

Kontextfreie Sprachen

Programmieren und Software-Engineering Homomorphismen, Formale Sprachen und Syntax-Analyse

22. Februar 2023

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$\{a^n b^n \mid n > 0\}.$$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$\{a^n b^n \mid n > 0\}.$$

- *Beispiel:* $\{ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \dots\}$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$\{a^n b^n \mid n > 0\}.$$

- *Beispiel:* $\{ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \dots\}$
- Sprache ist nicht regulär, da “Mitzählen” nicht möglich

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$\{a^n b^n \mid n > 0\}.$$

- *Beispiel:* $\{ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \dots\}$
- Sprache ist nicht regulär, da “Mitzählen” nicht möglich
- Lösung:

$$P = \{S \rightarrow aSb \mid ab\}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$\{a^{n+1}b^{3n} \mid n \geq 0\}.$$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$\{a^{n+1}b^{3n} \mid n \geq 0\}.$$

- *Beispiel:* $\{a, aabbb, aaabbbbb, \dots\}$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$\{a^{n+1}b^{3n} \mid n \geq 0\}.$$

- *Beispiel:* $\{a, aabbb, aaabbbbbbb, \dots\}$
- Lösung:

$$P = \{S \rightarrow aSbbb \mid a\}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$\{a^n b^{n+2} c^m d^{m+1} \mid n, m \geq 0\}.$$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$\{a^n b^{n+2} c^m d^{m+1} \mid n, m \geq 0\}.$$

- *Beispiel:* $aabbbbccccdddd(n = 2, m = 3)$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$\{a^n b^{n+2} c^m d^{m+1} \mid n, m \geq 0\}.$$

- *Beispiel:* $aabbbbccccdddd(n = 2, m = 3)$
- Lösung:

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow AB, \\ & A \rightarrow aAb \mid bb, \\ & B \rightarrow cBd \mid d\} \end{aligned}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$\{i^n + i^m = i^{n+m} \mid n, m > 0\}, \text{ und}$$

$$T = \{i, +, =\}.$$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$\{i^n + i^m = i^{n+m} \mid n, m > 0\}, \text{ und}$$

$$T = \{i, +, =\}.$$

- *Beispiel:* $iiii + ii = iiiiii$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$\{i^n + i^m = i^{n+m} \mid n, m > 0\}, \text{ und}$$

$$T = \{i, +, =\}.$$

- *Beispiel:* $iiii + ii = iiiiii$
- Lösung:

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow iSi \mid i + Ai, \\ & A \rightarrow iAi \mid i = i \} \end{aligned}$$

- Aufgrund der Ableitungsregeln der Form $S \rightarrow tAB$ mit $t \in T$ und $S, A, B \in N$ ist ersichtlich, dass einfache endliche Automaten für kontextfreie Sprachen nicht funktionieren.
- Es ist unmöglich von *einem* Knoten in einem Schritt über eine Kante zu *zwei* (oder mehreren) Knoten zu gelangen.
- Endliche Automaten können somit nicht zur Überprüfung, ob ein Wort Element der kontextfreien Sprache ist, herangezogen werden.
- Der Automat für kontextfreie Sprachen ist der **Kellerautomat**
 - Kellerautomaten verfügen über einen Last-In First-Out Speicher
 - Die Zustandsübergänge hängen vom gelesenen Zeichen, dem Wert im Speicher (und gegebenenfalls dem Automatenzustand) ab.
- Zur grafischen Veranschaulichung, sowie zur Überprüfung (Ableitung) von Gültigkeit von Worten können **Syntaxdiagramme** verwendet werden.

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid n_0(w) = n_1(w)\}.$$

- Dabei gibt die Funktion $n_x(w)$ die Anzahl der Vorkommnisse von x in w an.
- *Beispiel:* 00111101100001 mit $n_0(w) = n_1(w) = 7$.

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

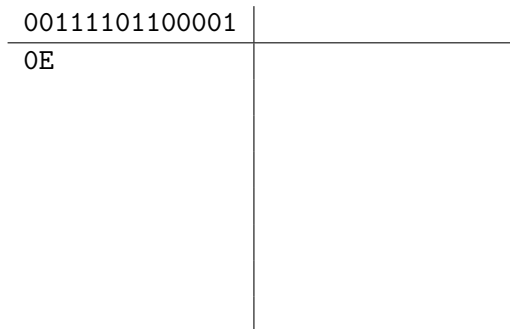
$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid n_0(w) = n_1(w)\}.$$

- Dabei gibt die Funktion $n_x(w)$ die Anzahl der Vorkommnisse von x in w an.
- *Beispiel:* 00111101100001 mit $n_0(w) = n_1(w) = 7$.
- Lösung:

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow 0E \mid 1N \mid \varepsilon \\ & E \rightarrow 0EE \mid 1S, \\ & N \rightarrow 0S \mid 1NN \} \end{aligned}$$

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:



Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001

OE

00EE

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	
0E	
00EE	
001SE	

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	
0E	
00EE	
001SE	
001E	

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	
0E	
00EE	
001SE	
001E	
0011S	

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	
0E	
00EE	
001SE	
001E	
0011S	
00111N	

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	
0E	
00EE	
001SE	
001E	
0011S	
00111N	
001111NN	

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	
0E	
00EE	
001SE	
001E	
0011S	
00111N	
001111NN	
0011110SN	

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	00111101100001
0E	0011110N
00EE	
001SE	
001E	
0011S	
00111N	
001111NN	
0011110SN	

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	00111101100001
0E	0011110N
00EE	0011110N
001SE	
001E	
0011S	
00111N	
001111NN	
0011110SN	

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	00111101100001
0E	0011110N
00EE	0011110N
001SE	00111101NN
001E	
0011S	
00111N	
001111NN	
0011110SN	

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	00111101100001
0E	0011110N
00EE	0011110N
001SE	00111101NN
001E	001111011NNN
0011S	
00111N	
001111NN	
0011110SN	

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	00111101100001
0E	0011110N
00EE	0011110N
001SE	00111101NN
001E	001111011NNN
0011S	001111011000S
00111N	
001111NN	
0011110SN	

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	00111101100001
0E	0011110N
00EE	0011110N
001SE	00111101NN
001E	001111011NNN
0011S	001111011000S
00111N	0011110110000E
001111NN	
0011110SN	

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	00111101100001
OE	0011110N
00EE	0011110N
001SE	00111101NN
001E	001111011NNN
0011S	001111011000S
00111N	0011110110000E
001111NN	00111101100001S
0011110SN	

Ableitung

Ableitung des Wortes 00111101100001:

00111101100001	00111101100001
0E	0011110N
00EE	0011110N
001SE	00111101NN
001E	001111011NNN
0011S	001111011000S
00111N	0011110110000E
001111NN	00111101100001S
0011110SN	00111101100001

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$L = \{a^i b^{2j+3} c^j c^k \mid k > 0, j \geq 0, k \leq i \leq 3k\}.$$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$L = \{a^i b^{2j+3} c^j c^k \mid k > 0, j \geq 0, k \leq i \leq 3k\}.$$

- *Beispiel:* aaaaaabbbbccc

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$L = \{a^i b^{2j+3} c^j c^k \mid k > 0, j \geq 0, k \leq i \leq 3k\}.$$

- *Beispiel:* aaaaaabbbccc
- Lösung:

$$P = \{S \rightarrow aSc \mid aaSc \mid aaaSc \mid aAc \mid aaAc \mid aaaAc, \\ A \rightarrow bbAc \mid bbb\}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) + 2n_c(w)\}.$$

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) + 2n_c(w)\}.$$

- *Beispiel:* aaacabccabaaa

- Gesucht sei die Grammatik zur kontextfreien Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) + 2n_c(w)\}.$$

- *Beispiel:* aaacabccabaaa
- Lösung:

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow \varepsilon \mid aA \mid bB \mid cC, \\ & A \rightarrow aD \mid bS \mid cB, \\ & B \rightarrow aS \mid bC \mid cBC, \\ & C \rightarrow aB \mid bC \mid cCC, \\ & D \rightarrow aAD \mid aDA \mid bA \mid cS \} \end{aligned}$$

- Bemerkungen:
 - A ... ein a zuviel
 - B ... ein b zuviel, bzw. 1 a zuwenig
 - C ... zwei a's zuwenig
 - D ... zwei a's zuviel

Kontextsensitive Grammatik

- Gesucht sei die Grammatik zur Sprache

$$\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}.$$

Kontextsensitive Grammatik

- Gesucht sei die Grammatik zur Sprache

$$\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}.$$

- *Beispiel:* $\{abc, aabbcc, aaabbbccc, aaaabbbbccccc, \dots\}$

Kontextsensitive Grammatik

- Gesucht sei die Grammatik zur Sprache

$$\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}.$$

- *Beispiel:* $\{abc, aabbcc, aaabbbccc, aaaabbbbccccc, \dots\}$
- Die Sprache ist nicht kontextfrei, da die in den Beispielen gezeigten Mechanismen zur Generierung zweier Elemente mit der selben Anzahl nicht auf den Fall von drei Elementen übertragbar ist.

Kontextsensitive Grammatik

- Gesucht sei die Grammatik zur Sprache

$$\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}.$$

- *Beispiel:* $\{abc, aabbcc, aaabbbccc, aaaabbbbcccc, \dots\}$
- Die Sprache ist nicht kontextfrei, da die in den Beispielen gezeigten Mechanismen zur Generierung zweier Elemente mit der selben Anzahl nicht auf den Fall von drei Elementen übertragbar ist.
- Die Grammatik ist *kontextsensitiv* (kontextabhängig, umgebungsabhängig)

Kontextsensitive Grammatik

Die Produktionsregeln der kontextsensitiven Gr. zu $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ lauten:

$$\begin{aligned}P = \{ & S \rightarrow aSAB \mid aAB \\ & BA \rightarrow AB \\ & aA \rightarrow ab \\ & bA \rightarrow bb \\ & bB \rightarrow bC \\ & CB \rightarrow cc \}\end{aligned}$$

Ableitung von aabbcc

$$\begin{aligned}S &\Rightarrow aSAB \\ &\Rightarrow aaABAB \\ &\Rightarrow aabBAB \\ &\Rightarrow aabABB \\ &\Rightarrow aabbBB \\ &\Rightarrow aabbCB \Rightarrow aabbcc\end{aligned}$$

$a^n b^n c^n \mid n > 0$ mittels Typ-0 GrammatikAbleitung von $aaabbbccc$:

Produktionsregeln:

$$P = \{ \begin{array}{ll} S & \rightarrow abc \\ S & \rightarrow A \\ A & \rightarrow aABc \\ A & \rightarrow abc \\ cB & \rightarrow Bc \\ bB & \rightarrow bb \end{array} \}$$

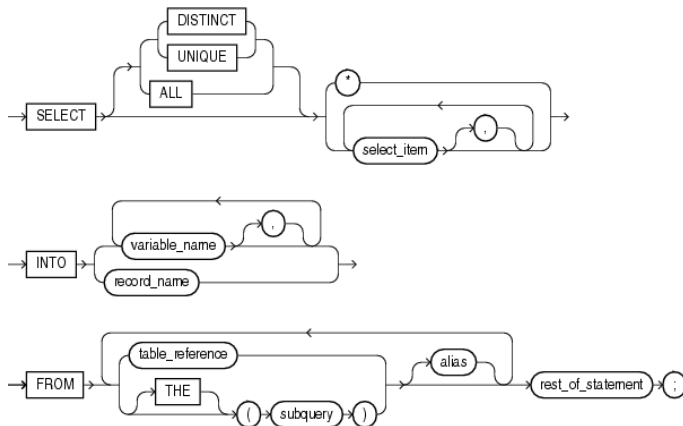
$$\begin{aligned} S &\Rightarrow A \\ &\Rightarrow aABc \\ &\Rightarrow aaABcBc \text{ (mittels } A \rightarrow aABc \text{)} \\ &\Rightarrow aaabcBcBc \text{ (mittels } A \rightarrow abc \text{)} \\ &\Rightarrow aaabBccBc \text{ (mittels } cB \rightarrow Bc \text{)} \\ &\Rightarrow aaabBcBcc \text{ (mittels } cB \rightarrow Bc \text{)} \\ &\Rightarrow aaabbcBcc \text{ (mittels } bB \rightarrow bb \text{)} \\ &\Rightarrow aaabbBccc \text{ (mittels } cB \rightarrow Bc \text{)} \\ &\Rightarrow aaabbbccc \text{ (mittels } bB \rightarrow bb \text{)} \end{aligned}$$

Syntaxdiagramme

- Für eine ausführliche Darstellung sei auf das Skriptum [1] Seiten 24/25 verwiesen!
- Die Terminalsymbole sind durch Kreise oder Ellipsen dargestellt.
- Die Nonterminale sind durch Rechtecke dargestellt.

Syntaxdiagramme: PL/SQL

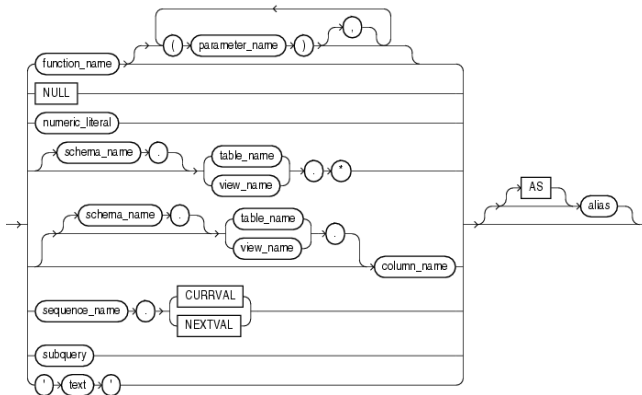
select into statement ::=



Quelle: [6]

Syntaxdiagramme: PL/SQL

select item ::=



Quelle: [6]

Literaturübersicht I

- [1] **Berger, Krieger, Mahr: “Grundlagen der elektronischen Datenverarbeitung”, Skriptum**
- [2] Dirk W. Hoffmann: “Theoretische Informatik”, Hanser, 3. Auflage
- [3] Gernot Salzer: “Einführung in die Theorie der Informatik”, Skriptum, TU Wien, 2001
- [4] Wikipedia (Englisch): <https://en.wikipedia.org/>
- [5] Wikipedia (Deutsch): <https://de.wikipedia.org/>
- [6] Oracle: https://docs.oracle.com/cd/B19306_01/appdev.102/b14261/selectinto_statement.htm#i36066