ACTIVITÉS NUMÉRIQUES — NIVEAU : 3$^{\text{ème}}$

CHAPITRE 1 : RACINES CARRÉES

Professeur Malamine Sadio

sadio.malamine@ugb.edu.sn

0.1 I. Objectifs du cours

- ✓ Restituer la définition et la notation de la racine carrée d'un nombre positif ou nul.
- ✓ Restituer la notation $\mathbb{R}$.
- ✓ Restituer et utiliser les propriétés de la racine carrée.
- ✓ Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient.
- ✓ Calculer une valeur numérique d'une expression littérale dans $\mathbb{R}$.
- ✓ Comparer des réels écrits avec des radicaux.
- ✓ Restituer et utiliser les propriétés de la valeur absolue d'un réel (propriétés de 4ème, produit et rapport).
- ✓ Écrire sous radical la racine carrée du carré d'un nombre : $\sqrt{a^2} = |a|$.
- ✓ Calculer la valeur exacte d'une racine carrée et déterminer la valeur exacte d'une expression comportant un radical.
- ✓ Déterminer une valeur approchée à l'aide d'un encadrement ou de la calculatrice.

0.2 II. Définition et Notation

0.2.1 1. Activités

- **Activité 1 :** Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 4$ cm et $BC = 3$ cm.
  Réponse : D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$. Donc $AC = 5$ cm.
- **Activité 2 :** Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = BC = 1$ cm.
  Réponse : $AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. On note $AC = \sqrt{2}$ cm.

0.2.2 2. Définition

Définition

Soit a un nombre rationnel positif ou nul. On appelle racine carrée de a, le nombre positif ou nul dont le carré est égal à a. On le note $\sqrt{a}$. Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle le **radical**.

0.2.3 3. Conséquences et Remarques

✓ $3^2 = 9$ et $(-3)^2 = 9$, mais le nombre positif dont le carré est 9 est 3. Donc $\sqrt{9} = 3$.

✓ $\sqrt{0} = 0$.

✓ **Attention :** On ne peut pas parler de la racine carrée d'un nombre négatif. $\sqrt{-3}$ n'existe pas.

✓ **Quelques carrés parfaits :** $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{144} = 12$.

✓ Pour tout nombre positif a : $(\sqrt{a})^2 = a$. Exemple : $(\sqrt{3})^2 = 3$.

0.3 III. Nombres Irrationnels et Ensemble $\mathbb{R}$

0.3.1 1. Activité

Calculer la racine carrée de 9 ; 1,44 ; 2 et écrire sous la forme $\frac{a}{b}$.
Solution : $\sqrt{9} = 3 = \frac{3}{1}$; $\sqrt{1,44} = 1,2 = \frac{12}{10}$. On ne peut pas écrire $\sqrt{2}$ sous la forme $\frac{a}{b}$.

0.3.2 2. Définitions et Vocabulaire

- Un nombre **irrationnel** est un nombre qu'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ (avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$). Exemples : $\sqrt{2}$ et π.
- Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment **l'ensemble des nombres réels**, noté $\mathbb{R}$.
- **Remarque :** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

0.4 IV. Propriétés et Calcul sur les Radicaux

0.4.1 1. Produit et Quotient

Propriétés

Soient a et b deux réels positifs : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
Soient a et b deux réels positifs avec $b \neq 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Remarque : $\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$.

Exercices d'application :

— $\sqrt{2} \times \sqrt{50} = \sqrt{100} = 10$.

— $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

— $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$.

— $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$.

0.4.2 2. Sommes Algébriques

ATTENTION

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$.
Contre-exemple : $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$, alors que $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$. On voit bien que $7 \neq 5$.

Propriété : $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (b+c)\sqrt{a}$ et $b\sqrt{a} - c\sqrt{a} = (b-c)\sqrt{a}$.

0.4.3 3. Produits et Identités Remarquables

- $a(\sqrt{b} + \sqrt{c}) = a\sqrt{b} + a\sqrt{c}$.
- $\sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c}) = \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$.
- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$.
- $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$.
- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$.

0.5 V. Expressions Conjuguées et Dénominateurs

0.5.1 1. Vocabulaire

— L'expression conjuguée de $(a + \sqrt{b})$ est $(a - \sqrt{b})$.
— L'expression conjuguée de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.
— L'expression conjuguée de $a\sqrt{b}$ est $\sqrt{b}$.
— **Remarque :** $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$.

0.5.2 2. Méthode

Pour rendre rationnel le dénominateur d'un quotient comportant un radical, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

0.6 VI. Comparaison, Inverses et Opposés

0.6.1 1. Propriétés de comparaison

— P_1 : Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. Si $a^2 < b^2$ alors $a < b$.
— P_2 : Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés. Si $a^2 < b^2$ alors $a > b$.

0.6.2 2. Inverses et Opposés

— a et b sont **inverses** si leur produit est égal à 1 ($a \times b = 1$).
— a et b sont **opposés** si leur somme est égale à 0 ($a + b = 0$).

0.7 VII. Intervalles dans $\mathbb{R}$

Écriture	Intervalle	Ensemble des réels x tels que :
$[a; b]$	fermé en a et en b	$a \leq x \leq b$
$[a; b[$	fermé en a et ouvert en b	$a \leq x < b$
$]a; b]$	ouvert en a et fermé en b	$a < x \leq b$
$]a; b[$	ouvert en a et b	$a < x < b$
$[b; +\infty[$	nombres supérieurs ou égaux à b	$x \geq b$
$]-\infty; a]$	nombres inférieurs ou égaux à a	$x \leq a$
$]-\infty; a[$	nombres strictement inférieurs à a	$x < a$
$]b; +\infty[$	nombres strictement supérieurs à b	$x > b$
$]-\infty; +\infty[$	tous les réels	$x \in \mathbb{R}$

0.8 VIII. Valeur Absolue et Racine du Carré

0.8.1 1. Propriétés de la Valeur Absolue

— $|a \times b| = |a| \times |b|$.

— $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.

— $|a| = a$ si $a \geq 0$ et $|a| = -a$ si $a \leq 0$. La valeur absolue est toujours positive.

0.8.2 2. Racine carrée du carré d'un réel

— Pour tout réel a : $\sqrt{a^2} = |a|$.

— **Attention :** Ne pas confondre $\sqrt{a^2}$ (existe toujours) et $(\sqrt{a})^2$ (existe seulement si $a \geq 0$).

— Exemple : $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ mais $(\sqrt{-3})^2$ n'existe pas.

0.9 IX. Équation du type $x^2 = a$

La résolution dépend du signe de a :

— Si $a < 0$: l'équation n'admet pas de solution. $S = \emptyset$.

— Si $a = 0$: $x = 0$. $S = \{0\}$.

— Si $a > 0$: deux solutions $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$. $S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$.

0.10 X. Valeur Exacte, Valeur Approchée et Encadrement

— **Valeur exacte :** $\sqrt{7} = 2,64575131....$

— **Valeurs approchées de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} près :** 2,645 (par défaut) et 2,646 (par excès).

— **Encadrement :** $2,645 < \sqrt{7} < 2,646$ est un encadrement à 10^{-3} près.

Application finale

Encadrer $A = \frac{11-2\sqrt{3}}{4}$ sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.

sadio.malamine@ugb.edu.sn