$1/x$ の積分

1　実数領域における積分

1.1　不定積分 $\ln|x|$

実解析において、$1/x$ の不定積分は次式で与えられる。

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \tag{1}$$

ここで絶対値 $|x|$ は不可欠である。その必要性は $\ln|x|$ の導関数を考えれば明らかである。$x > 0$ のとき $(\ln x)' = 1/x$ である。$x < 0$ のとき、合成関数の微分法より $(\ln(-x))' = (1/(-x)) \cdot (-1) = 1/x$ となる。この単一の表現 (1) が、正の領域と負の領域の両方を正しくカバーしている。

1.2　特異点 $x = 0$

式 (1) は、$x = 0$ を含まない任意の区間で有効である。例えば、負の区間における定積分は適切に定義される。

$$\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_{-e}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-e| = \ln(1) - \ln(e) = 0 - 1 = -1$$

しかし、$\int_{-1}^{2}(1/x)dx$ のように原点をまたぐ積分は定義されない。関数 $f(x) = 1/x$ は $x = 0$ で定義されず、対応する広義積分は発散する。

2　複素平面への拡張

2.1　複素対数関数 $\log(z)$ と多価性

変数を複素数 z に拡張すると、不定積分は複素対数関数 $\log(z)$ となる。

$$\int \frac{1}{z}dz = \log(z) + C$$

複素対数関数は、$z = re^{i\theta} = |z|e^{i\arg(z)}$ に対して、以下のように定義される。

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$$

決定的に重要なのは、偏角 $\arg(z)$ が一意に定まらないことである。偏角は 2π の整数倍の任意性を持つ。このため $\log(z)$ は多価関数となる。$\log(z)$ の実部 $\ln|z|$ は、実数の積分 (1) と直接対応している。

2.2　経路依存性と特異点

複素平面において、積分は経路 C に沿って実行される。$z = 0$ の特異点は、実数の場合と同様に経路が通過できない点である。しかし、実数の場合と異なり、この特異点は「回避」することができる。原点を迂回して $z_1 = -1$ から $z_2 = 2$ へ至る経路 C を定義することが可能である。

このとき、積分の値は、特異点を「どのように」回避したかに依存する。

- 経路 C_1： $z = 0$ の「上側」（反時計回り）を通る経路
- 経路 C_2： $z = 0$ の「下側」（時計回り）を通る経路

これら 2 つの経路は異なる積分値を与える。両者の差は、原点を周回する閉じた経路 C_{loop} での積分値に関連する。コーシーの積分定理により、この周回積分の値は 0 ではない。

$$\oint_{C_{\mathrm{loop}}} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

この 0 でない値は、不定積分である $\log(z)$ の多価性の直接的な帰結である。経路 C_1 と C_2 は、原点の周りを「一周」ぶん異なっており、それゆえ積分値も $2\pi i$ だけ異なる。

3 結論

$1/x$ の積分は、実解析と複素解析の根本的な違いを例証している。

1. $\mathbb{R}$ **において:** 不定積分は $\ln|x|$ である。$x = 0$ の特異点は、定義域を二つの独立した領域 ($x < 0$ と $x > 0$) に分離する。
2. $\mathbb{C}$ **において:** 不定積分は $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ である。$z = 0$ の特異点は回避可能な分岐点である。特異点を迂回して z_1 から z_2 まで積分することは可能だが、$i\arg(z)$ の項に起因する多価性のため、柱の「右側を通るか」「左側を通るか」といった経路の選択によって積分の値が変わる。