Graphentheorie: Beispiel 2.4: Springer (Schach)

Andreas M. Chwatal

Programmieren und Software-Engineering
Theorie

11. Oktober 2020

Aufgabe 2.4

Ein Springer soll auf einem Schachbrett so gezogen werden, dass er jedes Feld genau einmal besucht, und wieder zum Ausgangspunkt zurückkommt. Wie sieht der Graph G aus, der dieses Problem beschreibt? Wieviele Kanten hat der Graph?

Die Lösung soll im Graphen enthalten sein, konkret ist jedoch nicht die Lösung gesucht, sondern der Graph der alle möglichen Springerzüge entält. Zu diesem Graphen soll die Anzahl der Kanten berechnet werden.

Die Lösung selbst ist sehr schwierig zu finden. Es handelt sich um einen Spezialfall des Problems eines Hamilton-Kreises (siehe Kapitel "Kantenfolgen"). Die Lösung ist hier nicht gesucht!

Überlegungen

- Jedem der 64 Felder des Schachbrettes entspricht ein Knoten.
- In der Mitte des Brettes kann ein Springer 8 mögliche Züge ausführen.
- Das entspicht einem Knoten mit Grad 8.
- Zum Rand hin verringert sich jedoch die Anzahl der möglichen Züge.

Wir betrachten die Knotengrade des oberen linken Viertels des Schachbrettes. Wir können hier die Symmetrie des Brettes benutzen und dadurch Rechenaufwand einsparen. Das Ergebnis bezüglich des viertel Brettes wird dann einfach auf das ganze Brett hochgerechnet.

2	3	4	4
3	4	6	6
4	6	8	8
4	6	8	8

Lösung (Anzahl Kanten)

Die Summe der Knotengrade des viertel Bretts beträgt 84. Für das gesamte Brett erhalten wir also $4 \cdot 84$, oder in anderen Worten:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 4 \cdot 84.$$

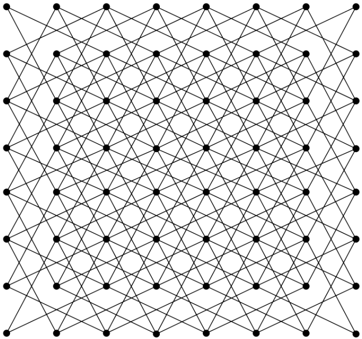
Es gilt

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

und somit

$$|E| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 84 = 168.$$

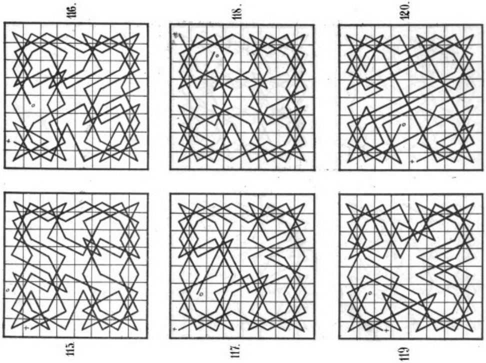
Zugrundeliegender Graph



Quelle: Wikipedia

Die Springertour (nicht gefragt)

Beispiele für die geschlossenen Springertouren, die man durch Ermittlung des Hamilton-Kreises für den vorigen Graphen erhält.



Quelle: Wikipedia