Homomorphismen

Programmieren und Software-Engineering
Homomorphismen, Formale Sprachen und Syntax-Analyse

17. Mai 2023

Funktionen und Abbildungen

Definition (Funktion, bzw. Abbildung)

Eine eindeutige Zuordnung von Elementen aus einer Menge A in eine Menge B

$$f : A \to B$$

heißt *Funktion* oder *Abbildung*.

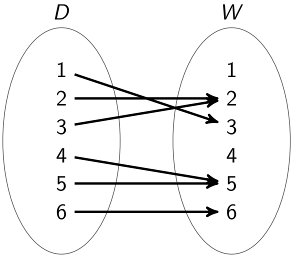
Dabei bezeichnet A die *Definitionsmenge* oder *Urbildmenge*. Die Menge B wird als *Bildmenge* oder *Wertemenge* bezeichnet.

Konkrete Zuordnungen schreibt man als:

$$b = f(a)$$

Bild und Urbild

Beispiel: Definitionsmenge D, Wertemenge W:



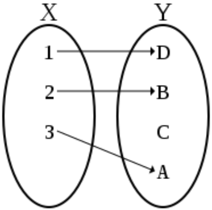
- 3 ist das Bild von 1, hingegen ist 1 das Urbild zu 3
- 5 ist das Bild von $\{4, 5\}$, das Urbild von 5 ist $\{4, 5\}$
- $\{4, 5, 6\}$ ist das Urbild von $\{5, 6\}$

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Injektivität: Eine Funktion heißt *injektiv*, wenn

- verschiedene Argumente auf verschiedene Funktionswerte abgebildet werden
- Jeder Funktionswert besitzt höchstens ein Urbild
- Ist $f(a) = f(b)$, dann ist $a = b$

Man nennt injektive Funktionen auch *links-eindeutig*.



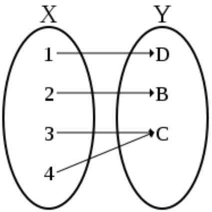
Bildquelle: [?]

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Surjektivität: Eine Funktion heißt *surjektiv*, wenn

- Jeder Funktionswert wird mindestens einmal durch die Abbildung getroffen.
- Jeder Funktionswert besitzt mindestens ein Urbild.

Man nennt surjektiv Funktionen auch *rechtsvollständig*.



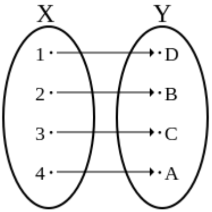
Bildquelle: [?]

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Bijektivität: Eine Funktion heißt *bijektiv*, wenn

- Die Abbildung ist surjektiv und injektiv.
- Jeder Funktionswert besitzt genau ein Urbild.
- Es gibt für die Funktion eine Umkehrfunktion.

Bijektive Funktionen sind *umkehrbar*.



Bildquelle: [**?**]

Injektiviät, Surjektivität, Bijektivität

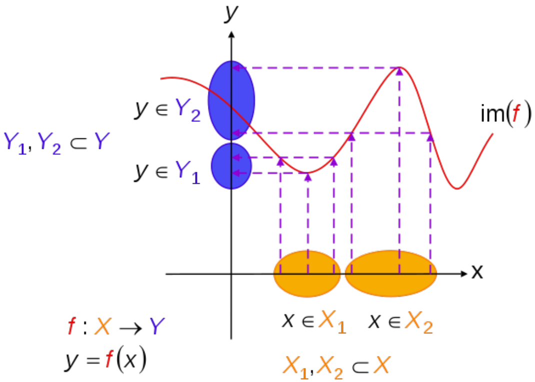


Abbildung: Nicht-injektive Funktion
Quelle: [?]

Beispiele

Beispiel: Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$) eine Funktion mit $f(n) = 2 \cdot n$.

Beispiele

Beispiel: Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$) eine Funktion mit $f(n) = 2 \cdot n$.

$f(n)$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Aufgaben 1.1.1 – 1.1.3

1. Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 5 \cdot x$. Welche Eigenschaften (injektiv, surjektiv, bijektiv) hat diese Funktion?
2. Welchen Bedingungen gehorcht die Funktion, die einem Kind seine Mutter zuordnet? Was sind dabei die Urbild- und die Bildmenge?
3. Welchen Bedingungen gehorcht die Funktion, die einem Land seine Hauptstadt zuordnet? Was sind dabei die Urbild- und die Bildmenge?

Aufgaben 1.1.1 – 1.1.3

1. Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 5 \cdot x$. Welche Eigenschaften (injektiv, surjektiv, bijektiv) hat diese Funktion?
2. Welchen Bedingungen gehorcht die Funktion, die einem Kind seine Mutter zuordnet? Was sind dabei die Urbild- und die Bildmenge?
3. Welchen Bedingungen gehorcht die Funktion, die einem Land seine Hauptstadt zuordnet? Was sind dabei die Urbild- und die Bildmenge?

1. bijektiv (affin lineare Funktion, entspricht einer Geraden und ist somit linkseindeutig, ebenso gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$)
2. Je nach Wahl der Bildmenge ergeben sich andere Eigenschaften.
   - f : Menschen $\to$ Frauen, dann ist die Abbildung werder injektiv, noch surjektiv; nicht injektiv, da eine Frau mehrere Kinder haben kann.
   - f : Menschen $\to$ Mütter, dann ist die Abbildung surjektiv, aber noch immer nicht injektiv.
3. Wir vernachlässigen alle "Ausnahmen" (z.B. Schweiz hat keine de jure Hauptstadt etc.): dann ist die Abbildung bijektiv

Aufgaben 1.1.4 – 1.1.8

- Sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründung!
  1. $f(x) = x^3$
  2. $f(x) = |x|$
  3. $f(x) = \sin(x)$
  4. $f(x) = \pi \cdot x + 35$
  5. $f(x) = \tan(x)$

Aufgaben 1.1.4 – 1.1.8

- Sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründung!
  1. $f(x) = x^3$
  2. $f(x) = |x|$
  3. $f(x) = \sin(x)$
  4. $f(x) = \pi \cdot x + 35$
  5. $f(x) = \tan(x)$

1. bijektiv, da Polynom mit ungeradem Grad und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
2. nicht injektiv da $f(x) = f(-x)$ und nicht surjektiv da negative Werte keine Bilder sind
3. nicht injektiv da periodisch mit Period 2π. Nicht surjektiv da Wertebereich $[-1, 1]$
4. bijektiv (affin lineare Funktion, entspricht einer Geraden und ist somit linkseindeutig, ebenso gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$)
5. surjektiv aber nicht injektiv

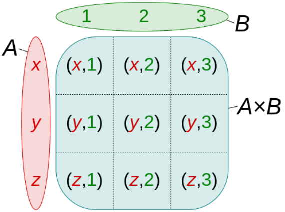
Kartesisches Produkt

Definition (Kartesisches Produkt)

Das *kartesische Produkt* (oder *Kreuzprodukt*) zweier Mengen $A \times B$ ist gegeben durch

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Anmerkung: Das Kreuzprodukt ist also die Menge aller *geordneten Paare*, wobei das erste Element aus der ersten Menge stammt, und das zweite aus der zweiten.



