Министр науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Национальный исследовательский университет ИТМО

Мегафакультет трансляционных информационных технологий

Факультет информационных технологий и программирования

Лабораторная работа № 2

По дисциплине «Прикладная математика»

Методы минимизация двумерной функции

4 семестр

Выполнили: Шуляк Георгий Владимирович
М32031

Климачёва Екатерина Николаевна М32041

Проверил: Шохов Максим Евгеньевич

Санкт-Петербург, 2022 г.

Градиент - вектор, своим направлением указывающий направление наибольшего возрастания некоторой скалярной величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой, образуя скалярное поле, а по величине (модулю) равный скорости роста этой величины в этом направлении.

Градиентный спуск – метод нахождения локального минимума или максимума функции с помощью движения вдоль градиента. Для минимизации функции в направлении градиента используются методы одномерной оптимизации.

Основная идея метода заключается в том, чтобы идти в направлении наискорейшего спуска, а это направление задаётся антиградиентом $-\nabla f$:

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - \lambda^{[k]} \nabla f(x^{[k]}),$$

где $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} l$,

$\lambda^{[k]}$ выбирается:

- постоянной, в этом случае метод может расходиться;
- дробным шагом, т.е. длина шага в процессе спуска делится на некое число;
- наискорейшим спуском: $\lambda^{[k]} = \ argmin\, f(x^{[k]} - \lambda \nabla f(x^{[k]}))$.

Алгоритм метода градиентного спуска:

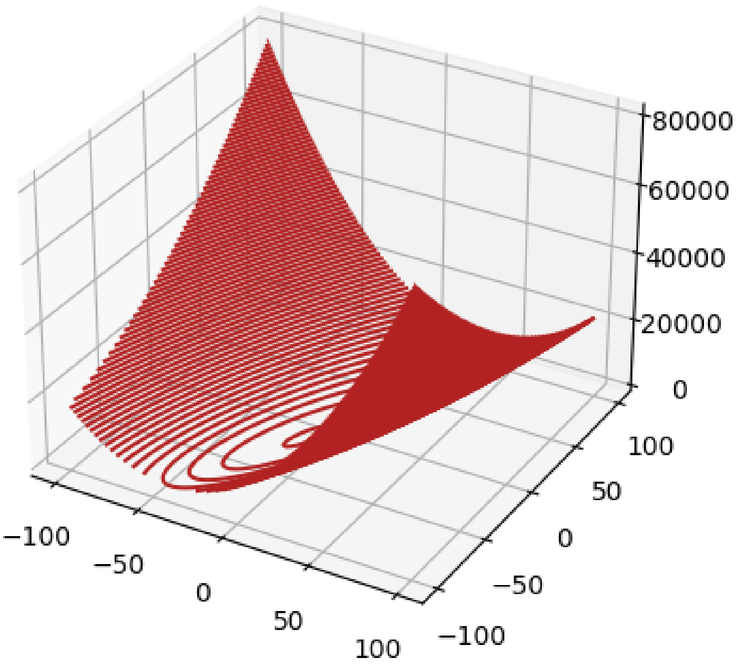
1. Задаются ε и $x^{[k]}$ при $k = 0$;
2. Рассчитываются $x^{[k+1]} = x^{[k]} - \lambda^{[k]} \nabla f(x^{[k]})$;
3. Проверяется условие остановки:
   - Если $\left|x^{[k+1]} - x^{[k]}\right| > \varepsilon$, $\left|f(x^{[k+1]}) - f(x^{[k]})\right| > \varepsilon$ или $\left\|\nabla f(x^{[k+1]})\right\| > \varepsilon$, то $k = k + 1$ и переход к шагу 2;
   - Иначе $x = x^{[k+1]}$ и остановка.

Исходная функция 1:

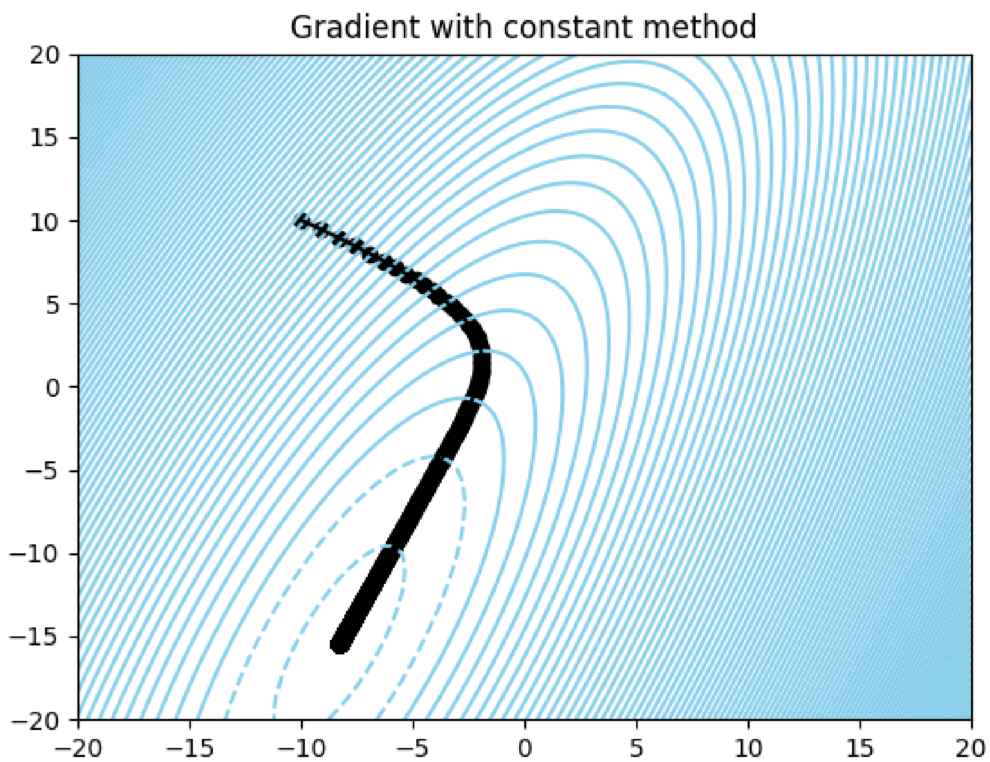
$f(x, y) = (2x + 5)^2 + (3 + y)^2 - 3xy$

$\varepsilon = 0,0001$

Начальная точка (-10; 10)



Метод с постоянной величиной шага:

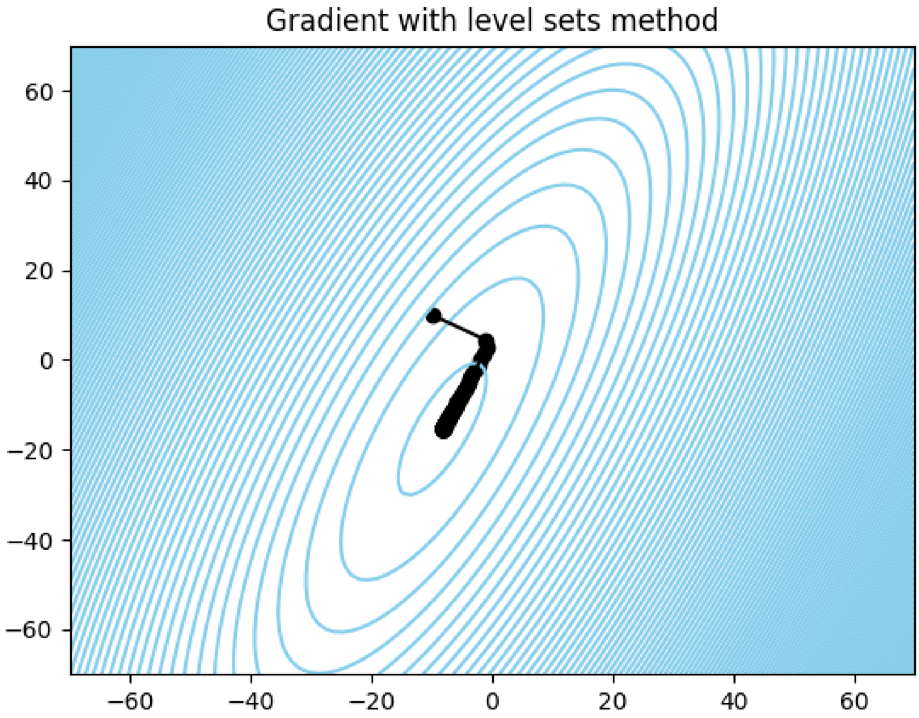


Количество итераций: 972

Шаг: 0,000001

Найденный минимум: x = -8.2802750540505560868, y = -15.427257865563742297

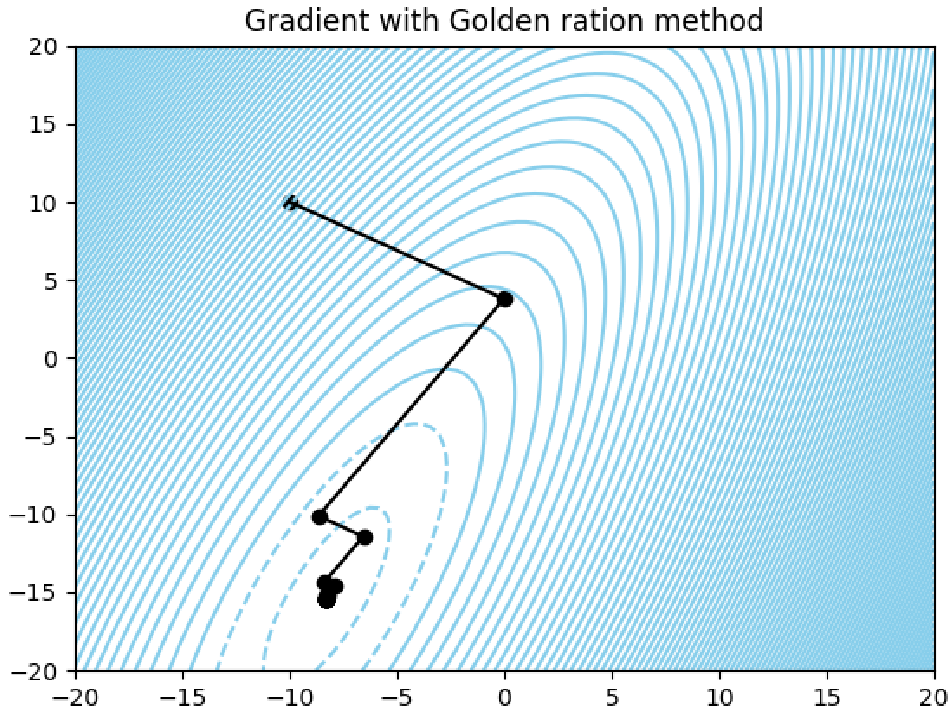
Метод дробления шага:



Количество итераций: 124

Найденный минимум: x = -8.2851717934344830851, y = -15.428448369097045092З

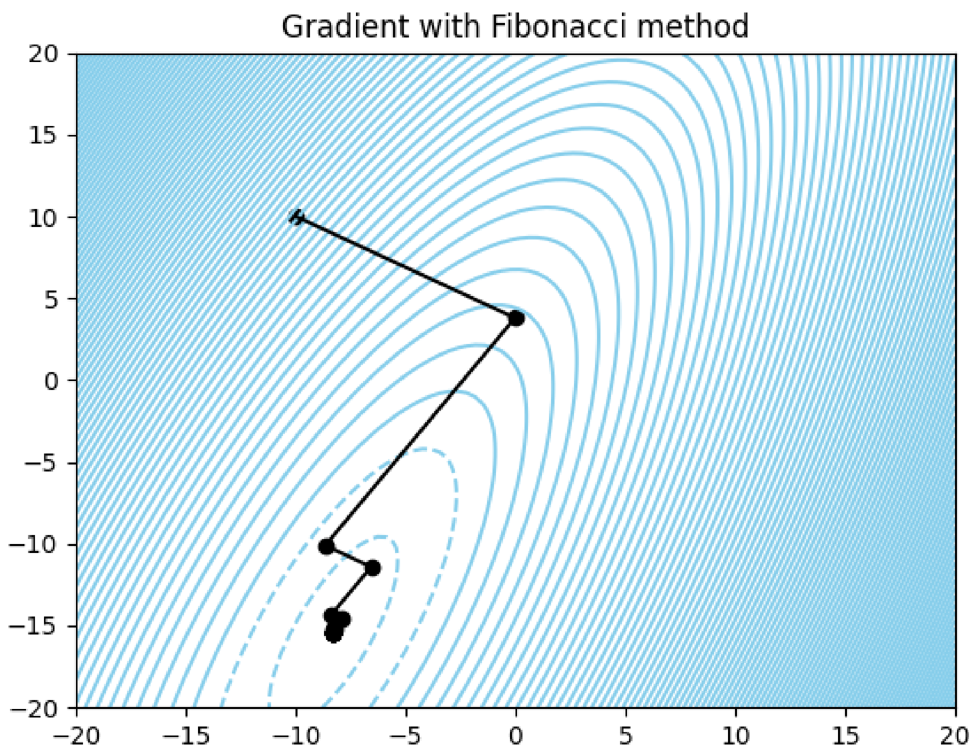
Метод золотого сечения:



Количество итераций: 17

Найденный минимум: x = -8.285720668456103236, y = -15.428568947581858302 8

Метод Фибоначчи:



Количество итераций: 17

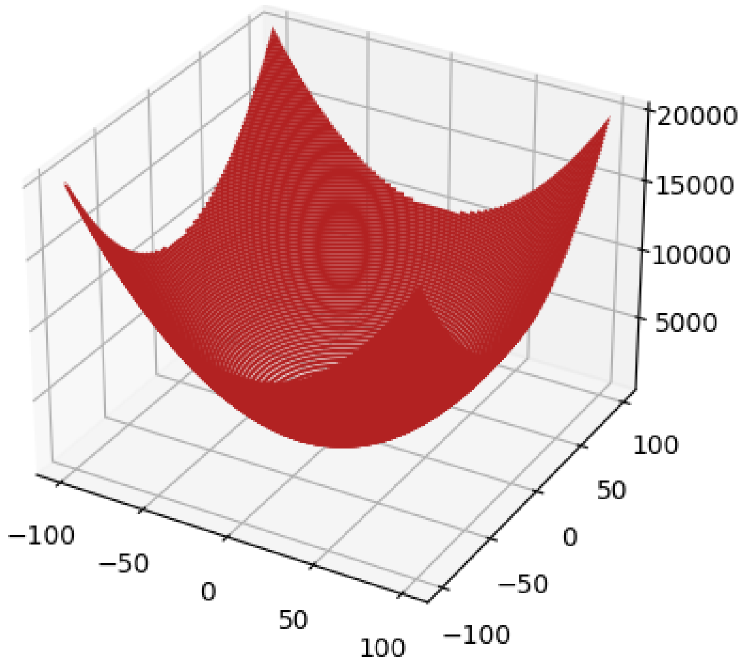
Найденный минимум: x = -8.285720702892721479, y =
-15.4285689071316340049

Исходная функция 2:

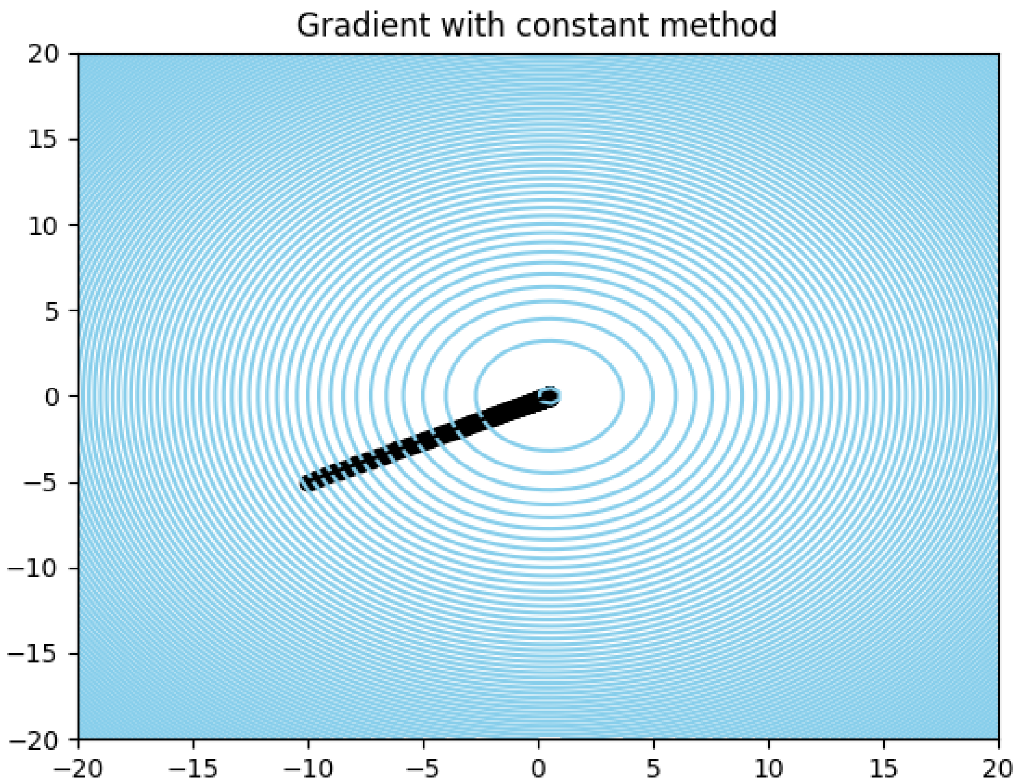
$f(x, y) = x^2 + y^2 - x$

$\varepsilon = 0,00001$

Начальная точка (-10; -5)



Метод с постоянной величиной шага:

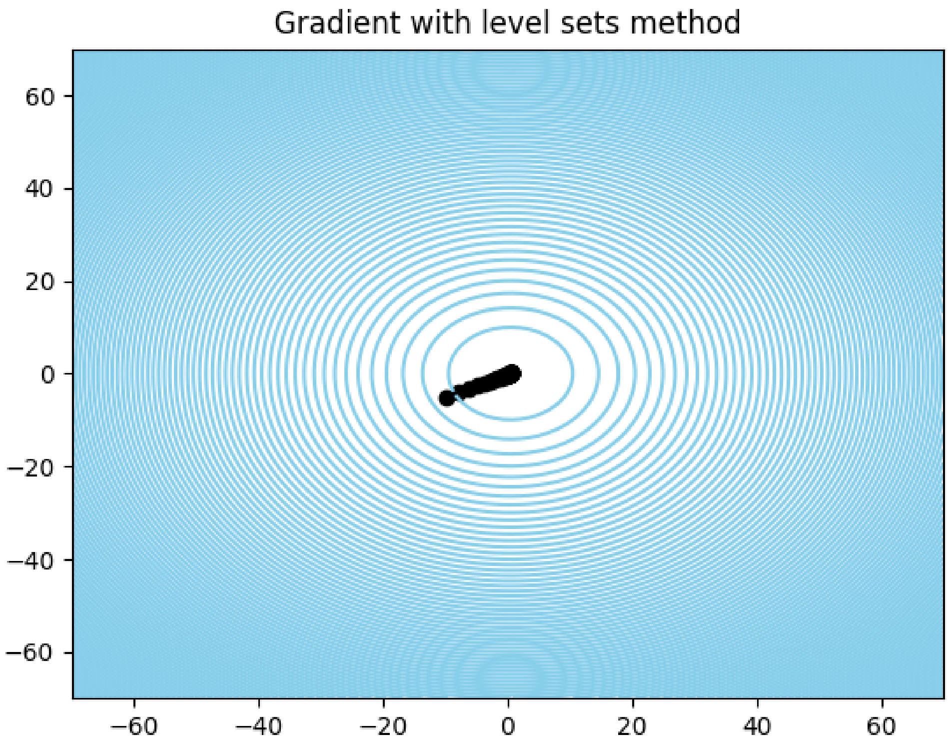


Количество итераций: 494

Шаг: 0,00001

Найденный минимум: x = 0.4995038138753775797, y = -0.00023627910696305729

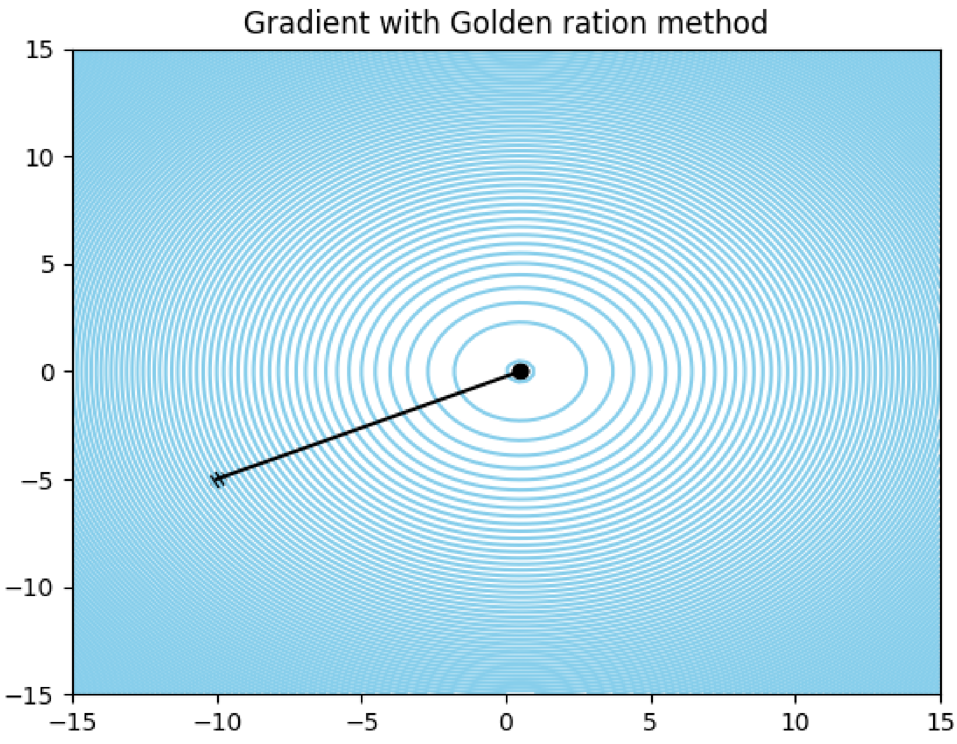
Метод дробления шага:



Количество итераций: 56

Найденный минимум: x = 0.499950893544985682, y = -0.0000233840261972944288

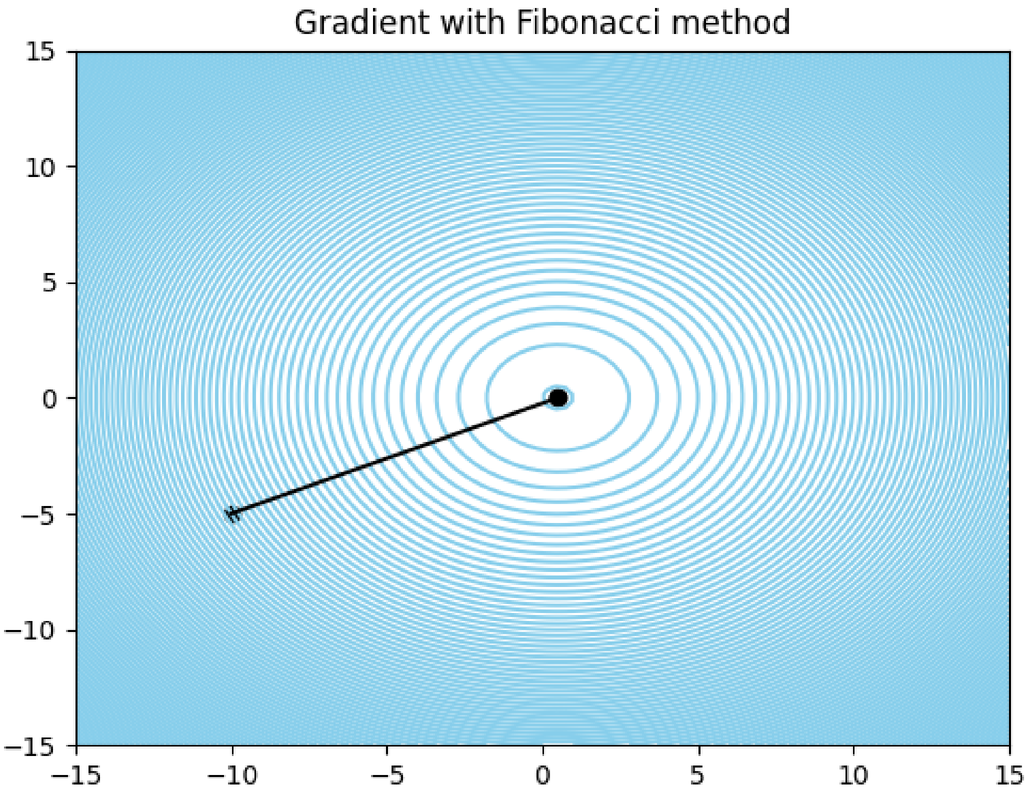
Метод золотого сечения:



Количество итераций: 3

Найденный минимум: x = 0.49999999998853, y = -0,0000546041426847

Метод Фибоначчи:



Количество итераций: 3

Найденный минимум: x = 0.49999999998418039, y = -0,000075331454056436

Таким образом, градиентный спуск с методом золотого сечения и Фибоначчи работают гораздо быстрее и достигают максимальной точности. А в градиентном спуске с постоянной величиной шага при неудачном выборе постоянного шага метод может расходиться. В градиентном спуске с дробленым шагом нужно аккуратно выбирать α, то есть на что дробят шаг, чтобы метод работал довольно быстро.

Метод сопряженных градиентов

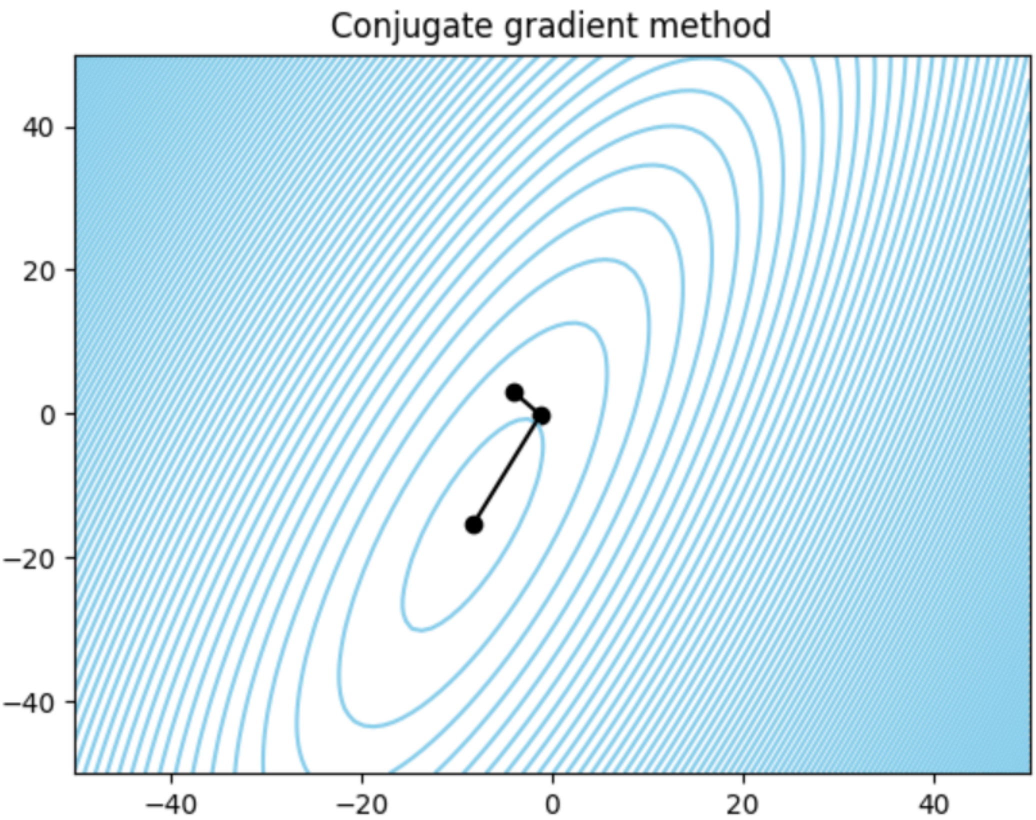
Метод сопряженных градиентов - метод нахождения локального экстремума функции на основе информации о её значениях и её градиенте. В случае квадратичной функции в R^n минимум находится не более чем за n шагов.

Теперь сравним траектории, полученные методом градиентного спуска с разными величинами шага с методом сопряженных градиентов для тех же функций:

1) $f(x, y) = (2x + 5)^2 + (3 + y)^2 - 3xy$

$\varepsilon = 0,001$

Начальная точка (-4; 3)



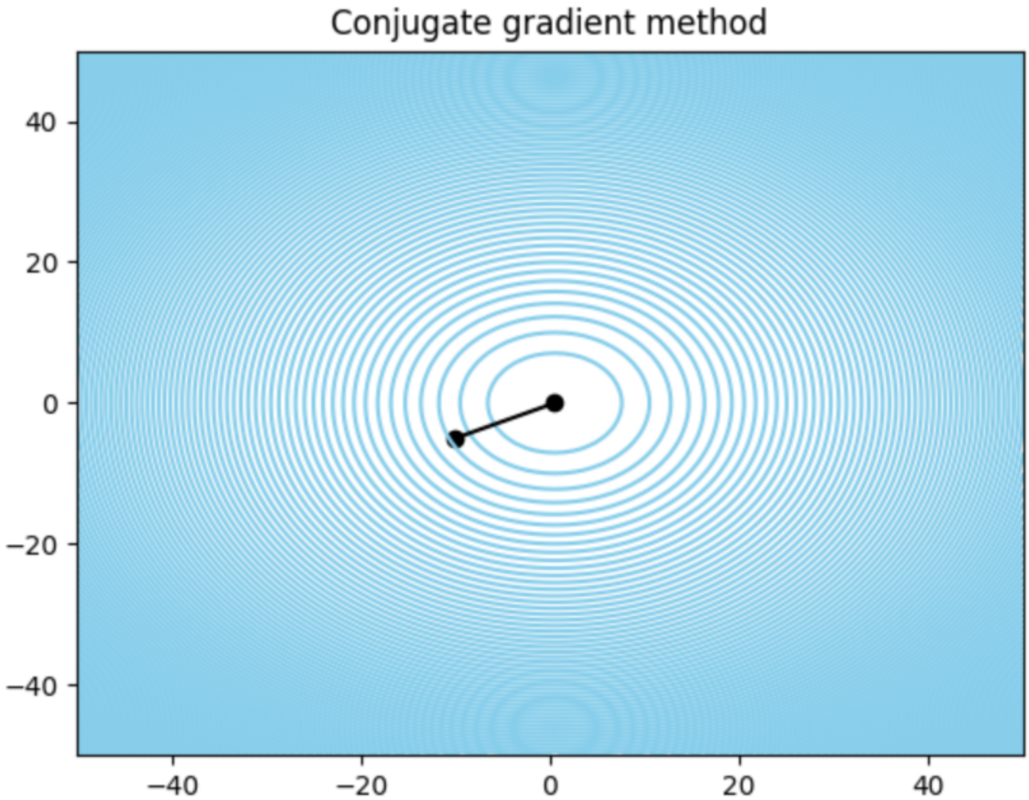
Количество итераций: 2

Найденный минимум: x = -8.285714285714285, y = -15.428571428571423

2) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x$

$\varepsilon = 0,001$

Начальная точка (-10; -5)



Количество итераций: 1
Найденный минимум: $x = 0.5$, $y = 0.0$

Таким образом, метод сопряженных градиентов работает быстрее и эффективнее, чем метод градиентного спуска с различными величинами шага. Мы на примере смогли убедиться, что количество итераций не превышает размерность пространства, в котором мы работаем, при этом у нас получилось подобрать функцию, поиск минимума на которой у нас отрабатывает за одну итерацию.