Graphentheorie: Spezielle Graphen

Programmieren und Software-Engineering
Theorie

23. Juni 2022

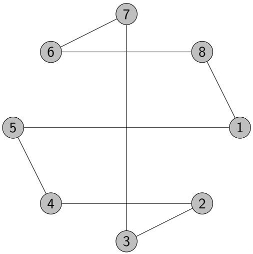
k-regulärer Graph (1)

Definition (Regulärer Graph)

Ein einfacher ungerichteter Graph G heißt *regulär* vom Grad k wenn alle Knoten v den gleichen Knotengrad k haben, also:

$$\forall v \in V : d(v) = k.$$

Beispiel: 2-regulärer Graph



Handshaking Lemma

Eine Kante trägt zur Summe aller Knotengrade den Wert 2 bei. Somit muss die Summe aller Knotengrade immer gerade sein. Insbesondere gilt für **alle ungerichteten Graphen** das

Lemma (Handshaking-Lemma)

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

Folgerung: Jeder ungerichtete Graph besitzt eine *gerade Anzahl* an Knoten mit *ungeradem Grad*.

Beispiel: 4-regulärer Graph mit 12 Knoten

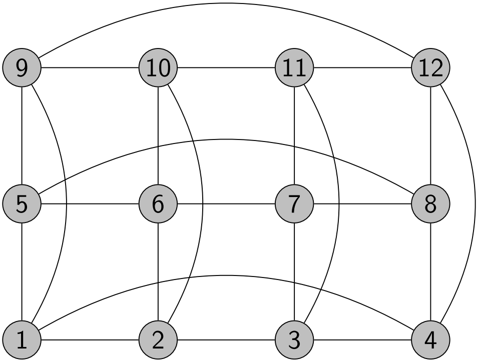
Übungsaufgabe

Konstruieren Sie einen zusammenhängenden, schlichten 4-regulären Graphen mit 12 Knoten

Beispiel: 4-regulärer Graph mit 12 Knoten

Übungsaufgabe

Konstruieren Sie einen zusammenhängenden, schlichten 4-regulären Graphen mit 12 Knoten



Konstruktive Erweiterung von 4-regulären Graphen

Übungsaufgabe

Finden Sie ein Verfahren (Algorithmus) zur Erweiterung von 4-regulären Graphen, d.h. weitere Knoten sollen hinzugefügt werden, und der Graph 4-regulär bleiben!

Konstruktive Erweiterung von 4-regulären Graphen

Übungsaufgabe

Finden Sie ein Verfahren (Algorithmus) zur Erweiterung von 4-regulären Graphen, d.h. weitere Knoten sollen hinzugefügt werden, und der Graph 4-regulär bleiben!

- Starte mit 4-regulärem Graphen
- Lösche zwei *nicht adjazente* Kanten
- Füge Knoten hinzu
- Füge vier neue Kanten ein, die jeweils den neuen Knoten mit den zu den gelöschten Kanten inzidenten Knoten verbinden

Konstruktive Erweiterung von 3-regulären Graphen

Übungsaufgabe

Wie kann dieser Algorithmus zur konstruktiven Erweiterung von 3-regulären Graphen angepasst werden?

Konstruktive Erweiterung von 3-regulären Graphen

Übungsaufgabe

Wie kann dieser Algorithmus zur konstruktiven Erweiterung von 3-regulären Graphen angepasst werden?

- Aufgrund des *Handshaking-Lemmas* kann ein Graph nur eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad haben.
- Obiger Algorithmus kann verwendet werden, wenn **2 Knoten** zu einem bestehenden 3-regulären Graphen hinzugefügt werden.
- Man entfernt also 2 nicht adjazente Kanten.
- Dann werden zwei Knoten hinzugefügt und mit einer Kante verbunden.
- Den ersten hinzugefügten Knoten verbindet man nun mit jenen beiden Knoten die zur ersten entfernten Kante inzident waren.
- Mit dem zweiten hinzugefügten Knoten verfährt man analog.

