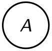
Reguläre Sprachen und Endliche Automaten

Programmieren und Software-Engineering
Homomorphismen, Formale Sprachen und Syntax-Analyse

22. Februar 2023

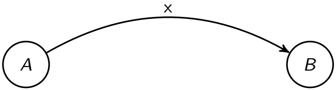
Einleitung

- Worte regulärer Sprachen können durch **Endliche Automaten** auf syntaktische Korrektheit überprüft werden.
- Ein *Endliche Automat* ist ein abstraktes Konzept, bestehend aus:
  - **Zuständen** (dargestellt durch Knoten):
    - Ein Startknoten 

    - Allgemeine Knoten 

    - Ein oder mehrere Endknoten 

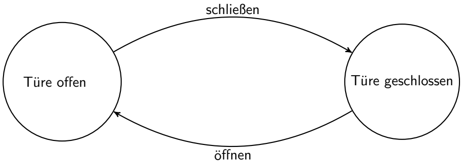
  - **Zustandsübergängen:**
    - dargestellt durch Kanten mit Beschriftung (Aktion der Zustandsänderung, z.B. eingelesenes Zeichen)



- Ein endlicher Automat ist also ein gerichteter Graph

Echtwelt-Beispiel: Endlicher Automat

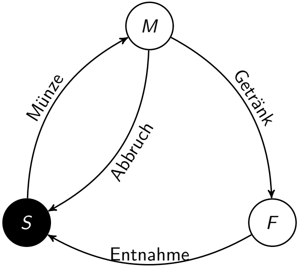
- Automaten *beschreiben* also reguläre Sprachen...
- ... jedoch auch Anwendungen/Maschinen ("Automaten") der "echten Welt"
- Beispiel eines Endlichen Automaten der eine Türe beschreibt:



- Zustände: Türe offen oder geschlossen
- "schließen" und "öffnen" sind Zustandsübergänge

Echtwelt-Beispiel: Getränke-Automat

Beispiel: Getränkeautomat:

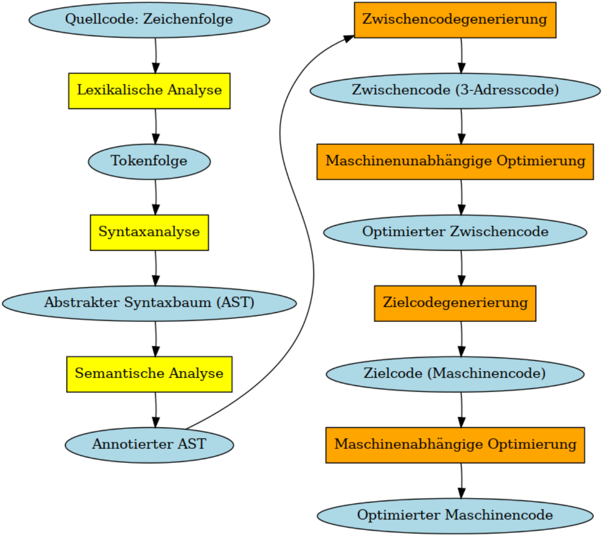


- Startzustand S (in dieser Abbildung durch einen Pfeil gekennzeichnet)
- Getränkeausgabe erst von Zustand M aus möglich
- Mit Münze gelangt man von S zu M
- Von M (also nach eingeworfener Münze) kann man entweder Abbrechen, oder ein Getränk wird ausgegeben.
- Nach ausgegebenem Getränk (Zustand G) ist die Entnahme möglich. Erst nach der Entnahme akzeptiert der Automat in S wieder weitere Münzen.

Syntaxanalyse in Compilern

- Viele Elemente von Programmiersprachen werden durch reguläre Sprachen beschrieben.
- Erster Schritt der Compilierung ist die *Syntaxanalyse*.
- Die erste Phase dabei ist die *lexikalische Analyse* ("Scanner", "Lexer")
- In der lexikalischen Analyse wird der Quelltext in zusammengehörige Einheiten "Tokens" zerteilt.
- Die Tokens werden dann *Schlüsselworten* (Keywords) oder *Bezeichnern* (Identifiers) zugeordnet.
- Bezeichner können anhand endlicher Automaten auf Korrektheit geprüft werden.
- Die Phasen eines Compilers sind auf der nächsten Folie dargestellt.

Phasen eines Compilers

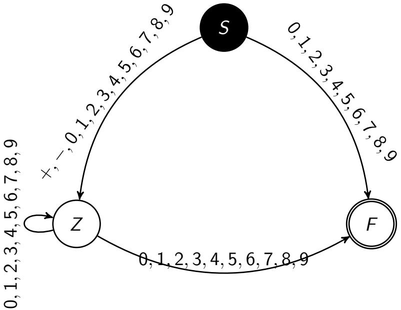


Automaten als Akzeptoren

- Ein endlicher Automat überprüft Worte regulärer Sprachen auf Korrektheit, d.h. er **akzeptiert** syntaktisch korrekte Worte (syntaktisch falsche Worte werden nicht akzeptiert).
- Dabei liest der Automat Zeichen für Zeichen des Wortes, und führt entsprechende Zustandsübergänge durch.
- Ein Wort ist gültig, wenn sich der Automat nach dem letzten gelesenen Zeichen in einem Endzustand befindet.
- Ein Wort ist ungültig, wenn es zu einem gelesenen Zeichen keinen entsprechenden Zustandsübergang gibt, oder wenn nach dem letzten gelesenen Zeichen kein Endzustand erreicht wurde.

