ディィリクレ積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ の証明

1　証明の概要

ディィリクレ積分の値

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

を求めるために，複素関数 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ を考える。この関数を、図 1 に示すような、上半平面にある原点を避ける閉じた経路 C で積分することを考える。

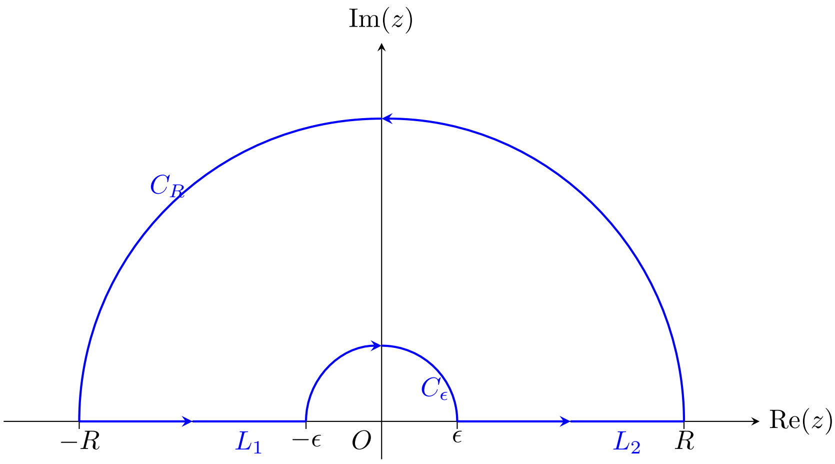

Figure 1: 積分経路 $C = L_1 + C_\epsilon + L_2 + C_R$

積分経路 C は以下の 4 つの部分からなる。

- L_1: 実軸上の $-R$ から $-\epsilon$ までの線分
- C_ϵ: 原点を中心とする半径 ϵ の上半円（時計回り）
- L_2: 実軸上の ϵ から R までの線分
- C_R: 原点を中心とする半径 R の上半円（反時計回り）

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ は $z = 0$ に 1 位の極を持つが、この積分経路 C の内部および経路上には特異点を含まない。したがって、コーシーの積分定理より、

$$\oint_C f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{C_\epsilon} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = 0$$

が成り立つ。以下で、 $R \to \infty, \epsilon \to 0$ の極限で各項の積分を評価する。

1.1　実軸上の積分 $(L_1 + L_2)$

L_1 と L_2 上では $z = x$ (実数) であるから、

$$\int_{L_1+L_2} f(z)dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx$$

第 1 項について $x = -t$ と置換すると、 $dx = -dt$ であり、

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_R^\epsilon \frac{e^{-it}}{-t}(-dt) = -\int_\epsilon^R \frac{e^{-it}}{t} dt$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\int_{L_1+L_2} f(z)dz &= -\int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{-it}}{t}dt + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{it}}{t}dt \quad (\text{変数 } t \text{ を } x \text{ に戻す}) \\
&= \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}dx \\
&= \int_{\epsilon}^{R} \frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos x - i\sin x)}{x}dx \\
&= \int_{\epsilon}^{R} \frac{2i\sin x}{x}dx = 2i\int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}dx
\end{aligned}$$

$R \to \infty, \epsilon \to 0$ の極限をとると、

$$\lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0}\left(\int_{L_1+L_2} f(z)dz\right) = 2i\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = 2iI$$

1.2　大きな上半円上の積分 (C_R)

C_R 上では $z = Re^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le \pi)$ とおける。$e^{iz} = e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)} = e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}$ であり、$\left|e^{iz}\right| = e^{-R\sin\theta}$ となる。上半平面（$0 \le \theta \le \pi$）では $\sin\theta \ge 0$ であるため、$e^{-R\sin\theta} \le e^0 = 1$ であり、

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dz\right| \le \frac{1}{R} \times (\pi R) = \pi$$

となり、この評価だけでは $R \to \infty$ で積分が 0 に収束するとは結論できない。そこで、より直接的に $R \to \infty$ での挙動を評価できるジョルダンの補題（Jordan's Lemma, Appendix 参照）を用いる。上半平面で $R \to \infty$ のとき $|g(z)| \to 0$ となる $g(z)$ （今の場合 $g(z) = 1/z$）について、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0 \quad (\lambda > 0)$$

