Technical University of Crete
School of Electrical and Computer Engineering
Course: Convex Optimization
Exercise 5
Instructor: Athanasios P. Liavas
Georgios Klioumis 2017030116

January 20, 2022

Στην αρχή έγινε η κατασκευή των πινάκων c, A και b με τις προδιαγραφές της εκφώνησης και του βιβλίου BV, ώστε να καταλήξουμε με ένα feasible πρόβλημα της μορφής:

$$\begin{aligned} &minimize\ f(x) = c^T x \\ &subject\ to\ Ax = b \\ &\qquad\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

Το πρόβλημα λύθηκε με τον cvx χωρίς κάποια δυσκολία

Εύρεση Feasible σημείου

Η εύρεση αρχικού εφικτού σημείου έγινε με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος ήταν η λύση ενός προβλήματοε feasibility (χωρίς cost function) με την χρήση του cvx. Αφού το πρόβλημα λύθηκε, το εφικτού σημείο που βρήκε ο cvx δόθηκε ως αρχικό σημείο στον αλγόριθμο που αναλύεται παρακάτω.

Ο δεύτερος τρόπος ήταν να ακολουθηθούν οι διαδικασίες του Phase I, οι οποίες αναφέρονται στο προαναφερθέν βιβλίο και τις σημειώσεις. Για την εύρεση ενός feasible σημείου, ξεκινάμε με ένα τυχαίο σημείο που ικανοποιεί τους περιορισμούς ισοτήτων, λύνουμε δηλαδή $Ax_0 = b$. Στην συνέχεια, το πρόβλημα το οποίο θα μας οδηγήσει σε ένα feasible σημείο είναι το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

$$\begin{aligned} &minimize\ f_0(x,s) = s \\ &subject\ to\ Ax = b \\ &\qquad\qquad f_i(x,s) := -x_i - s \leq 0,\ i = 1, ..., n \end{aligned}$$

Από την μέθοδο barrier το πρόβλημα μετασχηματίζεται σε:

$$\begin{aligned} &minimize\ f_0(x,s) = tf_0(x,s) - \sum_{i=1}^{n} log(-fi(x,s)) \\ &subject\ to\ Ax = b \end{aligned}$$

Η μεταβλητή $s \in R$ εκκινήθηκε σύμφωνα με το βιβλίο από $max(x_i) + 1$. Ο αλγόριθμος ο οποίος χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος είναι ο ίδιος με τον αλγόριθμο του Interior Point Barrier Method που αναφέρεται παρακάτω. Για τον υπολογισμό του βήματος Newton για το x και s σε κάθε εσωτερική επανάληψη, λύνεται η εξίσωση που βρίσκεται στην εκφώνηση της άσκησης.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα, αν και είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, στην περίπτωσή μας χρειάζεται να τερματίσουμε τον αλγόριθμο όταν παρατηρηθεί ότι το επόμενο βήμα μας φέρνει σε ένα feasible σημείο. Για τον παραπάνω λόγο, στην αρχή του αλγορίθμου γίνεται πάντα έλεγχος feasibility για το σημείο στο οποίο βρισκόμαστε τόσο στα εσωτερικά loops όσο και στα εξωτερικά (λόγω του εσωτερικού break).

Interior Point Barrier Method

Για την κατασκευή του αλγορίθμου έγινε χρήση του ψευδοκώδικα που δόθηκε μαζί με την άσκηση. Για την συμπλήρωσή του έγινε χρήση των σημειώσεων και του προαναφερθέντος βιβλίου. Ο έλεγχος για feasibility έγινε με ένα απλό if που υπολογίζει αν ικανοποιούνται τα constraints. Για το backtracking χρησιμοποιήθηκε η συνθήκη :

$$f(x_{back}) > f(x) + \alpha\tau \boldsymbol{\nabla} f(x)^T \Delta x$$

Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι στον συγκεκριμένο αλγόριθμο, οποιαδήποτε μηδενική τιμή ορίστηκε στην παράμετρο h, ώστε να αποφύγουμε τυχόν διαιρέσεις με το 0.

Primal-Dual Interior Point Method

Για την κατασκευή του αλγορίθμου ακολουθήθηκαν οι οδηγίες των σημειώσεων, ενώ για την αρχικοποίηση των διαφόρων μεταβλητών του αλγορίθμου ακολουθήθηκαν τα παραδείγματα του βιβλίου. Για την διευκόλυνση στην κατασκευή του αλγορίθμου για το πρόβλημα linear programming, έγιναν κάποιοι υπολογισμοί που εν γένει χαλάνε την γενικότητα του αλγορίθμου (για οποιαδήποτε συνάρτηση κόστους) και προϋπολογίστηκαν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $Df(x)$, που αναφέρονται στις σημειώσεις. Συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x \\ Df(x) &= -eye(n) \\ \boldsymbol{\nabla} f_0(x) &= c \end{aligned}$$

Με αυτά τα δεδομένα υπολογίστηκε ο πίνακας των residuals και το βήμα Δy_{pd} σύμφωνα με τους παρακάτω τύπους:

$$r_{pd} = \begin{bmatrix} c + -eye(n)^T \lambda + A^T v \\ diag(\lambda)x - \frac{1}{t} I \\ Ax - b \end{bmatrix}$$

$$-r_{pd} = \begin{bmatrix} 0 & -eye(n) & A^T \\ diag(\lambda)eye(n) & -diag(-x) & 0 \\ A & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta v \end{bmatrix}$$

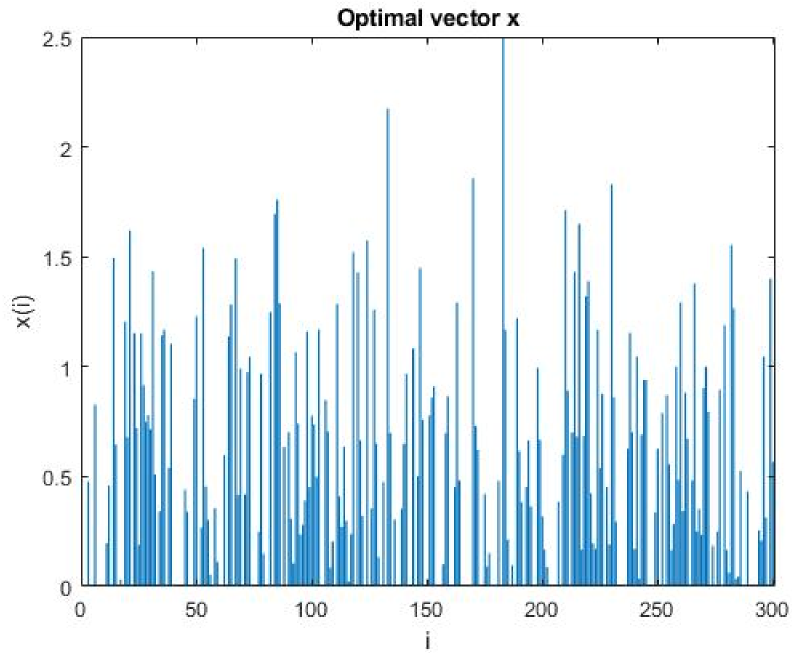
Αφού υπολογίστηκε το βήμα Newton ξεκίνησε το backtracking. Για να μπορέσουμε να βρούμε την τιμή της μεταβλητής s, που μειώνουμε με το backtracking, αρχικά κάνουμε $s = \beta s$ έως ότου έχουμε ένα θετικό διάνυσμα λ, στην συνέχεια ελέγχουμε τους περιορισμούς ανισοτήτων και κάνουμε backtrack, έως ότου $x \succeq 0$. Τέλος, το backtracking συνεχίζεται έως ότου ικανοποιηθεί η συνθήκη

$$||r_+||_2 > (1 - \alpha s)||r||_2$$

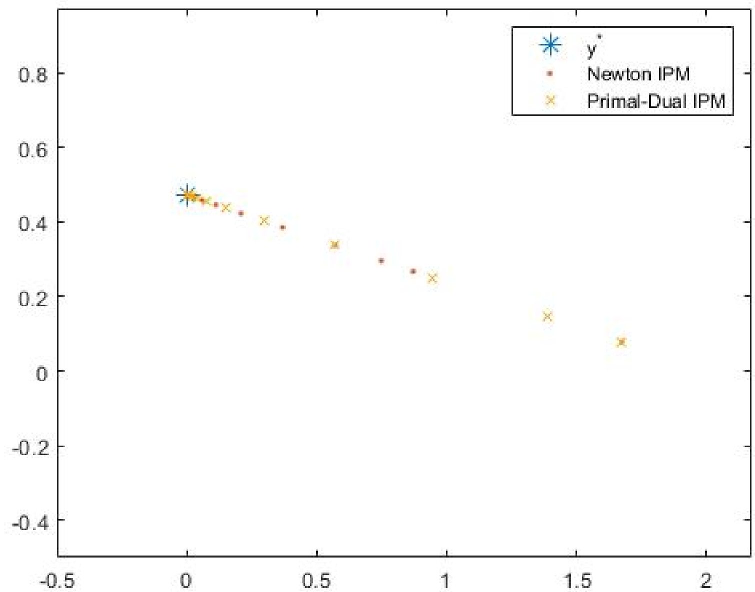
όπου ο r_+ είναι ο πίνακας των residuals υπολογισμένος στο Δy_{pd} για την εκάστοτε τιμή του s. Αφού γίνουν τα παραπάνω και βρεθεί η τιμή του s, ανανεώνουμε τις τιμές των x, λ, v και υπολογίζουμε την παράμετρο η. Μέσω της παραμέτρου η υπολογίζουμε την νέα τιμή του t και επαναλαμβάνουμε τον αλγόριθμο έως ότου τα primal, dual residuals και η παράμετρος η προσεγγίσουν, σύμφωνα με κάποιο όριο, το 0. Αξίζει να σημειωθεί ότι η παράμετρος μ του αλγορίθμου τέθηκε στο 2 και τα όρια των residuals και του η στο 10^{-8}. Με τα παραπάνω settings ο αλγόριθμος συνέκλινε στην ίδια τιμή με τον cvx, αρκετά πιο γρήγορα από τον αλγόριθμο που εξετάσαμε προηγουμένως.

Μελέτη των παραπάνω αλγορίθμων

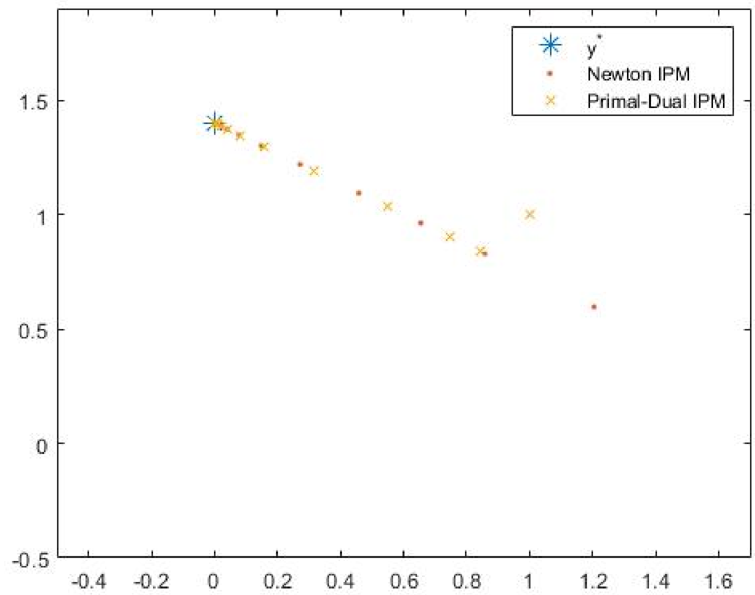
Για ένα πρόβλημα με $A \in R^{200x300}$ το βέλτιστο διάνυσμα x έχει 96 σχετικά (όριο 10^{-6}) μηδενικά στοιχεία, και το βέλτιστο διάνυσμα φαίνεται παρακάτω:



