 - Soit $\vec{u} \in \mathbb{K}^3$ où $\vec{u} = (x, y, z)$. Déterminer deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} tels que $(\vec{v}, \vec{w}) \in F \times G$ et $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

Exercice 2 : Exercices en vrac (les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes)

- Déterminer le ou les couples de réels (a, b) tels que la famille $((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, a, b))$ soit une famille liée de \mathbb{R}^4 .
- Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille libre de \mathbb{K}^n (où $n \in \mathbb{N}^*$). On pose $\vec{u} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \vec{e}_j$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\vec{v}_i = \vec{u} + \vec{e}_i$.
On suppose que $(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$ est tel que $\sum_{i=1}^p \mu_i \vec{v}_i = \vec{0}$.
 - Justifier que : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \mu_i + \left(\sum_{j=1}^p \mu_j\right) \lambda_i = 0$.
 - En déduire que $\sum_{j=1}^p \mu_j = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \mu_i = 0$ et également que $\left(\sum_{j=1}^p \mu_j\right) \times \left(1 + \sum_{i=1}^p \lambda_i\right) = 0$.
 - En déduire que la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est liée si et seulement si $\sum_{j=1}^p \lambda_j = -1$.
- Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel G de \mathbb{R}^4 défini par

$$G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \end{cases} \right\}.$$

Exercice 3 :

On considère le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 défini par : $W = Vect((1, 3, 1, 1), (-2, -2, 5, 1), (-2, 6, 19, a))$

1. Calculer $\dim W$ en fonction de a .
2. On suppose désormais (et pour les questions qui suivent) que la valeur de a est telle que $\dim W$ est minimal. Déterminer une base de W .
3. Donner un système d'équations cartésiennes de W .
4. En déduire que $\vec{u} = (0, 4, 7, 3)$ et $\vec{v} = (3, 5, -4, 0)$ sont des vecteurs de W . La famille (\vec{u}, \vec{v}) est-elle une base de W ?
5. Compléter la famille (\vec{u}, \vec{v}) en une base de \mathbb{R}^4 (c'est-à-dire : trouver \vec{x} et \vec{y} dans \mathbb{R}^4 tels que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y})$ est une base de \mathbb{R}^4).