ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

1Η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΝΑΦΟΡΑ

Γεωργία Μπουσμπουκέα- el19059

Κατανομή Poisson

A)

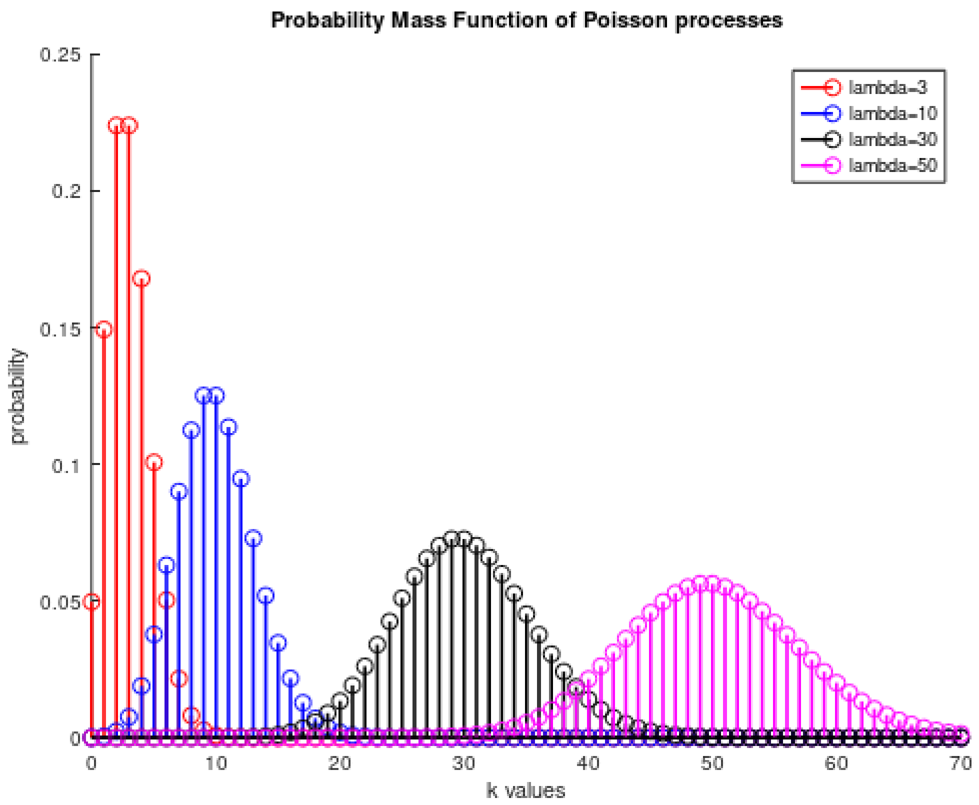
Για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ η συνάρτηση μάζας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbb{P}[X=k]=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}$$

Για την θετική πραγματική τιμή λ ισχύει:

$$\lambda=\mathbb{E}[X]=\mathbb{V}ar(X)$$

Για τις 4 τιμές του λ οι κατανομές είναι:



Παρατηρώ πως όσο αυξάνεται το λ τόσο μειώνεται η μέγιστη τιμή της συνάρτησης, ενώ συγχρόνως απλώνεται στον άξονα των x. Αυτό συμβαίνει διότι το άθροισμα των πιθανοτήτων σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να αθροίζεται στο 1. Ακόμη παρατηρώ πως η πιθανότητα P[X=k] μεγιστοποιείται για k=λ.

<u>Απόδειξη:</u>

Ισχύει:

$$\frac{p(k+1)}{p(k)} = \frac{\lambda}{k+1}$$

- Για k+1<λ ⇒ p(k)<p(k+1) γνησίως αύξουσα
- Για k+1>λ ⇒ p(k)>p(k+1) γνησίως φθίνουσα

Άρα το μέγιστο εμφανίζεται για το 1ο k>λ-1⇒ k=λ

B)

Πράγματι επιβεβαιώνεται η ιδιότητα:

$$\lambda = \mathbb{E}[X] = \mathbb{V}ar(X)$$

```
Command Window
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value = 30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance = 30.000
```