Innere Verknüpfungen

Definition (Innere Verknüpfung, binäre Operation)

Eine zweistellige Funktion

$$f : A \times A \to A$$

heißt *innere Verknüpfung* oder *binäre Operation*, falls

$$\forall a, b, \in A : f(a, b) \in A.$$

Diese Bedingung wird auch als **Abgeschlossenheit** der inneren Verknüpfung bezeichnet. Eine Menge mit einer inneren Verknüpfung heißt **Gruppoid** und wird vereinfacht durch $\langle A, f \rangle$ dargestellt.

Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe

Definition

G1 Abgeschlossenheit: $a, b \in G \Rightarrow a * b \in G$ für alle $a, b \in G$

G2 Assoziativgesetz: $(a * b) * c = a * (b * c)$, für alle $a, b, c \in G$

G3 Einheitselement: Es existiert ein Einheitselement $e \in G$, sodaß für alle $a \in G$ gilt: $a * e = e * a = a$.

G4 Inverses Element: Für jedes $a \in G$ existiert ein $a^{-1} \in G$ mit $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

G5 Kommutativgesetz: $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$

Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe

Definition (Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe)

Eine Struktur heißt:

- **Gruppoid**, wenn G1 erfüllt ist,
- **Halbgruppe**, wenn G1 und G2 erfüllt sind,
- **Monoid**, wenn G1, G2 und G3 erfüllt sind,
- **Gruppe**, wenn G1, G2, G3 und G4 erfüllt sind, und
- **Abel'sche Gruppe**, wenn G1 bis G5 erfüllt sind.

Beispiele

- Gruppoid: $\langle \mathbb{R}^+, * \rangle$ mit $a * b = a^b$
- Halbgruppe: $\langle \mathbb{R}^+, + \rangle$
- Monoid: $\langle \mathbb{N}^+, + \rangle$, (e=0)
- Gruppe: Bewegungen der Ebene
- Abel'sche Gruppe: $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, $\langle \mathbb{R}, + \rangle$, $\langle \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \backslash \{0\}, \cdot \rangle$.

Beispiel

Wählen wir als Grundmenge die natürlichen Zahlen und als innere Verknüpfung die Addition oder als Grundmenge die ganzen Zahlen mit der Subtraktion als binäre Operation, die rationalen Zahlen mit der Multiplikation, die Menge der Aussagen mit Konjunktion, Disjunktion, Implikation oder Äquivalenz, die Menge der Wörter einer Sprache mit der Verkettung der Wörter oder die Menge aller Teilmengen einer Menge (Potenzmenge) mit Durchschnitt, Vereinigung oder Mengendifferenz als innere Verknüpfung, so erhalten wir jeweils Gruppoide.

Wählen wir als Grundmenge die reellen Zahlen und als zweistellige Funktion die Division, so erhalten wir kein Gruppoid. Warum?

Homomorphismen

Definition (Homomorphismus)

Seien $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$ zwei Gruppoide. Dann heißt die Abbildung $\Phi : A \to B$ *Homomorphismus*, wenn für alle Elemente $a, b \in A$ gilt, daß

$$\Phi(a * b) = \Phi(a) \circ \Phi(b).$$

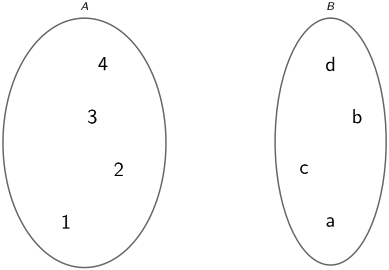
Man nennt Φ einen

- **Monomorphismus**, wenn Φ injektiv,
- **Epimorphismus**, wenn Φ surjektiv,
- **Isomorphismus**, wenn Φ bijektiv.

Wenn $A = B$, dann heißt ein Homomorphismus **Endomorphismus** und ein Isomorphismus **Automorphismus**.

Darstellung: Isomorphismus

Wir betrachten die Gruppoide $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$, sowie die Abbildung $\Phi\colon A \to B$:



Darstellung: Isomorphismus

Wir betrachten die Gruppoide $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$, sowie die Abbildung $\Phi: A \rightarrow B$:

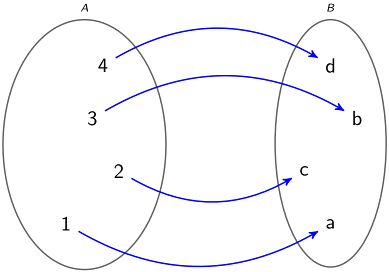


Abbildung $\Phi(1) = a, \Phi(2) = c, \Phi(3) = b, \Phi(4) = d$

Darstellung: Isomorphismus

Wir betrachten die Gruppoide $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$, sowie die Abbildung $\Phi\colon A \to B$:

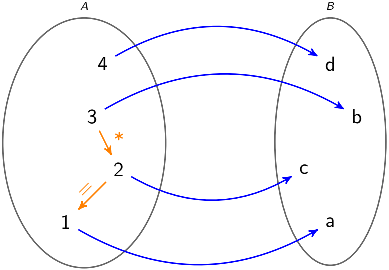


Abbildung $\Phi(1) = a, \Phi(2) = c, \Phi(3) = b, \Phi(4) = d$

Wenn in A gilt, dass 3*2=1,

Darstellung: Isomorphismus

Wir betrachten die Gruppoide $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$, sowie die Abbildung $\Phi\colon A \to B$:

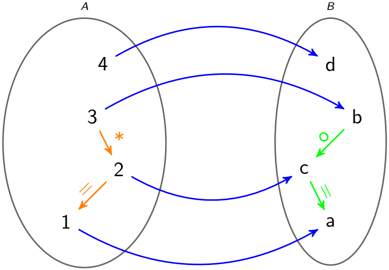


Abbildung $\Phi(1) = a, \Phi(2) = c, \Phi(3) = b, \Phi(4) = d$
Wenn in A gilt, dass 3*2=1,
dann muss in B gelten: $b \circ c = a$.

Darstellung: Isomorphismus

Wir betrachten die Gruppoide $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$, sowie die Abbildung $\Phi\colon A \to B$:

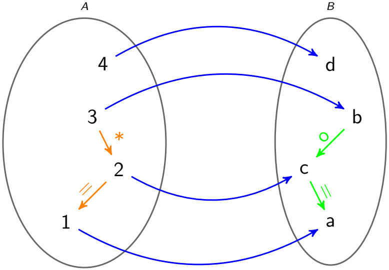


Abbildung $\Phi(1) = a, \Phi(2) = c, \Phi(3) = b, \Phi(4) = d$

Wenn in A gilt, dass 3*2=1,

dann muss in B gelten: $b \circ c = a$.

Diese Eigenschaft muss für alle $x, y \in A$ gelten, damit Φ tatsächlich ein Isomorphismus ist!

Homomorphismen

Beispiel: Sei $A = \{0, 1, 2\}$ und $B = \{a, b, c\}$. Die inneren Verknüpfungen $*$ und $\circ$ für A und B seien gegeben durch:

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\circ$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Homomorphismen

Ein Homomorphismus (Isomorphismus) ist gegeben durch $\Phi(0) = c, \Phi(1) = b$ und $\Phi(2) = a$.

Beweis:

- $\Phi(0 * 0) = \Phi(0) = c = \Phi(0) \circ \Phi(0) = c \circ c$
- $\Phi(0 * 1) = \Phi(1) = b = \Phi(0) \circ \Phi(1) = c \circ b$
- $\Phi(0 * 2) = \Phi(2) = a = \Phi(0) \circ \Phi(2) = c \circ a$
- $\Phi(1 * 0) = \Phi(1) = b = \Phi(1) \circ \Phi(0) = b \circ c$
- $\Phi(1 * 1) = \Phi(2) = a = \Phi(1) \circ \Phi(1) = b \circ b$
- $\Phi(1 * 2) = \Phi(0) = c = \Phi(1) \circ \Phi(2) = b \circ a$
- $\Phi(2 * 0) = \Phi(2) = a = \Phi(2) \circ \Phi(0) = a \circ c$
- $\Phi(2 * 1) = \Phi(0) = c = \Phi(2) \circ \Phi(1) = a \circ b$
- $\Phi(2 * 2) = \Phi(1) = b = \Phi(2) \circ \Phi(2) = a \circ a$

$\square$

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

$$
\begin{array}{lll}
a & \to & 2 \\
b & \to & \\
c & \to & 3 \\
d & \to & 4 \\
e & \to &
\end{array}
$$

Die erste mögliche Abbildung wäre mit $a \to 2$ und $d \to 4$, und somit $c \to 3$.

Bestimmung aller Isomorphismen

∘	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

$$\begin{array}{lll} a & \rightarrow & 2 \\ b & \rightarrow & \\ c & \rightarrow & 3 \\ d & \rightarrow & 4 \\ e & \rightarrow & \\ & & ↯ \end{array}$$

Die erste mögliche Abbildung wäre mit $a \rightarrow 2$ und $d \rightarrow 4$, und somit $c \rightarrow 3$.
Wir testen mit der zweiten Gleichung, $3 * 4 = 2$. Es müsste also gelten $c \circ d = a$. ↯

Bestimmung aller Isomorphismen

∘	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

$$\begin{array}{lccc} a & \rightarrow & 2 & 2 \\ b & \rightarrow & & 3 \\ c & \rightarrow & 3 & \\ d & \rightarrow & 4 & \\ e & \rightarrow & & 4 \\ & & \lightning & \end{array}$$

Die nächste mögliche Abbildung wäre mit $a \rightarrow 2$ und $e \rightarrow 4$, und somit $b \rightarrow 3$.

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

a	$\rightarrow$	2	2
b	$\rightarrow$		3
c	$\rightarrow$	3	
d	$\rightarrow$	4	
e	$\rightarrow$		4
		$\lightning$	$\lightning$

Die nächste mögliche Abbildung wäre mit $a \rightarrow 2$ und $e \rightarrow 4$, und somit $b \rightarrow 3$.
Wir testen $3 * 4 = 2$. Es müsste gelten $b \circ e = a$, tatsächlich gilt jedoch $b \circ e = d$. $\lightning$

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

$*$	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

a	$\rightarrow$	2	2	4
b	$\rightarrow$		3	2
c	$\rightarrow$	3		
d	$\rightarrow$	4		
e	$\rightarrow$		4	3
		$\lightning$	$\lightning$	$\lightning$

Auch hier erhalten wir einen Widerspruch $\lightning$

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

a	$\rightarrow$	2	2	4	
b	$\rightarrow$		3	2	2
c	$\rightarrow$	3			
d	$\rightarrow$	4			3
e	$\rightarrow$		4	3	4
		↯	↯	↯	↯

Auch hier erhalten wir einen Widerspruch ↯

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

a	$\rightarrow$	2	2	4		4
b	$\rightarrow$		3	2	2	
c	$\rightarrow$	3				2
d	$\rightarrow$	4			3	
e	$\rightarrow$		4	3	4	3
		↯	↯	↯	↯	

Wir testen nun $c \rightarrow 2$ und $a \rightarrow 4$. Somit gilt $2 * 4 = 3 \Rightarrow e \rightarrow 3$.
Wir prüfen mit der nächsten Gleichung $3 * 4 = 2$, und tatsächlich gilt $e \circ a = c$.

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: 2 * 4 = 3, 3 * 4 = 2, 4 * 3 = 1

a	$\rightarrow$	2	2	4		4
b	$\rightarrow$		3	2	2	1
c	$\rightarrow$	3				2
d	$\rightarrow$	4			3	5
e	$\rightarrow$		4	3	4	3
		↯	↯	↯	↯	✓

Wir testen nun $b \rightarrow 2$ und $a \rightarrow 4$. Somit gilt $2 * 4 = 3 \Rightarrow e \rightarrow 3$.
Wir prüfen mit der nächsten Gleichung $3 * 4 = 2$, und tatsächlich gilt $e \circ a = c$.
Weiters verwenden wir 4 * 3 = 1, und es folgt mit $a \circ e = b$ dass $b \rightarrow 1$. Wir haben einen Isomorphismus gefunden. ✓

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

a	$\rightarrow$	2	2	4		4	3
b	$\rightarrow$		3	2	2	1	4
c	$\rightarrow$	3				2	2
d	$\rightarrow$	4			3	5	
e	$\rightarrow$		4	3	4	3	
		↯	↯	↯	↯	✓	↯

Wir testen weitere Zuweisungen, und erhalten nur mehr Widersprüche.

Anmerkung: In jeder Spalte wird als erstes auf 2 abgebildet! Daraus folgen die weiteren Werte!

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

a	$\to$	2	2	4		4	3	
b	$\to$		3	2	2	1	4	3
c	$\to$	3				2	2	2
d	$\to$	4			3	5		4
e	$\to$		4	3	4	3		
		↯	↯	↯	↯	✓	↯	↯

Wir testen weitere Zuweisungen, und erhalten nur mehr Widersprüche.

Anmerkung: In jeder Spalte wird als erstes auf 2 abgebildet! Daraus folgen die weiteren Werte!

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

a	$\rightarrow$	2	2	4		4	3		3
b	$\rightarrow$		3	2	2	1	4	3	
c	$\rightarrow$	3				2	2	2	2
d	$\rightarrow$	4			3	5		4	
e	$\rightarrow$		4	3	4	3			4
		↯	↯	↯	↯	✓	↯	↯	↯

Wir testen weitere Zuweisungen, und erhalten nur mehr Widersprüche.

Anmerkung: In jeder Spalte wird als erstes auf 2 abgebildet! Daraus folgen die weiteren Werte!

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

a	$\rightarrow$	2	2	4		4	3		3	
b	$\rightarrow$		3	2	2	1	4	3		4
c	$\rightarrow$	3				2	2	2	2	3
d	$\rightarrow$	4			3	5		4		2
e	$\rightarrow$		4	3	4	3			4	
		↯	↯	↯	↯	✓	↯	↯	↯	↯

Wir testen weitere Zuweisungen, und erhalten nur mehr Widersprüche.

Anmerkung: In jeder Spalte wird als erstes auf 2 abgebildet! Daraus folgen die weiteren Werte!

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

a	$\rightarrow$	2	2	4		4	3		3		
b	$\rightarrow$		3	2	2	1	4	3		4	
c	$\rightarrow$	3				2	2	2	2	3	4
d	$\rightarrow$	4			3	5		4		2	2
e	$\rightarrow$		4	3	4	3			4		3
		↯	↯	↯	↯	✓	↯	↯	↯	↯	↯

Wir testen weitere Zuweisungen, und erhalten nur mehr Widersprüche.

Anmerkung: In jeder Spalte wird als erstes auf 2 abgebildet! Daraus folgen die weiteren Werte!

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

a	$\rightarrow$	2	2	4		4	3		3			3
b	$\rightarrow$		3	2	2	1	4	3		4		
c	$\rightarrow$	3				2	2	2	2	3	4	
d	$\rightarrow$	4			3	5		4		2	2	2
e	$\rightarrow$		4	3	4	3			4		3	4
		↯	↯	↯	↯	✓	↯	↯	↯	↯	↯	↯

Wir testen weitere Zuweisungen, und erhalten nur mehr Widersprüche.

Anmerkung: In jeder Spalte wird als erstes auf 2 abgebildet! Daraus folgen die weiteren Werte!

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

a	$\rightarrow$	2	2	4		4	3		3			3	4
b	$\rightarrow$		3	2	2	1	4	3		4			
c	$\rightarrow$	3				2	2	2	2	3	4		3
d	$\rightarrow$	4			3	5		4		2	2	2	
e	$\rightarrow$		4	3	4	3			4		3	4	2
		$\lightning$	$\lightning$	$\lightning$	$\lightning$	$\checkmark$	$\lightning$	$\lightning$	$\lightning$	$\lightning$	$\lightning$	$\lightning$	$\lightning$

Wir testen weitere Zuweisungen, und erhalten nur mehr Widersprüche.

Anmerkung: In jeder Spalte wird als erstes auf 2 abgebildet! Daraus folgen die weiteren Werte!

Bestimmung aller Isomorphismen

∘	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

a	$\to$	2	2	4		4	3		3			3	4	
b	$\to$		3	2	2	1	4	3		4				4
c	$\to$	3				2	2	2	2	3	4		3	3
d	$\to$	4			3	5		4		2	2	2		
e	$\to$		4	3	4	3			4		3	4	2	2
		↯	↯	↯	↯	✓	↯	↯	↯	↯	↯	↯	↯	↯

Wir testen weitere Zuweisungen, und erhalten nur mehr Widersprüche.

Anmerkung: In jeder Spalte wird als erstes auf 2 abgebildet! Daraus folgen die weiteren Werte!

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	b	a	c	b
b	e	a	c	b	d
c	e	a	d	b	a
d	a	c	e	d	a
e	c	c	b	d	e

*	1	2	3	4	5
1					
2				3	
3				2	
4			1		
5					

Wir halten zunächst fest: $2 * 4 = 3$, $3 * 4 = 2$, $4 * 3 = 1$

a	$\to$	2	2	4		4	3		3			3	4		
b	$\to$		3	2	2	1	4	3		4				4	3
c	$\to$	3				2	2	2	2	3	4		3	3	4
d	$\to$	4			3	5		4		2	2	2			
e	$\to$		4	3	4	3			4		3	4	2	2	2
		↯	↯	↯	↯	✓	↯	↯	↯	↯	↯	↯	↯	↯	↯

Wir testen weitere Zuweisungen, und erhalten nur mehr Widersprüche.

Anmerkung: In jeder Spalte wird als erstes auf 2 abgebildet! Daraus folgen die weiteren Werte!

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	1	2	3	4	5
1	4	2	3	5	5
2	1	3	4	1	3
3	2	4	5	3	1
4	5	3	2	1	3
5	4	4	2	1	3

*	a	b	c	d	e
a					
b				c	
c					
d		a		e	
e					

Wir erhalten: $b * d = c, d * b = a, d * d = e$

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	1	2	3	4	5
1	4	2	3	5	5
2	1	3	4	1	3
3	2	4	5	3	1
4	5	3	2	1	3
5	4	4	2	1	3

*	a	b	c	d	e
a					
b				c	
c					
d		a		e	
e					

Wir erhalten: $b * d = c, d * b = a, d * d = e$

$1 \circ 2 = 2$ $\lightning$(derartige Fälle ignorieren wir künftig)

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	1	2	3	4	5
1	4	2	3	5	5
2	1	3	4	1	3
3	2	4	5	3	1
4	5	3	2	1	3
5	4	4	2	1	3

*	a	b	c	d	e
a					
b				c	
c					
d		a		e	
e					

Wir erhalten: $b * d = c, d * b = a, d * d = e$

$1 \circ 2 = 2$ ↯(derartige Fälle ignorieren wir künftig)
$1 \circ 4 = 5, 4 \circ 1 = 5$ ↯ (da bezüglich * verschiedene Ergebnisse)

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	1	2	3	4	5
1	4	2	3	5	5
2	1	3	4	1	3
3	2	4	5	3	1
4	5	3	2	1	3
5	4	4	2	1	3

*	a	b	c	d	e
a					
b				c	
c					
d		a		e	
e					

Wir erhalten: $b * d = c, d * b = a, d * d = e$

$1 \circ 2 = 2$ ↯(derartige Fälle ignorieren wir künftig)
$1 \circ 4 = 5, 4 \circ 1 = 5$ ↯ (da bezüglich * verschiedene Ergebnisse)
$2 \circ 3 = 4, 3 \circ 2 = 4$ ↯ (da bezüglich * verschiedene Ergebnisse, derartige Fälle ignorieren wir künftig)

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	1	2	3	4	5
1	4	2	3	5	5
2	1	3	4	1	3
3	2	4	5	3	1
4	5	3	2	1	3
5	4	4	2	1	3

*	a	b	c	d	e
a					
b				c	
c					
d		a		e	
e					

Wir erhalten: $b * d = c, d * b = a, d * d = e$

$1 \circ 2 = 2$ ↯(derartige Fälle ignorieren wir künftig)
$1 \circ 4 = 5, 4 \circ 1 = 5$ ↯ (da bezüglich * verschiedene Ergebnisse)
$2 \circ 3 = 4, 3 \circ 2 = 4$ ↯ (da bezüglich * verschiedene Ergebnisse, derartige Fälle ignorieren wir künftig)
$2 \circ 4 = 1, 4 \circ 2 = 3 \Rightarrow e \to 5 \Rightarrow d \to 3$ ↯ (da $d \in \{2, 4\}$)

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	1	2	3	4	5
1	4	2	3	5	5
2	1	3	4	1	3
3	2	4	5	3	1
4	5	3	2	1	3
5	4	4	2	1	3

*	a	b	c	d	e
a					
b				c	
c					
d		a		e	
e					

Wir erhalten: $b * d = c, d * b = a, d * d = e$

$1 \circ 2 = 2$ ↯(derartige Fälle ignorieren wir künftig)
$1 \circ 4 = 5, 4 \circ 1 = 5$ ↯ (da bezüglich * verschiedene Ergebnisse)
$2 \circ 3 = 4, 3 \circ 2 = 4$ ↯ (da bezüglich * verschiedene Ergebnisse, derartige Fälle ignorieren wir künftig)
$2 \circ 4 = 1, 4 \circ 2 = 3 \Rightarrow e \rightarrow 5 \Rightarrow d \rightarrow 3$ ↯ (da $d \in \{2, 4\}$)
$2 \circ 5 = 3, 5 \circ 2 = 4 \Rightarrow e \rightarrow 1 \Rightarrow d \rightarrow 4$ ↯ (da $d \in \{2, 5\}$)

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	1	2	3	4	5
1	4	2	3	5	5
2	1	3	4	1	3
3	2	4	5	3	1
4	5	3	2	1	3
5	4	4	2	1	3

*	a	b	c	d	e
a					
b				c	
c					
d		a		e	
e					

Wir erhalten: $b * d = c, d * b = a, d * d = e$

$1 \circ 2 = 2$ ↯(derartige Fälle ignorieren wir künftig)
$1 \circ 4 = 5, 4 \circ 1 = 5$ ↯ (da bezüglich * verschiedene Ergebnisse)
$2 \circ 3 = 4, 3 \circ 2 = 4$ ↯ (da bezüglich * verschiedene Ergebnisse, derartige Fälle ignorieren wir künftig)
$2 \circ 4 = 1, 4 \circ 2 = 3 \Rightarrow e \to 5 \Rightarrow d \to 3$ ↯ (da $d \in \{2, 4\}$)
$2 \circ 5 = 3, 5 \circ 2 = 4 \Rightarrow e \to 1 \Rightarrow d \to 4$ ↯ (da $d \in \{2, 5\}$)
$3 \circ 5 = 1, 5 \circ 3 = 2 \Rightarrow e \to 4 \Rightarrow d \to 1$ ↯ (da $d \in \{3, 5\}$)

Bestimmung aller Isomorphismen

∘	1	2	3	4	5
1	4	2	3	5	5
2	1	3	4	1	3
3	2	4	5	3	1
4	5	3	2	1	3
5	4	4	2	1	3

*	a	b	c	d	e
a					
b				c	
c					
d		a		e	
e					

Wir erhalten: $b * d = c, d * b = a, d * d = e$

$1 \circ 2 = 2$ ↯(derartige Fälle ignorieren wir künftig)
$1 \circ 4 = 5, 4 \circ 1 = 5$ ↯ (da bezüglich * verschiedene Ergebnisse)
$2 \circ 3 = 4, 3 \circ 2 = 4$ ↯ (da bezüglich * verschiedene Ergebnisse, derartige Fälle ignorieren wir künftig)
$2 \circ 4 = 1, 4 \circ 2 = 3 \Rightarrow e \to 5 \Rightarrow d \to 3$ ↯ (da $d \in \{2, 4\}$)
$2 \circ 5 = 3, 5 \circ 2 = 4 \Rightarrow e \to 1 \Rightarrow d \to 4$ ↯ (da $d \in \{2, 5\}$)
$3 \circ 5 = 1, 5 \circ 3 = 2 \Rightarrow e \to 4 \Rightarrow d \to 1$ ↯ (da $d \in \{3, 5\}$)
$4 \circ 5 = 3, 5 \circ 4 = 1 \Rightarrow e \to 2$ ↯ (da nicht in Diagonale)

Bestimmung aller Isomorphismen

∘	1	2	3	4	5
1	4	2	3	5	5
2	1	3	4	1	3
3	2	4	5	3	1
4	5	3	2	1	3
5	4	4	2	1	3

*	a	b	c	d	e
a					
b				c	
c					
d		a		e	
e					

Wir erhalten: $b * d = c, d * b = a, d * d = e$

$1 \circ 2 = 2$ ↯(derartige Fälle ignorieren wir künftig)
$1 \circ 4 = 5, 4 \circ 1 = 5$ ↯ (da bezüglich * verschiedene Ergebnisse)
$2 \circ 3 = 4, 3 \circ 2 = 4$ ↯ (da bezüglich * verschiedene Ergebnisse, derartige Fälle ignorieren wir künftig)
$2 \circ 4 = 1, 4 \circ 2 = 3 \Rightarrow e \rightarrow 5 \Rightarrow d \rightarrow 3$ ↯ (da $d \in \{2, 4\}$)
$2 \circ 5 = 3, 5 \circ 2 = 4 \Rightarrow e \rightarrow 1 \Rightarrow d \rightarrow 4$ ↯ (da $d \in \{2, 5\}$)
$3 \circ 5 = 1, 5 \circ 3 = 2 \Rightarrow e \rightarrow 4 \Rightarrow d \rightarrow 1$ ↯ (da $d \in \{3, 5\}$)
$4 \circ 5 = 3, 5 \circ 4 = 1 \Rightarrow e \rightarrow 2$ ↯ (da nicht in Diagonale)

Es existiert kein Isomorphismus!