Reguläre Graphen

Aufgabe: 3-regulärer Graph

Konstruieren Sie einen schlichten und zusammenhängenden 3-regulären Graphen mit 5 Knoten.

Reguläre Graphen

Aufgabe: 3-regulärer Graph

Konstruieren Sie einen schlichten und zusammenhängenden 3-regulären Graphen mit 5 Knoten.

Dies ist aufgrund des Handshaking-Lemmas unmöglich. Die Summe aller Knotengrade $\sum_{v \in v} d(v) = 5 \cdot 3 = 15$. Somit müsste gelten $|E| = 15/2$, was nicht möglich ist, da die Anzahl der Kanten stets ganzzahlig sein muss!

Vollständiger Graph (1)

Definition (Vollständiger Graph K_n)

Ein Graph G mit $n = |V|$ Knoten heißt vollständiger Graph K_n, wenn er regulär vom Grad $n-1$ ist.

Bemerkung: In einem vollständigen Graphen sind somit alle Knoten direkt miteinander verbunden.

Vollständiger Graph (1)

Definition (Vollständiger Graph K_n)

Ein Graph G mit $n = |V|$ Knoten heißt vollständiger Graph K_n, wenn er regulär vom Grad $n - 1$ ist.

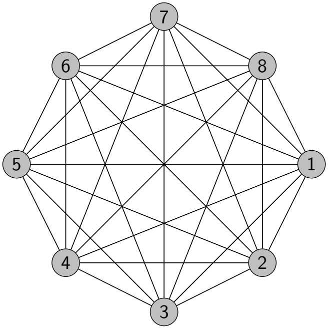
Bemerkung: In einem vollständigen Graphen sind somit alle Knoten direkt miteinander verbunden.

Eigenschaft: Jeder K_n hat genau $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Kanten:

$$|E| = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Vollständiger Graph (2)

Beispiel: Vollständiger Graph $G = K_8$



Komplementärgraph (1)

Sei $G = (V, E)$ ein schlichter Graph, und K die Menge aller zwei-elementiger Teilmengen von V

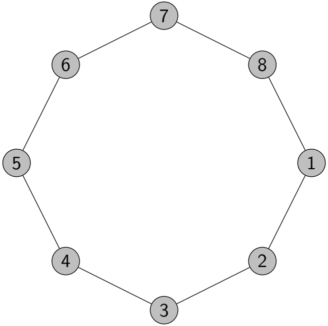
Definition (Komplementärer Graph)

$G' = (V, K \setminus E)$ ist der komplementäre Graph zu $G = (V, E)$.

Bemerkung: Der komplementäre Graph G' besitzt also eine Kante zwischen den Knoten i und j *genau dann*, wenn sie *nicht* im ursprünglichen Graphen G enthalten ist.

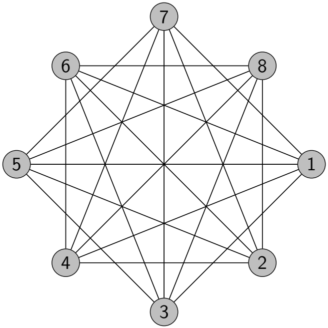
Komplementärgraph (2)

Beispiel: Graph G



Komplementärgraph (3)

Beispiel: der komplementäre Graph G' zu G sieht folgendermaßen aus:



Bipartite Graphen (1)

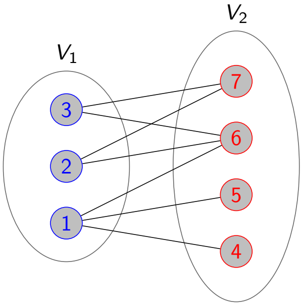
Definition (Bipartiter Graph)

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit* wenn eine Partitionierung der Knoten V in zwei disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 existiert, sodaß für jede Kante $\left[i, j\right] \in E$ gilt, dass entweder $i \in V_1$ und $j \in V_2$, oder andererseits $i \in V_2$ und $j \in V_1$.