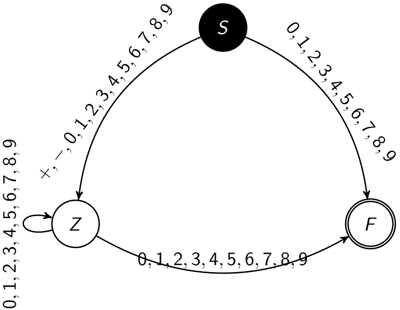
Sprache der ganzen Zahlen (mit führenden 0en, oder ± 0)

Konvention: wenn Startsymbol nicht explizit angegeben, dann "S".



Sprache der ganzen Zahlen (mit führenden 0en, oder ± 0)

Konvention: wenn Startsymbol nicht explizit angegeben, dann "S".

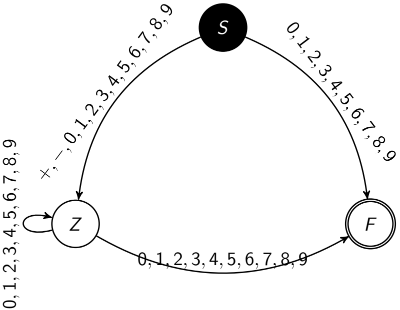


Beispiel:
Ableitung von -144

$\langle S \rangle \Rightarrow$ - $\langle Z \rangle$
$\langle Z \rangle \Rightarrow 1 \ \langle Z \rangle$
$\langle Z \rangle \Rightarrow 4 \ \langle Z \rangle$
$\langle Z \rangle \Rightarrow 4$

Sprache der ganzen Zahlen (mit führenden 0en, oder ± 0)

Konvention: wenn Startsymbol nicht explizit angegeben, dann “S”.



Beispiel:
Ableitung von -144

$\langle S \rangle \Rightarrow$ - $\langle Z \rangle$
$\langle Z \rangle \Rightarrow 1 \; \langle Z \rangle$
$\langle Z \rangle \Rightarrow 4 \; \langle Z \rangle$
$\langle Z \rangle \Rightarrow 4$

$T = \{+, -, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$N = \{S, Z\}$
$P = \{S \rightarrow$ +Z|-Z|0Z|1Z|2Z|3Z|4Z|5Z|6Z|7Z|8Z|9Z|0|1|2|3|4|5|6|7|8|9,
Z $\rightarrow$ 0Z|1Z|2Z|3Z|4Z|5Z|6Z|7Z|8Z|9Z|0|1|2|3|4|5|6|7|8|9$\}$

Sprache der ganzen Zahlen (ohne führende 0en, ohne $\pm$ 0)

Aufgabe 3.10

Adaptieren Sie die Grammatik der Sprache der ganzen Zahlen mit führenden 0en, sodaß diese nicht mehr möglich sind, und ebenso $\pm 0 \ldots$ ausgeschlossen wird.

Sprache der ganzen Zahlen (ohne führende 0en, ohne $\pm$ 0)

Aufgabe 3.10

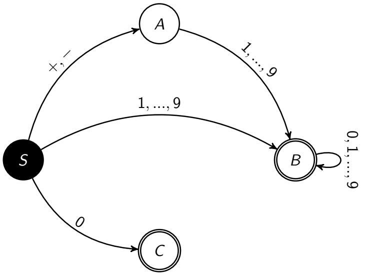
Adaptieren Sie die Grammatik der Sprache der ganzen Zahlen mit führenden 0en, sodaß diese nicht mehr möglich sind, und ebenso ± 0... ausgeschlossen wird.

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\rightarrow +\mathrm{A}|\text{-}\mathrm{A}|1\mathrm{B}|2\mathrm{B}|3\mathrm{B}|4\mathrm{B}|5\mathrm{B}|6\mathrm{B}|7\mathrm{B}|8\mathrm{B}|9\mathrm{B}|0|1|2|3|4|5|6|7|8|9, \\
\mathrm{A} &\rightarrow 1\mathrm{B}|2\mathrm{B}|3\mathrm{B}|4\mathrm{B}|5\mathrm{B}|6\mathrm{B}|7\mathrm{B}|8\mathrm{B}|9\mathrm{B}|1|2|3|4|5|6|7|8|9, \\
\mathrm{B} &\rightarrow 0\mathrm{B}|1\mathrm{B}|2\mathrm{B}|3\mathrm{B}|4\mathrm{B}|5\mathrm{B}|6\mathrm{B}|7\mathrm{B}|8\mathrm{B}|9\mathrm{B}|0|1|2|3|4|5|6|7|8|9\}
\end{aligned}
$$

Deterministischer Endlicher Automat

- Bei einem *deterministischen endlichen Automaten* sind die Zustandsübergänge *eindeutig*!
- Bei den Kantenbeschriftungen der von einem Knoten auslaufenden Kanten kommt eine Beschriftung also nur ein mal vor.

