

**Chapitre 17** : L'espace vectoriel  $\mathbb{K}^n$  et ses sous-espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**I - L'espace vectoriel  $\mathbb{K}^n$** 

- 1) Définition de l'espace vectoriel  $\mathbb{K}^n$
- 2) Règles de calculs
- 3) Exemples

**II - Sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{K}^n$** 

- 1) Définition et exemples
- 2) Combinaisons linéaires

**III - Indépendance linéaire, base**

- 1) Familles libres, familles liées
- 2) Base d'un sous-espace vectoriel

**IV - Théorie de la dimension**

- 1) Dimension d'un sous-espace vectoriel
- 2) Familles libres, familles génératrices et dimension
- 3) Dimension et inclusion
- 4) Rang d'une famille de vecteurs

**V - Utilisation des matrices**

- 1) Matrice d'une famille finie de vecteurs
- 2) Rang d'une matrice (bis)

(définition par l'algèbre linéaire et non algorithmique :

c'est la dimension du sous-espace engendré par les vecteurs colonnes.

Cohérence entre les deux définitions)

Exemples de calculs de rangs de familles de vecteurs et interprétation sur la nature de la famille.

## Exemples de compétences attendues

- ❶ Savoir justifier qu'une partie de  $\mathbb{K}^n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .  
(en utilisant la définition, ou en mettant en évidence une famille génératrice)
- ❷ Savoir déterminer un système d'équations cartésiennes décrivant un sous-ev de  $\mathbb{K}^n$  à partir d'une famille génératrice du sous-ev.
- ❸ Savoir effectuer le procédé inverse : déterminer une famille génératrice d'un sous-ev de  $\mathbb{K}^n$  à partir d'un système d'équations cartésiennes décrivant celui-ci.
- ❹ Savoir déterminer si une famille est libre ou liée.
- ❺ Pour  $n = 2, 3, 4$ , savoir montrer qu'une famille de vecteurs est une base de  $\mathbb{K}^n$  en déterminant dans le même temps l'expression des coordonnées d'un vecteur quelconque de  $\mathbb{K}^n$  dans cette base. Savoir déterminer la matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée.
- ❻ Si  $E$  est un sous-ev de  $\mathbb{K}^n$ , savoir trouver une base de  $E$  en trouvant d'abord une famille génératrice de  $E$  puis en montrant qu'elle est libre.
- ❼ Si  $m = \dim E$  est connu, savoir montrer qu'une famille de vecteurs  $\mathcal{F}$  de  $E$  est une base de  $E$  en vérifiant :
  - que  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$  et  $\text{Card}\mathcal{F} = m$ , ou
  - que  $\mathcal{F}$  est libre et  $\text{Card}\mathcal{F} = m$ .
- ❽ Savoir montrer l'égalité de deux sous-ev de  $\mathbb{K}^n$  : Si  $E$  et  $F$  sont deux sous-ev de  $\mathbb{K}^n$  tels que  $E \subset F$  et  $\dim E = \dim F$ , alors  $E = F$ .
- ❾ Savoir utiliser les techniques matricielles pour calculer le rang d'une famille  $\mathcal{F}$  de vecteurs d'un sous-ev  $E$  de  $\mathbb{K}^n$  et déterminer
  - si la famille  $\mathcal{F}$  est libre ( $\text{Card}\mathcal{F} = \text{rg}\mathcal{F}$ ) ou liée,
  - si  $\mathcal{F}$  est une base de  $\text{Vect}\mathcal{F}$  ( $\text{Card}\mathcal{F} = \text{rg}\mathcal{F}$ ),
  - si  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$  ( $\text{rg}\mathcal{F} = \dim E$ ) et, le cas échéant, si  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$  ( $\text{Card}\mathcal{F} = \text{rg}\mathcal{F} = \dim E$ ).
- ❿ Parallèlement au calcul du rang de  $\mathcal{F}$ ,
  - savoir extraire de  $\mathcal{F}$  une base de  $\text{Vect}\mathcal{F}$ ,
  - savoir déterminer une relation de dépendance linéaire sur  $\mathcal{F}$  si  $\mathcal{F}$  est une famille liée.

## Questions de cours possibles :

- Démontrer que, si  $\mathcal{F}$  est une famille de vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ , alors  $\text{Vect}\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel et c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) qui possède les vecteurs de  $\mathcal{F}$ .
- Soit  $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{K}^n$  et  $\vec{x}$  un vecteur de  $\mathbb{K}^n$ . Si  $\mathcal{F}$  est libre et  $\vec{x} \notin \text{Vect}\mathcal{F}$ , montrer que la famille  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p, \vec{x})$  est encore libre.
- Montrer que les bases d'un sous-espace vectoriel  $E$  sont les familles libres et génératrices de  $E$ .