Bemerkung: Man stellt sich am besten eine Knotenmenge auf der linken Seite, und eine auf der rechten Seite vor. Kanten verlaufen nur von links nach rechts (und umgekehrt), aber niemals zwischen Knoten einer der beiden Mengen.

Bipartite Graphen (2)

Beispiel:



Übungsaufgaben

Übungsaufgaben

2.1 Konstruieren sie einen schlichten Graphen mit 12 Knoten der jeweils 3 Knoten vom Grad 3, 4, 5 und 6 enthält. Knoten gleichen Grades dürfen nicht adjazent sein.

Übungsaufgaben

Übungsaufgaben

2.1 Konstruieren sie einen schlichten Graphen mit 12 Knoten der jeweils 3 Knoten vom Grad 3, 4, 5 und 6 enthält. Knoten gleichen Grades dürfen nicht adjazent sein.

2.2 Konstruieren Sie einen schlichten, zusammenhängenden Graphen mit 14 Knoten, der jeweils

- 4 Knoten vom Grad 6,
- 2 Knoten vom Grad 5,
- 4 Knoten vom Grad 4,
- 2 Knoten vom Grad 3, und
- 2 Knoten vom Grad 2 hat.

Knoten gleichen Grades dürfen nicht adjazent sein, Knoten vom Grad 2 sollen nicht adjazent zu Knoten vom Grad 3 und Grad 4 sein.

Teilgraphen (1)

Definition (Teilgraph)

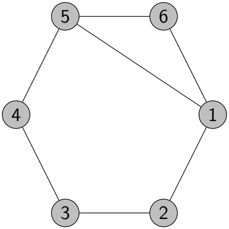
Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *Teilgraph*, *Subgraph* oder *Untergraph* von $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ (und für alle $[i, j] \in E'$ gilt $i \in V'$ und $j \in V'$)

Definition (Obergraph)

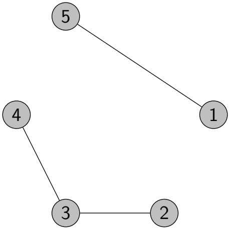
Ein Graph G ist *Obergraph* eines Graphen G' wenn G' Teilgraph von G ist.

Teilgraphen (2)

Beispiel: Graph G



Beispiel: Teilgraph G' von G



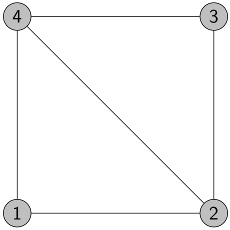
Unterteilungsgraph

Definition (Unterteilungsgraph)

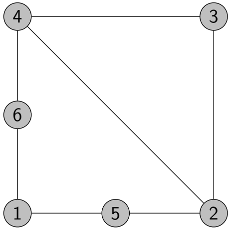
Ein Unterteilungsgraph ist ein Graph, der durch Kantenunterteilung aus einem anderen Graph entstanden ist.

Anmerkung: In einem Unterteilungsgraphen wird "auf einer Kante" ein neuer Knoten eingefügt. Formal wird eine Kante $[u, v]$ entfernt, ein neuer Knoten w dem Graphen hinzugefügt, und dann Kanten $[u, w]$ und $[w, v]$ hinzugefügt.

Beispiel: Graph G



Beispiel: Unterteilungsgraph von G



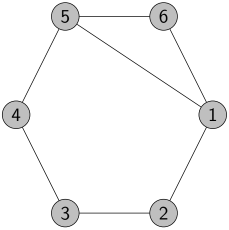
Spannender Teilgraph

Definition (Spannender Teilgraph)

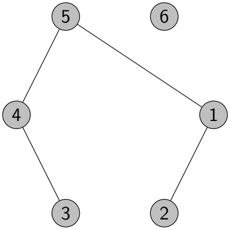
Ein Teilgraph $G' = (V', E')$ heißt *spannender Teilgraph* von $G = (V, E)$ wenn $V' = V$ und $E' \subseteq E$.