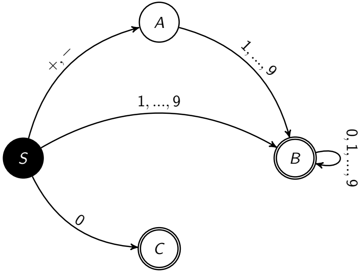
Beispiel: Deterministischer endlicher Automat (DEA) für die Sprache der Ganzen Zahlen ohne führende 0en und ohne $\pm$ 0:



Deterministischer Endlicher Automat

- Bei einem *deterministischen endlichen Automaten* sind die Zustandsübergänge *eindeutig*!
- Bei den Kantenbeschriftungen der von einem Knoten auslaufenden Kanten kommt eine Beschriftung also nur ein mal vor.

Beispiel: Deterministischer endlicher Automat (DEA) für die Sprache der Ganzen Zahlen ohne führende 0en und ohne $\pm$ 0:



$$
\begin{aligned}
T &= \{+, -, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
N &= \{S, A, B\} \\
P &= \{S \rightarrow +\mathrm{A}|\text{-}\mathrm{A}|1\mathrm{B}|2\mathrm{B}|...|9\mathrm{B}|0|1|...|9, \\
&\qquad \mathrm{A} \rightarrow 1\mathrm{B}|2\mathrm{B}|...|9\mathrm{B}|1|...|9, \\
&\qquad \mathrm{B} \rightarrow 0\mathrm{B}|1\mathrm{B}|2\mathrm{B}|...|9\mathrm{B}|0|1|...|9\ \}
\end{aligned}
$$

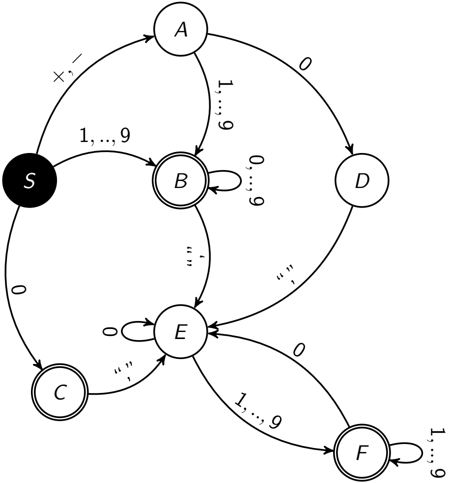
Sprache der reellen Zahlen

$$
\begin{aligned}
P = \{ S &\rightarrow \text{+A|-A|1B|2B|3B|4B|5B|6B|7B|8B|9B|0C|0|1|...|9;}\\
\text{A} &\rightarrow \text{1B|2B|3B|4B|5B|6B|7B|8B|9B|0D|1|...|9;}\\
\text{B} &\rightarrow \text{0B|1B|2B|3B|4B|5B|6B|7B|8B|9B|,E;}\\
\text{C} &\rightarrow \text{,E;}\\
\text{D} &\rightarrow \text{,E;}\\
\text{E} &\rightarrow \text{0E|1F|2F|3F|4F|5F|6F|7F|8F|9F|1|...|9;}\\
\text{F} &\rightarrow \text{0E|1F|2F|3F|4F|5F|6F|7F|8F|9F|1|...|9}\\
\}
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Hier wird der Strichpunkt als Trennzeichen für die einzelnen Produktionsregeln verwendet.

Endlicher Automat (Finite State Machine)

Erkennung einer rationalen Zahl (z.B. -0,425) durch einen endlichen Automaten.
Nicht gültig wären ("00,4" oder "-,3" oder "3,000" oder "01,")



Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \qquad\qquad\qquad\qquad // \text{ G1W2} \\
&\qquad B \rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad // \text{ G1W1} \\
&\qquad C \rightarrow \\
&\qquad D \rightarrow \\
&\qquad E \rightarrow \\
&\qquad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} && \text{// G1W2} \\
&\qquad B \rightarrow && \text{// G1W1} \\
&\qquad C \rightarrow \\
&\qquad D \rightarrow \\
&\qquad E \rightarrow \\
&\qquad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte “dda” und “bdcb” *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} && \text{// G1W2} \\
&\qquad B \rightarrow && \text{// G1W1} \\
&\qquad C \rightarrow \\
&\qquad D \rightarrow \\
&\qquad E \rightarrow \\
&\qquad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... “Gefahrenstufe x, Wort y”

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad\; T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad\; A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && \text{// G1W2} \\
&\quad\; B \rightarrow && \text{// G1W1} \\
&\quad\; C \rightarrow && \text{// G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\quad\; D \rightarrow \\
&\quad\; E \rightarrow \\
&\quad\; \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte “dda” und “bdcb” *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W2} \\
&\qquad B \rightarrow \mathrm{aT} && // \text{ G1W1} \\
&\qquad C \rightarrow && // \text{ G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\qquad D \rightarrow \\
&\qquad E \rightarrow \\
&\qquad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... “Gefahrenstufe x, Wort y”

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \mid \text{cT} \mid \text{dB} \mid \text{a} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, \\
&\qquad T \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \mid \text{cT} \mid \text{dB} \mid \text{a} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, \\
&\qquad A \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \mid \text{cT} \mid \text{dC} \mid \text{a} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, \qquad // \text{ G1W2} \\
&\qquad B \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \qquad // \text{ G1W1} \\
&\qquad C \rightarrow \qquad // \text{ G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\qquad D \rightarrow \\
&\qquad E \rightarrow \\
&\qquad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\}\\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\}\\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d},\\
&\qquad T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d},\\
&\qquad A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && //\ \mathrm{G1W2}\\
&\qquad B \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} && //\ \mathrm{G1W1}\\
&\qquad C \rightarrow && //\ \mathrm{G2W2} \wedge \mathrm{G1W1}\\
&\qquad D \rightarrow\\
&\qquad E \rightarrow\\
&\qquad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad\ T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad\ A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && \text{// G1W2} \\
&\quad\ B \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} && \text{// G1W1} \\
&\quad\ C \rightarrow && \text{// G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\quad\ D \rightarrow && \text{// G2W1} \\
&\quad\ E \rightarrow \\
&\quad\ \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte “dda” und “bdcb” *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W2} \\
&\qquad B \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W1} \\
&\qquad C \rightarrow && // \text{ G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\qquad D \rightarrow && // \text{ G2W1} \\
&\qquad E \rightarrow \\
&\qquad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... “Gefahrenstufe x, Wort y”

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad\; T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad\; A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W2} \\
&\quad\; B \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W1} \\
&\quad\; C \rightarrow \mathrm{aT} \mid && // \text{ G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\quad\; D \rightarrow && // \text{ G2W1} \\
&\quad\; E \rightarrow \\
&\quad\; \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad\; T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad\; A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && \text{// G1W2} \\
&\quad\; B \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && \text{// G1W1} \\
&\quad\; C \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid && \text{// G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\quad\; D \rightarrow && \text{// G2W1} \\
&\quad\; E \rightarrow \\
&\quad\; \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \ \mathrm{G1W2} \\
&\qquad B \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \ \mathrm{G1W1} \\
&\qquad C \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cE} \mid && // \ \mathrm{G2W2} \wedge \mathrm{G1W1} \\
&\qquad D \rightarrow && // \ \mathrm{G2W1} \\
&\qquad E \rightarrow && // \ \mathrm{G3W2} \\
&\qquad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W2} \\
&\quad B \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W1} \\
&\quad C \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cE} \mid \mathrm{dD} \mid && // \text{ G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\quad D \rightarrow && // \text{ G2W1} \\
&\quad E \rightarrow && // \text{ G3W2} \\
&\quad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W2} \\
&\quad B \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W1} \\
&\quad C \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cE} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\quad D \rightarrow && // \text{ G2W1} \\
&\quad E \rightarrow && // \text{ G3W2} \\
&\quad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && \text{// G1W2} \\
&\quad B \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && \text{// G1W1} \\
&\quad C \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cE} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && \text{// G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\quad D \rightarrow \mathrm{bA} \mid && \text{// G2W1} \\
&\quad E \rightarrow && \text{// G3W2} \\
&\quad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad\;\; T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad\;\; A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W2} \\
&\quad\;\; B \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W1} \\
&\quad\;\; C \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cE} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\quad\;\; D \rightarrow \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid && // \text{ G2W1} \\
&\quad\;\; E \rightarrow && // \text{ G3W2} \\
&\quad\;\; \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \mid \text{cT} \mid \text{dB} \mid \text{a} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, \\
&\quad\; T \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \mid \text{cT} \mid \text{dB} \mid \text{a} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, \\
&\quad\; A \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \mid \text{cT} \mid \text{dC} \mid \text{a} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, && \text{// G1W2} \\
&\quad\; B \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \mid \text{cT} \mid \text{dD} \mid \text{a} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, && \text{// G1W1} \\
&\quad\; C \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \mid \text{cE} \mid \text{dD} \mid \text{a} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, && \text{// G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\quad\; D \rightarrow \text{bA} \mid \text{cT} \mid \text{dD} \mid && \text{// G2W1} \\
&\quad\; E \rightarrow && \text{// G3W2} \\
&\quad\; \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\qquad A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W2} \\
&\qquad B \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W1} \\
&\qquad C \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cE} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\qquad D \rightarrow \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G2W1} \\
&\qquad E \rightarrow && // \text{ G3W2} \\
&\qquad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \mid \text{cT} \mid \text{dB} \mid \text{a} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, \\
&\quad T \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \mid \text{cT} \mid \text{dB} \mid \text{a} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, \\
&\quad A \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \mid \text{cT} \mid \text{dC} \mid \text{a} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, \qquad // \text{ G1W2} \\
&\quad B \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \mid \text{cT} \mid \text{dD} \mid \text{a} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, \qquad // \text{ G1W1} \\
&\quad C \rightarrow \text{aT} \mid \text{bA} \mid \text{cE} \mid \text{dD} \mid \text{a} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, \qquad // \text{ G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\quad D \rightarrow \text{bA} \mid \text{cT} \mid \text{dD} \mid \text{b} \mid \text{c} \mid \text{d}, \qquad // \text{ G2W1} \\
&\quad E \rightarrow \text{aT} \mid \qquad // \text{ G3W2} \\
&\quad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\}\\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\}\\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d},\\
&\quad T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d},\\
&\quad A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && \text{// G1W2}\\
&\quad B \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && \text{// G1W1}\\
&\quad C \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cE} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && \text{// G2W2} \wedge \text{G1W1}\\
&\quad D \rightarrow \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && \text{// G2W1}\\
&\quad E \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{cT} \mid && \text{// G3W2}\\
&\quad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad T \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad A \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W2} \\
&\quad B \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W1} \\
&\quad C \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cE} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\quad D \rightarrow \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G2W1} \\
&\quad E \rightarrow \mathrm{aT} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid && // \text{ G3W2} \\
&\quad \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen.

