Exercice 1 :

1. Préciser les trois champs $\bigstar$ (différents) de la proposition ci-dessous :

$$\text{Si } x \in \bigstar, \quad \theta = \arctan(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \in \ \bigstar \\ \text{et} \\ \tan\theta = \ \bigstar \end{cases}.$$

   et donner le tableau de variation de arctan sur son domaine de définition (en précisant les limites aux bords et la valeur de arctan en 0).

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a > 0$ et soit θ l'argument principal du nombre complexe $a+ib$.
   Montrer que $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.
   (On déduit de ce résultat que $\arg(a+ib) \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\ [2\pi]$).

3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Écrire $\frac{x+i}{y+i}$ sous forme algébrique.

   (b) En déduire

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{y}\right) \equiv \arctan\left(\frac{y-x}{1+xy}\right) \ [2\pi]$$

   puis

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{y}\right) = \arctan\left(\frac{y-x}{1+xy}\right).$$

   (c) En déduire

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(u) + \arctan\left(\frac{1-u}{1+u}\right).$$

Exercice 2 : Les questions 1) et 2) ci-dessous sont indépendantes.

1. On considère l'équation
$$(E) : \quad x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Vérifier que $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{16}$ sont solutions de (E).
   (b) En considérant les variations de la fonction $f : x \mapsto x^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que (E) admet exactement deux solutions, puis conclure.
2. Soit $a \in [0, 1]$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$(1 + x)^a \leqslant 1 + ax.$$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{a}{k}\right)$. Déduire de la question précédente
$$P_n \geqslant (n + 1)^a.$$
   Qu'en déduit-on sur $\lim_{n \to +\infty} P_n$ si $a \in]0, 1]$? Que dire de la suite (P_n) si $a = 0$?

Exercice 3 :

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \varphi_n(x) = (1 - x)^n e^{-2x}$$
ainsi que l'intégrale :
$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)dx$$
On désire étudier le comportement asymptotique de la suite (I_n).

1. Calculer I_0 et I_1.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1 - (n + 1)I_n$.
4. En déduire la limite de la suite nI_n quand n tend vers $+\infty$.