Bemerkung: Ein spannender Teilgraph G' besitzt also alle Knoten von G, jedoch nicht unbedingt alle Kanten von G (eventuell auch gar keine).

Beispiel: Graph G



Beispiel: Teilgraph G' von G



Gesättigter Teilgraph (1)

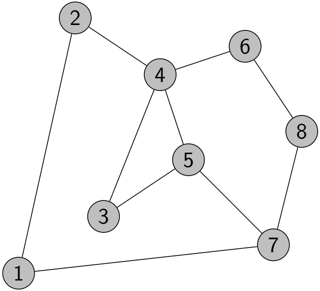
Definition (Gesättigter Teilgraph)

Sei $G' = (V', E')$ ein Teilgraph von $G = (V, E)$. Enthält E' alle Kanten aus E deren Endpunkte in V' liegen, so sagt man, dass G' von $V' \subseteq V$ in G aufgespannt wird, oder dass G' ein *gesättigter Teilgraph* von G ist.

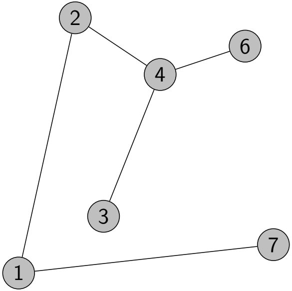
Bemerkung: Ein gesättigter Teilgraph enthält also bezüglich einer Teilmenge von Knoten alle Kanten des ursprünglichen Graphen. Es fehlen also alle Kanten, die zu den fehlenden Knoten inzident sind.

Gesättigter Teilgraph (2)

Graph G mit 8 Knoten



Gesättigter Teilgraph G' mit 6 Knoten von G



Übungsaufgaben

2.3 Konstruieren Sie einen schlichten 4-regulären Graphen G mit $|V| = 8$ mit Knotenbeschriftungen (A, B, C, ...).

- Zeichnen Sie einen spannenden Teilgraphen G' von G mit $|E'| = 6$.
- Zeichnen Sie einen gesättigten Teilgraphen G'' von G mit $|V''| = 5$.

Übungsaufgaben

2.3 Konstruieren Sie einen schlichten 4-regulären Graphen G mit $|V| = 8$ mit Knotenbeschriftungen (A, B, C, ...).
- Zeichnen Sie einen spannenden Teilgraphen G' von G mit $|E'| = 6$.
- Zeichnen Sie einen gesättigten Teilgraphen G'' von G mit $|V''| = 5$.

2.4 Hintergrund: Ein Springer soll auf einem Schachbrett so gezogen werden, dass er jedes Feld genau einmal besucht, und wieder zum Ausgangspunkt zurückkommt. Wie sieht der Graph G aus, der dieses Problem beschreibt, also der Graph der alle möglichen Züge des Springers auf dem Schachbrett enthält. Fragestellung: Wieviele Kanten hat der Graph?

Aufgabe 2.5: In einer Kleinstadt gibt es 10 Märkte...

1. Vom Bäckermarkt führen breite Straßen in alle vier Himmelsrichtungen zu vier weiteren Märkten. Diese sind wiederum ringförmig miteinander verbunden.
2. In den Fischmarkt münden vier Straßen, davon aber keine vom Pferdemarkt.
3. Nur an zwei Märkten münden mehr als drei Straßen.
4. Es gibt keine Sackgassen.
5. Der Schweinemarkt, Milchmarkt, Naschmarkt und Heumarkt sind jeweils nicht direkt durch eine Straße miteinander verbunden.
6. Vom Getreidemarkt erreicht man direkt den Heumarkt, den Rindermarkt und den Milchmarkt.
7. Vom Kohlmarkt führen drei Straßen zum Heumarkt, Rindermarkt und Fischmarkt, die jeweils aber nicht direkt durch eine Straße miteinander verbunden sind.

Konstruieren Sie einen Graphen, der einer Skizze des Stadtplanes der Kleinstadt nach den obigen Angaben entspricht.