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, T, A, B, C, D, E\} \\
P &= \{S \to \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad\; T \to \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, \\
&\quad\; A \to \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dC} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W2} \\
&\quad\; B \to \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G1W1} \\
&\quad\; C \to \mathrm{aT} \mid \mathrm{bA} \mid \mathrm{cE} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G2W2} \wedge \text{G1W1} \\
&\quad\; D \to \mathrm{bA} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dD} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d}, && // \text{ G2W1} \\
&\quad\; E \to \mathrm{aT} \mid \mathrm{cT} \mid \mathrm{dB} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{c} \mid \mathrm{d} && // \text{ G3W2} \\
&\quad\; \}
\end{aligned}
$$

GxWy ... "Gefahrenstufe x, Wort y"

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist die reguläre Grammatik der Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \equiv 1(4), j \equiv 0(3), k \equiv 2(3)\}^*$$

$i \equiv 1(4)$, bzw. $i \equiv 1 \mod 4$ bedeutet, dass die Zahl i bei der ganzzahligen Division durch 4 den Rest 1 ergeben muss, also der *Restklasse 1* angehört.

Beispiel: im obigen Beispiel kann i folgende Werte annehmen: $1, 5, 9, 13, \ldots$

Beispiel: Die Worte der Sprache in aufsteigender Reihenfolge bezüglich ihrer Länge:

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist die reguläre Grammatik der Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \equiv 1(4), j \equiv 0(3), k \equiv 2(3)\}^*$$

$i \equiv 1(4)$, bzw. $i \equiv 1 \mod 4$ bedeutet, dass die Zahl i bei der ganzzahligen Division durch 4 den Rest 1 ergeben muss, also der *Restklasse 1* angehört.

Beispiel: im obigen Beispiel kann i folgende Werte annehmen: $1, 5, 9, 13, \ldots$

Beispiel: Die Worte der Sprache in aufsteigender Reihenfolge bezüglich ihrer Länge: ε,

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist die reguläre Grammatik der Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \equiv 1(4), j \equiv 0(3), k \equiv 2(3)\}^*$$

$i \equiv 1(4)$, bzw. $i \equiv 1 \mod 4$ bedeutet, dass die Zahl i bei der ganzzahligen Division durch 4 den Rest 1 ergeben muss, also der *Restklasse 1* angehört.

Beispiel: im obigen Beispiel kann i folgende Werte annehmen: $1, 5, 9, 13, \ldots$

Beispiel: Die Worte der Sprache in aufsteigender Reihenfolge bezüglich ihrer Länge: ε, acc,

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist die reguläre Grammatik der Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \equiv 1(4), j \equiv 0(3), k \equiv 2(3)\}^*$$

$i \equiv 1(4)$, bzw. $i \equiv 1 \mod 4$ bedeutet, dass die Zahl i bei der ganzzahligen Division durch 4 den Rest 1 ergeben muss, also der *Restklasse 1* angehört.

Beispiel: im obigen Beispiel kann i folgende Werte annehmen: $1, 5, 9, 13, \ldots$

Beispiel: Die Worte der Sprache in aufsteigender Reihenfolge bezüglich ihrer Länge: $\varepsilon, acc, accccc,$

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist die reguläre Grammatik der Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \equiv 1(4), j \equiv 0(3), k \equiv 2(3)\}^*$$

$i \equiv 1(4)$, bzw. $i \equiv 1 \mod 4$ bedeutet, dass die Zahl i bei der ganzzahligen Division durch 4 den Rest 1 ergeben muss, also der *Restklasse 1* angehört.

