Université saint Joseph – ESIB **Décembre 2019**
Mathématiques Spéciales GE- GCP

Examen Final de Mécanique 2
Durée 2h – Documents Interdits – 2 Pages

<u>Disque roulant sur un plan horizontal</u>

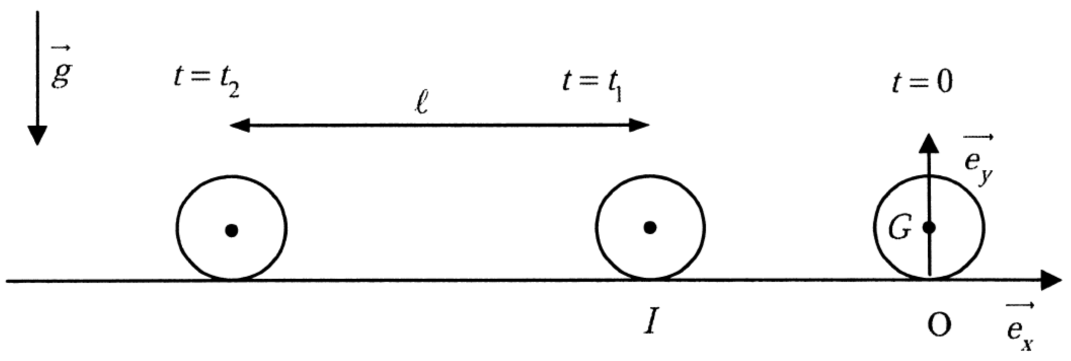
Soit un référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère cartésien orthonormé direct $Oxyz$, Oy étant vertical, les vecteurs unitaires correspondant aux 3 axes sont notés $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$.

Soit un disque homogène pesant de masse m , de rayon r et d'épaisseur négligeable devant r . Le centre d'inertie du disque est noté G ; le moment d'inertie du disque relativement à un axe perpendiculaire au plan de celui-ci passant par G est $J=\frac{1}{2}mr^2$.

Dans la suite du problème, on va considérer le mouvement de ce solide dans le plan xOy . Initialement, ce disque est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe passant par G et dirigé suivant $\vec{u}_z$: on pose donc $\vec{\Omega}=\omega_0\vec{u}_z$, $\vec{\Omega}$ désignant ainsi le vecteur vitesse de rotation instantanée du disque à l'instant $t=0$ ($\omega_0>0$). Dans ces conditions, le disque est déposé sur le plan horizontal zOx , il s'ensuit un mouvement de roulement avec glissement s'effectuant dans le plan xOy , dans le sens contraire à celui de l'axe Ox .

On note $X=X(t)$ l'abscisse du point G à un instant quelconque [on supposera $X(0)=0$; $\frac{dX}{dt}(0)=0$].

Le coefficient de frottement du disque sur le plan est f . On notera $\vec{\mathcal{R}}=T\,\vec{u}_x+N\,\vec{u}_y$, l'action du plan sur le disque, action s'appliquant au point de contact I (*voir schéma*).



I. Première phase du mouvement

1. Exprimer, en fonction de r , ω_0 , $\vec{u}_x$, la vitesse de glissement initiale du disque sur le plan ; en déduire le signe de T au départ.

2. On note $\omega=\omega(t)$ la vitesse de rotation du disque à un instant quelconque $t>0$. Donner l'expression de $\vec{\sigma}_G$, moment cinétique barycentrique du disque. Par application du théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique en G , établir une relation liant m , r , T et $\frac{d\omega}{dt}$.

3. En projetant la résultante dynamique du disque sur les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, donner les expressions de N et T en fonction de m , g , $\frac{d^2 X}{dt^2}$.

4. Compte tenu du fait que le mouvement s'effectue avec glissement et compte tenu de la question 1, déduire l'expression de l'accélération du centre de masse G .

5. Déterminer les expressions de $\frac{dX}{dt}$, X , $\frac{d\omega}{dt}$, ω en fonction du temps.

6. Déterminer l'expression de la vitesse de glissement à un instant t . Celle-ci s'annule à l'instant t_1 dont on déterminera l'expression.

7. Préciser les valeurs de $\frac{dX}{dt}(t_1)$ et $\omega(t_1)$.

II. Deuxième phase du mouvement

8. Pour $t>t_1$ on suppose que le mouvement s'effectue sans glissement. Donner la relation de roulement sans glissement liant r , $\frac{dX}{dt}$, ω .

9. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique à un instant t quelconque avec $t>t_1$ en fonction de m , $\frac{dX}{dt}$.

10. Expliquer pourquoi cette énergie demeure constante au cours de cette phase du mouvement.

11. De l'instant t_1 à un instant $t_2>t_1$ le centre de masse se déplace d'une longueur ℓ . Déterminer l'expression de t_2-t_1 en fonction de ℓ , r , ω_0 .

<u>Fin de l'Examen Final</u>