

# デルタ関数

## 1 デルタ関数の操作的定義

デルタ関数  $\delta(x)$  は、それ自体で値を議論するのではなく、任意の（性質の良い）関数  $f(x)$  との積分によって、以下のように定義されます。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x-a) = f(a) \quad (1)$$

これがデルタ関数の根本的な定義です。以降の表現はすべて、この (1) を満たす必要があります。

## 2 フーリエ積分による表現

### 2.1 表現とその意味

デルタ関数は、形式的にフーリエ積分として表現されることがあります。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \quad (2)$$

しかし、この積分はそのままでは収束しません。この式の真の意味は、(1) の  $f(x)$  との積分を実行する際に、積分範囲を  $\epsilon$  で制限し、最後に  $\epsilon \rightarrow +0$  の極限をとるものとして理解されます。計算は以下の通りです。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x) &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon}} dk e^{ikx} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \left[ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{ikx}}{ix} \right) \Big|_{k=-1/\epsilon}^{k=1/\epsilon} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \left[ \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ix/\epsilon} - e^{-ix/\epsilon}}{ix} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{\sin(x/\epsilon)}{x} \end{aligned} \quad (3)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(\epsilon y) \frac{\sin y}{y} \quad (4)$$

( $f(x)$  の連続性と有界性を仮定し、極限と積分を交換)

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow +0} f(\epsilon y) \right] \frac{\sin y}{y} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\pi} f(0) \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sin y}{y}$$

(ディリクレ積分  $\int_{-\infty}^{\infty} (\sin y/y) dy = \pi$  を使用)

$$= f(0)$$

これにより、表現 (2) が定義 (1) を満たすことが確認されました。

### 2.2 関数 $f(x)$ の条件

上記 (4) から (5) への変形において、極限  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0}$  と積分  $\int dy$  の順序交換を行いました。この操作が正当化されるためには、関数  $f(x)$  が「性質の良い」ものである必要があります。具体的には、以下の条件が物理学の文脈で暗黙に仮定されています。

1.  $f(x)$  が  $x = 0$  で連続であること: これは、(5) から次の行への変形で  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} f(\epsilon y) = f(0)$  とするために不可欠です。もし  $x = 0$  で不連続（値がジャンプしている）ならば、この極限は  $f(0)$  になるとは限りません。
2.  $f(x)$  が有界であり、積分が収束すること: 極限と積分の順序交換を厳密に保証するのがルベーグの優収束定理です。この定理を適用するためには、 $\epsilon$  によらずに  $|f(\epsilon y) \frac{\sin y}{y}|$  を上から押さえつける可積分な「優関数」が必要です。 $f(x)$  が全域で有界 ( $|f(x)| \leq M$ ) であれば、 $|f(\epsilon y) \frac{\sin y}{y}| \leq M |\frac{\sin y}{y}|$  と評価でき、 $g(y) = M |\frac{\sin y}{y}|$  は可積分であるため、この条件は満たされます。

## 2.3 $\epsilon$ 表現

$\delta(x)$  は  $\epsilon \rightarrow +0$  の極限で考えられる関数列  $\delta_\epsilon(x)$  の極限として定義されます。

$$\delta_\epsilon(x) \equiv \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x/\epsilon)}{x}$$

そして、デルタ関数  $\delta(x)$  は、この  $\delta_\epsilon(x)$  を使った積分の極限として定義されます。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta_\epsilon(x)$$

この意味において、 $\delta(x) = \lim \delta_\epsilon(x)$  と表記します。

## 3 デルタ関数の微分

### 3.1 定義

デルタ関数の微分  $\delta'(x)$  も同様に、積分によって定義されます。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta'(x) = -f'(0)$$

この定義は、形式的な部分積分  $\int f \delta' dx = [f \delta] - \int f' \delta dx = 0 - \int f' \delta dx = -f'(0)$  から来ています。この微分は、(3) の  $\delta_\epsilon(x)$  を  $x$  で微分したものです。

$$\begin{aligned} \delta'_\epsilon(x) &\equiv \frac{d}{dx} [\delta_\epsilon(x)] = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x/\epsilon)}{x} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos(x/\epsilon) \cdot (1/\epsilon) \cdot x - \sin(x/\epsilon) \cdot 1}{x^2} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos(x/\epsilon)}{\epsilon x} - \frac{\sin(x/\epsilon)}{x^2} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

したがって、(6) のような記述は  $\delta'(x)$  そのものではなく、 $\delta'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \delta'_\epsilon(x)$  という極限操作を省略した表現です。

## 4 複素表現と主値

### 4.1 関数 $\zeta(x)$

$\zeta(x)$  という関数が導入されることがあります。

$$\begin{aligned} \zeta_\epsilon(x) &\equiv -i \int_0^{1/\epsilon} dk e^{ikx} = -i \left[ \frac{e^{ikx}}{ix} \right]_{k=0}^{k=1/\epsilon} \\ &= \frac{-i}{ix} (e^{ix/\epsilon} - e^0) = \frac{1}{x} (1 - e^{ix/\epsilon}) \\ &= \frac{1 - (\cos(x/\epsilon) + i \sin(x/\epsilon))}{x} \\ &= \frac{1 - \cos(x/\epsilon)}{x} - i \frac{\sin(x/\epsilon)}{x} \end{aligned}$$

ここで  $\epsilon \rightarrow +0$  の極限をとることを考えます。

$$\zeta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \zeta_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[ \frac{1 - \cos(x/\epsilon)}{x} \right] - i \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[ \frac{\sin(x/\epsilon)}{x} \right] \quad (7)$$

右辺第1項は後述するように  $1/x$  のコーシーの主値  $P\frac{1}{x}$  と呼ばれるものになり、第2項は (3) の結果から  $\pi\delta(x)$  となります。よって、以下の関係が得られます。

$$\zeta(x) = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$$

## 4.2 別の表現

また、 $\zeta(x)$  の別の定義として  $\lim_{\epsilon \rightarrow +i\epsilon} \frac{1}{x+i\epsilon}$  が導入され、その極限が  $P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$  となることが知られています。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x+i\epsilon} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \quad (8)$$

この関係は、分母を有理化することで示されます。

$$\frac{1}{x+i\epsilon} = \frac{1}{(x+i\epsilon)} \cdot \frac{(x-i\epsilon)}{(x-i\epsilon)} = \frac{x-i\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \frac{x}{x^2+\epsilon^2} - i\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \quad (9)$$

この式の極限  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0}$  をとると、(8) と比較して、実部と虚部にそれぞれ以下の関係式が得られます。

## 4.3 主値 $P\frac{1}{x}$ の意味

(9) の実部から、以下の表現が得られます。

$$P\frac{1}{x} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[ \frac{x}{x^2+\epsilon^2} \right] \quad (10)$$

デルタ関数と同様に、主値  $P\frac{1}{x}$  も、それ自体が  $x=0$  で値を持つ関数ではなく、積分の中でのみ意味を持つ超関数です。その厳密な定義（コーシーの主値）は、 $x=0$  の特異点を対称な形でくり抜いてから極限をとるものです。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) P\frac{1}{x} \equiv \lim_{\delta \rightarrow +0} \left[ \int_{-\infty}^{-\delta} dx \frac{f(x)}{x} + \int_{\delta}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x} \right]$$

この定義が、 $\epsilon$  表現 (10) と一致することを直接示します。積分を  $x=0$  の周りの微小区間  $(-\delta, \delta)$  とそれ以外に分けます。

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \left[ \frac{x}{x^2+\epsilon^2} \right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{|x| \geq \delta} dx f(x) \frac{x}{x^2+\epsilon^2} + \int_{-\delta}^{\delta} dx f(x) \frac{x}{x^2+\epsilon^2} \right] \\ &(|x| \geq \delta \text{ の領域では } \epsilon \rightarrow 0 \text{ で } \frac{x}{x^2+\epsilon^2} \rightarrow \frac{1}{x} \text{ に一様収束}) \\ &= \int_{|x| \geq \delta} dx f(x) \frac{1}{x} + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\delta}^{\delta} dx f(x) \frac{x}{x^2+\epsilon^2} \end{aligned} \quad (11)$$

次に、第2項の積分を評価します。 $f(x)$  は連続と仮定しているので、 $f(x) = f(0) + (f(x) - f(0))$  と書けます。

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} dx f(x) \frac{x}{x^2+\epsilon^2} &= \int_{-\delta}^{\delta} dx f(0) \frac{x}{x^2+\epsilon^2} + \int_{-\delta}^{\delta} dx (f(x) - f(0)) \frac{x}{x^2+\epsilon^2} \\ &\text{(第1項の被積分関数は奇関数なので積分は0)} \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} dx \frac{f(x) - f(0)}{x} \frac{x^2}{x^2+\epsilon^2} \end{aligned}$$

ここで  $f(x)$  が  $x=0$  で微分可能と仮定すると、 $h(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$  は  $x \rightarrow 0$  で  $f'(0)$  に近づく連続関数です。 $\epsilon \rightarrow 0$  の極限をとると、 $\frac{x^2}{x^2+\epsilon^2}$  は  $x=0$  を除いて1になります（優収束定理を使えます）。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\delta}^{\delta} dx \frac{f(x) - f(0)}{x} \frac{x^2}{x^2+\epsilon^2} = \int_{-\delta}^{\delta} dx \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad (12)$$

したがって、(11) に (12) を代入して  $\delta \rightarrow 0$  の極限をとると、

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left[ \int_{|x| \geq \delta} dx \frac{f(x)}{x} + \int_{-\delta}^{\delta} dx \frac{f(x) - f(0)}{x} \right] = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{|x| \geq \delta} dx \frac{f(x)}{x} + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{-\delta}^{\delta} dx \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

(第2項は有限値を持つ関数  $h(x)$  を幅  $2\delta$  で積分)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) P \frac{1}{x} + 0$$

よって、 $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \left[ \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) P \frac{1}{x}$  が示されました。したがって、(10) は  $P \frac{1}{x}$  の  $\epsilon$  表現として正しいことがわかります。

さらに、(7) の実部  $PV_{\epsilon}(x) = \frac{1 - \cos(x/\epsilon)}{x}$  も主値  $P \frac{1}{x}$  と等価であることを示します。同様に  $\delta$  で積分領域を分割します。

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) PV_{\epsilon}(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{|x| \geq \delta} dx f(x) \frac{1 - \cos(x/\epsilon)}{x} + \int_{-\delta}^{\delta} dx f(x) \frac{1 - \cos(x/\epsilon)}{x} \right] \\ &\quad (|x| \geq \delta \text{ の領域では } \cos(x/\epsilon) \text{ は激しく振動し、積分すると } 0 \text{ になると考えられる}) \\ &= \int_{|x| \geq \delta} dx f(x) \frac{1}{x} + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\delta}^{\delta} dx f(x) \frac{1 - \cos(x/\epsilon)}{x} \end{aligned} \quad (13)$$

第2項について、 $f(x) = f(0) + (f(x) - f(0))$  とします。

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} dx f(x) \frac{1 - \cos(x/\epsilon)}{x} &= \int_{-\delta}^{\delta} dx f(0) \frac{1 - \cos(x/\epsilon)}{x} + \int_{-\delta}^{\delta} dx (f(x) - f(0)) \frac{1 - \cos(x/\epsilon)}{x} \\ &\quad (\text{第1項の被積分関数は奇関数なので積分は } 0) \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} dx \frac{f(x) - f(0)}{x} (1 - \cos(x/\epsilon)) \end{aligned}$$

$f(x)$  が微分可能なら  $h(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$  は  $x = 0$  でも連続です。  $|1 - \cos(x/\epsilon)| \leq 2$  なので、優収束定理より極限と積分を交換できます。

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\delta}^{\delta} dx h(x) (1 - \cos(x/\epsilon)) &= \int_{-\delta}^{\delta} dx h(x) \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (1 - \cos(x/\epsilon)) \\ &\quad (\text{積分の中での意味で } \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \cos(x/\epsilon) \rightarrow 0) \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} dx h(x) \cdot 1 = \int_{-\delta}^{\delta} dx \frac{f(x) - f(0)}{x} \end{aligned} \quad (14)$$

(13) に (14) を代入し、 $\delta \rightarrow 0$  の極限をとると、

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left[ \int_{|x| \geq \delta} dx \frac{f(x)}{x} + \int_{-\delta}^{\delta} dx \frac{f(x) - f(0)}{x} \right] = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{|x| \geq \delta} dx \frac{f(x)}{x} + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{-\delta}^{\delta} dx \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

(第2項は有限の被積分関数を幅  $2\delta$  で積分するので  $\delta \rightarrow 0$  で 0)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) P \frac{1}{x} + 0$$

よって、 $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \left[ \frac{1 - \cos(x/\epsilon)}{x} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) P \frac{1}{x}$  が示されました。したがって、 $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[ \frac{1 - \cos(x/\epsilon)}{x} \right]$  も  $P \frac{1}{x}$  の別の  $\epsilon$  表現であることがわかります。

#### 4.4 デルタ関数のローレンツ型表現

(9) の虚部からは、デルタ関数の別の表現（ローレンツ型）が得られます。

$$\delta(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[ \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \right] \quad (15)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

という記述は、この極限操作を省略した略記です。この表現が操作的定義 (1) を満たすことを、 $y = x/\epsilon$  の置換積分を用いて確認します。

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x) &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \left[ \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon dy) f(\epsilon y) \left[ \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{(\epsilon y)^2 + \epsilon^2} \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{f(\epsilon y)}{y^2 + 1} \\
&\quad (\text{優収束定理により極限と積分を交換}) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[ \frac{f(\epsilon y)}{y^2 + 1} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{f(0)}{y^2 + 1} \\
&= \frac{f(0)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{y^2 + 1} \\
&\quad (\text{ここで } \int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \arctan(y) \text{ を使用}) \\
&= \frac{f(0)}{\pi} [\arctan(y)]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{f(0)}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= f(0)
\end{aligned}$$

これにより、ローレンツ型表現 (15) も定義 (1) を満たすことが確認できました。

重要な点として、これらの  $\epsilon$  を含む表現はすべて、積分の中で  $f(x)$  と共に使われ、最後に  $\epsilon \rightarrow +0$  の極限がとられるものとして理解する必要があります。

## References

- [1] 高橋 康. 物理数学ノート 新装合本版. 講談社, 2022.