Un peu de télescopage...

Exercice 1 :

1) a) Trouver a, $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout réel $x > 1$, on ait : $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$.

b) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 2 la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

2) En s'inspirant de la méthode précédente, déterminer la valeur et la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

a) Pour $n \geqslant 2$, comparer $u_n - 1$ et S_n (lequel de ces nombres est le plus grand ? Justifier)

b) En déduire que la suite (u_n) converge et donner un majorant de sa limite.

Calculs de quelques sommes

Exercice 2 :

1) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Quelle est la valeur de $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}$? En déduire la valeur de $\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}^{n} \binom{j}{i}$

2) Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n}^{n} \min(i, j) \text{ et } \sum_{k=3}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right)$$

Autour de la formule du binôme de Newton

Exercice 3 : **(Les questions 1 et 2 sont indépendantes)**

1) a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, développer par la formule du binôme de Newton l'expression $f(x) = (1 + x)^n$.

b) Intégrer sur $[0, 1]$ les deux expressions de f (factorisée et développée).

c) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

2) a) Donner une autre expression de 2^n à partir de l'écriture : $2^n = (3 - 1)^n$.

On donnera le résultat sous la forme $2^n = (-1)^n + s_n$ où s_n est une somme que l'on identifiera.

b) En déduire que $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair.