Exercício de Fixação de Conceitos (EFC) 1 – Sistemas LIT e Resposta em Frequências

George Nicolas Kontogiorgos

5 de abril de 2020

Sumário

1 Parte teórica **1**
1.1 Determinação do comprimento P 1
1.2 Cálculo da convoução em termos matriciais 4
1.3 Resposta em frequência 6
1.4 Procedimento manual 8
1.4.1 Procedimento automático 8

2 Parte computacional **11**

1 Parte teórica

1.1 Determinação do comprimento P

Podemos determinar o comprimento P da sequência $y[n]$ gerada na saída do sistema em função de K e D, comprimentos da entrada $x[n]$ e da resposta ao impulso $h[n]$ respectivamente, com o método de cálculo analítico da convolução. Tal procedimento faz referência ao exemplo dado em aula pelo professor e ao exemplo 11 do capítulo 2 do livro texto. A operação de convolução é dada por

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{1}$$

Iniciamos o processo operando sobre a resposta ao impulso. O objetivo é obter $h[n-k]$ neste primeiro momento. A função de resposta ao impulso pode ser esboçada (como sugere o enunciado) por:

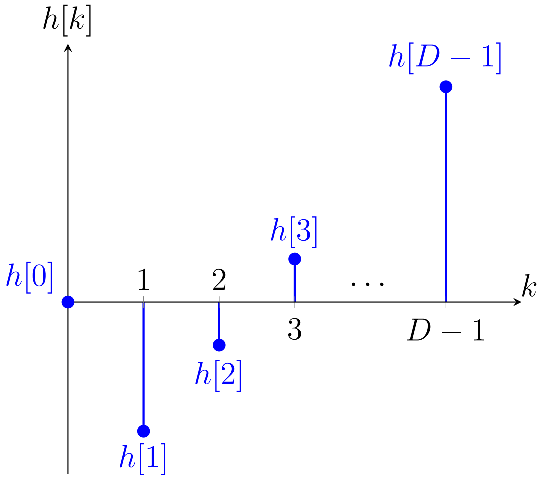

Figura 1: Resposta ao impulso.

Espelhamos o sinal

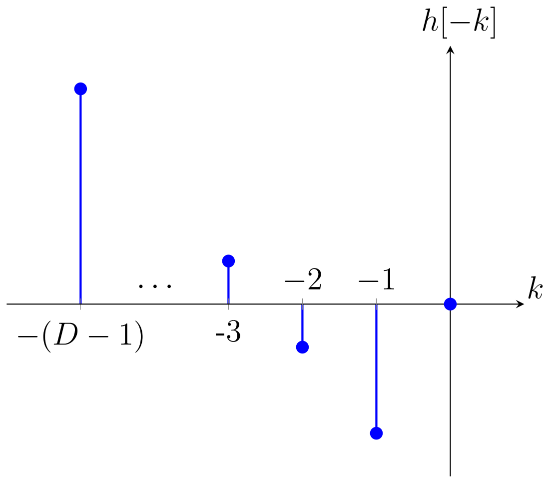

Figura 2: Resposta ao impulso espelhada.

e efetuamos um deslocamento de n amostras e forma-se o sinal $h[n-k]$

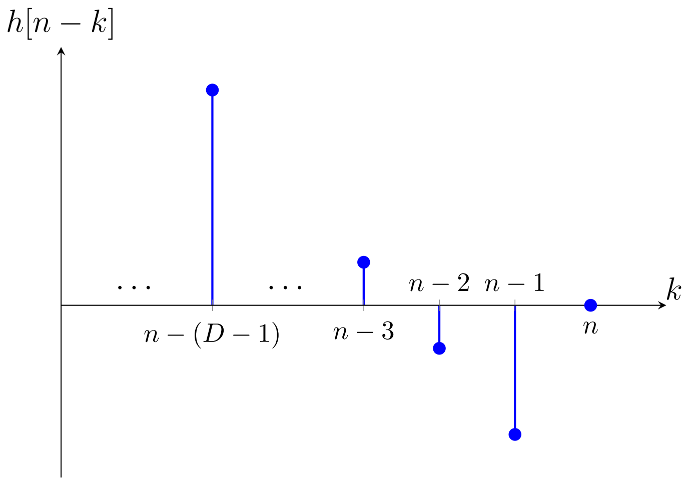

Figura 3: Resposta ao impulso espelhada e deslocada de n amostras.

