デルタ関数

1 デルタ関数の操作的定義

デルタ関数 $\delta(x)$ は、それ自体で値を議論するのではなく、任意の（性質の良い）関数 $f(x)$ との積分によって、以下のように定義されます。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta(x-a) = f(a) \tag{1}$$

これがデルタ関数の根本的な定義です。以降の表現はすべて、この (1) を満たす必要があります。

2 フーリエ積分による表現

2.1 表現とその意味

デルタ関数は、形式的にフーリエ積分として表現されることがあります。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx} \tag{2}$$

しかし、この積分はそのままでは収束しません。この式の真の意味は、(1) の $f(x)$ との積分を実行する際に、積分範囲を ϵ で制限し、最後に $\epsilon \to +0$ の極限をとるものとして理解されます。計算は以下の通りです。

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta(x) &\equiv \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon}} dk\ e^{ikx}\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\left[\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{ikx}}{ix}\right)\Bigg|_{k=-1/\epsilon}^{k=1/\epsilon}\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\left[\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ix/\epsilon}-e^{-ix/\epsilon}}{ix}\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\frac{\sin(x/\epsilon)}{x} \qquad (3) \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy\ f(\epsilon y)\frac{\sin y}{y} \qquad (4) \\
&\quad (f(x) \text{ の連続性と有界性を仮定し、極限と積分を交換}) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy\ \left[\lim_{\epsilon\to+0} f(\epsilon y)\right]\frac{\sin y}{y} \qquad (5) \\
&= \frac{1}{\pi}f(0)\int_{-\infty}^{\infty} dy\ \frac{\sin y}{y} \\
&\quad (\text{ディリクレ積分 } \int_{-\infty}^{\infty}(\sin y/y)dy = \pi \text{ を使用}) \\
&= f(0)
\end{aligned}$$

これにより、表現 (2) が定義 (1) を満たすことが確認されました。

2.2 関数 $f(x)$ の条件

上記 (4) から (5) への変形において、極限 $\lim_{\epsilon\to+0}$ と積分 $\int dy$ の順序交換を行いました。この操作が正当化されるためには、関数 $f(x)$ が「性質の良い」ものである必要があります。具体的には、以下の条件が物理数学の文脈で暗黙に仮定されています。

1. $f(x)$ **が $x=0$ で連続であること：** これは、(5) から次の行への変形で $\lim_{\epsilon\to+0} f(\epsilon y) = f(0)$ とするために不可欠です。もし $x=0$ で不連続（値がジャンプしている）ならば、この極限は $f(0)$ になるとは限りません。

2. $f(x)$ **が有界であり、積分が収束すること：** 極限と積分の順序交換を厳密に保証するのがルベーグの優収束定理です。この定理を適用するためには、ϵ によらずに $|f(\epsilon y)\frac{\sin y}{y}|$ を上から押さえつける可積分な「優関数」が必要です。$f(x)$ が全域で有界（$|f(x)| \leq M$）であれば、$|f(\epsilon y)\frac{\sin y}{y}| \leq M|\frac{\sin y}{y}|$ と評価でき、$g(y) = M|\frac{\sin y}{y}|$ は可積分であるため、この条件は満たされます。

2.3 ϵ 表現

$\delta(x)$ は $\epsilon \to +0$ の極限で考えられる関数列 $\delta_\epsilon(x)$ の極限として定義されます。

$$\delta_\epsilon(x) \equiv \frac{1}{\pi}\frac{\sin(x/\epsilon)}{x}$$

そして、デルタ関数 $\delta(x)$ は、この $\delta_\epsilon(x)$ を使った積分の極限として定義されます。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta(x) \equiv \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta_\epsilon(x)$$

この意味において、$\delta(x) = \lim \delta_\epsilon(x)$ と表記します。

3 デルタ関数の微分

3.1 定義

デルタ関数の微分 $\delta'(x)$ も同様に、積分によって定義されます。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta'(x) = -f'(0)$$

