$\forall$ $\emptyset$

Repetitorium:

Grundlagen von Mengenlehre und Logik

$\in$

$\neg$ $\exists$

Warum um alles in der Welt muss man sich mit Logik und Mengenlehre herumschlagen, . . .

. . . wenn man doch nur vernünftig mit Datenbanken umgehen können will ?

- **Datenbankanfragesprachen wie SQL stellen einen "Mix" aus logischen und mengentheoretischen Konzepten dar.**
- **Will man wirklich verstehen, was man da tut, wenn man eine Anfrage formuliert, dann muss man diese Grundlagen beherrschen.**
- **Die Basis aller Auswerteverfahren für relationale Anfragen bildet die Relationenalgebra, eine spezielle Form von Mengenalgebra mit aussagenlogischen Aspekten.**

daher: Selbststudium der folgenden Folien ist wirklich unerlässlich !

$\forall$ $\emptyset$

$\in$

Mengenlehre

$\neg$ $\exists$

- **Der (mathematische) Begriff der Menge ist auch für nahezu alle Gebiete der Informatik von fundamentaler Bedeutung.**

- **<u>Ziel dieses Abschnitts</u>: Zusammenfassen der wichtigsten Grundkonzepte der Mengenlehre (die eigentlich als Schulwissen vorausgesetzt werden)**

- **"Definition" des Begriffs erfolgt (wie auch in der Mathematik) informell (intuitiv, "naive Mengenlehre"):**

> **"Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen."**

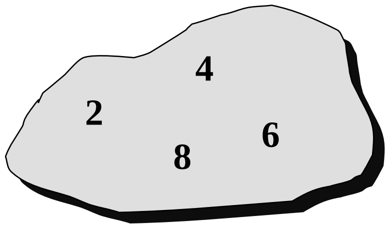
Georg Cantor (1845-1918), Begründer der Mengenlehre

- **zwei Formen der Darstellung von Mengen:**

explizit: Aufzählung aller Elemente der Menge
{ e1, e2, . . . }
implizit: mittels eines definierenden Ausdrucks A
{ x | A(x) }

z.B.: { 2, 4, 6, 8 }
{ x | x ist gerade natürliche Zahl und x < 10 }

Repräsentationen derselben Menge



- **Eine Menge, die kein Element enthält, heisst leere Menge und wird durch die Notation { } (oder auch ∅) dargestellt.**

- **Bei expliziten Mengenrepräsentation spielt die Reihenfolge der Darstellung <u>keine</u> Rolle ("Mengenelemente haben an sich keine Reihenfolge.").**

zwei Darstellungen derselben Menge

{ 2, 4, 6, 8 }

{ 6, 4, 8, 2 }

- **Auch die Anzahl des Auftretens eines Elements in einer Mengenrepräsentation ist <u>irrelevant</u> ("Mengen enthalten jedes ihrer Elemente nur einmal.").**

noch eine Darstellung dieser Menge

{ 2, 2, 4, 8, 8, 8, 6 }

- **Nach Cantors "Definition" besteht eine Menge aus "Objekten". Jedes Objekt in einer Menge wird Element dieser Menge genannt.**
- **symbolisch:**

  $\boxed{e \in B}$ **Objekt e ist Element der Menge B**

- **Die Anzahl der Elemente einer Menge M wird Mächtigkeit oder Kardinalität von M genannt, symbolisch:** $\boxed{|M|}$
- **Die leere Menge hat die Kardinalität 0.**
- **Vorsicht !** **Mehrfach dargestellte Elemente einer Menge werden nur je einmal gezählt, d.h.**

  $\boxed{|\{1, 2, 1, 4, 2, 7\}| = 4}$

- **A heisst Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.**

  $\boxed{A \subseteq B}$

- **Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn A Teilmenge von B und B Teilmenge von A ist.**

  $\boxed{A = B}$

- **A heisst echte Teilmenge von B, wenn A Teilmenge von B ist, aber wenn A nicht gleich B ist.**

  $\boxed{A \subset B}$

Durchstreichen eines Mengenvergleichsoperators bzw. des Elementoperators bedeutet Negieren der jeweiligen Beziehung:

