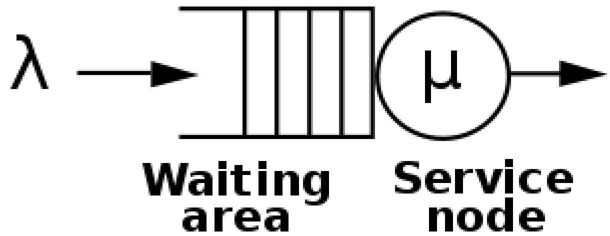
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

2η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΝΑΦΟΡΑ

Γεωργία Μπουσμπουκέα- el19059

<u>Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1</u>

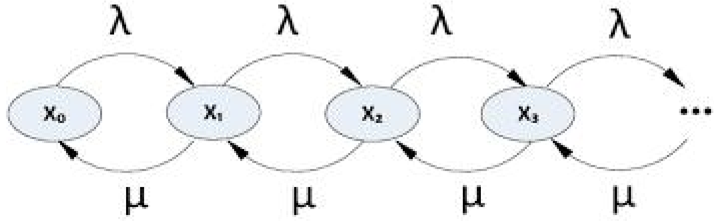
Έστω μια ουρά M/M/1 (αφίξεις ~Poisson(λ), εξυπηρετήσεις ~Poisson(μ), 1 εξυπηρετητής).



A)

Η ουρά είναι εργοδική (θα έχει θετική πιθανότητα να περάσει από κάθε σημείο του χώρου καταστάσεων) αν η αναλογία του χρόνου που είναι κατειλημμένος ο server, $p=\frac{\lambda}{\mu}$, είναι μικρότερη του 1 Erlang. Σε αντίθετη περίπτωση, οι αφίξεις θα συνέβαιναν γρηγορότερα από τις εξυπηρετήσεις και η ουρά θα αυξανόταν απεριόριστα.

Το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων:



‘Εστω $P_n(t)$ την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση n την χρονική στιγμή t. Οι πιθανότητες αυτές προκύπτουν λογικά από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$\frac{dPn(t)}{dt}=\lambda*P_{n-1}(t)+\mu*P_{n+1}-(\lambda+\mu)*P_n(t)$

$\frac{dPo(t)}{dt}=\mu*P_1(t)-\lambda*P_0(t)$

Έστω $P_n=P_n(t)$ στο όριο $t\to\ \infty$, οπότε $\frac{dPn(t)}{dt}=0$ και προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας:

$\lambda\mathrm{P}o=\mu\mathrm{P1}\ \Rightarrow\ \mathrm{P1}=\rho\cdot\mathrm{P0}$

....

$\mathrm{P}n=\mathrm{P}o\cdot\rho^n$

Ακόμη, ισχύει η ιδιότητα της κανονικοποίησης:

$\sum_0^n Pn=1\Rightarrow Po(1+\rho+\ldots)=1$

Όμως για 0<ρ<1: $(1+\rho+\ldots)\to\frac{1}{1-\rho}$

Οπότε: $\mathrm{P0}=(1-\rho)\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{P}n=(1-\rho)\cdot\rho^n,\ n>0$

Β)

Ισχύει: $\mathrm{E}[n(t)]=\sum_1^\infty kPk=\frac{\rho}{1-\rho}$

Ο μέσος χρόνος καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα δίνεται με χρήση του τύπου του Little:

$$E[T]=\frac{E[n(t)]}{\gamma}=\frac{E[n(t)]}{\lambda}=\frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho}$$

Γ)

Καθώς μιλάμε για εργοδικό σύστημα, έχει θετική πιθανότητα να βρεθεί σε κάθε κατάσταση μετά το πέρας κάποιου χρόνου, άρα θα βρεθεί και στην κατάσταση με 57 πελάτες: $\mathrm{P}_{57}=(1-\rho)\cdot\rho^{57}$

<u>Αναλυση ουρας M/M/1 με Octave</u>

A)

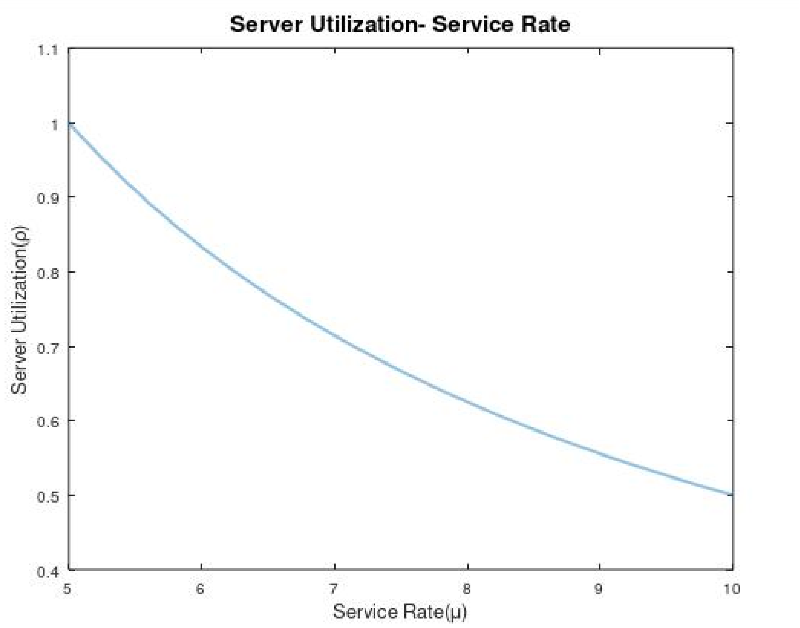
Όπως αναλύσαμε πριν, για να είναι εργοδικό το σύστημα πρέπει $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \Rightarrow$

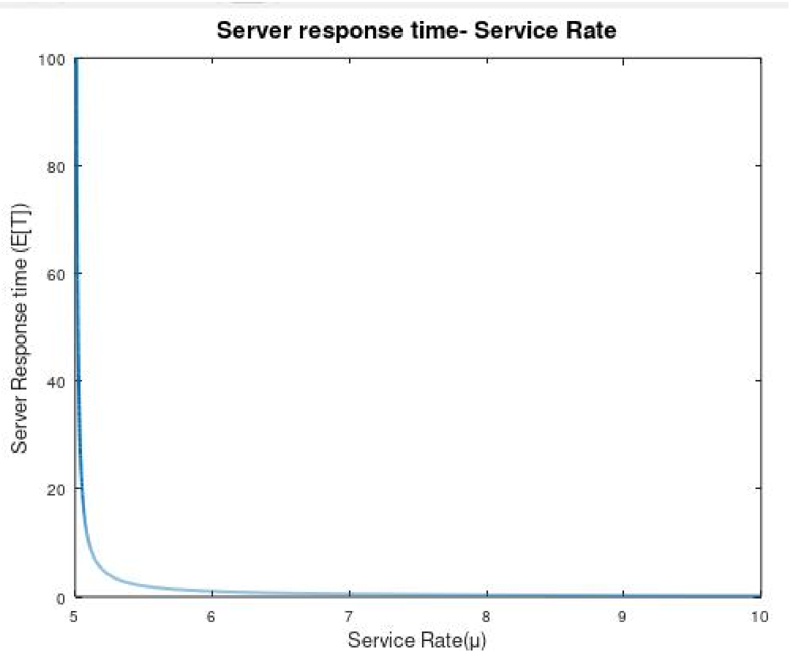
$\mu > \lambda \Rightarrow \mu \in [6,\ 10]$ πελάτες/min