この定義は、形式的な部分積分 $\int f\delta' dx = [f\delta] - \int f'\delta dx = 0 - \int f'\delta dx = -f'(0)$ から来ています。

この微分は、(3) の $\delta_\epsilon(x)$ を x で微分したものです。

$$\begin{aligned}
\delta'_\epsilon(x) \equiv \frac{d}{dx}[\delta_\epsilon(x)] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\pi}\frac{\sin(x/\epsilon)}{x}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(x/\epsilon)\cdot(1/\epsilon)\cdot x - \sin(x/\epsilon)\cdot 1}{x^2}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos(x/\epsilon)}{\epsilon x} - \frac{\sin(x/\epsilon)}{x^2}\right\} \qquad (6)
\end{aligned}$$

したがって、(6) のような記述は $\delta'(x)$ そのものではなく、$\delta'(x) = \lim_{\epsilon\to+0}\delta'_\epsilon(x)$ という極限操作を省略した表現です。

4 複素表現と主値

4.1 関数 $\zeta(x)$

$\zeta(x)$ という関数が導入されることがあります。

$$\begin{aligned}
\zeta_\epsilon(x) \equiv -i\int_0^{1/\epsilon} dk\ e^{ikx} &= -i\left[\frac{e^{ikx}}{ix}\right]_{k=0}^{k=1/\epsilon} \\
&= \frac{-i}{ix}(e^{ix/\epsilon} - e^0) = \frac{1}{x}(1 - e^{ix/\epsilon}) \\
&= \frac{1 - (\cos(x/\epsilon) + i\sin(x/\epsilon))}{x} \\
&= \frac{1 - \cos(x/\epsilon)}{x} - i\frac{\sin(x/\epsilon)}{x}
\end{aligned}$$

ここで $\epsilon \to +0$ の極限をとることを考えます。

$$\zeta(x) = \lim_{\epsilon\to+0} \zeta_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to+0}\left[\frac{1-\cos(x/\epsilon)}{x}\right] - i\lim_{\epsilon\to+0}\left[\frac{\sin(x/\epsilon)}{x}\right] \tag{7}$$

右辺第 1 項は後述するように $1/x$ のコーシーの主値 $P\frac{1}{x}$ と呼ばれるものになり、第 2 項は (3) の結果から $\pi\delta(x)$ となります。よって、以下の関係が得られます。

$$\zeta(x) = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$$

4.2 別の表現

また、$\zeta(x)$ の別の定義として $\lim \frac{1}{x+i\epsilon}$ が導入され、その極限が $P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$ となることが知られています。

$$\lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{x+i\epsilon} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \tag{8}$$

この関係は、分母を有理化することで示されます。

$$\frac{1}{x+i\epsilon} = \frac{1}{(x+i\epsilon)}\cdot\frac{(x-i\epsilon)}{(x-i\epsilon)} = \frac{x-i\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \frac{x}{x^2+\epsilon^2} - i\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \tag{9}$$

この式の極限 $\lim_{\epsilon\to+0}$ をとると、(8) と比較して、実部と虚部にそれぞれ以下の関係式が得られます。

4.3 主値 $P\frac{1}{x}$ の意味

(9) の実部から、以下の表現が得られます。

$$P\frac{1}{x} \equiv \lim_{\epsilon\to+0}\left[\frac{x}{x^2+\epsilon^2}\right] \tag{10}$$

デルタ関数と同様に、主値 $P\frac{1}{x}$ も、それ自体が $x=0$ で値を持つ関数ではなく、積分の中でのみ意味を持つ超関数です。その厳密な定義（コーシーの主値）は、 $x=0$ の特異点を対称な形でくり抜いてから極限をとるものです。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)P\frac{1}{x} \equiv \lim_{\delta\to+0}\left[\int_{-\infty}^{-\delta} dx\ \frac{f(x)}{x} + \int_{\delta}^{\infty} dx\ \frac{f(x)}{x}\right]$$