Neste segundo momento iremos avaliar os extremos da convolução discreta. Para isso, analisaremos, primeiramente $n = 0$, posição que a resposta ao impulso “toca” o sinal de entrada

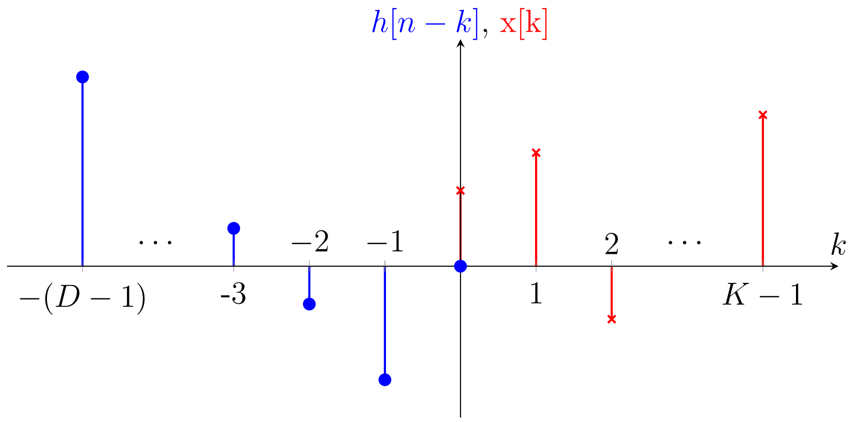

Figura 4: Primeira posição do deslocamento no processo de convolução.

Dessa imagem podemos notar que $n < 0$ implica $y[n] = 0$ uma vez que um nessas regiões os produtos das amostras da resposta ao impulso com a entrada seriam nulas. Isso se dá porque $x[n] = 0$ para $n < 0$, por definição do sinal. O outro extremo pode ser analisado por partes. Imagine primeiramente que o deslocamento será de $n = K - 1$. Nessa condição, a amostra $h[0]$ coincidirá com a amostra $x[K-1]$. Com essa intuição, podemos imaginar então a segunda parte do raciocínio, quando a amostra $h[D-1]$ coincida com $x[K-1]$. Essa será o outro extremo do cálculo da convolução. Para que essa situação ocorra, teremos que fazer o deslocamento ser $n = K + D - 2$. Segue o gráfico dessa última condição:

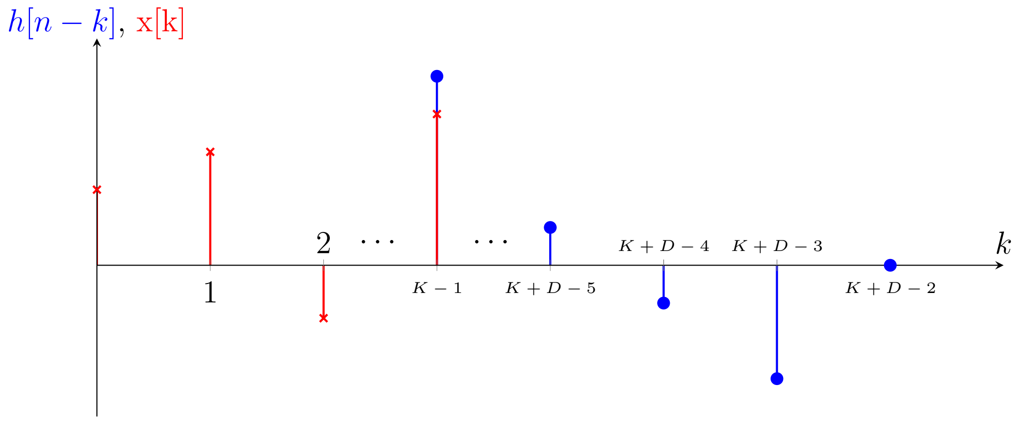

Figura 5: Última posição do deslocamento no processo de convolução.

Note que com um incremento unitário no deslocamento todos os produtos se anulam, como no caso de $n < 0$. Dado isso, temos também $y[n] = 0$ para $n > K + D - 2$, e, podemos escrever, de uma forma mais ampla:

$$y[n] = \begin{cases} x[n] * h[n], & 0 \leq n \leq K + D - 2 \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases} \tag{2}$$

Fica evidente dessa análise que o comprimento temporal da saída $y[n]$ será dado por

$$P = K + D - 1 \tag{3}$$

a soma de uma unidade em relação ao intervalo definido na função por partes de deve por esse conjunto iniciar em zero.

