Exercice 1 :

1. Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme X^2+3X+2.
2. (a) Déterminer quatre réels a, b, c, d tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 5+7x+11x^2+8x^3+2x^4 = (x^2+3x+2)(ax^2+bx+c)+d.$$

   (b) Déterminer deux réels u, v tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,-2\},\ \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{u}{x+1}+\frac{v}{x+2}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{5+7k+11k^2+8k^3+2k^4}{k^2+3k+2}.$$

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x-\frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
2. En déduire un encadrement de $\ln(u_n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis montrer que (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.
3. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}.$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}.$$

2. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1}-S_n = \frac{1}{n+1}$$

3. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$