Beispiel: im obigen Beispiel kann i folgende Werte annehmen: $1, 5, 9, 13, \ldots$

Beispiel: Die Worte der Sprache in aufsteigender Reihenfolge bezüglich ihrer Länge: $\varepsilon, acc, accccc, abbbcc,$

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist die reguläre Grammatik der Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \equiv 1(4), j \equiv 0(3), k \equiv 2(3)\}^*$$

$i \equiv 1(4)$, bzw. $i \equiv 1 \mod 4$ bedeutet, dass die Zahl i bei der ganzzahligen Division durch 4 den Rest 1 ergeben muss, also der *Restklasse 1* angehört.

Beispiel: im obigen Beispiel kann i folgende Werte annehmen: $1, 5, 9, 13, \ldots$

Beispiel: Die Worte der Sprache in aufsteigender Reihenfolge bezüglich ihrer Länge: $\varepsilon, acc, acccc, abbbcc, accacc,$

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist die reguläre Grammatik der Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \equiv 1(4), j \equiv 0(3), k \equiv 2(3)\}^*$$

$i \equiv 1(4)$, bzw. $i \equiv 1 \mod 4$ bedeutet, dass die Zahl i bei der ganzzahligen Division durch 4 den Rest 1 ergeben muss, also der *Restklasse 1* angehört.

Beispiel: im obigen Beispiel kann i folgende Werte annehmen: $1, 5, 9, 13, \ldots$

Beispiel: Die Worte der Sprache in aufsteigender Reihenfolge bezüglich ihrer Länge: $\varepsilon, acc, accccc, abbbcc, accacc, aaaaacc,$

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist die reguläre Grammatik der Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \equiv 1(4), j \equiv 0(3), k \equiv 2(3)\}^*$$

$i \equiv 1(4)$, bzw. $i \equiv 1 \mod 4$ bedeutet, dass die Zahl i bei der ganzzahligen Division durch 4 den Rest 1 ergeben muss, also der *Restklasse 1* angehört.

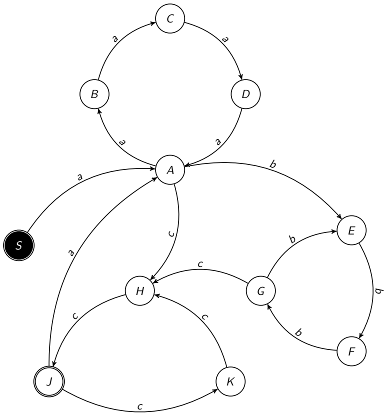
Beispiel: im obigen Beispiel kann i folgende Werte annehmen: $1, 5, 9, 13, \ldots$

Beispiel: Die Worte der Sprache in aufsteigender Reihenfolge bezüglich ihrer Länge: $\varepsilon, acc, accccc, abbbcc, accacc, aaaaacc, \ldots$

Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist die reguläre Grammatik der Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \equiv 1(4), j \equiv 0(3), k \equiv 2(3)\}^*$$

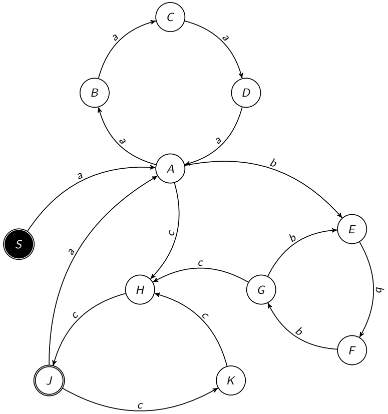


Beispiel: reguläre Sprache

Gesucht ist die reguläre Grammatik der Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \equiv 1(4), j \equiv 0(3), k \equiv 2(3)\}^*$$

$$
\begin{aligned}
P = \{ & S \rightarrow aA \mid \varepsilon, \\
& A \rightarrow aB \mid bE \mid cH, \\
& B \rightarrow aC, \\
& C \rightarrow aD, \\
& D \rightarrow aA, \\
& E \rightarrow bF, \\
& F \rightarrow bG, \\
& G \rightarrow bE \mid cH, \\
& H \rightarrow cJ \mid c, \\
& J \rightarrow aA \mid cK, \\
& K \rightarrow cH, \\
& \}
\end{aligned}
$$



Weiteres Beispiel regulärer Sprache (schwierig) (*)

- Wir betrachten nun schwierigeres Beispiel: Gesucht sei die reguläre Grammatik zur Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^+ \mid w \text{ als Binärzahl aufgefasst ist durch 3 teilbar}\}.$$

Weiteres Beispiel regulärer Sprache (schwierig) (*)

- Wir betrachten nun schwierigeres Beispiel: Gesucht sei die reguläre Grammatik zur Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^+ \mid w \text{ als Binärzahl aufgefasst ist durch 3 teilbar}\}.$$

- *Problemanalyse:* Wann ist eine Zahl durch 3 teilbar?

Weiteres Beispiel regulärer Sprache (schwierig) (*)

- Wir betrachten nun schwierigeres Beispiel: Gesucht sei die reguläre Grammatik zur Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^+ \mid w \text{ als Binärzahl aufgefasst ist durch 3 teilbar}\}.$$

- *Problemanalyse:* Wann ist eine Zahl durch 3 teilbar?

Weiteres Beispiel regulärer Sprache (schwierig) (*)

- Wir betrachten nun schwierigeres Beispiel: Gesucht sei die reguläre Grammatik zur Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^+ \mid w \text{ als Binärzahl aufgefasst ist durch 3 teilbar}\}.$$

- *Problemanalyse:* Wann ist eine Zahl durch 3 teilbar?
  - Genau dann, wenn Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.

Weiteres Beispiel regulärer Sprache (schwierig) (*)

- Wir betrachten nun schwierigeres Beispiel: Gesucht sei die reguläre Grammatik zur Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^+ \mid w \text{ als Binärzahl aufgefasst ist durch 3 teilbar}\}.$$

- *Problemanalyse:* Wann ist eine Zahl durch 3 teilbar?
  - Genau dann, wenn Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.
  - Begründung, anhand des Beispiels 4761:

Stelle durch 3 geteilt	Rest
1er	1
10er	6
100er	7
1000er	4

Weiteres Beispiel regulärer Sprache (schwierig) (*)

- Wir betrachten nun schwierigeres Beispiel: Gesucht sei die reguläre Grammatik zur Sprache

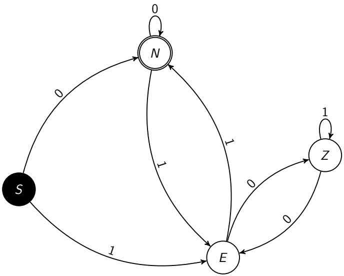
$$L = \{w \in \{0,1\}^+ \mid w \text{ als Binärzahl aufgefasst ist durch 3 teilbar}\}.$$

- *Problemanalyse:* Wann ist eine Zahl durch 3 teilbar?
  - Genau dann, wenn Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.
  - Begründung, anhand des Beispiels 4761:

Stelle durch 3 geteilt	Rest
1er	1
10er	6
100er	7
1000er	4

  - Pro 10er, 100er, ... bleibt ein gewisser Rest. Ist die Summe dieser Reste durch 3 teilbar, dann auch die ursprüngliche Zahl!

Somit erhält man folgenden Automaten:



mit der Grammatik :

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\rightarrow 0N \mid 1E \mid 0,\\
N &\rightarrow 0N \mid 1E \mid 0,\\
E &\rightarrow 0Z \mid 1N \mid 1,\\
Z &\rightarrow 0E \mid 1Z\}
\end{aligned}
$$

- Nach Start mit $0 \rightarrow 0$ Rest (N)
- Nach Start mit $1 \rightarrow 1$ Rest (E)
- In Zustand N (Restklasse 0): bei folgendem 1er Wechsel in Zustand E (Restklasse 1).
- Generell gilt: das Anhängen einer Ziffer verdoppelt die Zahl (Basis 2). Somit verdoppelt sich auch der Rest.
- Ziffer 0 in E: Rest wird auf 2 verdoppelt: Übergang nach Zustand Z (Restklasse 2)
- Ziffer 1 in E: Rest wird zunächst auf 2 verdoppelt, und ergibt mit $+1$ wieder 0 (Übergang nach Zustand N).

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{aligned} P = \{S &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, \\ T &\rightarrow \\ A &\rightarrow \\ B &\rightarrow \\ C &\rightarrow \\ D &\rightarrow \\ E &\rightarrow \end{aligned}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{aligned} P = \{S &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, \\ T &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c, \\ A &\rightarrow \\ B &\rightarrow \\ C &\rightarrow \\ D &\rightarrow \\ E &\rightarrow \end{aligned}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{aligned} P = \{S &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, \\ T &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c, \\ A &\rightarrow aT \mid \qquad\qquad //G1W1 \\ B &\rightarrow \\ C &\rightarrow \\ D &\rightarrow \\ E &\rightarrow \end{aligned}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{aligned} P = \{S &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, \\ T &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c, \\ A &\rightarrow aT \mid bC \mid \qquad\qquad //G1W1 \\ B &\rightarrow \\ C &\rightarrow \\ D &\rightarrow \\ E &\rightarrow \end{aligned}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{aligned} P = \{S &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, \\ T &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c, \\ A &\rightarrow aT \mid bC \mid cA \mid a \mid b \mid c, \quad //G1W1 \\ B &\rightarrow \quad //G1W2 \\ C &\rightarrow \\ D &\rightarrow \\ E &\rightarrow \end{aligned}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{aligned} P = \{S &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, \\ T &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c, \\ A &\rightarrow aT \mid bC \mid cA \mid a \mid b \mid c, \quad //G1W1 \\ B &\rightarrow aT \mid \quad //G1W2 \\ C &\rightarrow \\ D &\rightarrow \\ E &\rightarrow \end{aligned}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{aligned} P = \{S &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, \\ T &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c, \\ A &\rightarrow aT \mid bC \mid cA \mid a \mid b \mid c, \quad //G1W1 \\ B &\rightarrow aT \mid bB \mid \quad //G1W2 \\ C &\rightarrow \\ D &\rightarrow \\ E &\rightarrow \end{aligned}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{aligned} P = \{S &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, \\ T &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c, \\ A &\rightarrow aT \mid bC \mid cA \mid a \mid b \mid c, \quad //G1W1 \\ B &\rightarrow aT \mid bB \mid cD \mid a \mid b \mid c, \quad //G1W2 \\ C &\rightarrow \\ D &\rightarrow \\ E &\rightarrow \end{aligned}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \land w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{aligned}
P = \{S &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, \\
T &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c, \\
A &\rightarrow aT \mid bC \mid cA \mid a \mid b \mid c, \quad //G1W1 \\
B &\rightarrow aT \mid bB \mid cD \mid a \mid b \mid c, \quad //G1W2 \\
C &\rightarrow bB \mid \quad //G2W1 \land G1W2 \\
D &\rightarrow \\
E &\rightarrow
\end{aligned}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{aligned}
P = \{S &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, \\
T &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c, \\
A &\rightarrow aT \mid bC \mid cA \mid a \mid b \mid c, \quad //G1W1 \\
B &\rightarrow aT \mid bB \mid cD \mid a \mid b \mid c, \quad //G1W2 \\
C &\rightarrow bB \mid cD \mid b \mid c, \quad //G2W1 \wedge G1W2 \\
D &\rightarrow \\
E &\rightarrow
\end{aligned}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{aligned}
P = \{S &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, \\
T &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c, \\
A &\rightarrow aT \mid bC \mid cA \mid a \mid b \mid c, && //G1W1 \\
B &\rightarrow aT \mid bB \mid cD \mid a \mid b \mid c, && //G1W2 \\
C &\rightarrow bB \mid cD \mid b \mid c, && //G2W1 \wedge G1W2 \\
D &\rightarrow aT \mid && //G1W1 \wedge G2W2 \\
E &\rightarrow
\end{aligned}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{aligned}
P = \{S &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, \\
T &\rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c, \\
A &\rightarrow aT \mid bC \mid cA \mid a \mid b \mid c, && //G1W1 \\
B &\rightarrow aT \mid bB \mid cD \mid a \mid b \mid c, && //G1W2 \\
C &\rightarrow bB \mid cD \mid b \mid c, && //G2W1 \wedge G1W2 \\
D &\rightarrow aT \mid bE \mid && //G1W1 \wedge G2W2 \\
E &\rightarrow
\end{aligned}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{array}{rcll} P = \{S & \rightarrow & aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, & \\ T & \rightarrow & aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c, & \\ A & \rightarrow & aT \mid bC \mid cA \mid a \mid b \mid c, & //G1W1 \\ B & \rightarrow & aT \mid bB \mid cD \mid a \mid b \mid c, & //G1W2 \\ C & \rightarrow & bB \mid cD \mid b \mid c, & //G2W1 \wedge G1W2 \\ D & \rightarrow & aT \mid bE \mid cA \mid a \mid b \mid c, & //G1W1 \wedge G2W2 \\ E & \rightarrow & & \end{array}$$

- Gesucht sei die Grammatik zur regulären Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \neq \alpha cba\beta \wedge w \neq \alpha bcbc\beta, \alpha, \beta \in T^*\}.$$

- Lösung:

$$\begin{aligned}
P = \{S & \rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon, \\
T & \rightarrow aT \mid bB \mid cA \mid a \mid b \mid c, \\
A & \rightarrow aT \mid bC \mid cA \mid a \mid b \mid c, && //G1W1 \\
B & \rightarrow aT \mid bB \mid cD \mid a \mid b \mid c, && //G1W2 \\
C & \rightarrow bB \mid cD \mid b \mid c, && //G2W1 \wedge G1W2 \\
D & \rightarrow aT \mid bE \mid cA \mid a \mid b \mid c, && //G1W1 \wedge G2W2 \\
E & \rightarrow bB \mid b\,\} && //G2W1 \wedge G3W2
\end{aligned}$$

Aufgaben

Aufgabe 3.11

Gesucht ist eine Sprache mit Worten $W \in \{a, b, c, d\}^+$ in der jedoch die Teilworte "dda" und "bdcb" *nicht* vorkommen dürfen. Geben Sie sowohl die reguläre Grammatik als auch den zugehörigen endlichen Automaten an.

Aufgabe 3.12

Gegeben sei die Sprache $L = \{a^i b^j c^k \mid i \equiv 2(5), j \equiv 1(3), k \equiv 3(4)\}^*$. Geben Sie die zugehörige reguläre Grammatik sowie den zugehörigen endlichen Automaten an.

Literaturübersicht I

[1] **Berger, Krieger, Mahr: "Grundlagen der elektronischen Datenverarbeitung", Skriptum**

[2] Dirk W. Hoffmann: "Theoretische Informatik", Hanser, 3. Auflage

[3] Gernot Salzer: "Einführung in die Theorie der Informatik", Skriptum, TU Wien, 2001

[4] Wikipedia (Englisch): `https://en.wikipedia.org/`

[5] Wikipedia (Deutsch): `https://de.wikipedia.org/`