

Exercice 1 :

Si a, b, c, d sont des réels, on note $f_{a,b,c,d}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{a,b,c,d}(x) = (a + bx) \cos(x) + (c + dx) \sin(x)$$

On note E l'ensemble des fonctions $f_{a,b,c,d}$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

1. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer la dérivée de $f_{a,b,c,d}$ et déterminer $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(f_{a,b,c,d})' = f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$. On exprimera $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en fonction de a, b, c, d .
2. On note $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application qui associe à (a, b, c, d) le quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ défini à la question précédente.
 - (a) Montrer que φ est un endomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^4 .
 - (b) Déterminer $\text{Ker} \varphi$ et $\text{Im} \varphi$. Qu'en déduire sur φ ?
3. (a) Déterminer φ^{-1} .
 - (b) En déduire une primitive de la fonction $g : x \mapsto (2 + 3x) \cos(x) + (1 - 4x) \sin(x)$.

Exercice 2 :

On considère le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 défini par : $V = \text{Vect}((1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4), (3, 8, -3, -5))$. Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par : $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, f(x, y, z, t) = (x - y + z + t, x + 2z - t)$.

1. Calculer $\dim V$ et trouver une base \mathcal{B}_1 de V .
2. Déterminer une base \mathcal{B}_2 de $\text{Ker} f$.
3. Notons $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ les vecteurs de \mathbb{R}^4 tels que $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{x})$ où \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont les bases trouvées précédemment.
 - (a) Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x})$. Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^4 .
 - (b) En déduire que tout vecteur \vec{z} de \mathbb{R}^4 s'écrit **de manière unique** sous la forme $\vec{a} + \vec{b}$ où $\vec{a} \in V$ et $\vec{b} \in \text{Ker} f$.
 - (c) Déterminer \vec{a} et \vec{b} dans le cas où $\vec{z} = (1, 2, 3, 1)$.
 - (d) Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 .

Exercice 3 :

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, 3z)$$

1. Déterminer $\text{Ker}(f - 3Id)$, $\text{Ker}((f - 3Id)^2)$ et $\text{Ker}(f - Id)$ (on déterminera une base et la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels).
2. Soit g un endomorphisme de \mathbb{R}^n tel que $\text{Ker}(g) \neq \text{Ker}(g^2)$.
 - (a) Montrer que $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(g^2)$ et justifier l'existence d'un vecteur $\vec{u} \in \text{Ker}(g^2) \setminus \text{Ker}(g)$.
 - (b) Montrer que, pour un tel vecteur \vec{u} , la famille $(g(\vec{u}), \vec{u})$ est une famille libre de $\text{Ker}(g^2)$.
3. En déduire qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.