$\boxed{A \not\subseteq B}$ A ist nicht Teilmenge von B

$\boxed{A \neq B}$ A und B sind ungleich

$\boxed{A \not\subset B}$ A ist keine echte Teilmenge von B

$\boxed{e \notin B}$ e ist kein Element von B

- **Alle Teilmengen einer gegebenen Menge M bilden selbst eine Menge:**

$\boxed{P(M)}$ **Potenzmenge von M**

- **Die Potenzmenge jeder Menge M enthält mindestens die leere Menge und M selbst:**

$\boxed{\{\} \in P(M)}$ $\boxed{M \in P(M)}$

- **Jede Teilmenge von M ist Element der Potenzmenge von M:**

$\boxed{A \in P(M) \text{ genau dann, wenn } A \subseteq M}$

- **Beispiel zur Potenzmengenbildung:**

$\boxed{M = \{1, 2\}}$ $\boxed{P(M) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \underbrace{\{1, 2\}}_{M}\}}$

- **Die Mengenlehre kennt drei grundlegende Operationen, mit denen man zwei Mengen verknüpfen kann:**

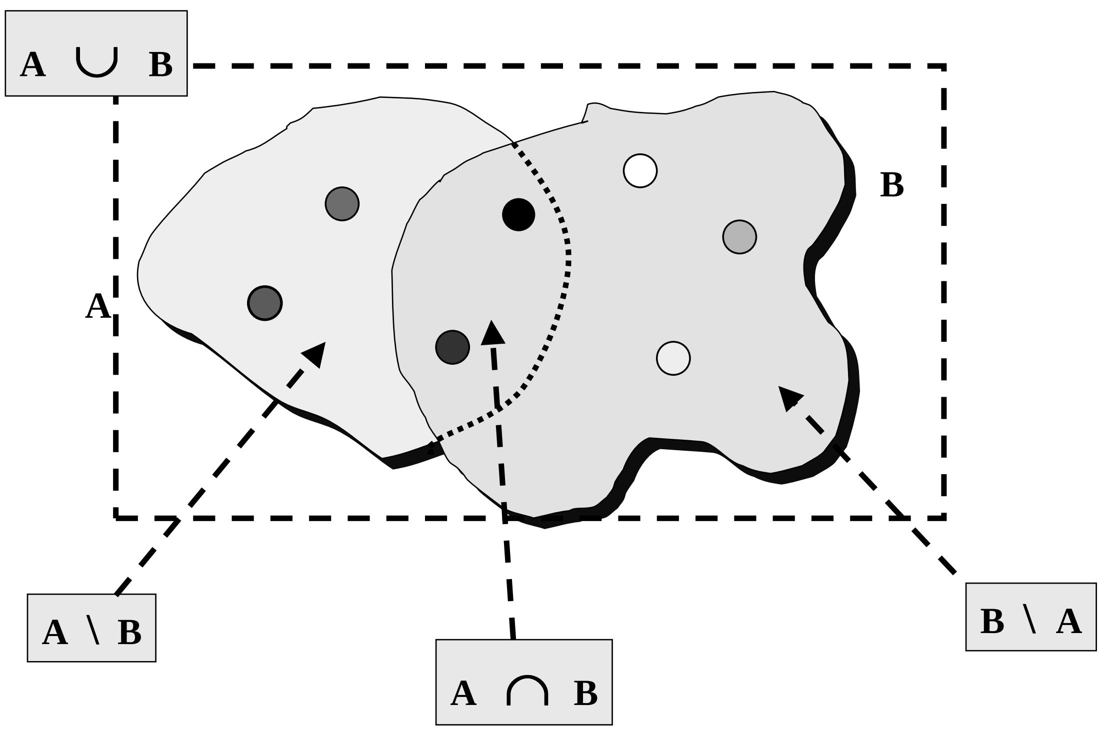
Vereinigung	$A \cup B$	$=_{def}$	$\{ e \mid e \in A \text{ oder } e \in B \}$
Durchschnitt	$A \cap B$	$=_{def}$	$\{ e \mid e \in A \text{ und } e \in B \}$
Differenz	$A \setminus B$	$=_{def}$	$\{ e \mid e \in A \text{ und } e \notin B \}$

- **Beispiele dazu:**

$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$

$\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$



- **Zwei Mengen heissen disjunkt, wenn ihr Durchschnitt leer ist:**

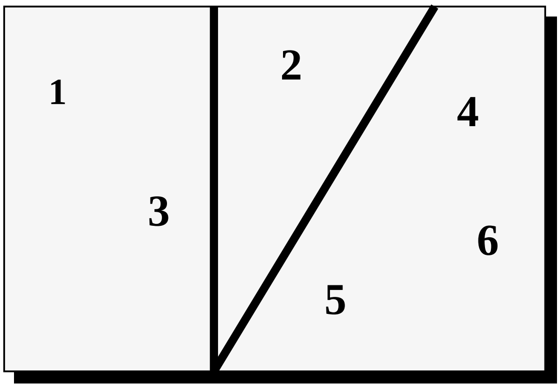
A und B disjunkt genau dann, wenn $A \cap B = \emptyset$

- **Eine Zerlegung einer Menge in paarweise disjunkte Teilmengen heisst Partition der Menge:**

{ {1,3}, {2}, {4,5,6} }

ist Partition von

{1,2,3,4,5,6}



- **weitere zweistellige Grundoperation der Mengenlehre:**

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$$

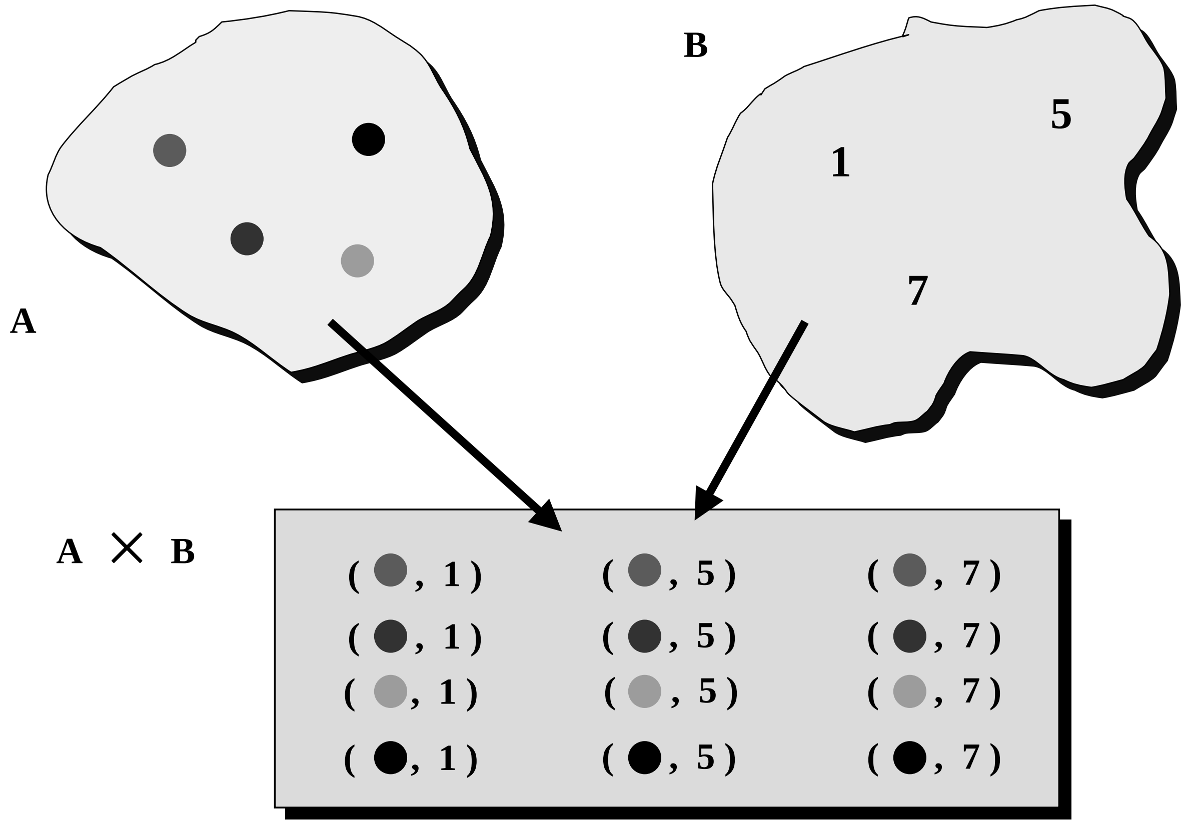
(kartesisches) Produkt

- **verallgemeinerte Produktbildung für n Mengen ($n \geq 2$) :**

$$A1 \times \ldots \times An = \{ (a1, \ldots, an) \mid ai \in Ai \}$$

- **Elemente des Produkts von n Mengen heissen (n)-Tupel.**

- **spezielle Bezeichnungen für Tupel:**
  - **n = 2: Paare**
  - **n = 3: Tripel**
