

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne U contient n boules numérotées de 1 à n . Une urne V contient n boules dont $n - 1$ noires et 1 blanche.

Un joueur pioche *successivement et avec remise* 2 boules de l'urne U .

Si X est le plus grand des deux numéros portés par les boules, le joueur pioche *simultanément* X boules dans l'urne V .

Il gagne x euros (où $x > 0$) s'il obtient la boule blanche mais perd 1 euro sinon.

On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

Soit X_1 la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au premier tirage dans l'urne U et X_2 la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au second tirage dans l'urne U .

- Déterminer l'univers image de X .
- Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer l'évènement $(X \leq k)$ en fonction de $(X_1 \leq k)$ et $(X_2 \leq k)$. En déduire le calcul de $P(X \leq k)$.
- Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $(X = k)$ en fonction de $(X \leq k)$ et $(X \leq k-1)$ et en déduire que $P(X = k) = \frac{2k-1}{n^2}$.
- Calculer $E(X)$, l'espérance de X .
- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $P_{(X=k)}(G = x) = \frac{k}{n}$.
- (a) À l'aide de la formule des probabilités totales, établir que : $P(G = x) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n^2}$.
(b) En déduire $E(G)$. Pour quelle valeur de x le jeu est-il équitable (c'est-à-dire $E(G) = 0$) ?
On suppose que $x = 0, 5\text{€}$. Est-ce intéressant de jouer plusieurs parties ?
- À l'issue de la partie, le joueur tire la boule blanche de l'urne V . Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule numéro n de l'urne U ?

Exercice 2 :

On considère un groupe de n personnes, chacune ayant la probabilité p d'être malade (où $p \in]0, 1[$). On réalise des tests sanguins (tests qu'on suppose infaillibles) pour savoir si ces personnes sont malades.

Pour cela on fait un mélange avec la moitié de chacun des n échantillons et on réalise un test sur le mélange. S'il est positif, alors on réalise un test individuel sur chaque moitié d'échantillon restante. Sinon, on s'arrête là. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de personnes malades dans l'échantillon et Y celle égale au nombre total de tests effectués.

- (a) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
(b) Déterminer l'univers image de Y , sa loi et son espérance.
(c) Montrer que cette méthode de tests est rentable "en moyenne" (c'est-à-dire $E(Y) < n$) si, et seulement si, $p < p_n$ où $p_n = 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.
(d) Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$.
- Cette fois-ci, on réalise des groupes de m personnes (où on suppose que m divise n). On effectue le test comme précédemment sur chaque groupe ; s'il est positif, on réalise ensuite le test pour chaque membre du groupe. Pour $k \in \llbracket 1, \frac{n}{m} \rrbracket$, on note A_k l'évènement : "le k^{e} groupe a un test positif".

On note Z le nombre de groupes dont le test est positif.

- Soit $k \in \llbracket 1, \frac{n}{m} \rrbracket$. Calculer $P(A_k)$. En déduire la loi de Z .
- Exprimer Y en fonction de Z et en déduire $E(Y) = \frac{n}{m} + n(1 - (1 - p)^m)$.

- (c) Écrire une fonction en langage Python prenant n et p en entrée et permettant de déterminer la valeur de m qui minimise cette espérance (m doit faire partie des diviseurs de n) ainsi que la valeur de l'espérance correspondante. En déduire la valeur de m qui minimise cette espérance pour $p = 0.01$ et $n = 112$ et préciser une valeur approchée de cette espérance à 10^{-2} près.

Exercice 3 :

Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} \times e^x - \cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} \times e^x - \cos(x)}{x}$.
3. Déterminer de même le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$.
4. En déduire que le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f est $\frac{3}{2} + \frac{11}{8}x + \frac{29}{48}x^2 + o(x^2)$.
5. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et que, une fois ainsi prolongée, f est dérivable en 0. Préciser les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$ ainsi qu'une équation de la tangente à la courbe de f en 0. On continuera à noter f la fonction ainsi prolongée en 0.
6. Étudier la position locale de la courbe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.
7. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{e^x \sin x}{2\sqrt{1+x}} + \sqrt{1+x}e^x \sin x - \sqrt{1+x}e^x \cos(x)$.
En déduire la limite de la dérivée f' en 0.
8. Conclure, en justifiant, que la fonction f (prolongée en 0) est de classe C^1 sur $] -1, \pi[$.