

Exercice 1 :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Démontrer $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$.

2. Calculer les limites ci-dessous :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(5+x) - \ln x), \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sqrt{x} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{x}\right)}, \quad d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(3+2x)}{\sqrt{2+x} - 1}.$$

Exercice 2 :

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$.

1. Établir que, pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x.$$

Quel encadrement de $\arctan(x)$ avons-nous si x est strictement négatif?

En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 (on notera encore f le prolongement obtenu).

2. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

3. Déterminer le tableau de variation de f sur \mathbb{R} en précisant les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 3 :

Pour tout entier naturel n et tout réel positif x , on pose $f_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+2} e^{-t}$. En déduire l'existence d'un réel A strictement positif tel que :

$$\forall t \in [A, +\infty[, \quad t^n e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}.$$

(b) Avec A défini comme précédemment, montrer :

$$\forall x \in [A, +\infty[, \quad \int_A^x t^n e^{-t} dt \leq \frac{1}{A}$$

puis justifier que f_n est majorée sur \mathbb{R}_+ .

(c) Quel est le sens de variation de f_n sur \mathbb{R}_+ ? En déduire que la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ existe et est finie. On notera désormais I_n cette limite (aussi notée $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$).

(d) Calculer I_0 .

2. (a) Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_{n+1}(x) = -x^{n+1} e^{-x} + (n+1) f_n(x).$$

(b) En déduire une relation entre I_{n+1} et I_n valable pour tout entier naturel n .

(c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = n!$.