Bestimmung aller Isomorphismen

$\circ$	1	2	3	4	5
1					
2			4		
3					
4	1				
5			5		

*	a	b	c	d	e
a	b	c	a	d	d
b	a	a	d	c	e
c	e	a	b	b	c
d	b	a	c	c	e
e	b	a	e	d	e

Lösung: (i) $4 \circ 1 = 1$, (ii) $2 \circ 3 = 4$ und (iii) $5 \circ 3 = 5$

*	a	b	c	d	e
a	b	c	a	$\underline{\text{d}}$	d
b	$\underline{\text{a}}$	a	d	c	$\underline{\text{e}}$
c	e	a	b	b	c
d	b	a	$\underline{\text{c}}$	c	$\underline{\text{e}}$
e	b	a	e	$\underline{\text{d}}$	e

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
a	$\rightarrow$	**4**	**4**		**1**		3	5		2		5		
b	$\rightarrow$	3	3		**4**		**4**	**4**		5		2		
c	$\rightarrow$	2	5		2		5	2		**1**		3		
d	$\rightarrow$	**1**	**1**		3		2	3		**4**		**4**		**1**
e	$\rightarrow$	5	2		5		**1**	**1**		3		**1**		**4**
		↯	↯		↯		↯	↯		↯		✓		↯

- Nach Abbildung auf 1 und 4 betrachtet man bezüglich der verbleibenden Elemente in der Tabelle die Ergebnisse $\Phi(4)$, und kann dadurch viele Fälle ausschließen.
- Es gibt einen Isomorphismus

Isomorphe Graphen

Definition (Isomorphe Graphen)

Zwei Graphen heißen *isomorph*, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen den Knotenmengen der beiden Graphen gibt, und außerdem folgende Bedingung erfüllt ist: Zwei Knoten in einem Graphen sind genau dann miteinander verbunden, wenn auch die entsprechenden Bildknoten im anderen Graphen miteinander verbunden sind.

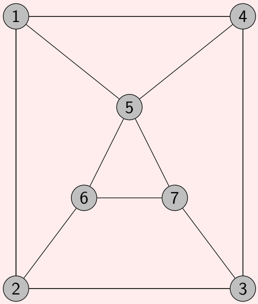
Folgerungen:

- Knoten mit Grad n müssen auf Knoten mit dem selben Grad n abgebildet werden (notwendige Bedingung)
- Alle Wege und Kreise müssen durch die Abbildung erhalten werden.

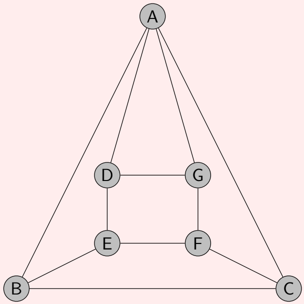
Aufgabe 1.8

Finden Sie alle isomorphen Abbildungen zwischen den folgenden Graphen:

Graph G_1:

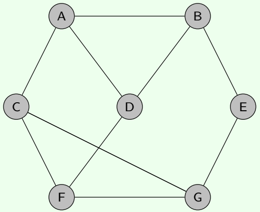


Graph G_2:

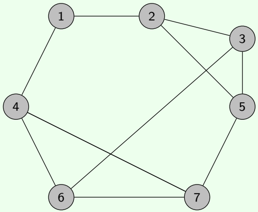


Isomorphe Graphen

G_1:

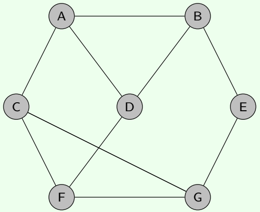


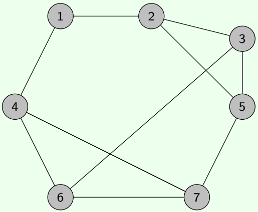
G_2:



Isomorphe Graphen

G_1: G_2:



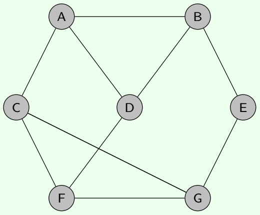


Bestimmung aller möglichen Isomorphismen:

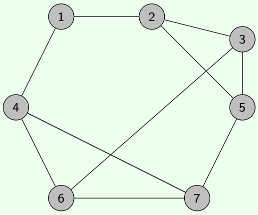
A $\to$
B $\to$
C $\to$
D $\to$
E $\to$
F $\to$
G $\to$

Isomorphe Graphen

G_1:



G_2:



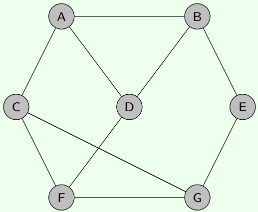
Bestimmung aller möglichen Isomorphismen:

A $\rightarrow$
B $\rightarrow$
C $\rightarrow$
D $\rightarrow$
E $\rightarrow$ 1
F $\rightarrow$
G $\rightarrow$

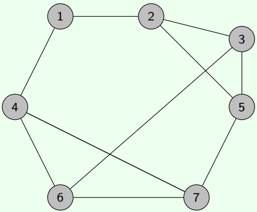
Es gibt nur einen Knoten mit Grad 2, nämlich E. Somit muss E auf den Knoten 1 abgebildet werden.

Isomorphe Graphen

G_1:



G_2:

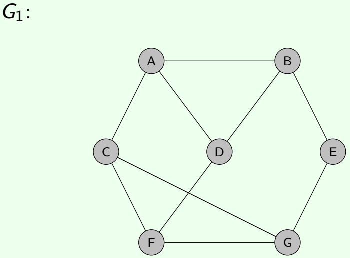


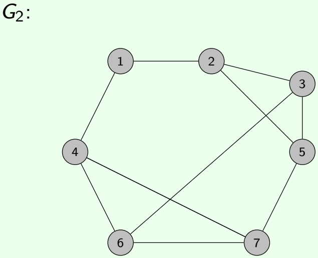
Bestimmung aller möglichen Isomorphismen:

A	$\rightarrow$		
B	$\rightarrow$	2	4
C	$\rightarrow$		
D	$\rightarrow$		
E	$\rightarrow$	1	1
F	$\rightarrow$		
G	$\rightarrow$	4	2

Der Knoten E hat zwei Nachbarknoten B und G, die somit jeweils auf 2 oder 4 abgebildet werden müssen. Es sind also zwei Fälle zu unterscheiden. Für jeden Fall muss untersucht werden, ob er zu einer isomorphen Abbildung führt! (Fallunterscheidung (i) vs. (ii))

Isomorphe Graphen





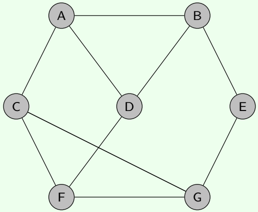
Bestimmung aller möglichen Isomorphismen:

A	$\to$	3	5	
B	$\to$	2	2	4
C	$\to$			
D	$\to$			
E	$\to$	1	1	1
F	$\to$			
G	$\to$	4	4	2

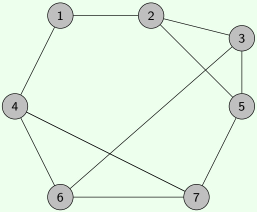
Im Fall (i) von $B \to 2$ kann nun $A \to 3$ oder $A \to 5$ abgebildet werden. Die Einträge $E \to 1$, $B \to 2$ sowie $G \to 4$ müssen hierfür in der Tabelle verdoppelt werden (weitere Fallunterscheidung (i.a) und (i.b))

Isomorphe Graphen

G_1:



G_2:



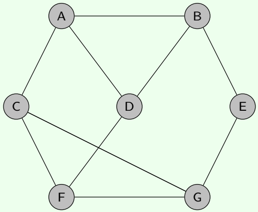
Bestimmung aller möglichen Isomorphismen:

A	$\to$	3	5	
B	$\to$	2	2	4
C	$\to$			
D	$\to$	5	3	
E	$\to$	1	1	1
F	$\to$			
G	$\to$	4	4	2

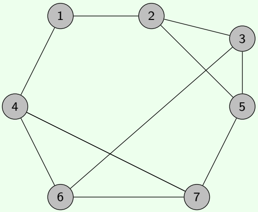
Dies impliziert (Fall (i)) unmittelbar $D \to 5$ und $D \to 3$

Isomorphe Graphen

G_1:



G_2:



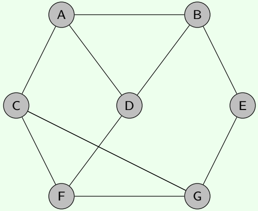
Bestimmung aller möglichen Isomorphismen:

A	$\rightarrow$	3	5	6	7
B	$\rightarrow$	2	2	4	4
C	$\rightarrow$				
D	$\rightarrow$	5	3	7	6
E	$\rightarrow$	1	1	1	1
F	$\rightarrow$				
G	$\rightarrow$	4	4	2	2

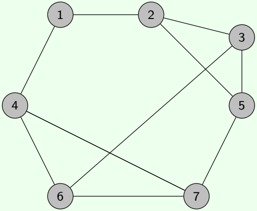
Betrachten wir nun Fall (ii), nämlich $B \rightarrow 4$ (und somit $G \rightarrow 2$). Völlig analog zu Fall (i) ergibt sich nun (wieder eine weitere Fallunterscheidung) $A \rightarrow 6$ oder $A \rightarrow 7$ und somit $D \rightarrow 7$ oder $D \rightarrow 6$

Isomorphe Graphen

G_1:



G_2:



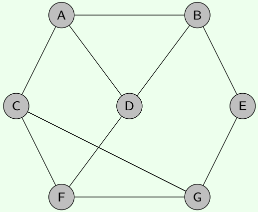
Bestimmung aller möglichen Isomorphismen:

A	$\rightarrow$	3	5	6	7
B	$\rightarrow$	2	2	4	4
C	$\rightarrow$	6			
D	$\rightarrow$	5	3	7	6
E	$\rightarrow$	1	1	1	1
F	$\rightarrow$	7			
G	$\rightarrow$	4	4	2	2

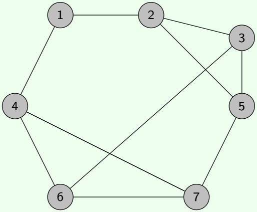
Wir betrachten nun die erste Spalte. Die Knoten A, B, D, bzw. 2, 3, 5 sind untereinander direkt durch eine Kante verbunden. Da die Kanten $[D, F]$ bzw. $[A, C]$ in G_1 existieren, muss im Falle von $A \rightarrow 3$ die Zuordnung $C \rightarrow 6$ gemacht werden, was unmittelbar $F \rightarrow 7$ ergibt. Insbesondere muss der Kreis $[A, C], [C, F], [F, D], [F, A]$ durch den Isomorphismus erhalten bleiben, also $[\phi(A), \phi(C)], [\phi(C), \phi(F)], [\phi(F), \phi(D)], [\phi(F), \phi(A)] = [3, 6], [6, 7], [7, 5], [5, 3]$, was gegeben ist. Somit ist die erste Spalte ein gültiger Isomorphismus.

Isomorphe Graphen

G_1:



G_2:



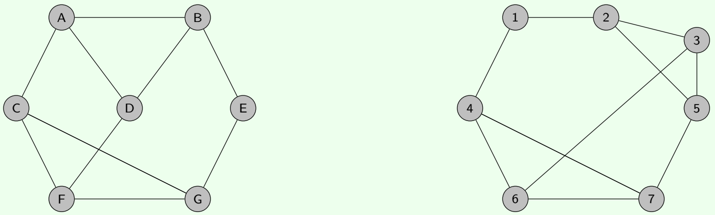
Bestimmung aller möglichen Isomorphismen:

A	$\rightarrow$	3	5	6	7
B	$\rightarrow$	2	2	4	4
C	$\rightarrow$	6	7		
D	$\rightarrow$	5	3	7	6
E	$\rightarrow$	1	1	1	1
F	$\rightarrow$	7	6		
G	$\rightarrow$	4	4	2	2

Analog zum vorigen Fall, erhalten wir ebenso einen gültigen Isomorphismus

Isomorphe Graphen

G_1: G_2:



Bestimmung aller möglichen Isomorphismen:

A	$\rightarrow$	3	5	6	7
B	$\rightarrow$	2	2	4	4
C	$\rightarrow$	6	7	3	5
D	$\rightarrow$	5	3	7	6
E	$\rightarrow$	1	1	1	1
F	$\rightarrow$	7	6	5	3
G	$\rightarrow$	4	4	2	2

Mit der analogen Argumentation wie zu Spalten 1 und 2 erhalten wir auch für die Spalten 3 und 4 gültige Isomorphismen.

Aufgabe 1.2

Bestimmen Sie alle Isomorphismen zu den gegebenen Gruppoiden $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$.

*	1	2	3	4	5
1	3	4	3	5	2
2	2	2	4	3	4
3	4	4	1	5	5
4	2	5	1	3	3
5	3	5	1	2	2

$\circ$	a	b	c	d	e
a	c				
b			b		
c					
d					
e					a

Aufgabe 1.3

Bestimmen Sie alle Isomorphismen zu den gegebenen Gruppoiden $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$.

*	1	2	3	4	5
1	3	2	5	1	4
2	4	4	3	4	5
3	1	1	4	2	4
4	3	4	3	1	2
5	5	5	1	3	3

∘	a	b	c	d	e
a	c				
b			b		
c					
d					c
e					

Aufgabe 1.4

Bestimmen Sie alle Isomorphismen zu den gegebenen Gruppoiden $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$.

*	v	w	x	y	z
v	x	v	w	w	x
w	z	y	z	w	v
x	v	z	x	z	y
y	y	w	w	x	z
z	v	w	v	z	y

∘	1	2	3	4	5
1			3		
2		5			
3					
4			4		
5					

Aufgabe 1.5

Bestimmen Sie alle Isomorphismen zu den gegebenen Gruppoiden $\langle A, \circ \rangle$ und $\langle B, * \rangle$.

$\circ$	1	2	3	4	5
1					
2			4		
3					
4	1				
5			5		

*	a	b	c	d	e
a	b	c	a	d	d
b	a	a	d	c	e
c	e	a	b	b	c
d	b	a	c	c	e
e	b	a	e	d	e

Aufgabe 1.5

Bestimmen Sie alle Isomorphismen zu den gegebenen Gruppoiden $\langle A, \circ \rangle$ und $\langle B, * \rangle$.

$\circ$	1	2	3	4	5
1					
2			4		
3					
4	1				
5			5		

*	a	b	c	d	e
a	b	c	a	d	d
b	a	a	d	c	e
c	e	a	b	b	c
d	b	a	c	c	e
e	b	a	e	d	e

Anmerkung: Durch Start mit der Gleichung $5 \circ 3 = 5$ kann man in die weitere Analyse auf drei Fälle ($a * c = a$, $c * e = c$ und $e * c = e$) beschränken!

Aufgabe 1.6

Bestimmen Sie alle Isomorphismen zu den gegebenen Gruppoiden $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$.

*	1	2	3	4	5
1	2	5	3	5	1
2	4	3	1	1	3
3	1	4	1	4	5
4	2	5	5	2	4
5	5	1	2	2	3

∘	a	b	c	d	e
a		e		e	
b			c		
c					
d					
e					

Aufgabe 1.6

Bestimmen Sie alle Isomorphismen zu den gegebenen Gruppoiden $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$.

$*$	1	2	3	4	5
1	2	5	3	5	1
2	4	3	1	1	3
3	1	4	1	4	5
4	2	5	5	2	4
5	5	1	2	2	3

$\circ$	a	b	c	d	e
a		e		e	
b			c		
c					
d					
e					

Lösung:

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	$\rightarrow$	a		e	e		c	c	c	c
2	$\rightarrow$	b	d	a	a		b	d	e	e
3	$\rightarrow$	c	c	b	d	a	d	b	b	d
4	$\rightarrow$	d	b	d	b	e	a	a	d	b
5	$\rightarrow$	e		c	c		e	e	a	a
		↯	↯	✓	↯	↯	↯	✓	✓	↯

Aufgabe 1.7

Bestimmen Sie alle Isomorphismen zu den gegebenen Gruppoiden $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$.

*	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	3
2	3	5	1	3	1
3	4	1	2	2	5
4	2	5	3	3	2
5	4	1	5	1	4

$\circ$	a	b	c	d	e
a				b	
b					
c					a
d	b				
e					

Aufgabe 1.8

Bestimmen Sie alle Isomorphismen zu den gegebenen Gruppoiden $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$.

*	1	2	3	4	5
1	5	4	2	4	1
2	3	5	1	5	3
3	1	2	3	4	4
4	5	4	5	5	3
5	3	2	5	5	1

∘	a	b	c	d	e
a		d			
b					
c			d		
d			c		
e					

Aufgabe 1.8

Bestimmen Sie alle Isomorphismen zu den gegebenen Gruppoiden $\langle A, * \rangle$ und $\langle B, \circ \rangle$.

$*$	1	2	3	4	5
1	5	4	2	4	1
2	3	5	1	5	3
3	1	2	3	4	4
4	5	4	5	5	3
5	3	2	5	5	1

$\circ$	a	b	c	d	e
a		d			
b					
c			d		
d			c		
e					

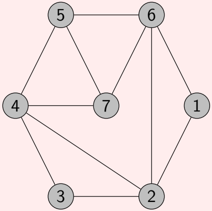
Lösung:

1→e, 2→c, 3→b, 4→a, 5→d
1→b, 2→c, 3→e, 4→a, 5→d

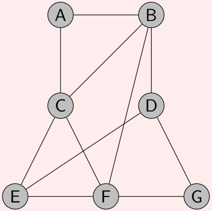
Aufgabe 1.8

- Welche der folgenden Graphen sind zueinander isomorph? Gegeben Sie gegebenenfalls *alle* Isomorphismen an!

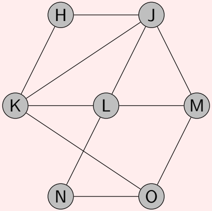
Graph X



Graph Y



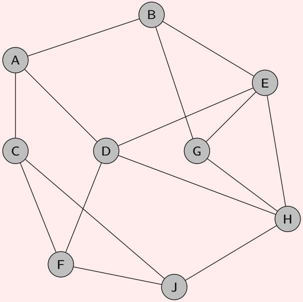
Graph Z



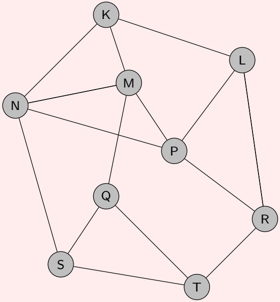
Aufgabe 1.9

- Welche der folgenden Graphen X, Y und Z sind zueinander isomorph? Gegeben Sie gegebenenfalls *alle* Isomorphismen an!

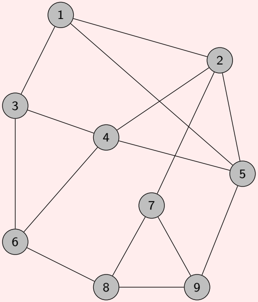
Graph X



Graph Y



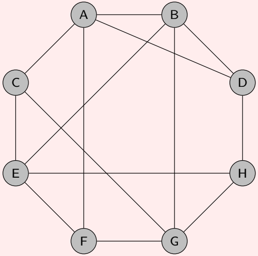
Graph Z



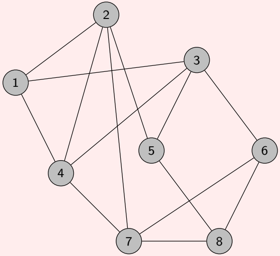
Aufgabe 1.10

- Welche der folgenden Graphen sind zueinander isomorph? Gegeben Sie gegebenenfalls *alle* Isomorphismen an!

Graph G_1:



Graph G_2:



Graph G_3: