Exercice 1 :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Démontrer $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$.
2. Calculer les limites ci-dessous :

$$a)\ \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right),\quad b)\ \lim_{x\to+\infty} x(\ln(5+x)-\ln x),\quad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sqrt{x}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{x}\right)},\quad d)\ \lim_{x\to -1}\frac{\ln(3+2x)}{\sqrt{2+x}-1}.$$

Exercice 2 :

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$.

1. Établir que, pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan(x) \leqslant x.$$

   Quel encadrement de $\arctan(x)$ avons-nous si x est strictement négatif ?

   En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 (on notera encore f le prolongement obtenu).
2. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
3. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ en précisant les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 3 :

Pour tout entier naturel n et tout réel positif x, on pose $f_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+2}e^{-t}$. En déduire l'existence d'un réel A positif tel que :

$$\forall t \in [A, +\infty[,\ t^n e^{-t} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

   (b) Avec A défini comme précédemment, montrer :

$$\forall x \in [A, +\infty[,\ \int_A^x t^n e^{-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{A}$$

   puis justifier que f_n est majorée sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) Quel est le sens de variation de f_n sur $\mathbb{R}_+$? En déduire l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$. On notera désormais I_n cette limite (aussi notée $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$.).

   (d) Calculer I_0.
2. (a) Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)f_n(x).$$

   (b) En déduire une relation entre I_{n+1} et I_n valable pour tout entier naturel n.

   (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.