Université saint Joseph – ESIB **Décembre 2019**
Mathématiques Spéciales GE- GCP

Examen Final de Mécanique 2

Durée 2h – Documents Interdits – 2 Pages

Disque roulant sur un plan horizontal

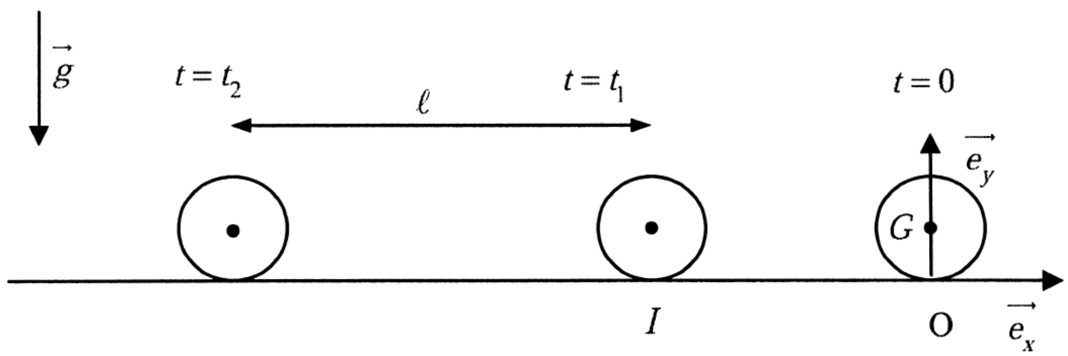
Soit un référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère cartésien orthonormé direct $Oxyz$, Oy étant vertical, les vecteurs unitaires correspondant aux 3 axes sont notés $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$.

Soit un disque homogène pesant de masse m , de rayon r et d'épaisseur négligeable devant r . Le centre d'inertie du disque est noté G ; le moment d'inertie du disque relativement à un axe perpendiculaire au plan de celui-ci passant par G est $J=\frac{1}{2}mr^2$.

Dans la suite du problème, on va considérer le mouvement de ce solide dans le plan xOy . Initialement, ce disque est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe passant par G et dirigé suivant $\vec{u}_z$: on pose donc $\vec{\Omega}=\omega_0\vec{u}_z$, $\vec{\Omega}$ désignant ainsi le vecteur vitesse de rotation instantanée du disque à l'instant $t=0$ ($\omega_0>0$). Dans ces conditions, le disque est déposé sur le plan horizontal zOx , il s'ensuit un mouvement de roulement avec glissement s'effectuant dans le plan xOy , dans le sens contraire à celui de l'axe Ox .

On note $X=X(t)$ l'abscisse du point G à un instant quelconque [on supposera $X(0)=0$; $\frac{dX}{dt}(0)=0$].

Le coefficient de frottement du disque sur le plan est f . On notera $\vec{\mathcal{R}}=T\vec{u}_x+N\vec{u}_y$, l'action du plan sur le disque, action s'appliquant au point de contact I (*voir schéma*).



I. Première phase du mouvement

1. Exprimer, en fonction de r , ω_0 , $\vec{u}_x$, la vitesse de glissement initiale du disque sur le plan ; en déduire le signe de T au départ.

2. On note $\omega=\omega(t)$ la vitesse de rotation du disque à un instant quelconque $t>0$. Donner l'expression de $\vec{\sigma}_G$, moment cinétique barycentrique du disque. Par application du théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique en G , établir une relation liant m , r , T et $\frac{d\omega}{dt}$.

3. En projetant la résultante dynamique du disque sur les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, donner les expressions de N et T en fonction de m, g, $\frac{d^2X}{dt^2}$.

4. Compte tenu du fait que le mouvement s'effectue avec glissement et compte tenu de la question 1, déduire l'expression de l'accélération du centre de masse G.

5. Déterminer les expressions de $\frac{dX}{dt}$, X, $\frac{d\omega}{dt}$, ω en fonction du temps.

6. Déterminer l'expression de la vitesse de glissement à un instant t. Celle-ci s'annule à l'instant t_1 dont on déterminera l'expression.

7. Préciser les valeurs de $\frac{dX}{dt}(t_1)$ et $\omega(t_1)$.

II. Deuxième phase du mouvement

8. Pour $t>t_1$ on suppose que le mouvement s'effectue sans glissement. Donner la relation de roulement sans glissement liant r, $\frac{dX}{dt}$, ω.

9. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique à un instant t quelconque avec $t>t_1$ en fonction de m, $\frac{dX}{dt}$.

10. Expliquer pourquoi cette énergie demeure constante au cours de cette phase du mouvement.

11. De l'instant t_1 à un instant $t_2>t_1$ le centre de masse se déplace d'une longueur ℓ. Déterminer l'expression de t_2-t_1 en fonction de ℓ, r, ω_0.

<u>Fin de l'Examen Final</u>