1.2 Cálculo da convoução em termos matriciais

Definiremos o vetor de entrada

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 & x_2 & \cdots & x_{K-1} \end{pmatrix}^T \tag{4}$$

o vetor de saída

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_0 & y_2 & \cdots & y_{P-1} \end{pmatrix}^T \tag{5}$$

e a relação entre eles, que denominaremos aqui como matriz de resposta ao impulso

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & \cdots & h_{0K-1} \\ h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1K-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{P-10} & h_{P-11} & \cdots & h_{P-1K-1} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Encontraremos uma relação entre a convolução discreta e o produto de matriz por vetor, o qual é dado por

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \Leftrightarrow y_i = \sum_{j=0}^{K-1} h_{ij} x_j \tag{7}$$

Associamos os elementos das matrizes com os elementos da sequência

$$\begin{aligned} h_{ij} &= h[i-j] \\ x_j &= x[j] \\ y_i &= y[i] \end{aligned} \tag{8}$$

e reescrevemos o produto da equação 7 como

$$y[i] = \sum_{j=0}^{K-1} x[j] h[i-j] \tag{9}$$

encontramos a saída como função da convolução dos sinal de entrada com a resposta ao impulso (descrita na subseção 1.1, equação 1), limitada no intervalo $[0, K-1]$. Podemos representar o resultado encontrado na equação 9 na forma matricial

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h[0] & h[-1] & h[-2] & \cdots & h[-K+1] \\ h[1] & h[0] & h[-1] & \cdots & h[-K+2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[K-1] & h[K-2] & h[K-3] & \cdots & h[0] \end{pmatrix} \tag{10}$$

que é conhecida como matriz de Toeplitz.

Supondo que a resposta ao impulso é finita e possui comprimento D, como descrito em 1.1, a matriz $\mathbf{H}$ assumirá a forma

$$
\mathbf{H} = \begin{cases}
\begin{pmatrix}
h[0] & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
h[1] & h[0] & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
h[D-1] & h[D-2] & \cdots & h[-1] & h[0] & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & h[D-1] & h[D-2] & \cdots & h[0] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & h[D-1]
\end{pmatrix} & , D \leq K \\
\begin{pmatrix}
h[0] & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
h[1] & h[0] & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
h[K-1] & h[K-2] & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h[0] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & h[D-1]
\end{pmatrix} & , D > K
\end{cases}
\tag{11}
$$

As condições das dimensões não influenciam o resultado final, elas se fazem presentes apenas para fins didáticos. Note que, quando $D \leq K$ todos elementos da resposta ao impulso se encaixam na matriz $\mathbf{H}$ em, pelo menos, uma linha. Quando $D > K$, é possível observar que nenhuma linha de $\mathbf{H}$ contém todos os elementos da sequência da resposta ao impulso.

1.3 Resposta em frequência

Para encontrar a resposta em frequência do sistema desconhecido exploraremos o conceito de autofunção para os sistemas lineares e invariantes no tempo. As autofunções de um sistema são funções que aplicadas a ele reproduzem a entrada multiplicada por um fator de escala denominado autovalor.

Considere a entrada $x[n] = e^{j\omega n}$ e a convolução discreta descrita na equação 1 escrita em sua outra forma:

$$
y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \tag{12}
$$

Temos que $H(e^{j\omega})$ é o fator de escala (autovalor) da autofunção $e^{j\omega n}$ para o sistema dado. Podemos interpretar que $H(e^{j\omega})$ é o ganho do sistema naquela frquência ω. Se considerarmos o intervalo $\omega \in [0, \pi]$, $H(e^{j\omega})$ demonstra como o sistema se comporta no intervalo dado de frequências, recebendo o nome de resposta em frequência.

Nosso gerador de funções não é capaz de gerar a entrada $x[n] = e^{j\omega n}$ proposta. No entanto, ele pode de gerar a funções trigonométricas. Em particular, escolheremos $x[n] = \cos \omega n$ e a injetaremos na entrada do sistema teremos

$$\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cos \omega(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \left(\frac{e^{j\omega(n-k)} + e^{-j\omega(n-k)}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) + e^{-j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega k} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) + e^{-j\omega n} H(e^{-j\omega}) \right]
\end{aligned} \tag{13}$$

