

Exercice 1 :

On considère les équations différentielles $(E) : (2 - 6x + 2x^2)y - (3x^2 - 4x)y' + x^2y'' = 2$ et $(L) : z'' - 3z' + 2z = 2$.

1. Résoudre (L) sur \mathbb{R} .
2. Trouver un entier relatif k tel que $x \mapsto x^k$ soit solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
3. Pour cet entier k , montrer que la fonction $u : x \mapsto x^k \times v(x)$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si v est solution de (L) sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2 :

1. Résoudre sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ l'équation différentielle $(E) : xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$.
2. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^n q^k$ pour $q \neq 1$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
 - (a) Soit $t \in [0, x]$. Montrer que $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.
Que donne cette égalité pour $n = 1$?
 - (b) En déduire $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2} dt$.
 - (c) Montrer que $0 \leq \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2} dx \leq \frac{x^5}{5}$ puis en déduire $\arctan(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}$.
 - (d) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\arctan(x) - x}{x^2}$ est prolongeable par continuité en 0 puis dérivable en 0 après prolongement.
Préciser alors la valeur de $\varphi'(0)$ (en notant encore φ la fonction prolongée en 0).
4. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) sur \mathbb{R} (*indication* : elle doit être solution de (E) sur $]0, +\infty[$, être continue et dérivable en 0).

Exercice 3 :

Une équation fonctionnelle

On cherche à déterminer dans cet exercice toutes les fonctions continues $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant à la condition (C) suivante

$$(C) : \quad \forall x \in [0, +\infty[, \int_0^x (x - 3t)f(t)dt = \frac{x^2}{2}$$

1. On suppose que $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, satisfaisant à (C) .
Soit F la primitive de f sur $[0, +\infty[$ telle que $F(0) = 0$. Soit G la primitive de $t \mapsto tf(t)$ sur $[0, +\infty[$ telle que $G(0) = 0$.
 - (a) Justifier que : $\forall x \geq 0, xF(x) - 3G(x) = \frac{x^2}{2}$. En déduire : $\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} F(x) - 1 \right)$.
 - (b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
 - (c) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E) : 2xy' + y = -1$.
 - (d) Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ puis déterminer f en utilisant le fait que f est continue en 0.
2. Déterminer toutes les fonctions continues sur $[0, +\infty[$, satisfaisant à (C) .