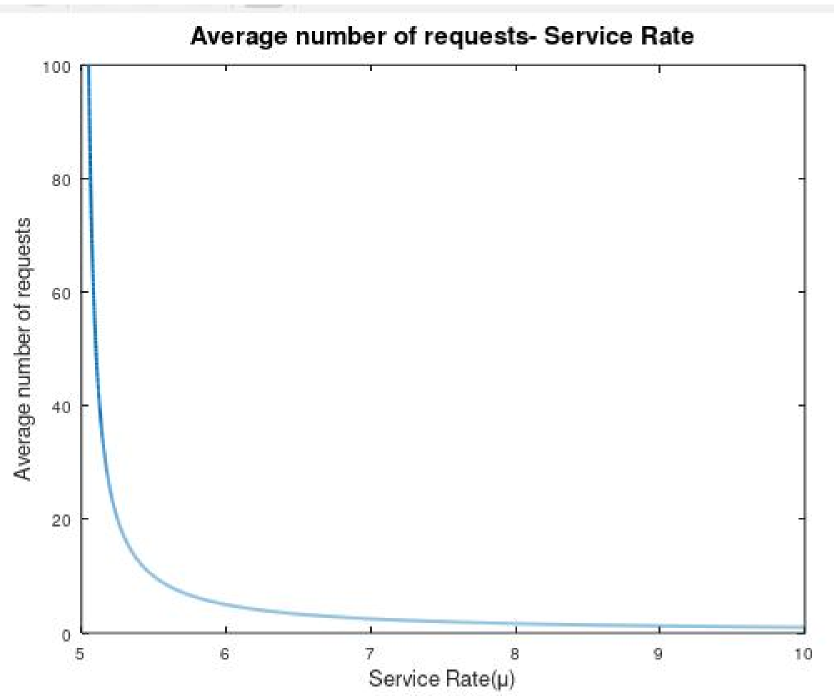
B)

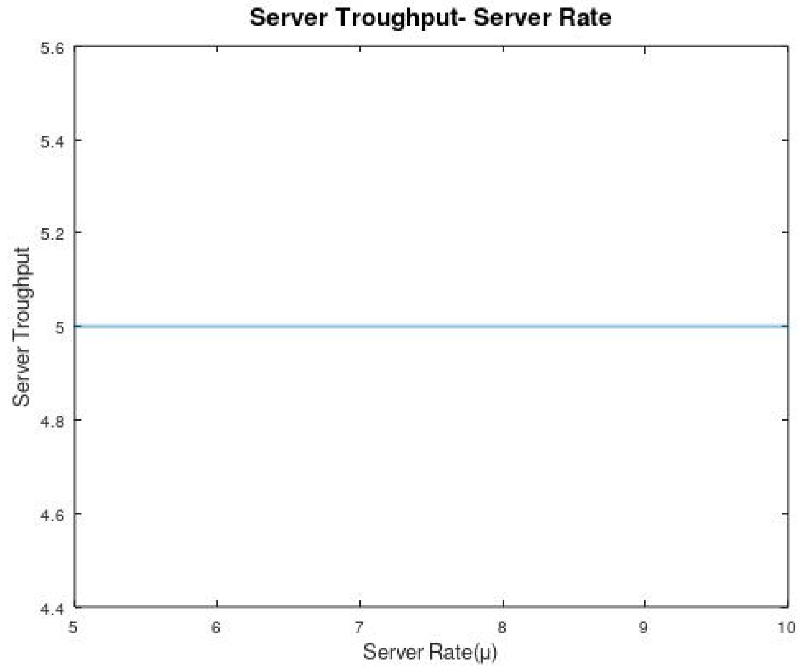
Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση qsmm1 προκύπτουν τα διανύσματα U, R, Q, X που είναι αντίστοιχα ο βαθμός εξυπηρέτησης, ο μέσος χρόνος καθυστέρησης, ο μέσος αριθμός πελατών και η ρυθμαπόδοση, για τις δεδομένες τιμές του μ.

Τα ζητούμενα διαγράμματα:









Όπως είναι αναμενόμενο, όσο αυξάνεται ο ρυθμός εξυπηρέτησης μειώνονται ο βαθμός χρησιμοποίησης του server, η καθυστέρηση και ο αριθμός πελατών στο σύστημα. Ακόμη παρατηρούμε πως το troughput είναι ίσο με το λ.

