Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de deux urnes : l'urne U_1 contient n boules blanches et n boules noires et l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 2 boules noires.

On tire *simultanément* n boules de U_1 et on les met dans l'urne U_2. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées de U_1.

1. Déterminer la loi de X et donner son espérance. On admet que $V(X) = \frac{n^2}{4(2n-1)}$
2. A l'issue du transfert de boules, on tire une boule de U_2.
   On note E l'évènement : "on tire une boule blanche dans U_2".
   (a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(E)$.
   (b) A l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire $P(E) = \frac{E(X)+1}{n+3}$ puis calculer $P(E)$ uniquement en fonction de n.
   (c) Écrire une fonction Python prenant n en entrée, simulant l'expérience aléatoire, et donnant en sortie True si E est réalisé et False sinon.
3. Maintenant, à l'issue du transfert de boules, au lieu de tirer une boule de U_2, on tire *simultanément* deux boules de U_2. On note F l'évènement : "on tire deux boules blanches dans U_2".
   (a) Calculer $P_{(X=0)}(F)$ puis, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(F)$.
   (b) En déduire $P(F) = \frac{V(X)+E(X)^2+E(X)}{(n+2)(n+3)}$ puis calculer $P(F)$ uniquement en fonction de n.

Exercice 2 :

Pour x réel, on pose $f(x) = \ln(1 + e^{2x} - e^x)$.

1. Montrer que f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Établir : $f(x) = x + x^2 + \circ(x^3)$.
3. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0. Étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.
4. Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et étudier la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote pour les abscisses positives.
   Indications sur la démarche : Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) - 2x) = 0$ et étudier le signe de $f(x) - 2x$ pour tout réel x positif.
5. (a) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, que $f' > 0$ sur $]-\ln(2), +\infty[$ et que f réalise une bijection de $]-\ln(2), +\infty[$ sur un intervalle ouvert J que l'on précisera (on remarquera en particulier que $0 \in J$).
   On admet dans ce cas que la bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow]-\ln(2), +\infty[$ est encore de classe C^∞. En particulier, f^{-1} est de classe C^3 sur J donc f^{-1} admet un développement limité en 0 d'ordre 3 (conséquence du théorème de Taylor-Young) : $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \circ(x^3)$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
   (b) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, calculer très simplement $f^{-1}(f(x))$. En déduire le développement limité d'ordre 3 en 0 de $f^{-1}(f(x))$.
   (c) Sachant que $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \circ(x^3)$, donner une autre expression du développement limité de $f^{-1}(f(x))$ en fonction de a, b, c et d.
   (d) Conclure que $f^{-1}(x) = x - x^2 + 2x^3 + \circ(x^3)$.

Exercice 3 :

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x,y) = (x+y)e^{-(x^2+y^2)}$.

1. Calculer le vecteur gradient de g en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   En déduire les couples (x,y) en lesquels g est susceptible d'admettre un extrêmum local.

2. On rapporte le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ à un repère orthonormé d'origine O.

   (a) Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Quel est le maximum $M(r)$ et le minimum $m(r)$ de g sur le cercle C_r de centre O et de rayon r ?

   Aide : $(x,y) \in C_r \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

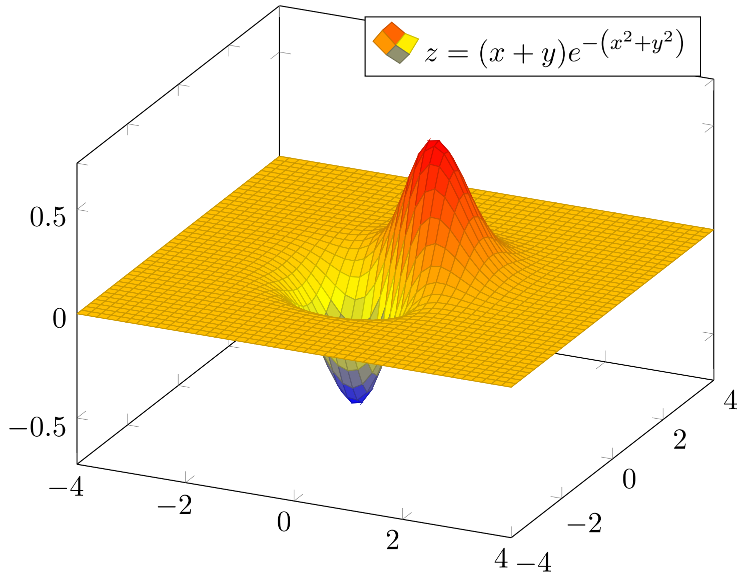
   (b) Étudier les variations de M et de m sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) En déduire que g admet un maximum et un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera.

3. On rapporte l'espace affine euclidien à un repère orthonormé.

   On note S la surface d'équation $z = g(x,y)$ (c'est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées (x,y,z) satisfont $z = g(x,y)$).

Surface z=g(x,y)



Trouver la ou les droites incluses dans cette surface.

Aide : On pourra passer par une représentation paramétrique $\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ d'une telle droite qu'on "injectera" dans l'équation $z = g(x,y)$ pour avoir des renseignements sur $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$.