Tratando-se de um sistema real, espera-se que $h[n] \in \mathbb{R}$, logo, podemos elencar que $H^*(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$. Adotando a notação fasorial, podemos escrever a saída do sistema como

$$\begin{aligned}
y[n] &= \frac{1}{2} \left[e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) + e^{-j\omega n} H^*(e^{j\omega}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[e^{j\omega n} |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega}} + e^{-j\omega n} |H^*(e^{j\omega})| e^{-j\angle H(e^{j\omega})} \right] \\
&= |H(e^{j\omega})| \left(\frac{e^{j(\omega n + \angle H(e^{j\omega}))} + e^{-j(\omega n + \angle H(e^{j\omega}))}}{2} \right) \\
&= |H(e^{j\omega})| \cos\left(\omega n + \angle H(e^{j\omega})\right)
\end{aligned} \tag{14}$$

O resultado obtido é muito importante, uma vez que obtemos na saída a mesma forma injetada na entrada, a menos da amplitude e da fase. Dessa forma, podemos variar a frquência do sinal de entrada de $[0, \pi]$ e, analisando a amplitude e a defasagem no sinal de saída, caracterizaremos a resposta em frequência do sistema dado.

A partir do fato que é possível obter a defasagem e a amplitude do sinal de saída a partir de uma excitação cossenoidal na entrada, poderemos elaborar dois algoritmos.

1.4 Procedimento manual

Para o procedimento manual teremos a seguinte metodologia

1. Conectar os sinais de entrada e saída dos sistemas em canais distintos do osciloscópio;
2. Configurar o osciloscópio para calcular a defasagem entre os dois sinais;
3. Configurar o osciloscópio para obter a amplitude do sinal de saída;
4. Confiugurar o gerador de sinais para gerar um cosseno em frequência ω e fase zero;
5. Aguardar o transiente do sistema e medir amplitude e defasagem do sinal de saída;
6. Aumentar a frequência e retornar a 4 até que que $\omega = \pi$;

1.4.1 Procedimento automático

Consideraremos aqui o procedimento automático, onde um computador pode gerenciar o gerador de sinais e o osciloscópio. O primeiro deles visará a geração da sequência de entrada no sistema e está descrito na seguinte lista

1. Geraremos vários períodos (l é a variável de contagem dos períodos e L é o número de períodos por frequência) da função cosseno em uma dada frequência ω inicial, até que o sistema atinja o estado estacionário;
2. Aumentamos a frequência em $\Delta\omega$ e repete-se o primeiro passo até a frquência limite para um sistema discreto.

A lista foi sintetizada no seguinte fluxograma, facilitando a visualização do procedimento

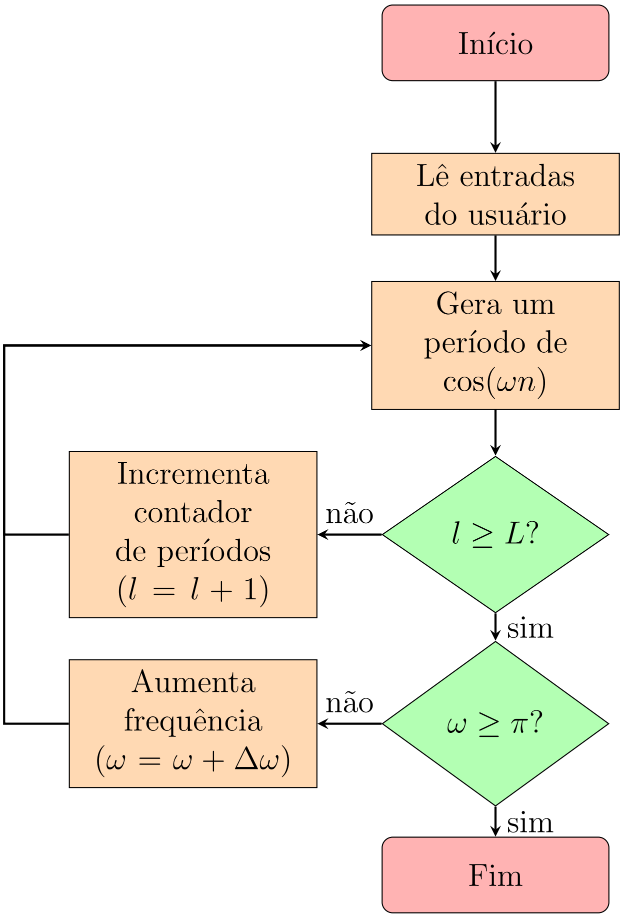

Figura 6: Algoritmo de aquisição de dados para a identificação do sistema desconhecido.

