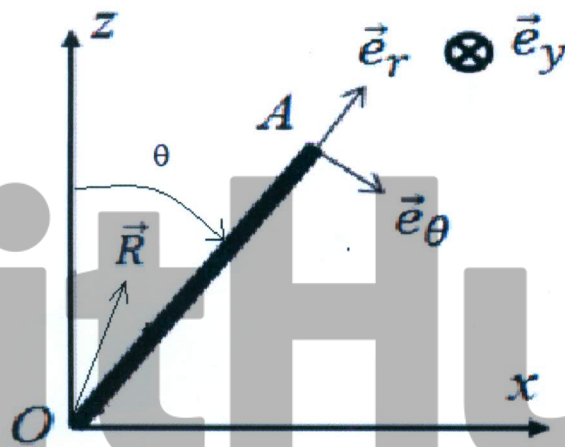


Examen Final- Mécanique 3

Durée 2h – Documents interdits – Calculatrices non programmables autorisées- 2 pages

### Dynamitage d'une cheminée

On assimile une cheminée à une tige homogène OA de masse M et de longueur L. On dynamite sa base (point O) et elle amorce une rotation dans un plan vertical autour du point O bloqué par les débris de l'explosion. On note Oz la verticale ascendante, zOx le plan de chute et  $\theta(t)$  l'angle que fait OA avec Oz à l'instant t (voir figure ci-dessous). Le moment d'inertie de la cheminée par rapport à l'axe Oy est  $J = \frac{1}{3}ML^2$ . Au moment de l'explosion ( $t = 0$ ), on a  $\theta = 0$  et  $\dot{\theta} = 0$ . On admet que l'action du sol sur la cheminée se résume à une force  $\vec{R} = R_r\vec{e}_r + R_\theta\vec{e}_\theta$  appliquée en O. On note g l'intensité de pesanteur.



#### Partie A : Rotation de la cheminée avant brisure

- 1) Calculer l'énergie mécanique de la tige.
- 2) Pourquoi y-a-t-il conservation de l'énergie mécanique de la tige ?
- 3) En utilisant la conservation de l'énergie mécanique de la tige (entre t et t=0), montrer que :

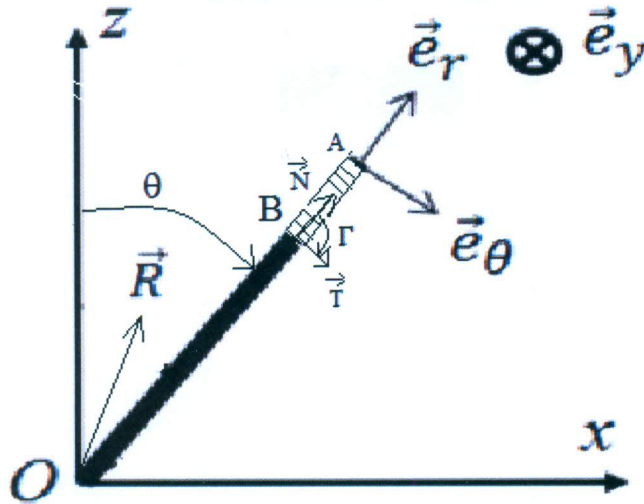
$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(1 - \cos\theta)$$

- 4) En déduire une relation entre  $\ddot{\theta}$  et  $\theta$ .
- 5) Retrouver la relation de la question 4 par une étude dynamique.
- 6) Enoncer le théorème du centre de masse pour un système fermé.
- 7) En appliquant le théorème de centre de masse sur la tige, montrer que la force  $\vec{R}$  s'écrit :

$$\vec{R} = Mg \frac{(5\cos\theta - 3)}{2} \vec{e}_r - \frac{1}{4}Mg\sin\theta \vec{e}_\theta$$

### Partie B : Brisure de la cheminée

A un certain moment, la cheminée va se briser en un point B. On envisage la portion OB de la cheminée de longueur  $x$ , de masse  $m = M \frac{x}{L}$ . L'action de la partie BA de la cheminée sur la partie OB peut se résumer à l'action combinée d'une force  $\vec{F} = N\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta$  appliquée en B et d'un couple  $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{e}_y$  (voir figure ci-dessous).



8) Appliquer le théorème du centre de masse sur la portion OB. Projeter ce théorème selon  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$ .

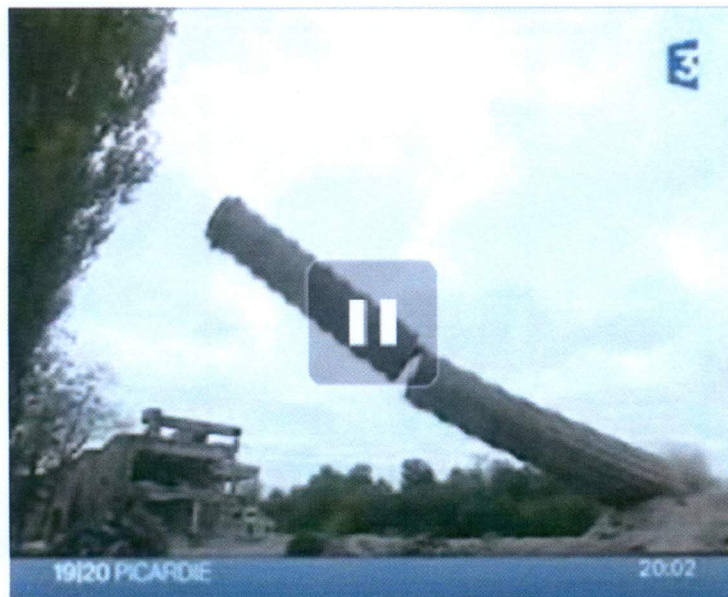
9) En appliquant le théorème du moment cinétique à OB, on trouve que  $\Gamma$  s'écrit sous la forme :

$$\Gamma = -\frac{Mg}{4L^2}x(L-x)^2\sin\theta.$$

On admet que la cheminée se brise si  $|\Gamma|$  atteint une valeur critique  $\Gamma_c$ . Cette valeur est atteinte, lorsque la fonction  $x(L-x)^2$  est maximale.

Où se brise donc la cheminée dynamitée ?

10) L'image ci-dessous, extraite d'une vidéo-enregistrement, vérifie-t-elle le résultat obtenu ? Sinon pourquoi ?



Fin de l'Examen