Министр науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Национальный исследовательский университет ИТМО

Мегафакультет трансляционных информационных технологий

Факультет информационных технологий и программирования

Лабораторная работа № 4

По дисциплине «Прикладная математика»

4 семестр

Выполнили: Шуляк Георгий Владимирович M32031

Климачёва Екатерина Николаевна M32041

Проверила: Гомозова Валерия Эдуардовна

Санкт-Петербург, 2022 г.

Собственный вектор матрицы A - ненулевой вектор X, который при умножении на некоторую квадратную матрицу A превращается в самого же себя с числовым коэффициентом λ:

$$AX = \lambda X$$

Собственное значение (число) матрицы - число λ.

Метод вращений Якоби:

Пусть A — симметричная матрица, а G — матрица вращения.

$$A' = G^{\mathrm{T}}AG$$

Диагональные элементы матрицы A' будут искомыми собственными значениями матрицы А. Столбцы матрицы G — столбцами координат собственных векторов, соответствующих этим собственным значениям.
Для получения данного равенства необходимо последовательно применить несколько раз матрицу вращения Якоби к матрице А.

$$A_{k+1} = G_{ij}^{T} * A_k * G_{ij}, \ k = 0, 1, 2, ...$$

А матрица вращения будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1, \dots, 0 \\ 0, c, \dots, -s, 0 \\ \dots \\ 0, s, \dots, c, 0 \\ 0, \dots, 1 \end{pmatrix}$$

G_{ij} получается из единичной матрицы путем замены двух единиц и двух нулей на пересечениях i и j строк и столбцов числами c и $\pm\ s$ такими, что $c^2 + s^2 = 1$. Это условие позволяет интерпретировать числа c и s как косинус и синус некоторого угла φ.
Следовательно, умножение матрицы G_{ij} на любой n-мерный вектор будет соотвествовать преобразованию его вращения на угол φ.
Найдем $c = cos(\varphi),\ s = sin(\varphi),\ \varphi = \frac{1}{2}arctg(2 * \frac{a_{ij}}{a_{ii}-a_{jj}})$, при этом a_{ij} - наибольший по модулю элемент в строке.
Таким образом получаем новую матрицу вращения и умножаем исходную матрицу на нее и на транспонированную матрицу вращения.
Данный метод применяем до тех пор, пока матрица А не станет близка к диагональной матрице (норма наддиагональной части матрицы не будет меньше определенного заданного значения ξ).

Протестируем метод вращений Якоби на конкретных матрицах:

Матрица с диагональным преобладанием:

$\xi = 0,001$

```
Matrix: [[ 4. -1. -1.]
 [-1.  4. -1.]
 [-1. -1.  4.]]

Eigenvalues:  [1.90734863e-06 3.00000000e+00 5.00000000e+00]

Eigenvectors: [[ 6.90533966e-04  0.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00  7.07106781e-01 -7.07106781e-01]
 [ 0.00000000e+00  7.07106781e-01  7.07106781e-01]]
```

$\xi = 0,01$

Size	Epsilon	cond(A)	Iterations
10	0.01	20.15564437074637	25
20	0.01	51.586403487676726	36
30	0.01	90.91816804825096	47
40	0.01	136.8250285414704	57
50	0.01	188.48361330685168	67
60	0.01	245.31828589483817	78
70	0.01	306.89746372483745	88
80	0.01	372.88208189162447	98
90	0.01	442.99666145523486	108
100	0.01	517.0116420955042	118

$\xi = 0,001$

Size	Epsilon	cond(A)	Iterations
20	0.001	51.586403487676726	43
30	0.001	90.91816804825096	53
40	0.001	136.8250285414704	64
50	0.001	188.48361330685168	74
60	0.001	245.31828589483817	84
70	0.001	306.89746372483745	95
80	0.001	372.88208189162447	105
90	0.001	442.99666145523486	115
100	0.001	517.0116420955042	125

Матрица Гильберта:

$\xi = 0,001$

```
Matrix: [[1.         0.5        0.33333333]
 [0.5        0.33333333 0.25      ]
 [0.33333333 0.25       0.2       ]]

Eigenvalues:  [1.90734863e-06 5.25402912e-01 7.93042173e-03]

Eigenvectors: [[ 0.00138107  0.          0.        ]
 [ 0.          0.79298886 -0.60923614]
 [ 0.          0.60923614  0.79298886]]
```

$\xi = 0,01$

Size	Epsilon	cond(A)	Iterations
20	0.01	1.170913765268278e+18	74
30	0.01	1.316969952979166e+19	124
40	0.01	6.434367457546699e+18	175
50	0.01	1.0418435581978278e+19	226
60	0.01	7.785920985017282e+19	282
70	0.01	1.4964966314922342e+19	351
80	0.01	4.2403738460402115e+19	451
90	0.01	2.983371388654318e+19	595
100	0.01	9.950191314880295e+18	668

$\xi = 0,001$

Size	Epsilon	cond(A)	Iterations
20	0.001	1.170913765268278e+18	126
30	0.001	1.316969952979166e+19	198
40	0.001	6.434367457546699e+18	291
50	0.001	1.0418435581978278e+19	367
60	0.001	7.785920985017282e+19	465
70	0.001	1.4964966314922342e+19	559
80	0.001	4.2403738460402115e+19	660
90	0.001	2.983371388654318e+19	762
100	0.001	9.950191314880295e+18	836

Выводы:

Таким образом, мы реализовали метод вращений Якоби, а также исследовали результаты его работы на различных матрицах, провели исследования для разных точностей. Данный метод при небольших размерах матриц дает неплохие результаты, и позволяет с большой точностью вычислять собственные пары. При больших размерах матриц вычисления производятся долго из-за необходимости поиска максимального элемента матрицы и перемножения матриц большой размерности.