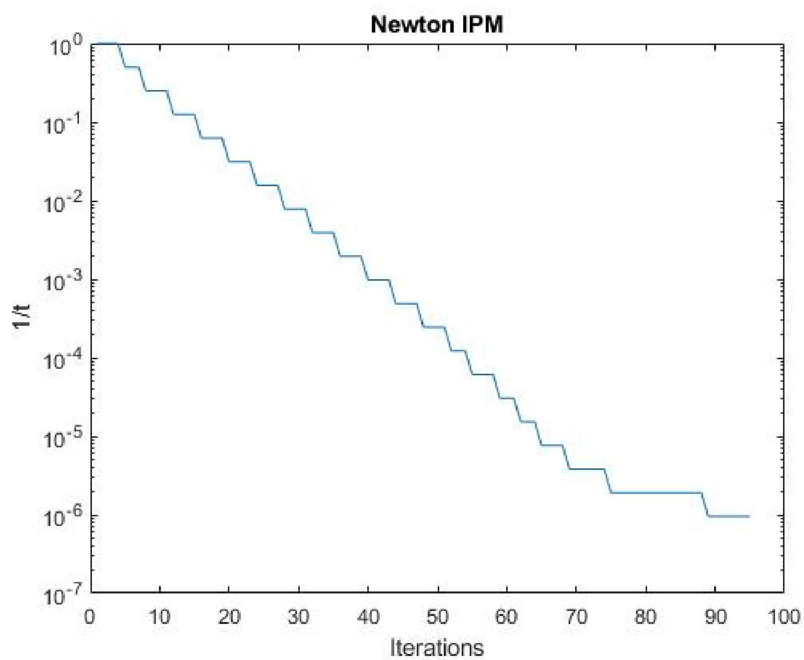
Στην συνέχεια, αφού θέσουμε τις διαστάσεις του προβλήματος ώστε $A \in R^{1x2}$ παρακάτω δείχνονται οι τροχιές των x για τους δύο αλγορίθμους (εκτέλεσαν περίπου max(30) επαναλήψεις). Στο παρακάτω διάγραμμα εκκινούμε και τους δύο αλγορίθμους από αυστηρά feasible σημείο (παρατηρείται από την ευθεία $Ax = b$ που ακολουθούν οι δύο αλγόριθμοι). Στα διαγράμματα το εφικτό σύνολο των x αποτελούν οι θετικές τιμές των αξόνων και τα x, τα οποία βρίσκονται πάνω στην γραμμή που σχηματίζουν οι τροχιές των δύο αλγορίθμων.



Αξιοσημείωτο είναι και το διάγραμμα που φαίνεται παρακάτω και έχει τον primal-dual IPM με εκκίνηση από μη αυστηρά εφικτό σημείο ($x^0 = 1$). Παρατηρείται ότι με ένα βήμα το x γίνεται strictly feasible.



Παρακάτω φαίνεται το duality gap της Newton IPM $\frac{1}{t}$ για ένα πρόβλημα με $A \in R^{100x200}$ με $\mu = 2$.



Στην συνέχεια φαίνεται η συμπεριφορά του αλγορίθμου Primal-Dual IPM για ένα πρόβλημα με $A \in R^{100x200}$. Σημειώνεται ότι το metric $rFeas = \sqrt{||rPrimal||_2^2 + ||rDual||_2^2}$.