Exercice 1 :

1. Soit $x > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}dt$ est bien définie.
   Dans la suite de l'exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :
   $$\forall x > 0,\ f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}dt$$
2. Soit x et y deux réels strictement positifs tels que $x \leq y$.
   Montrer que $f(y) \leq f(x)$. Qu'en déduit-on sur le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$?
3. On étudie dans cette question la limite de f en $+\infty$.
   (a) Montrer : $\forall x \in\,]0, +\infty[\,,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^1 e^t dt$.
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. On étudie dans cette question la limite de f en 0.
   (a) Justifier : $\forall x > 0,\ f(x) \geq \int_0^1 \frac{1}{x+t}dt$
   (b) Pour tout $x > 0$, calculer $\int_0^1 \frac{1}{x+t}dt$ et en déduire la limite de f en 0.
5. (a) A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = e^{-x}\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}du$
   (b) En déduire : $\forall x > 0,\ f(x) = e^{-x}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \int_x^{x+1} \frac{e^u - 1}{u}du\right)$
   (c) Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(u) = \begin{cases} \frac{e^u-1}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 1 & \text{si } u = 0 \end{cases}$
   Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction φ admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.
   (d) Soit ψ une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction φ.
   Pour tout réel x strictement positif, exprimer l'intégrale $\int_x^{x+1} \frac{e^u-1}{u}du$ en fonction de ψ et de x. En déduire que $\int_x^{x+1} \frac{e^u-1}{u}du$ admet une limite finie quand x tend vers 0, limite qu'on ne cherchera pas à évaluer.
   (e) En déduire un équivalent simple de f en 0.

Institut Emmanuel d'Alzon, Nîmes

Exercice 2 :

Pour tout entier $n > 0$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k},\ v_n = \sum_{k=n}^{2n} \left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)^2 \text{ et } w_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite (on pourra faire le changement d'indice $l = k-n$).
2. Montrer que $w_n \sim \frac{1}{n} \times \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$ puis en déduire un équivalent plus simple de w_n.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel c_x tel que $c_x \in]0, x[$ et $\arctan(x) = \frac{x}{1+c_x^2}$.
   (b) En déduire : $0 \leqslant x^2 - (\arctan(x))^2 \leqslant 2x^4 + x^6$.
   (c) On suppose ici $x \in]0,1]$. Justifier $0 \leqslant x^2 - (\arctan(x))^2 \leqslant 3x^4$.
4. Montrer que $(u_n - v_n)$ converge et déterminer sa limite. Qu'en déduit-on sur la suite (v_n)?

Exercice 3 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(t)dt$.

1. Calculer I_0.
2. A l'aide du changement de variable $u = \cos t$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_{-1}^{1}(1-u^2)^n du$.
3. (a) Démontrer : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{2n\times(2n-2)\times\cdots\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 3} \times 2$.
4. On se propose de montrer que (I_n) converge et de déterminer sa limite.
   (a) Montrer :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right) = \ln(I_0) - \ln(I_n).$$
   (b) À l'aide du théorème des accroissements finis, justifier :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ln(2k+1) - \ln(2k) \geqslant \frac{1}{2k+1}.$$
   (c) Justifier :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2k+1} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x.$$
   (d) En déduire la limite de $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis celle de $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.
   (e) Justifier alors que (I_n) converge et déterminer sa limite.