<u>Απόδειξη:</u>

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{0}^{\infty} x \cdot \mathbb{P}[x] = \sum_{0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!} = \sum_{1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!} = \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{(x-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^{x}}{x!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}$$

Ομοίως: $\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}^2\left[X\right] = \mathbb{E}[X \cdot (X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}^2[X]$

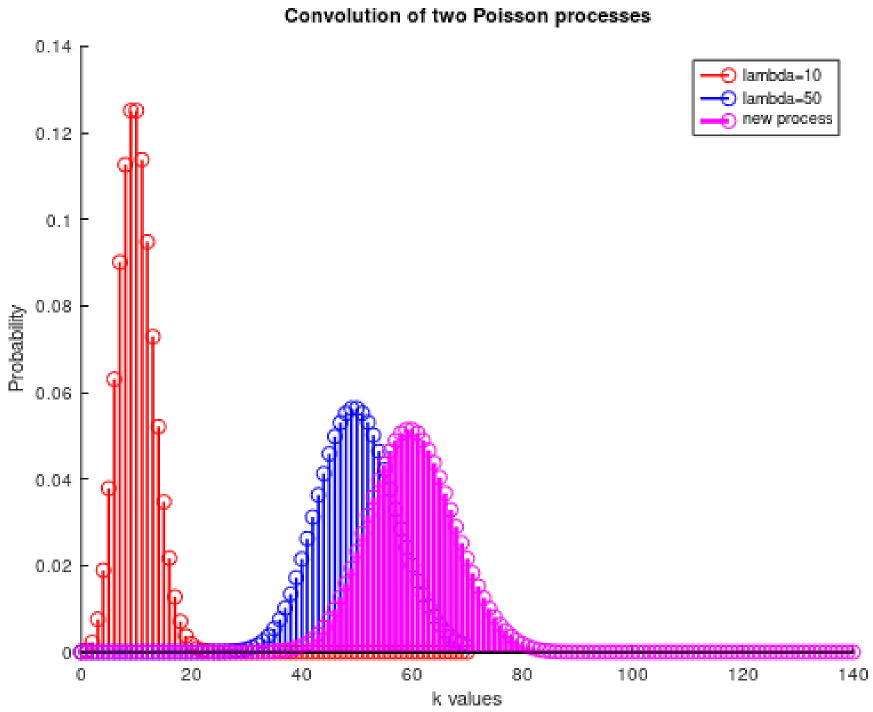
$$\mathbb{E}[X \cdot (X-1)] = \sum_{0}^{\infty} x \cdot (x-1) \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!} =$$

$$\sum_{0}^{\infty} x \cdot (x-1) \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!} = \sum_{2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{(x-2)!} = \lambda^{2} \cdot e^{-\lambda} \sum_{2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda^{2}$$

Άρα $\mathbb{V}ar(X) = \lambda$

Γ)

Το διάγραμμα της υπέρθεσης προκύπτει ως κατανομή Poisson γύρω από το 60:



Παρατηρώ ότι η υπέρθεση, Z, δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y που ακολουθούν κατανομή Poisson με παραμέτρους λ1, λ2 είναι κατανομή Poisson με παράμετρο λ1+λ2. Η προυπόθεση για να ισχύει αυτό είναι η ανεξαρτησία των X, Y.

<u>Απόδειξη</u>

Z=X+Y

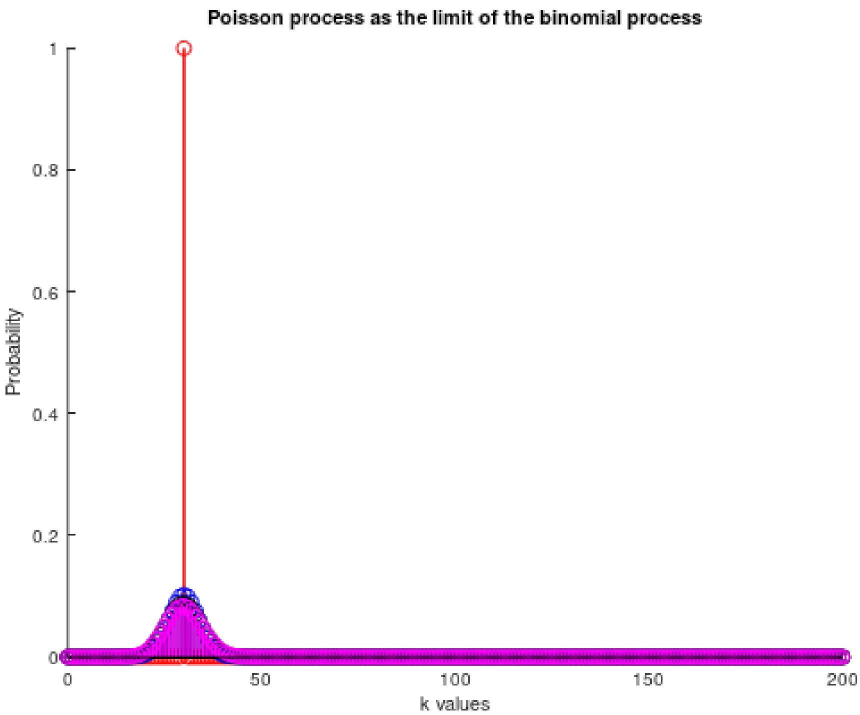
$$\mathbb{P}_Z[z] = \sum_{x=0} \mathbb{P}[X=x \ \& \ Y=z-x] = \sum_{0} \mathbb{P}[X=x] \cdot \mathbb{P}[Y=z-x] =$$

$$\sum_{0} \frac{e^{-\lambda 1} \cdot \lambda 1^{x}}{x!} \cdot \frac{e^{-\lambda 2} \cdot \lambda 2^{z-x}}{(z-x)!} = \sum_{0} \frac{z!}{x!(z-x)!} \cdot \frac{e^{-\lambda 1} \cdot \lambda 1^{x} \cdot e^{-\lambda 2} \cdot \lambda 2^{z-x}}{z!} =$$

$$\frac{e^{-(\lambda 1 + \lambda 2)}}{z!} \sum_{0} \binom{z}{x} \lambda 1^{x} \cdot \lambda 2^{z-x} = \frac{e^{-(\lambda 1 + \lambda 2)}}{z!} \cdot (\lambda 1 + \lambda 2)^{z}$$

Δ)

Η διωνυμική κατανομή ~ (n, p) προσεγγίζει την Poisson~ (λ=np) όταν το πλήθος των δοκιμών, n, είναι μεγάλο και η πιθανότητα επιτυχίας δοκιμής, p, είναι μικρή (n>100 & np<10). Πράγματι στο σχήμα βλέπουμε πως όσο αυξάνεται το n τόσο περισσότερο τείνει να γίνει συνάρτηση κατανομής Poisson:



