

Chapitre 13 : Caractère local des fonctions : limite et continuité en un point**I - Définitions et premières propriétés**

Définition du contexte de cette section et des propriétés vraies au voisinage d'un point.

1) Limites finies**2) Limites infinies****3) Continuité****4) Prolongement par continuité****5) Limites et continuité à droite et à gauche****6) Caractère local de la limite et de la continuité****II - Limites et ordre****1) Les théorèmes généraux****2) Limites des fonctions monotones****III - Opérations sur les limites****1) Opérations algébriques sur les limites finies****2) Opérations sur les limites infinies****3) Composition des limites****4) Application à la continuité**

Continuité des fonctions usuelles (polynômes, rationnelles, puissance, \ln , \exp , trigonométriques)

IV - Relations de comparaison**1) Fonctions équivalentes au voisinage d'un point****2) Propriétés des équivalents****3) Comparaisons usuelles****a) Polynômes et fonctions rationnelles****b) Puissances entre elles****c) Puissances et logarithme****d) Puissances et exponentielle****4) Equivalents usuels****5) Equivalents et composition**

Mises en garde

V - Quelques exemples de calculs de limites**Annexe** :

Comparaisons classiques (preuve des résultats sur les croissances comparées, et inégalités classiques sur les fonctions usuelles)

Critère séquentiel des limites (Application à la non existence de limite)

Exemples de compétences attendues

- ❶ Maîtriser les formules de croissances comparées.
Connaître les équivalents usuels, les propriétés de \exp , \ln et $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
- ❷ Savoir ce que signifie qu'une fonction est continue en un point a et savoir montrer qu'une fonction est continue en a .
- ❸ Savoir déterminer si une fonction est prolongeable par continuité en un point et, après prolongement, si elle est dérivable en ce point, voire de classe C^1 au voisinage de ce point.
- ❹ Savoir utiliser les équivalents (et notamment les équivalents usuels) au service des calculs de limites.

Questions de cours possibles :

- Démontrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ puis, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \right) = 0$.
- Montrer $1 - \cos x \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2}$.
- Donner les équivalents usuels et indiquer comment ils se démontrent.