Probleme recapitulative

1. Considerăm următorul cod:

1) se aleg aleatoriu şi independent trei numere X_1, X_2 şi X_3 astfel:
- X_1 este ales aleatoriu din vectorul $u = [3; 1; 1; 2; 2; 3; 2; 3; 1; 1]$;
- X_2 este ales aleatoriu din vectorul $v = [2; 1; 1; 3; 3; 2; 3; 2; 1; 1]$;
- X_3 este ales aleatoriu din vectorul $w = [3; 2; 2; 1; 1; 3; 1; 3; 2; 2]$;

2) se returnează $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Determinaţi: **a)** probabilitatea ca outputul X să fie 4;
b) probabilitatea ca outputul X să fie mai mic sau egal decât 8;
c) probabilitatea ca outputul X să fie 4, ştiind că outputul X este mai mic sau egal decât 8.

R: a) $P(X=4) = P(X_1=2, X_2=1, X_3=1) + P(X_1=1, X_2=2, X_3=1) + P(X_1=1, X_2=1, X_3=2)$
$= 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}136.$
b) $P(X \le 8) = 1 - P(X_1 = X_2 = X_3 = 3) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}027 = 0{,}973.$
c) $P(X=4 | X \le 8) = \frac{P(X=4)}{P(X\le 8)} = \frac{0{,}136}{0{,}973} = \frac{136}{973}.$

2. Se consideră vectorul aleator discret (U, V) cu distribuţia dată sub formă tabelară:

$U \backslash V$	-1	1	b
1	0,25	0,05	a
3	0,3	a	0,1

a) Să se determine constantele reale a şi b, ştiind că $E(V) = 0{,}15$.
b) Sunt variabilele aleatoare U şi V independente?
c) Să se calculeze valoarea medie a variabilei aleatoare $(U-3)^2$.

R: a) $2a + 0{,}4 + 0{,}3 = 1 \Rightarrow a = 0{,}15$; $P(V=-1) = 0{,}55$, $P(V=1) = 0{,}2$, $P(V=b) = 0{,}25$,
$E(V) = -0{,}55 + 0{,}2 + b \cdot 0{,}25 = 0{,}15 \Rightarrow b = 2.$
b) $P(U=1) = 0{,}45, P(V=1) = 0{,}2, P(U=1, V=1) = 0{,}05$
$\Rightarrow P(U=1) \cdot P(V=1) \neq P(U=1, V=1)$ pentru că $0{,}09 \neq 0{,}05$
c) $P(U=1) = 0{,}45; P(U=3) = 0{,}55 \Rightarrow E((U-3)^2) = 0{,}45 \cdot 4 = 1{,}8.$

3. Timpul de reacţie (în secunde) al unui proces chimic este o variabilă aleatoare, notată cu X, care are funcţia de densitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

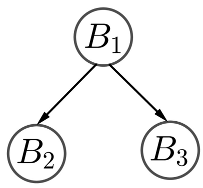
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3a^3}{x^4}, & x > a \\ 0, & x \le a \end{cases}$$

unde $a > 0$ este parametru necunoscut.

Să se calculeze $P(X \le 2a)$ şi $E(X)$ în funcţie de a.

R: $P(X \le 2a) = \displaystyle\int_a^{2a} \frac{3a^3}{x^4} dx = -\frac{a^3}{x^3}\Big|_a^{2a} = \frac{7}{8}$; $E(X) = \frac{3a}{2}$.

4. Un cod binar format din trei biţi $B_3B_2B_1$ este generat conform reţelei Bayes reprezentate alăturat cu următoarele probabilităţi: $P(B_1 = 1) = 0{,}4$; $P(B_2 = 1 | B_1 = 1) = P(B_3 = 0 | B_1 = 1) = 0{,}2$; $P(B_2 = 0 | B_1 = 0) = P(B_3 = 1 | B_1 = 0) = 0{,}3$.



Determinaţi: **a)** probabilitatea ca toţi biţii să fie egali; **b)** valoarea medie a fiecărui bit; **c)** distribuţia produsului $B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$; **d)** valoarea medie a codului trecut în baza 10.

R: a) $P(B_1 = B_2 = B_3 = 1) + P(B_1 = B_2 = B_3 = 0) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}064 + 0{,}126 = 0{,}19$. b) $E(B_1) = 0{,}4$; $E(B_2) = P(B_2 = 1) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}5$; $E(B_3) = P(B_3 = 1) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}5$. c) $P(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = 1) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}064$; $P(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = 0) = 0{,}936$. d) $E(2^2 B_3 + 2^1 B_2 + 2^0 B_1) = 4E(B_3) + 2E(B_2) + E(B_1) = 3{,}4$.

5. Fie X v.a. care indică timpul de restartare al unui anumit sistem şi are funcţia de densitate $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_X(t) = \begin{cases} c\,(3-t)^2, & 0 < t < 3 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

a) Determinaţi valoarea constantei c.

b) Determinaţi funcţia de repartiţie F_X.

c) Determinaţi $P(1 < X < 2)$ şi $P(X < 2|X > 1)$.

R: a) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$.

b)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3} + x, & 0 \le x < 3 \\ 1, & 3 \le x. \end{cases}$$

c) $P(1 \le X \le 2) = F_X(2) - F_X(1) = \frac{7}{27}$

$$P(X < 2|X > 1) = \frac{P(1 \le X < 2)}{P(X > 1)} = \frac{F_X(2) - F_X(1)}{1 - F_X(1)} = \frac{7}{8}.$$

6. Într-o urnă sunt 4 bile verzi, 5 bile albastre, 6 bile roşii. Se extrag fără returnare 3 bile. Care este probabilitatea ca la extragerea a doua să se obţină o bilă verde şi la extragerea a treia o bilă roşie?

Pentru $i \in \{1, 2, 3\}$ considerăm:
V_i:"se obţine o bilă verde în extragerea a i-a"; A_i:"se obţine o bilă albastră în extragerea a i-a"; R_i:"se obţine o bilă roşie în extragerea a i-a".
Are loc: $B_1 \cup G_1 \cup R_1 = \Omega$; scriem succesiv

$$\begin{aligned} P(V_2 \cap R_3) &= P(V_1 \cap V_2 \cap R_3) + P(A_1 \cap V_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap V_2 \cap R_3) \\ &= P(V_1)P(V_2|V_1)P(R_3|V_1 \cap V_2) + P(A_1)P(V_2|A_1)P(R_3|A_1 \cap V_2) + P(R_1)P(V_2|R_1)P(R_3|R_1 \cap V_2) \\ &= \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{6}{13} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{6}{13} + \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{13} \approx 0{,}11428. \end{aligned}$$

7. 5 bile numerotate consecutiv de la 1 la 5 sunt aşezate orizontal în mod aleator. Determinaţi:
a) probabilitatea ca prima şi ultima bilă să aibe numere pare;
b) probabilitatea ca primele două bile să aibe numere impare;
c) probabilitatea ca bilele cu numere pare să fie alăturate;
d) probabilitatea să nu fie două bile cu numere de aceaşi paritate alăturate.

R: a) $\frac{2!\cdot 3!}{5!} = \frac{1}{10}$.
b) $\frac{A_3^2 \cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10}$.
c) $\frac{2\cdot 4\cdot 3!}{5!} = \frac{2}{5}$.
d) $\frac{2!\cdot 3!}{5!} = \frac{1}{10}$.

8. Un cod de 5 cifre este generat aleator. Care este probabilitatea ca
a) toate cifrele să fie distincte?
b) să conţină doar cifre pare distincte?
c) exact 3 cifre să fie egale?
d) să conţină doar cifrele 1, 2, 3 (de exemplu: 12131, 22113, 31312, etc.)?

R: a) $\frac{A_{10}^5}{10^5} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{100000}$.
b) $\frac{5!}{10^5}$.
c) $\frac{C_5^3\cdot 10\cdot 9^2}{10^5} = \frac{81}{1000}$.
d) $\frac{\frac{5!}{3!1!1!}\cdot 3 + \frac{5!}{2!2!1!}\cdot 3}{10^5} = \frac{60+90}{1000} = \frac{3}{20} = 0{,}15$.

9. Se dau două urne. Prima urnă conţine 2 bile negre şi 3 bile roşii. A doua urnă conţine 3 bile negre şi 2 bile roşii. Se aruncă un zar. Dacă se obţine un număr par, atunci se extrag două bile din prima urnă, cu repunerea bilei extrase în urnă. Dacă se obţine un număr impar, atunci se extrag două bile din a doua urnă, fără repunerea bilei extrase în urnă. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de bile roşii extrase. Determinaţi:
a) distribuţia lui X;
b) valoarea medie lui X;
c) funcţia de repartiţie a lui X;
d) valoarea medie a numărului de repetiţii independente ale experimentului descris mai sus până la prima repetiţie a experimentului în urma căreia se obţin două bile roşii.

R: a) Folosind modelul urnei cu două culori şi bilă returnată, respectiv nereturnată (distribuţia binomială, respectiv hipergeometrică) şi formula probabilităţii totale, se obţine: $P(X=k)=\frac{3}{6}\cdot C_2^k\left(\frac{3}{5}\right)^k\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2-k}+\frac{3}{6}\cdot\frac{C_2^kC_3^{2-k}}{C_5^2}, k=0,1,2.$ Deci, $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{23}{100} & \frac{54}{100} & \frac{23}{100}\end{pmatrix}$.
b) $E(X)=0\cdot\frac{23}{100}+1\cdot\frac{54}{100}+2\cdot\frac{23}{100}=1.$
c) $F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{23}{100}, & x\in[0,1)\\ \frac{23}{100}+\frac{54}{100}, & x\in[1,2)\\ \frac{23}{100}+\frac{54}{100}+\frac{23}{100}, & x\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{23}{100}, & x\in[0,1)\\ \frac{77}{100}, & x\in[1,2)\\ 1, & x\ge 2\end{cases}.$
d) Fie Y=numărul de repetiţii independente ale experimentului până la prima repetiţie în urma căreia se obţin două bile roşii. Atunci $Y\sim Geo(p)$, unde $p=P(X=2)=\frac{23}{100}$. Avem (a se vedea Seminarul 3): $E(Y)=\frac{1-p}{p}=\frac{77}{23}\approx 3{,}35$.

