Exercice 1 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne U contient n boules numérotées de 1 à n. Une urne V contient n boules dont $n-1$ noires et 1 blanche.
Un joueur pioche *successivement et avec remise* 2 boules de l'urne U.
Si X est le plus grand des deux numéros portés par les boules, le joueur pioche *simultanément* X boules dans l'urne V.
Il gagne x euros (où $x > 0$) s'il obtient la boule blanche mais perd 1 euro sinon.
On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au premier tirage dans l'urne U et X_2 la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au second tirage dans l'urne U.

1. Déterminer l'univers image de X.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer l'évènement $(X \leqslant k)$ en fonction de $(X_1 \leqslant k)$ et $(X_2 \leqslant k)$. En déduire le calcul de $P(X \leqslant k)$.
3. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer $(X = k)$ en fonction de $(X \leqslant k)$ et $(X \leqslant k-1)$ et en déduire que $P(X = k) = \frac{2k-1}{n^2}$.
4. Calculer $E(X)$, l'espérance de X.
5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $P_{(X=k)}(G = x) = \frac{k}{n}$.
6. (a) À l'aide de la formule des probabilités totales, établir que : $P(G = x) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n^2}$.
   (b) En déduire $E(G)$. Pour quelle valeur de x le jeu est-il équitable (c'est-à-dire $E(G) = 0$) ?
   On suppose que $x = 0,5$€. Est-ce intéressant de jouer plusieurs parties ?
7. À l'issue de la partie, le joueur tire la boule blanche de l'urne V. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule numéro n de l'urne U ?

Exercice 2 :

On considère un groupe de n personnes, chacune ayant la probabilité p d'être malade (où $p \in]0, 1[$). On réalise des tests sanguins (tests qu'on suppose infaillibles) pour savoir si ces personnes sont malades.
Pour cela on fait un mélange avec la moitié de chacun des n échantillons et on réalise un test sur le mélange. S'il est positif, alors on réalise un test individuel sur chaque moitié d'échantillon restante. Sinon, on s'arrête là.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de personnes malades dans l'échantillon et Y celle égale au nombre total de tests effectués.

1. (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer l'univers image de Y, sa loi et son espérance.
   (c) Montrer que cette méthode de tests est rentable "en moyenne" (c'est-à-dire $E(Y) < n$) si, et seulement si, $p < p_n$ où $p_n = 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.
   (d) Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Cette fois-ci, on réalise des groupes de m personnes (où on suppose que m divise n). On effectue le test comme précédemment sur chaque groupe ; s'il est positif , on réalise ensuite le test pour chaque membre du groupe. Pour $k \in [\![1, \frac{n}{m}]\!]$, on note A_k l'évènement : "le k^e groupe a un test positif".
   On note Z le nombre de groupes dont le test est positif.
   (a) Soit $k \in [\![1, \frac{n}{m}]\!]$. Calculer $P(A_k)$. En déduire la loi de Z.
   (b) Exprimer X en fonction de Z et en déduire $E(X) = \frac{n}{m} + n(1 - (1-p)^m)$.

(c) Écrire une fonction en langage Python prenant n et p en entrée et permettant de déterminer la valeur de m qui minimise cette espérance (m doit faire partie des diviseurs de n) ainsi que la valeur de l'espérance correspondante. En déduire la valeur de m qui minimise cette espérance pour $p = 0.01$ et $n = 112$ et préciser une valeur approchée de cette espérance à 10^{-2} près.

Exercice 3 :

Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}\times e^x - \cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}\times e^x - \cos(x)}{x}$.
3. Déterminer de même le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$.
4. En déduire que le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f est $\frac{3}{2} + \frac{11}{8}x + \frac{29}{48}x^2 + \circ(x^2)$.
5. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et que, une fois ainsi prolongée, f est dérivable en 0. Préciser les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$ ainsi qu'une équation de la tangente à la courbe de f en 0. On continuera à noter f la fonction ainsi prolongée en 0.
6. Étudier la position locale de la courbe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.
7. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{e^x \sin x}{2\sqrt{1+x}} + \sqrt{1+x}e^x \sin x - \sqrt{1+x}e^x \cos(x)$.
   En déduire la limite de la dérivée f' en 0.
8. Conclure, en justifiant, que la fonction f (prolongée en 0) est de classe C^1 sur $]-1, \pi[$.