Exercice 1 :

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ des vecteurs de la géométrie muni de sa structure euclidienne (c'est-à-dire muni du produit scalaire usuel défini par : $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in E^2$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=xx'+yy'+zz'$ si $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$ et $\overrightarrow{v}=(x',y',z')$).
On rappelle que, si $\overrightarrow{u}\in E$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=\|\overrightarrow{u}\|^2$ où $\|\overrightarrow{u}\|$ est la norme euclidienne de $\overrightarrow{u}$.

1. Soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ une famille libre de deux vecteurs de E. Soit $\overrightarrow{w}\in E\backslash\{\overrightarrow{0}\}$ tel que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}=0$ et $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}=0$. On veut montrer que la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est encore libre. Soit λ,μ et ν trois réels.
   (a) Calculer $(\lambda.\overrightarrow{u}+\mu.\overrightarrow{v}+\nu.\overrightarrow{w}).\overrightarrow{w}$ (on donnera le résultat en fonction de ν et $\overrightarrow{w}$ uniquement). On suppose $\lambda.\overrightarrow{u}+\mu.\overrightarrow{v}+\nu.\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$. En déduire : $\nu=0$.
   (b) En déduire que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est bien une famille libre.
   (c) On suppose ici seulement que $\overrightarrow{u}=(1,3,-1)$ et $\overrightarrow{v}=(1,1,1)$. Justifier que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est libre et trouver un vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\overrightarrow{u}\in E$.
   (a) Soit $F=\{\overrightarrow{v}\in E,\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) On suppose désormais que $\overrightarrow{u}=(2,1,-1)$. Déterminer une équation cartésienne puis une base de F.
   (c) Que peut-on dire de la famille formée de $\overrightarrow{u}$ et des vecteurs de la base de F trouvée précédemment ?

Exercice 2 :

Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ et F et G les sous-espaces vectoriels de E définis ci-dessous :

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in E,\ \left\{\begin{array}{l} x-y+iz-t=0\\ ix+y+z+t=0\end{array}\right.\right\},\ G=\{(a+b,a+b,2b,a-b);\ (a,b)\in\mathbb{C}^2\}.$$

On note $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$, $\overrightarrow{g_1}$, $\overrightarrow{g_2}$ les vecteurs de E définis ci-dessous :
$\overrightarrow{f_1}=(1,i,-1,-2i+1)$, $\overrightarrow{f_2}=(-i,-2-i,i,1)$, $\overrightarrow{g_1}=(1,1,4,-3)$, $\overrightarrow{g_2}=(6,6,4,2)$.

1. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels F et G ci-dessus.
2. Justifier que $(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2})$ est une base de F et $(\overrightarrow{g_1},\overrightarrow{g_2})$ une base de G.
3. Vérifier que $F\cap G=\{\overrightarrow{0}\}$.
4. Montrer que $(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{g_1},\overrightarrow{g_2})$ est une base de E.

Exercice 3 : *Un drapeau de $\mathbb{R}^4$.*

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. Soit $F = Vect\mathcal{F}$ où $\mathcal{F} = ((2,1,1,0),(1,-1,2,0),(1,0,2,1))$ et $G = \{(x,y,z,t) \in E,\ 2x+3y-4z-t=0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est libre. En déduire la dimension de F.
2. Trouver une équation cartésienne de F.
3. (a) Soit $\overrightarrow{u} = (1,1,1,1)$. Vérifier que $\overrightarrow{u} \in F \cap G$.

   (b) Déterminer une base de $F \cap G$.
4. En déduire une base de E formée de $\overrightarrow{u}$, d'un autre vecteur de $F \cap G$, d'un vecteur de G et d'un dernier vecteur de E.

Remarque

On dit que les sous-espaces vectoriels $\{\overrightarrow{0}\}$, $Vect(\overrightarrow{u})$, $F \cap G$, G et E forment un *drapeau total* de l'espace vectoriel E (les dimensions de $\{\overrightarrow{0}\}$, $Vect(\overrightarrow{u})$, $F \cap G$, G et E étant respectivement $0,1,2,3$ et 4).

$\{\overrightarrow{0}\}$	$Vect(\overrightarrow{u})$	$F \cap G$	G	E
$\{\overrightarrow{0}\}$	$Vect(\overrightarrow{u})$	$F \cap G$	G	
$\{\overrightarrow{0}\}$	$Vect(\overrightarrow{u})$	$F \cap G$		
$\{\overrightarrow{0}\}$	$Vect(\overrightarrow{u})$			
$\{\overrightarrow{0}\}$				