<u>Ο κώδικας για την πρώτη άσκηση δίνεται.</u>

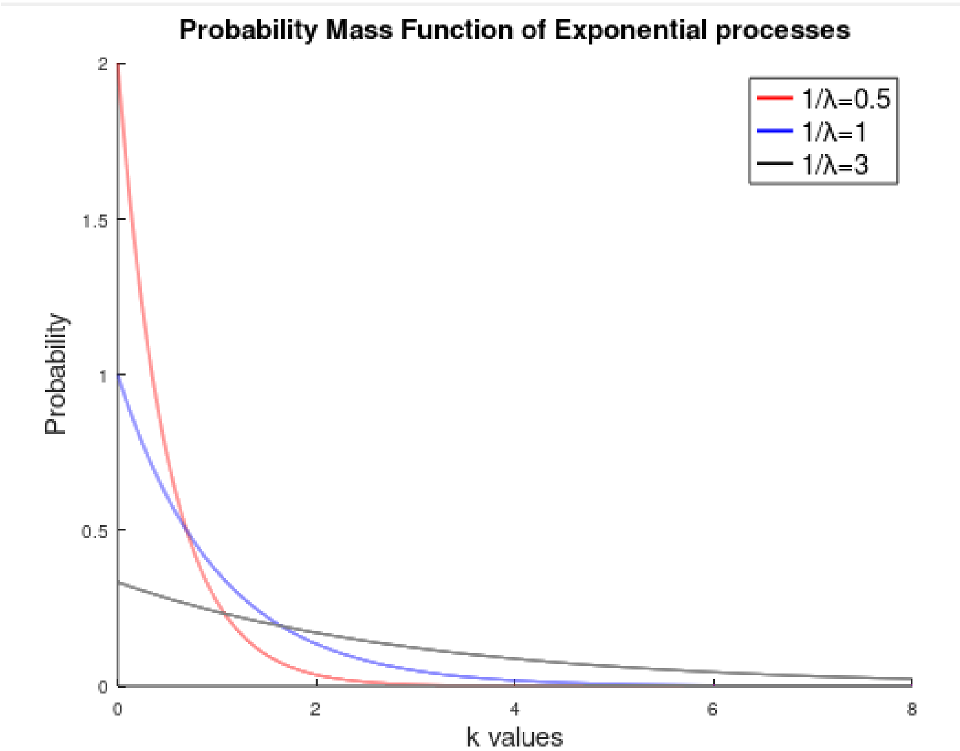
Εκθετική κατανομή

A)

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή θετική παράμετρο λ (X~Exp(λ)) όταν έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Για το διάγραμμα χρησιμοποιώ την συνάρτηση exppdf (παίρνει ως παράμετρο την μέση τιμή=1/λ) και plot (καθώς πρόκειται για συνεχή τυχαία μεταβλητή):

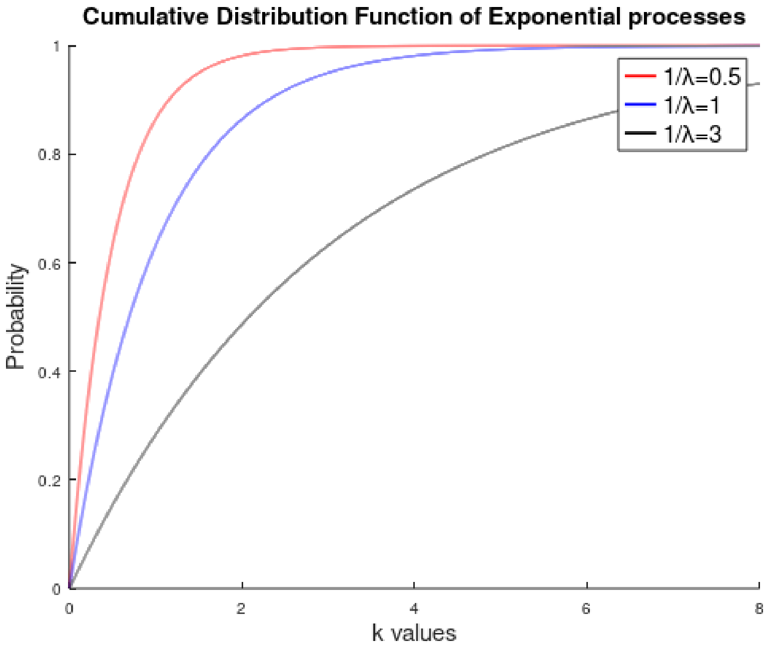


B)

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή θετική παράμετρο λ (X~Exp(λ)) όταν έχει συνάρτηση κατανομής πιθανότητας:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Για το διάγραμμα χρησιμοποιώ την συνάρτηση expcdf:



Γ)

(Επέλεξα ως διάνυσμα το *k=0:0.0001:8 (⇒* 3000 αντί για 30000 *) για γρηγορότερη εκτέλεση)*

Μία ιδιότητα της εκθετικής κατανομής είναι η ιδιότητα έλλειψης μνήμης:

$$\mathbb{P}(\,T>s+t \mid T>s) \,=\, \mathbb{P}(\,T>t)$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\mathbb{P}(\,T>s+t \mid T>s) \,=\, \frac{\mathbb{P}\Big(\,T>s+t \cap \,T>s\Big)}{\mathbb{P}(\,T>s)} =$$

$$\frac{\mathbb{P}(\,T>s+t)}{\mathbb{P}(\,T>s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(\,T>t)$$

Ακόμη, P[X>3000]= 1-P[X $\leq$ 3000]= 1-F(3000)

Και από την ιδιότητα έλλειψης μνήμης

P[X> 5000 | X>2000] =P[X>2000+3000 | X>2000]= P[X>3000]

Πράγματι, οι δύο τιμές είναι ίδιες (η μικρή διαφοροποίηση οφείλεται στην “ακρίβεια” του διανύσματος k):

```
Command Window
p1 = 0.8870
p2 = 0.8869
```

Ο κώδικας:

```
clc;
clear all;
close all;

# TASK 1

k = 0:0.0001:8;
mean = [0.5, 1, 3];

for i = 1 : columns(mean)
  exp(i, :) = exppdf(k, mean(i));
endfor

colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i = 1 : columns(mean)
  plot(k, exp(i, :), colors(i), "linewidth", 1.4);
endfor
hold off;

title("Probability Mass Function of Exponential processes", "fontsize", 15);
xlabel("k values", "fontsize", 15);
ylabel("Probability", "fontsize", 15);
legend("1/λ=0.5", "1/λ=1", "1/λ=3", "fontsize", 15);
```

```
#TASK 2

k = 0:0.0001:8;
mean = [0.5, 1, 3];

for i = 1 : columns(mean)
  exp(i, :) = expcdf(k, mean(i));
endfor

colors = "rbkm";
figure(2);
hold on;
for i = 1 : columns(mean)
  plot(k, exp(i, :), colors(i), "linewidth", 1.4);
endfor
hold off;

title("Cumulative Distribution Function of Exponential processes", "fontsize", 15);
xlabel("k values", "fontsize", 15);
ylabel("Probability", "fontsize", 15);
legend("1/λ=0.5", "1/λ=1", "1/λ=3", "fontsize", 15);


#TASK 3

k = 0:0.0001:8;
mean= 2.5;
exp= expcdf(k, mean);
p1=1-exp(3000)
p2= (1- exp(5000))./(1-exp(2000))
```

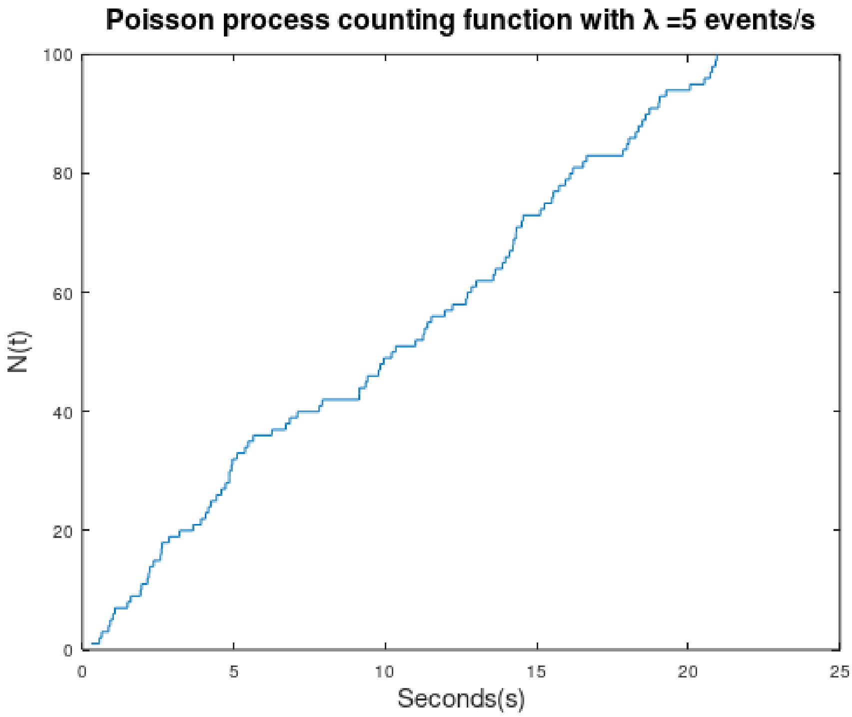
<u>Διαδικασία καταμέτρησης Poisson</u>

A)

Η κατανομή Poisson με παράμετρο λ εκφράζει την πιθανότητα ενός δεδομένου αριθμού γεγονότων που συμβαίνουν σε ένα σταθερό διάστημα, αν τα γεγονότα αυτά είναι ανεξάρτητα και έχουν σταθερό μέσο ρυθμό λ. Η εκθετική κατανομή με παράμετρο λ εκφράζει τον χρόνο μεταξύ γεγονότων σε μια διαδικασία Poisson.

Ορίζουμε την διαδικασία καταμέτρησης Poisson, N(t), ως το πλήθος των γεγονότων Poisson που εμφανίζονται στο διάστημα (0, t]. Δηλαδή, κάθε φορά που συμβαίνει ένα γεγονός η N(t) αυξάνεται κατά ένα.

Ορίζουμε το διάνυσμα x, το οποίο εκφράζει τους χρόνους μεταξύ των διάφορων γεγονότων (x(1)= ο χρόνος μεταξύ 1ου και 2ου γεγονότος κοκ). Επομένως, ακολουθεί την εκθετική κατανομή και του δίνουμε 100 τυχαίες τιμές με την βοήθεια της συνάρτησης exprnd(). Στην συνέχεια ορίζουμε την διαδικασία καταμέτρησης Poisson, n. Με την άφιξη κάθε γεγονότος αυξάνουμε την n κατά 1 και το x κατά το προηγούμενο διάστημα, για να υπάρχει συνέχεια στον χρόνο. Η απεικόνιση γίνεται με την συνάρτηση stairs():



B)

Ο αριθμός γεγονότων σε ένα διάστημα ΔΤ=t1-t2 ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο (=μέσος αριθμός γεγονότων) λ*ΔΤ, όπου λ ο ρυθμός άφιξης γεγονότων. Η τιμή αυτή προσεγγίζεται από τον τύπο:

$$\mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \gamma\varepsilon\gamma o\nu\acute{o}\tau\omega\nu = \frac{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \gamma\varepsilon\gamma o\nu\acute{o}\tau\omega\nu}{\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta\varsigma}$$

Για λ=5, ορίζω πάλι το διάνυσμα x, που έχει ως τιμές τυχαία ΔΤ. Σε κάθε βήμα αυξάνω το x(i) κατά το x(i-1) άρα ισχύει : x(πλήθος_γεγονότων)= διάστημα παρατήρησης

Χρησιμοποιώ την προσέγγιση για τα διάφορα πλήθη γεγονότων που ζητούνται:

```
Number of events=
200
λ*ΔT=
5.4445
Number of events=
300
λ*ΔT=
4.8536
Number of events=
500
λ*ΔT=
5.4001
Number of events=
1000
λ*ΔT=
4.9670
Number of events=
10000
λ*ΔT=
4.9984
```

Παρατηρώ πως όσο αυξάνω το πλήθος των γεγονότων τόσο η τιμή λ*ΔT προσεγγίζει το λ.

Ο Κώδικας:

```
#TASK 1

lambda=5;
mean=1/lambda;
nevents=100;
x=exprnd(mean, 1,  nevents);
n=ones(nevents, 1);

for i=1:nevents-1
  x(i+1)=x(i+1)+x(i);
  n(i+1)=n(i)+1;
endfor

figure(1);
stairs(x, n)
title("Poisson process counting function with λ =5 events/s" ,"fontsize", 16);
xlabel("Seconds(s)", "fontsize", 15);
ylabel("N(t)", "fontsize", 15);


#TASK 2

lambda=5;
mean=1/lambda;
nevents=[200, 300, 500, 1000, 10000];

for j=1: columns(nevents)
  x=exprnd(mean, 1,  nevents(j));

  for i=1:nevents(j)-1
    x(i+1)=x(i+1)+x(i);
  endfor

  disp("Number of events="), disp(nevents(j));
  disp("λ*ΔT="), disp(nevents(j)/x(nevents(j)));
endfor
```