TD 1 : Espaces vectoriels normés

Exercice 1: Dire si les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ en justifiant vos réponses :

1. $N_1 : (x;y) \longmapsto |3x+5y|$
2. $N_2 : (x;y) \longmapsto |xy|$.
3. $N_3 : (x;y) \longmapsto |3x|+|5y|$.
4. $N_4 : (x;y) \longmapsto \sqrt{x^2+2xy+5y^2}$.

Exercice 2: Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 3: Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x,y) = \sqrt{a^2x^2+b^2y^2}$.

1. Prouver que N est une norme.
2. Déterminer le plus petit nombre $p > 0$ tel que $N \leq p\|.\|_2$ et le plus grand nombre q tel que $q\|.\|_2 \leq N$.

Exercice 4: On définit une application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que N vérifie
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N(AB) \leq N(A)N(B).$$

Exercice 5: Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Soient N_1, N_2 et N_∞ les applications de E dans $\mathbb{R}^+$ définies par

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|dt, \qquad N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

1. Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur E.
   Démontrer qu'elles ne sont pas équivalentes deux à deux.
2. On définit
$$N(f) = |f(0)| + N_\infty(f') \quad \text{et} \quad N'(f) = N_\infty(f) + N_\infty(f').$$
   Démontrer que N et N' sont deux normes équivalentes sur E.
   Sont-elles équivalentes à N_∞ ?

Exercice 6: Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ dans $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{p} |a_i|, \qquad N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad N_\infty(P) = \max_i |a_i|.$$

Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$. Sont-elles équivalentes deux à deux ?

Exercice 7: On munit $E = \mathbb{R}[X]$ des normes données par les relations

$$N_1(P) = \int_0^1 |P(t)|dt \quad \text{et} \quad N_\infty(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$$

et l'on considère la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E.

1. Vérifier que la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour N_∞ et converge vers 0 pour la norme N_1.
2. Comparer N_1 et N_∞.
3. En déduire que, bien que bornée, la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de valeur d'adhérence pour N_∞.