

**Chapitre 16** : Caractère local des fonctions : Limite et continuité en un point**I - Définitions et premières propriétés**

- 1) Limites finies
- 2) Limites infinies
- 3) Continuité
- 4) Prolongement par continuité
- 5) Limites et continuité à droite et à gauche
- 6) Caractère local de la limite et de la continuité

**II - Limites et ordre**

- 1) Les théorèmes généraux
- 2) Limites des fonctions monotones

**III - Opérations sur les limites**

- 1) Opérations algébriques sur les limites finies
- 2) Opérations sur les limites infinies
- 3) Composition des limites
- 4) Application à la continuité

Continuité des fonctions usuelles (polynômes, rationnelles, puissance,  $\ln$ ,  $\exp$ , trigonométriques)

**IV - Relations de comparaison**

- 1) Fonctions équivalentes au voisinage d'un point
- 2) Propriétés des équivalents
- 3) Comparaisons usuelles
  - a) Polynômes et fonctions rationnelles
  - b) Puissances entre elles
  - c) Puissances et logarithme
  - d) Puissances et exponentielle
- 4) Equivalents usuels
- 5) Equivalents et composition

Mises en garde

**V - Quelques exemples de calculs de limites****Annexe** :

Comparaisons classiques (preuve des résultats sur les croissances comparées, et inégalités classiques sur les fonctions usuelles)

Caractérisation séquentielle de la limite (Application à la non existence de limite)

**Exemples de compétences attendues**

- ❶ Maîtriser les formules de croissances comparées.  
Connaître les équivalents usuels, les propriétés de  $\exp$ ,  $\ln$  et  $x \mapsto x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ).
- ❷ Savoir ce que signifie qu'une fonction est continue en un point  $a$  et savoir montrer qu'une fonction est continue en  $a$ .
- ❸ Savoir déterminer si une fonction est prolongeable par continuité en un point et, après prolongement, si elle est dérivable en ce point, voire de classe  $C^1$  au voisinage de ce point.
- ❹ Savoir utiliser les équivalents (et notamment les équivalents usuels) au service des calculs de limites.
- ❺ Savoir utiliser la caractérisation séquentielle de la limite.

*Exemples de questions d'application du cours possibles* :

- Démontrer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  puis, si  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \right) = 0$ .
- Montrer  $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$  et en déduire un équivalent en 0 de  $\ln(\cos x)$ .
- Donner les équivalents usuels et indiquer comment ils se démontrent.

**Chapitre 17 : Limites de suites réelles (début)****I - Limite d'une suite**

- 1) Suites convergentes
- 2) Suites réelles de limite infinie
- 3) Suites divergentes
- 4) Limites et ordre
- 5) Opérations sur les limites
- 6) Equivalents
- 7) Relations de comparaison classiques

**Exemples de compétences attendues**

- ❶ Savoir utiliser les équivalents usuels pour calculer des limites de suites dont le terme général est explicite.
- ❷ Savoir utiliser le théorème d'encadrement et le théorème de convergence monotone pour les suites monotones bornées (révision du Lycée).

*Question d'application du cours possible :*

- Montrer que la suite  $(H_n) = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge.