

## 6. Integrale duble

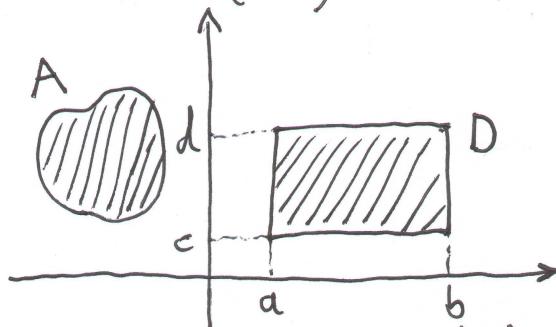
pe axa reală ( $\mathbb{R}$ )



$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

în plan ( $\mathbb{R}^2$ )



$$A \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ (compactă)}$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, f = f(x, y)$$

Def: Fie dreptunghiul  $D = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție mărginită și  $n, m \in \mathbb{N}^*$ . Notăm  $\Delta_x = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ ,  $\Delta_y = (y_0, y_1, \dots, y_m)$  diviziuni ale intervalului  $[a, b]$ , respective  $[c, d]$  și  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$  sisteme de puncte intermedii (s.p.i.) asociate diviziunii  $\Delta_x$ , respective  $\Delta_y$ .

a) Numărul real

$$\sigma_f(\Delta_x, \xi, \Delta_y, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$$

se numește suma Riemann a funcției  $f$  carese punzătoare diviziunilor  $\Delta_x, \Delta_y$  și s.p.i.  $\xi, \eta$ .

b) Funcția  $f$  se numește integrală Riemann pe  $D$  dacă

$$\exists I = \lim_{(\|\Delta_x\|, \|\Delta_y\|) \rightarrow (0, 0)} \sigma_f(\Delta_x, \xi, \Delta_y, \eta) \in \mathbb{R},$$

iar valoarea lui  $I$  nu depinde de alegerea a.p.i. și și  $\eta$ .  
 Numărul  $I$  se numește integrală Riemann a funcției  $f$  pe  $D$   
 și se notează cu  $\iint_D f(x, y) dx dy$  sau  $\sum_a^b \sum_c^d f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y$ .

$$\Delta x: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$\Delta y: c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

$$\text{matău } D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

$$\Rightarrow (\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$$

$$\|\Delta x\| = \max \{x_i - x_{i-1} \mid i = \overline{1, n}\}$$

$$\|\Delta y\| = \max \{y_j - y_{j-1} \mid j = \overline{1, m}\}$$

$$\text{Ex: } f(x, y) = 1, \forall (x, y) \in D = [a, b] \times [c, d]$$

$$\text{af}(\Delta x, \xi, \Delta y, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) =$$

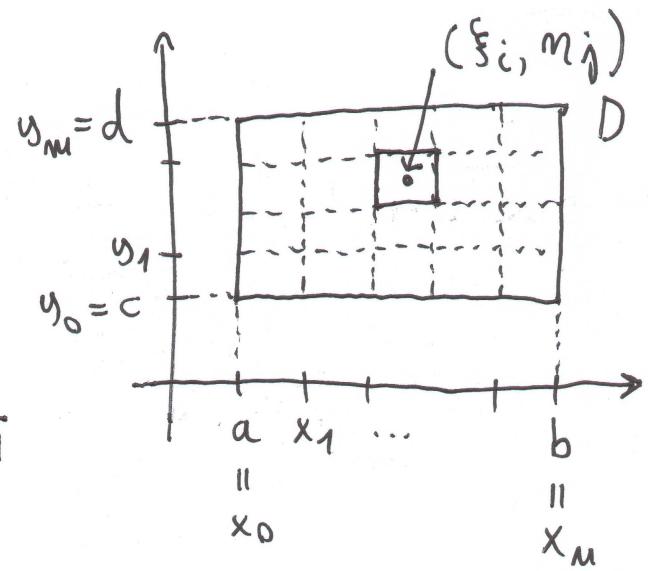
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{aria}(D_{ij}) = \text{aria}(D) = (b-a)(d-c)$$

$$\Rightarrow \iint_D dx dy = \text{aria}(D)$$

I (Fubini)

Fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe dreptunghiul  $D = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ . Au loc următoarele afirmații:

1.  $f$  este integrabilă Riemann pe  $D$



2º Funcțiile  $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ ,  $\forall x \in [a, b]$  și

$J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ ,  $\forall y \in [c, d]$  sunt bine definite și sunt integralele Riemann pe mulțimile specificate

3º Are loc formula

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \underbrace{\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx}_{\text{integralele iterate ale lui } f} = \underbrace{\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy}_{\text{integralele iterate ale lui } f}$$

Ex: Calculați  $\iint_{[0, 1] \times [-1, 1]} (x+y) dx dy$ .

Def: Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  mulțime compactă,  $D = [a, b] \times [c, d]$  cu proprietatea că  $A \subseteq D$  și  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție mărginită.

Construim funcția

$$\bar{f}: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \in D \setminus A \end{cases}$$

o extenție a lui  $f$  la  $D$ . Spunem că  $f$  este integrabilă Riemann pe  $A$  dacă  $\bar{f}$  este integrabilă Riemann pe  $D$ , iar valoarea integrali  $\iint_D \bar{f}(x, y) dx dy$  nu depinde de alegerea lui  $D$ . În acest caz definitia integrală Riemann a lui  $f$  pe  $A$  astfel

$$\iint_A f(x,y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \iint_D \bar{f}(x,y) dx dy.$$

Prop: Dacă  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  este o mulțime compactă areând frontieră o curbă netedă pe portiuni și  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pe  $A$  atunci  $f$  este integrabilă Riemann pe  $A$ .

"curbă netedă pe portiuni" = reuniunea unui număr finit de curbe descrise prin funcții de clasă  $C^1$ .

Obs: În continuare vom lucra cu mulțimi care au această proprietate a frontierei, fără a preciza acest lucru.

Prop: Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  mulțime compactă și  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  funcții continue pe  $A$ . Au loc afirmațiile:

1. (monotonia integrali)

Dacă  $f(x,y) \leq g(x,y)$ ,  $\forall (x,y) \in A$  atunci

$$\iint_A f(x,y) dx dy \leq \iint_A g(x,y) dx dy$$

2. (liniaritatea integrali)

$$\iint_A (\alpha \cdot f(x,y) + \beta \cdot g(x,y)) dx dy = \alpha \cdot \iint_A f(x,y) dx dy + \beta \cdot \iint_A g(x,y) dx dy, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3. (aditivitatea integrali)

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_{A_1} f(x,y) dx dy + \iint_{A_2} f(x,y) dx dy,$$

$\forall A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  mulțimi compacte cu proprietățile

$$A_1 \cup A_2 = A \quad \text{și} \quad \text{int } A_1 \cap \text{int } A_2 = \emptyset$$

## 4. (formula ariei)

$$\text{arie}(A) = \iint_A dx dy$$

Obs: calculul unei integrale duble depinde în mare măsură de forma mulțimii.

Def: O mulțime  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  se numește

a) simplă în raport cu axa  $Ox$  dacă  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  și  $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcții de clasă  $C^1$  pe  $(a, b)$  astfel încât

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

b) simplă în raport cu axa  $Oy$  dacă  $\exists c, d \in \mathbb{R}$  și  $\beta_1, \beta_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  funcții de clasă  $C^1$  pe  $(c, d)$  astfel încât

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1(y) \leq x \leq \beta_2(y), c \leq y \leq d\}$$

Obs: a) Orice mulțime simplă în raport cu una dintre axe este compactă

b) Un dreptunghi  $D = [a, b] \times [c, d]$  este mulțime simplă în raport cu ambele axe.

Ex: Este mulțimea  $A = \bar{B}(0, 1)$  simplă în raport cu vreuna dintre axe?

(calculul integralelor duble pe mulțimi simple în raport cu o axă)

Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  și  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe  $A$ .

1º. Dacă A este simplă în raport cu axa  $Ox$  atunci

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

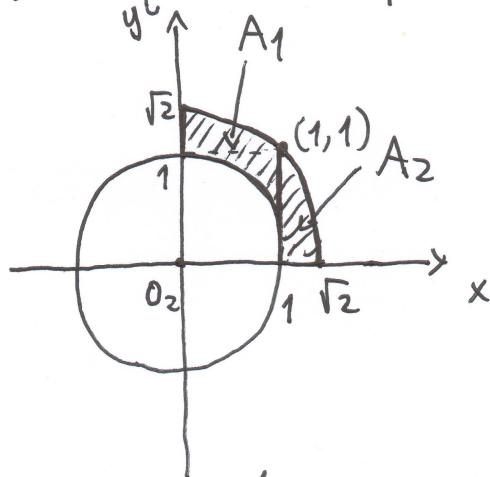
2º. Dacă A este simplă în raport cu axa  $Oy$  atunci

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\beta_1(y)}^{\beta_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Obs: În cazul particular  $A = D = [a, b] \times [c, d]$  teorema se reduce la teorema lui Fubini.

Ex: Evaluati integrala dublă

$$\iint_A xy dx dy, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$



$$A = A_1 \cup A_2$$

$$\text{int } A_1 \cap \text{int } A_2 = \emptyset$$

A nu este simplă în raport cu vreo axă.

$A_1$  este simplă în raport cu  $Ox$

$A_2$  este simplă în raport cu  $Ox$  și  $Oy$

$$\text{Avem } \iint_A xy dx dy = \iint_{A_1} xy dx dy + \iint_{A_2} xy dx dy$$

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}$$

$$\iint_{A_1} xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{2-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \cdot (2-x^2 - 1+x^2) dx = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

$$A_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \quad 1 \leq x \leq \sqrt{2-y^2} \right\}$$

$$\iint_{A_2} xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left( \int_1^{\sqrt{2-y^2}} xy \, dx \right) dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} y \Big|_{x=1}^{x=\sqrt{2-y^2}} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{2} \cdot (2-y^2 - 1) dy = \int_0^1 \left( \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2} \right) dy = \left( \frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Elemente de geometrie analitică în plan:

- ecuația normală a dreptei:

$$ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ constante}$$

- ecuația dreptei prin două puncte  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- ecuația cercului de centru  $(x_0, y_0)$  și rază  $r$ :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

- ecuația parabolei de vârf  $(x_0, y_0)$  și ordinare de-a lungul axei  $Oy$ :

$$y - y_0 = p \cdot (x - x_0)^2, \quad p \in \mathbb{R}^* \text{ constantă}$$