この定義が、ϵ 表現 (10) と一致することを直接示します。積分を $x=0$ の周りの微小区間 $(-\delta,\delta)$ とそれ以外に分けます。

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\left[\frac{x}{x^2+\epsilon^2}\right] &= \lim_{\epsilon\to+0}\left[\int_{|x|\ge\delta} dx\ f(x)\frac{x}{x^2+\epsilon^2} + \int_{-\delta}^{\delta} dx\ f(x)\frac{x}{x^2+\epsilon^2}\right] \\
&\qquad (|x|\ge\delta \text{ の領域では } \epsilon\to 0 \text{ で } \frac{x}{x^2+\epsilon^2}\to\frac{1}{x} \text{ に一様収束}) \\
&= \int_{|x|\ge\delta} dx\ f(x)\frac{1}{x} + \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\delta}^{\delta} dx\ f(x)\frac{x}{x^2+\epsilon^2}
\end{aligned} \tag{11}$$

次に、第 2 項の積分を評価します。$f(x)$ は連続と仮定しているので、$f(x) = f(0) + (f(x) - f(0))$ と書けます。

$$\begin{aligned}
\int_{-\delta}^{\delta} dx\ f(x)\frac{x}{x^2+\epsilon^2} &= \int_{-\delta}^{\delta} dx\ f(0)\frac{x}{x^2+\epsilon^2} + \int_{-\delta}^{\delta} dx\ (f(x)-f(0))\frac{x}{x^2+\epsilon^2} \\
&\qquad (\text{第 1 項の被積分関数は奇関数なので積分は } 0) \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} dx\ \frac{f(x)-f(0)}{x}\frac{x^2}{x^2+\epsilon^2}
\end{aligned}$$

ここで $f(x)$ が $x=0$ で微分可能と仮定すると、$h(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ は $x\to 0$ で $f'(0)$ に近づく連続関数です。$\epsilon\to 0$ の極限をとると、$\frac{x^2}{x^2+\epsilon^2}$ は $x=0$ を除いて 1 になります (優収束定理を使えます)。

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\delta}^{\delta} dx\ \frac{f(x)-f(0)}{x}\frac{x^2}{x^2+\epsilon^2} = \int_{-\delta}^{\delta} dx\ \frac{f(x)-f(0)}{x} \tag{12}$$

したがって、(11) に (12) を代入して $\delta \to 0$ の極限をとると、

$$\lim_{\delta\to+0}\left[\int_{|x|\geq\delta} dx\ \frac{f(x)}{x} + \int_{-\delta}^{\delta} dx\ \frac{f(x)-f(0)}{x}\right] = \lim_{\delta\to+0}\int_{|x|\geq\delta} dx\ \frac{f(x)}{x} + \lim_{\delta\to+0}\int_{-\delta}^{\delta} dx\ \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

(第 2 項は有限値を持つ関数 $h(x)$ を幅 2δ で積分)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)P\frac{1}{x} + 0$$

よって、$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\left[\frac{x}{x^2+\epsilon^2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)P\frac{1}{x}$ が示されました。したがって、(10) は $P\frac{1}{x}$ の ϵ 表現として正しいことがわかります。

さらに、(7) の実部 $PV_\epsilon(x) = \frac{1-\cos(x/\epsilon)}{x}$ も主値 $P\frac{1}{x}$ と等価であることを示します。同様に δ で積分領域を分割します。

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)PV_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to+0}\left[\int_{|x|\geq\delta} dx\ f(x)\frac{1-\cos(x/\epsilon)}{x} + \int_{-\delta}^{\delta} dx\ f(x)\frac{1-\cos(x/\epsilon)}{x}\right]$$

($|x| \geq \delta$ の領域では $\cos(x/\epsilon)$ は激しく振動し、積分すると 0 になると考えられる)

$$= \int_{|x|\geq\delta} dx\ f(x)\frac{1}{x} + \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\delta}^{\delta} dx\ f(x)\frac{1-\cos(x/\epsilon)}{x} \tag{13}$$