O segundo algoritmo efetuará o pós processamento dos sinais de saída a fim de obter a resposta em frequência do sistema. Segue a lista das operações

1. Descartar os J primeiros ciclos referentes ao transitório do sistema;
2. Efetuar a média dos próximos $L - J$ ciclos, amostra por amostra (tentaremos amenizar ruídos dessa forma);
3. Obter a amplitude do sinal de saída médio (essa será $|H(e^{j\omega})|$ na frequência em questão);
4. Obter a fase do sinal de saída médio (esse será $\angle H(e^{j\omega})$ na frequência em questão);
5. Repetir o procedimento até contemplar todas as frquências;

6. Plotar os diagramas de ganho e fase (Bode) para o usuário.

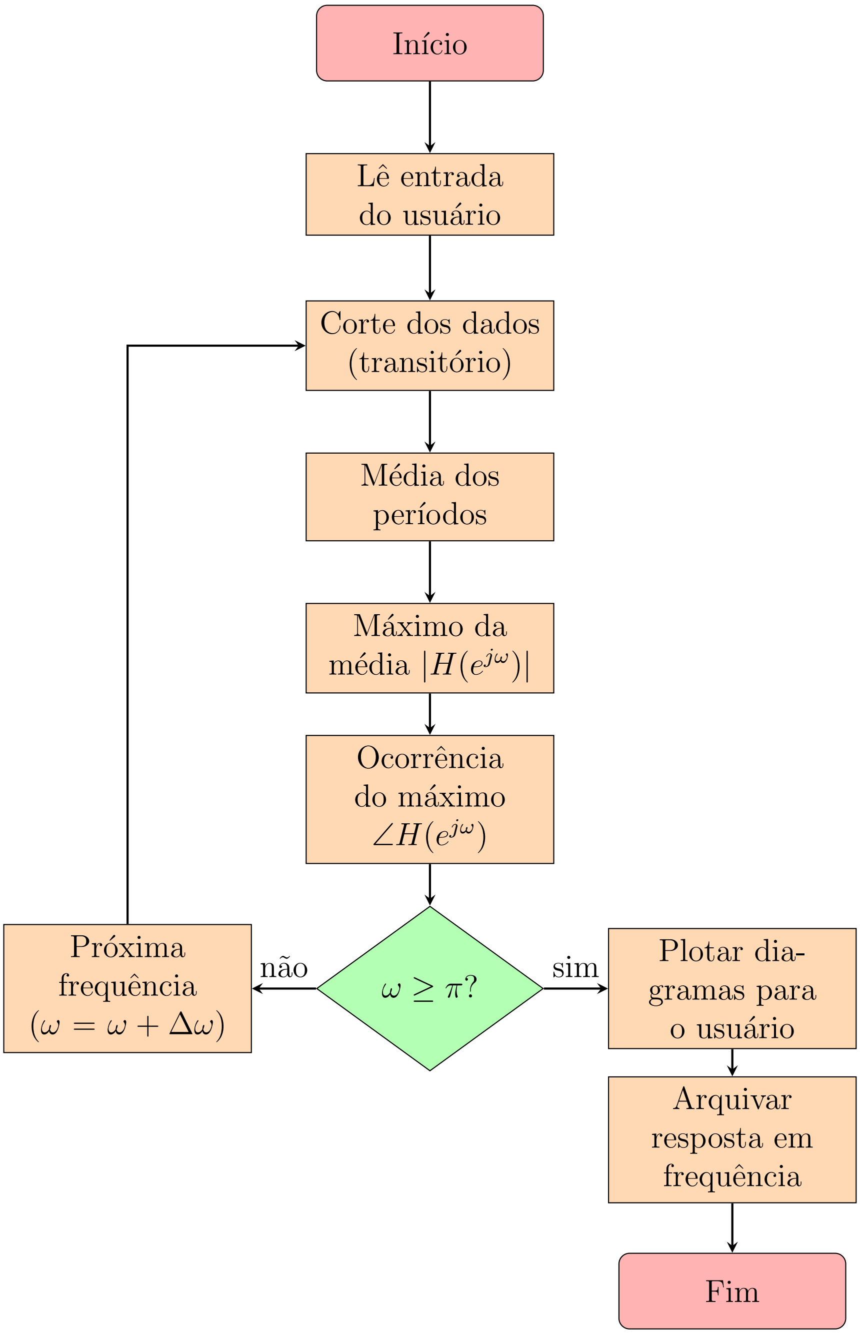

Figura 7: Algoritmo de pós processamento para a identificação do sistema desconhecido.

2 Parte computacional