TD 2 : Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 1: Montrer que les ensembles suivants sont ouverts :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < |x-1| < 1\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 4\}$.
3. $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 < \exp(\sin y) + 12\right\}$.
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < \ln(x^2+1) < 1\}$.

Exercice 2: Montrer que les ensembles suivants sont fermés :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le y\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \le x + y \le 1\}$.

Exercice 3:

1. Montrer que les ensembles suivants ne sont pas ouverts :
   1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le y\}$.
   2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1,\ |y| \le 1\}$.
2. Montrer que les ensembles suivants ne sont pas fermés :
   1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < |x-1| < 1\}$.
   2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1,\ |y| \le 1\}$.

Exercice 4: On considère les parties A et B de $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\} \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\}.$$

Soit (r_n) la suite récurrente définie par $r_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = \frac{1}{2}(r_n + \frac{2}{r_n})$.

1. Montrer que la suite $((r_n, 0))_n$ est dans A.
2. On admet que $((r_n, 0))_n$ converge. Calculer sa limite.
3. En déduire que A n'est pas fermé. Que peut-on dire de B ?

Exercice 5: Soit E un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E. On définit :

$$A + B = \{z \in E;\ \exists x \in A,\ \exists y \in B,\ z = x + y\}.$$

1. On suppose que A est ouvert.
   (a) Soit $b \in B$. Montrer que $A + \{b\}$ est un ouvert.
   (b) Déduire que $A + B$ est un ouvert.
2. On suppose que $E = \mathbb{R}^2$. On considère les parties $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que A et B sont fermés.
   (b) En déduire que $A + B$ n'est pas fermé.
   On pourra utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.

Exercice 6: Soit E un espace vectoriel normé, et V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\overset{\circ}{V} \neq \emptyset$, alors $V = E$.

Exercice 7: Soit $(E; N)$ un espace vectoriel normé. On note par B la boule unité ouverte de E.
On considère l'application $f : E \to B$ définie pour tout $x \in E$ par $f(x) = \dfrac{x}{1 + N(x)}$.

1. Montrer que f est bien définie de E dans B.
2. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.
3. Montrer que l'application N est 1-lipschitzienne . En déduire que f et f^{-1} sont continues et que E et B sont homéomorphes.

Exercice 8: Déterminer si l'application linéaire T est continue dans les cas suivants :

1. $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\begin{array}{rccc} T : & (E,N_1) & \longrightarrow & (E,N_1) \\ & f & \longmapsto & fg \end{array}$ où $g \in E$ est fixé.
2. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\begin{array}{rccc} T : & (E,N_1) & \longrightarrow & (E,N_1) \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$ où $N_1\big(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\big) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.
3. $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^+)$ et $\begin{array}{rccc} T : & (E,N_2) & \longrightarrow & (E,N_1) \\ & f & \longmapsto & fg \end{array}$ où $g \in E$ est fixé.