第 2 項について、$f(x) = f(0) + (f(x)-f(0))$ とします。

$$\int_{-\delta}^{\delta} dx\ f(x)\frac{1-\cos(x/\epsilon)}{x} = \int_{-\delta}^{\delta} dx\ f(0)\frac{1-\cos(x/\epsilon)}{x} + \int_{-\delta}^{\delta} dx\ (f(x)-f(0))\frac{1-\cos(x/\epsilon)}{x}$$

(第 1 項の被積分関数は奇関数なので積分は 0)

$$= \int_{-\delta}^{\delta} dx\ \frac{f(x)-f(0)}{x}(1-\cos(x/\epsilon))$$

$f(x)$ が微分可能なら $h(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ は $x=0$ でも連続です。$|1-\cos(x/\epsilon)| \leq 2$ なので、優収束定理より極限と積分を交換できます。

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\delta}^{\delta} dx\ h(x)(1-\cos(x/\epsilon)) = \int_{-\delta}^{\delta} dx\ h(x)\lim_{\epsilon\to+0}(1-\cos(x/\epsilon))$$

(積分の中での意味で $\lim\cos(x/\epsilon) \to 0$)

$$= \int_{-\delta}^{\delta} dx\ h(x)\cdot 1 = \int_{-\delta}^{\delta} dx\ \frac{f(x)-f(0)}{x} \tag{14}$$

(13) に (14) を代入し、$\delta \to 0$ の極限をとると、

$$\lim_{\delta\to+0}\left[\int_{|x|\geq\delta} dx\ \frac{f(x)}{x} + \int_{-\delta}^{\delta} dx\ \frac{f(x)-f(0)}{x}\right] = \lim_{\delta\to+0}\int_{|x|\geq\delta} dx\ \frac{f(x)}{x} + \lim_{\delta\to+0}\int_{-\delta}^{\delta} dx\ \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

(第 2 項は有限の被積分関数を幅 2δ で積分するので $\delta \to 0$ で 0)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)P\frac{1}{x} + 0$$

よって、$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\left[\frac{1-\cos(x/\epsilon)}{x}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)P\frac{1}{x}$ が示されました。したがって、$\lim_{\epsilon\to+0}\left[\frac{1-\cos(x/\epsilon)}{x}\right]$ も $P\frac{1}{x}$ の別の ϵ 表現であることがわかります。

4.4 デルタ関数のローレンツ型表現

(9) の虚部からは、デルタ関数の別の表現（ローレンツ型）が得られます。

$$\delta(x) \equiv \lim_{\epsilon\to+0}\left[\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}\right] \tag{15}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$$

という記述は、この極限操作を省略した略記です。この表現が操作的定義 (1) を満たすことを、$y = x/\epsilon$ の置換積分を用いて確認します。

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta(x) &\equiv \lim_{\epsilon\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x) \left[\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon dy)\ f(\epsilon y) \left[\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{(\epsilon y)^2+\epsilon^2}\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to+0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \frac{f(\epsilon y)}{y^2+1} \\
&\text{(優収束定理により極限と積分を交換)} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \lim_{\epsilon\to+0} \left[\frac{f(\epsilon y)}{y^2+1}\right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \frac{f(0)}{y^2+1} \\
&= \frac{f(0)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \frac{1}{y^2+1} \\
&\text{(ここで } \int \frac{1}{y^2+1}dy = \arctan(y) \text{ を使用)} \\
&= \frac{f(0)}{\pi} \left[\arctan(y)\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{f(0)}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\right) \\
&= f(0)
\end{aligned}
$$

これにより、ローレンツ型表現 (15) も定義 (1) を満たすことが確認できました。

重要な点として、これらの ϵ を含む表現はすべて、積分の中で $f(x)$ と共に使われ、最後に $\epsilon \to +0$ の極限がとられるものとして理解する必要があります。