  - **n = 4: Quadrupel**



- **Tupelmengen spielen in der Informatik eine besonders wichtige Rolle bei der Modellierung von Beziehungen zwischen Objekten.**

- **Tupelmengen werden auch als Relationen bezeichnet.**

Jede Teilmenge R eines Produkts $A_1 \times \ldots \times A_n$ heisst Relation über $A_1, \ldots, A_n$

- **Relationen werden meist in Tabellenform dargestellt.**

$A_1 = \{ a, b, c \}$
$A_2 = \{ 1, 2 \}$
$A_3 = \{ \%, \$ \}$

R

a	1	%
a	1	$
b	2	$

- **Eine binäre Relation $R \subseteq A \times B$ heisst**
  - **rechtseindeutig, wenn es für jedes $a \in A$ höchstens ein $b \in B$ gibt mit $(a, b) \in R$**
  - **linkseindeutig, wenn es für jedes $b \in B$ höchstens ein $a \in A$ gibt mit $(a, b) \in R$**

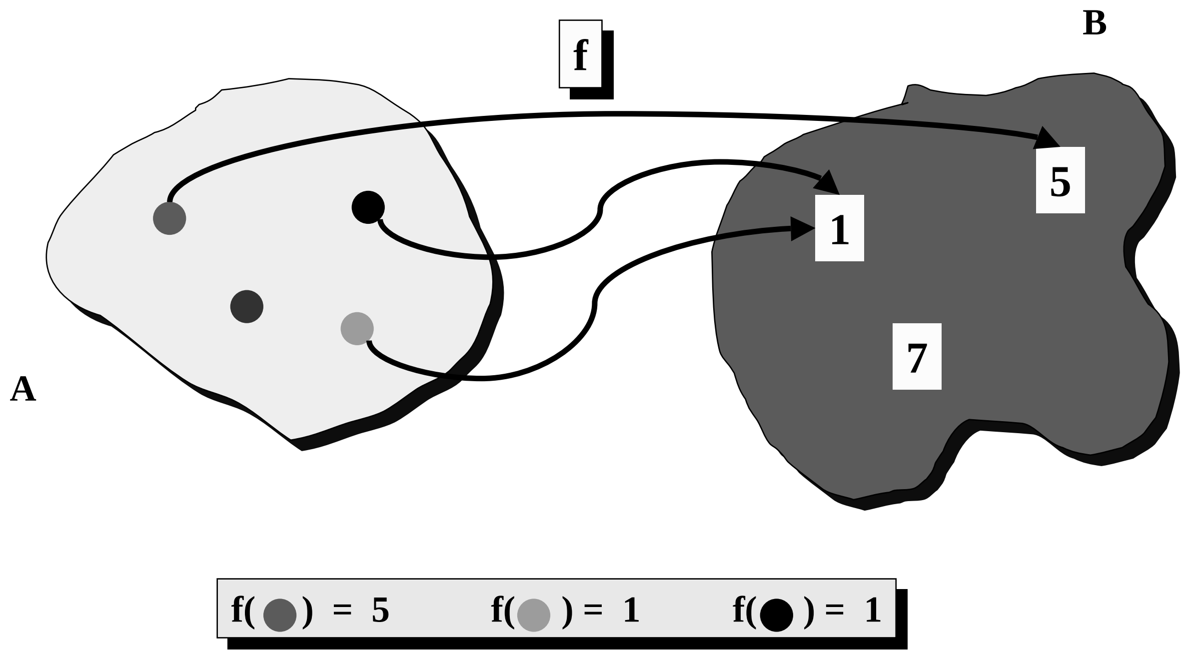
- **Rechtseindeutige Relationen werden auch Funktionen (bzw. Abbildungen) genannt. Sie dienen als mathematische Modelle eindeutiger Zuordnungen.**

- **Eine rechtseindeutige Relation f über $A \times B$ wird dann als Funktion von A nach B bezeichnet.**

- **<u>Notation</u>:** $f: A \to B$ **statt** $f \subseteq A \times B$ **und**
  $f(a) = b$ **statt** $(a, b) \in f$

- **A heisst Definitionsbereich von f, B wird Bildbereich von f genannt.**

- **Statt als Tabelle werden Funktionen meist als Pfeildiagramme notiert.**



$\forall$ $\emptyset$

Logik

$\in$ $\neg$ $\exists$

Lehre von den Aussagen und ihren Verknüpfungen: Aussagenlogik

Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu sagen, es sei wahr oder falsch.

(Aristoteles, griech. Mathematiker, 384-322 v. Chr.)

Beispiele für elementare Aussagen:

• $5 < 6$	wahr
• 8 ist Primzahl	falsch
• Der Mond ist aus Käse.	falsch

- **Zusammengesetzte Aussagen werden mit Hilfe von Junktoren gebildet.**
  (jungere [lat.]: verbinden; Junktor: "Verbinder")

- **<u>Zweistellige</u> Junktoren der Aussagenlogik:**

Konjunktion	$\wedge$	**"und"**	**(auch: &)**
Disjunktion	$\vee$	**"oder"**	**(auch: |)**
Implikation	$\Rightarrow$	**"wenn . . , dann . . "**	
Äquivalenz	$\Leftrightarrow$	**"genau dann . . , wenn . . "**	

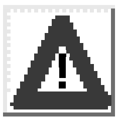
- **<u>Einstelliger</u> Junktor:**

Negation	$\neg$	**"nicht"**

- **Wahrheitswerte zusammengesetzer Aussagen lassen sich systematisch aus den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen herleiten, z.B.:**

$$\overbrace{(\overbrace{(\underbrace{5 < 6}_{\text{wahr}}) \wedge (\underbrace{6 < 7}_{\text{wahr}})}^{\text{wahr}}) \Rightarrow (\overset{\text{wahr}}{5 < 7})}^{\text{wahr}}$$

- **Mit einer ganz analogen Konstruktion lässt sich aber auch <u>dieser</u> Aussage der Wahrheitswert 'wahr' zuordnen:**



$$((5 < 6) \wedge (a \neq b)) \Rightarrow (5 < 7)$$

- **<u>Fazit</u>: Teilaussagen (wahrer) zusammengesetzter Aussagen müssen nicht unbedingt "etwas miteinander zu tun" haben.**

- Junktoren sind also syntaktische "Werkzeuge", mit denen sich die Bedeutung ("Semantik") von zusammengesetzten Aussagen aus der Bedeutung der Teilaussagen herleiten lässt.

- Wie dies zu geschehen hat, wird i.a. durch sogenannte Wahrheitstafeln festgelegt:

z.B.: Wahrheitstafel für Konjunktion

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

W: wahr
F: falsch

- wie folgt zu lesen: Wenn A wahr ist und B falsch, dann hat die Aussage $A \wedge B$ den Wahrheitswert falsch.

- Wahrheitstafeln der anderen zweistelligen Junktoren:

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

A	B	$A \Rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

A	B	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

gewöhnungsbedürftig !

- Wahrheitstafel der Negation:

A	$\neg$ A
W	F
F	W

- Zur Aussagenlogik gehören zudem zwei "primitive" Aussagen, die immer wahr bzw. immer falsch sind:

true	W
false	F

true (engl.): "wahr"
false (engl.): "falsch"

- Gesetze der Aussagenlogik, die mit 'true' und 'false' arbeiten:

$A \wedge \neg A \equiv$ false
$A \vee \neg A \equiv$ true

$A \wedge$ false $\equiv$ false
$A \wedge$ true $\equiv$ A
$A \vee$ true $\equiv$ true
$A \vee$ false $\equiv$ A

- Grundgedanke der Prädikatenlogik: Einführung parametrisierter Aussagen, in denen "variable" Teilausdrücke durch beliebige Objekte eines zu modellierenden "Individuenbereichs" ersetzt werden können

"N ist eine Primzahl" — Individuenbereich: natürliche Zahlen

Variablen

"X ist kleiner als Y" — Individuenbereich: reelle Zahlen

- Erst nach dem Ersetzen der Variablen durch "konkrete" Elemente aus dem Individuenbereich kann ein Wahrheitswert festgestellt werden:

? "N ist eine Primzahl"

$N \leftarrow 4$ → falsch

$N \leftarrow 5$ → wahr

- **In der Prädikatenlogik heissen (parametrisierte) Aussagen $\boxed{\textbf{Formeln}}$.**
- **Es gibt atomare Formeln, die sich nicht weiter in Teilformeln zerlegen lassen, und zusammengesetzte Formeln, die aus Teilformeln aufgebaut sind.**
- **Formale Notation für <u>atomare</u> Formeln:**

$$\boxed{\textbf{ist\_primzahl (N)}}$$

Prädikat **Parameter**

- **Zweistellige Prädikate dürfen auch in Infixnotation verwendet werden:**

Parameter

$\boxed{\textbf{X ist\_kleiner\_als Y}}$ **bzw.** $\boxed{\textbf{X} < \textbf{Y}}$

Prädikat

- **Formeln lassen sich mit Hilfe der <u>Junktoren</u> der Aussagenlogik zu neuen Formeln kombinieren:**

$\boxed{\text{ist\_primzahl(N)} \wedge \text{N} < 10}$ $\xrightarrow{N \leftarrow 11}$ **falsch**; $\xrightarrow{N \leftarrow 7}$ **wahr**

- **<u>Zusätzlich</u> bietet die Prädikatenlogik sogenannte $\boxed{\textbf{Quantoren}}$ zum Bilden von Aussagen, die für manche bzw. für alle Individuen gelten sollen:**

Existenzquantor $\longrightarrow$ $\boxed{\exists\ \text{N: (ist\_primzahl(N)} \wedge \text{N} < 10\ )}$ **wahr**

Es gibt Primzahlen, die kleiner als 10 sind.

Allquantor $\longrightarrow$ $\boxed{\forall\ \text{N: (ist\_primzahl(N)} \Rightarrow \text{N} < 10\ )}$ **falsch**

Alle Primzahlen sind kleiner als 10.

- **Schwierigkeiten beim Formulieren von Sachverhalten mit Quantoren und Variablen:**

  Variablen müssen <u>zuerst</u> eingeführt und quantifiziert werden, bevor die eigentliche Aussage folgen kann.

- **<u>Beispiel</u>:**

Jede Primzahl ist kleiner als 10.

⬇

! **Für jedes N gilt: Wenn N Primzahl ist, dann ist N kleiner als 10.**

⬇

$\forall$ **N: (ist_primzahl(N) $\Rightarrow$ N < 10)**

- **Quantoren <u>binden</u> jeweils eine Variable innerhalb der quantifizierten Formel.**

$\forall$ X: (p(X) $\wedge$ X > 2)	X ist (durch $\forall$) <u>gebunden</u>

- **Variablen, die <u>nicht</u> von einem Quantor gebunden werden, heissen <u>frei</u>.**

p(Y) $\Rightarrow$ $\exists$ X: q(X,Y,Z)	Y und Z sind frei

- **Formeln <u>ohne</u> freie Variablen heissen <u>geschlossen</u>, ansonsten <u>offen</u>.**

$\exists$ X: (p(X) $\vee$ q(a,X))	geschlossen
$\exists$ X: (p(X) $\wedge$ q(Y,X))	offen
r(f(a)) $\Rightarrow$ p(a,b)	geschlossen
(X > Y) $\wedge$ $\forall$ X: ($\exists$Y: X < Y)	offen

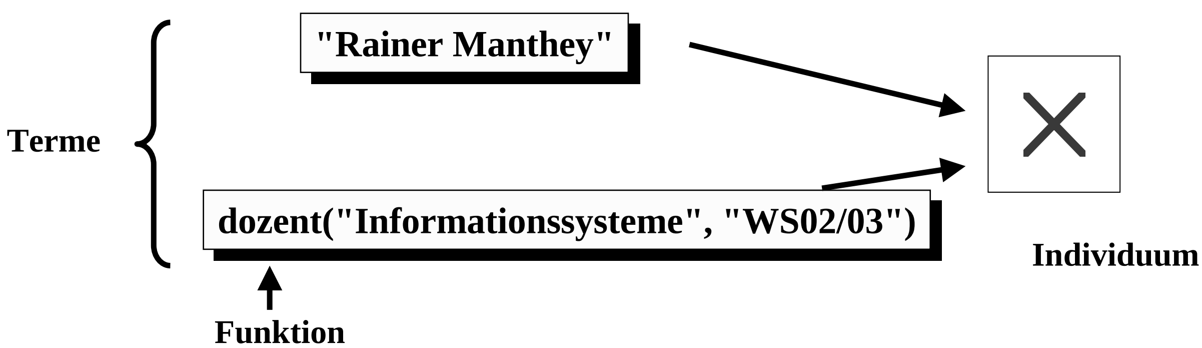
gleichzeitig frei <u>und</u> gebunden

- **Prädikate können als Relationsnamen aufgefasst werden.**
- **Alle Kombinationen von Individuen, die eine Formel wahr machen, wenn man sie für die Parameter der Formel einsetzt, bilden eine Tupelmenge (= Relation).**

ist_echter_teiler_von(X, Y)

X	Y
2	4
2	6
3	6
2	8
4	8
3	9
2	10
5	10
. . .	. . .

- **<u>weitere Erweiterung der Aussagenlogik</u>: Einführen von Ausdrücken, die bestimmte Objekte des gerade betrachteten "Weltausschnitts" (des Individuenbereichs) bezeichnen:** **Terme**
- **Es gibt atomare und zusammengesetzte Terme.**
- **Atomare Terme bezeichnen ein bestimmtes Objekt direkt, zusammengesetzte Terme verwenden eine Funktion, die zunächst angewendet werden muss, um das bezeichnete Individuum zu identifizieren.**



- Es gibt nur zwei Arten von atomaren ("unzerlegbaren") Termen:

Konstanten
Variablen

- Konstanten sind Zeichen oder Zeichenreihen, die immer genau ein Individuum ("Objekt") aus dem gerade betrachteten Individuenbereich bezeichnen, z.B.:

'IX' → die Zahl neun

"George W. Bush" → den Präsidenten der USA

- Variablen bezeichnen ebenfalls zu jedem Zeitpunkt genau ein Individuum, aber diese Bedeutung kann sich ändern je nachdem, mit welcher Bedeutung die Variable gerade belegt worden ist:

X

- Formale Notation für <u>zusammengesetzte</u> Terme:

wurzel (N)

Funktor Parameter

- Zweistellige Funktoren dürfen auch in Infixnotation verwendet werden:

Parameter

summe(X, Y) bzw. X + Y

Funktor

- Die Bezeichnung 'Funktor' für den Namen einer Funktion wird auch Funktionssymbol oder Operator genannt.

- **Es ist nicht leicht, atomare Formeln und zusammengesetzte Terme rein syntaktisch zu unterscheiden:**

<Funktor>(<Parameterliste>)	**<Prädikat>(<Parameterliste>)**
Term	**Formel**

- **Ob dieses syntaktische Gebilde ein Term oder eine Formel ist, hängt davon ab, ob das Symbol 'magic' ein Funktor ist (eine Funktion bezeichnet) oder ein Prädikat ist (eine Relation bezeichnet):**

magic(1, 2^2, 3∗3) **?**

- **'ist_professor("Rainer Manthey") ist eine atomare Formel, weil sie keine andere Formel enthält, sondern nur einen Term als Parameter.**

  'produkt(3, 42)' ist aber ein zusammengesetzter Term, weil er weitere Terme als Parameter enthält.