10. Icsulescu face naveta cu microbusul. El ajunge în fiecare zi în autogară la ora 16:30 cu o întârziere T (în minute) care are funcţia de repartiţie $F_T(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{t}{10}, & t\in[0,10]\\ 1, & t>10\end{cases}$. Microbusul porneşte la ora 16:39. Determinaţi:
a) probabilitatea ca Icsulescu să piardă microbusul;
b) valoarea medie a întârzierii lui Icsulescu;
c) valoarea medie a numărului de zile succesive (cu întârzieri independente) când Icsulescu prinde microbusul până la prima zi când pierde microbusul;
d) probabilitatea ca în 5 zile (cu întârzieri independente) Icsulescu să piardă microbuzul în cel puţin două zile.

R: a) $P(T\ge 9)=1-F(9)=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$. b) $f_T(t)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & t\in[0,10]\\ 0, & t\notin[0,10]\end{cases}$. $E(T)=\displaystyle\int_0^{10}\frac{t}{10}dt=5$. c) Y=numărul de zile succesive când Icsulescu prinde microbusul până la prima zi când pierde microbusul $\Longrightarrow$ $Y\sim Geo(p)$, $p=P(T\ge 9)=\frac{1}{10}$. $E(Y)=\frac{1-p}{p}=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}}=9$ (zile). d) Z=numărul de zile din 5 când Icsulescu pierde microbusul $\Longrightarrow$ $Z\sim Bino(5,p)$. $P(Z\ge 2)=1-P(Z=0)-P(Z=1)=1-C_5^0p^0(1-p)^5-C_5^1p^1(1-p)^4=1-\frac{9^5}{10^5}-5\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9^4}{10^4}=0.08146\approx 8\%$.

11. Se alege uniform aleator un punct în dreptunghiul $[1,2]\times[2,4]\subset\mathbb{R}^2$. Să se calculeze:
a) probabilitatea ca punctul să fie în dreptunghiul $\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right]\times\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]$;
b) valoarea medie a pătratului distanţei de la punctul ales la origine.

R: Fie (X,Y) coordonatele punctului ales. Atunci (X,Y) are distribuţia uniformă pe dreptunghiul $[1,2]\times[2,4]$, deci avem funcţia de densitate: $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{(2-1)(4-2)}, & (x,y)\in[1,2]\times[2,4]\\ 0, & (x,y)\notin[1,2]\times[2,4]\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in[1,2]\times[2,4]\\ 0, & (x,y)\notin[1,2]\times[2,4]\end{cases}.$
X are funcţia de densitate $f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f_{(X,Y)}(x,y)dy=\begin{cases}1, & x\in[1,2]\\ 0, & x\notin[1,2]\end{cases}$ şi Y are funcţia de densitate $f_Y(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f_{(X,Y)}(x,y)dx=\begin{cases}\frac{1}{2}, & y\in[2,4]\\ 0, & y\notin[2,4]\end{cases}$, deci $X\sim Unif[1,2]$ şi $Y\sim Unif[2,4]$.
a) $P\left((X,Y)\in\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right]\times\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]\right)=\displaystyle\iint_{\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right]\times\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]}f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy=\iint_{\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right]\times\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]}\frac{1}{2}\,dxdy=\frac{1}{6}.$
b) $E(X^2+Y^2)=E(X^2)+E(Y^2)=\displaystyle\int_1^2x^2\frac{1}{2-1}dx+\int_2^4y^2\frac{1}{4-2}dy=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2+\frac{y^3}{3\cdot 2}\Big|_2^4=\frac{7}{3}+\frac{28}{3}=\frac{35}{3}.$

12. Fie $N\sim Unid(5)$. Se generează apoi un cod binar cu N cifre, în care probabilitatea de apariţie a lui 0, respectiv 1, este egală cu 0,5 (de exemplu: $N=2, X=01; N=3, X=010; N=1, X=1$). Să se calculeze:
a) $P(X=1011|N=4)$;
b) probabilitatea ca suma S, a cifrelor lui X, să fie egală cu 3.

R: a) $P(X=1011|N=4)=\dfrac{P(\{X=1011\}\cap\{N=4\})}{P(N=4)}=\dfrac{P(\{X=1011\})}{P(N=4)}=\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{2^4}.$
b) $P(S=3)=\displaystyle\sum_{i=1}^{5}P(S=3|N=i)P(N=i)=\frac{1}{5}\sum_{i=3}^{5}\frac{C_i^3}{2^i}.$