が成り立つ。今回は $g(z) = 1/z$, $\lambda = 1 > 0$ であり、C_R 上で $|g(z)| = |1/z| = 1/R \to 0$ $(R \to \infty)$ であるから、ジョルダンの補題が適用でき、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

1.3　小さな上半円上の積分 (C_ϵ)

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ は $z = 0$ に 1 位の極を持つ。$z = 0$ のまわりでのローラン展開は、

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 + (iz) + \frac{(iz)^2}{2!} + \dots\right) = \frac{1}{z} + i - \frac{z}{2} - \dots$$

となる。$z = 0$ における留数は、 $1/z$ の係数であるから、

$$\mathrm{Res}_{z=0}f(z) = 1$$

C_ϵ は $z = 0$ を中心とする半径 ϵ の円弧であり、経路は時計回り（角度 $\pi \to 0$）である。$\epsilon \to 0$ の極限では、この積分は留数を用いて評価できる（コーシーの留数定理の応用、または小さな円弧の補題）。$f(z)$ が $z = a$ に 1 位の極を持ち、 C_ϵ が $z = a$ を中心とする半径 ϵ の円弧（角度 $\alpha \to \beta$）であるとき、

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} f(z)dz = i(\beta - \alpha)\mathrm{Res}_{z=a}f(z)$$

今回は $a = 0$, $\alpha = \pi$, $\beta = 0$ （時計回りのため）であるから、

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} f(z)dz = i(0 - \pi)\mathrm{Res}_{z=0}f(z) = -i\pi$$

1.4 まとめ

コーシーの積分定理 $\oint_C f(z)dz = 0$ に、 $R \to \infty, \epsilon \to 0$ の極限を適用すると、

$$\lim \left(\int_{L_1+L_2} + \int_{C_R} + \int_{C_\epsilon} \right) f(z)dz = 0$$

$$\left(2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \right) + (0) + (-i\pi) = 0$$

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = i\pi$$

両辺を $2i$ で割ると、

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

となり、ディリクレ積分の値が求められた。

A ジョルダンの補題 (Jordan's Lemma)

ジョルダンの補題は、複素積分において、無限遠点を含む円弧上の積分がゼロに収束することを示すための強力なツールである。

補題の主張は以下の通りである。

上半平面 ($\mathrm{Im}(z) \geq 0$) において、$R \to \infty$ のとき、$C_R = \{z \mid z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ 上で一様に $|g(z)| \to 0$ となる関数 $g(z)$ を考える。このとき、任意の正の実数 $\lambda > 0$ に対して、

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0$$

が成り立つ。

証明の概略: C_R 上で $z = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ とパラメータ表示すると、$dz = iRe^{i\theta}d\theta$ である。積分の絶対値をとると、

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z} dz \right| &\leq \int_{C_R} |g(z)||e^{i\lambda z}||dz| \\
&= \int_0^\pi |g(Re^{i\theta})||e^{i\lambda R(\cos\theta + i\sin\theta)}||iRe^{i\theta}|d\theta \\
&= \int_0^\pi |g(Re^{i\theta})|e^{-\lambda R\sin\theta} R d\theta
\end{aligned}$$

仮定より、$R \to \infty$ のとき $|g(Re^{i\theta})| \leq M_R$ であり、$M_R \to 0$ となる M_R が存在する。

$$\leq M_R R \int_0^\pi e^{-\lambda R \sin\theta} d\theta$$

ここで、 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ において $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ （ジョルダンの不等式）が成り立つことを用いると、

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^{-\lambda R\sin\theta} d\theta &= 2\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R\sin\theta} d\theta \\
&\leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R(2/\pi)\theta} d\theta \\
&= 2\left[\frac{e^{-\lambda R(2/\pi)\theta}}{-\lambda R(2/\pi)} \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{\lambda R}(1 - e^{-\lambda R})
\end{aligned}$$

したがって、

$$\left| \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq M_R R \frac{\pi}{\lambda R}(1 - e^{-\lambda R}) = \frac{\pi M_R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda R})$$

$R \to \infty$ のとき、$M_R \to 0$ であるから、右辺は 0 に収束する。よって補題が示された。

今回のディリクレ積分の計算では、$g(z) = 1/z$, $\lambda = 1 > 0$ であり、C_R 上で $|g(z)| = 1/R \to 0$ $(R \to \infty)$ なので、ジョルダンの補題が適用でき、

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

となる。