Γ)

Προφανώς από το διάγραμμα, ο ιδανικότερος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι ο μέγιστος, δηλαδή 10. Αυτό, βέβαια, σημαίνει πολύ καλό εξυπηρετητή, κάτι που θα αύξανε το κόστος.

Δ)

Για εργοδικά συστήματα troughput=λ

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω γ πελάτες/sec.

Για ουρά με έναν server ισχύει: $\gamma = \lambda \cdot (1 - \mathrm{P}\{blocking\})$, όπου
P{blocking}=πιθανότητα να χαθεί πελάτης επεδή βρήκε το σύστημα πλήρες.
Προφανώς σε εργοδική ουρά η πιθανότητα αυτή είναι 0. Άρα **γ=λ**.

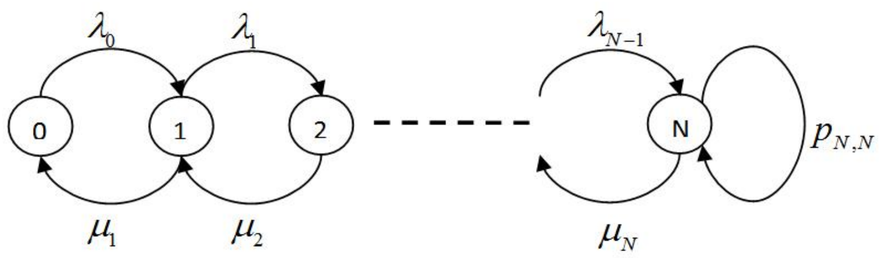
<u>Κώδικας:</u>

```
%ask2
%b
lambda=5;
m=5.00001:0.001:10.00001;
[U, R, Q, X]=qsmm1(lambda, m);

figure(1)
plot(m, U, "linewidth", 1.5);
title("Server Utilization- Service Rate", "fontsize", 15);
xlabel("Service Rate(μ)", "fontsize", 13)
ylabel("Server Utilization(ρ)", "fontsize", 13);
axis([5 10]);

figure(2)
plot(m, R, "linewidth", 1.5);
title("Server response time- Service Rate", "fontsize", 15);
xlabel("Service Rate(μ)", "fontsize", 13);
ylabel("Server Response time (E[T])", "fontsize", 13);
axis([5 10 0 100]);

figure(3)
plot(m, Q, "linewidth", 1.5);
title("Average number of requests- Service Rate", "fontsize", 15);
xlabel("Service Rate(μ)", "fontsize", 13);
ylabel("Average number of requests", "fontsize", 13);
axis([5 10 0 100]);

figure(4)
plot(m, X, "linewidth", 1.5);
title("Server Troughput- Server Rate", "fontsize", 15);
xlabel("Server Rate(μ)", "fontsize", 13);
ylabel("Server Troughput", "fontsize", 13);
axis([5 10])
```

Διαδικασία γεννήσεων θανάτων: εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K

A)

Το διάγραμμα μεταβάσεων για μια τέτοια ουρά είναι:



Οι εξισώσεις ισορροπίας για ουρά M/M/1/N είναι:

$$\lambda_0 \cdot \mathrm{P}_0 = \mu_1 \cdot \mathrm{P}_1$$

$$(\lambda_n + \mu_n) \cdot P_n = \lambda_{n-1} \cdot \mathrm{P}_{n-1} + \mu_{n+1} \cdot \mathrm{P}_{n+1}$$

Για $\mu_i = \mu$, $i = 1,\ \dots,\ N$ προκύπτει: $\mathrm{P}_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\mu^n}$

Και από την συνθήκη κανονικοποίησης προκύπτει: $\sum_{n=0}^{N} \mathrm{P}_{n=1} \Rightarrow \mathrm{P}_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{N} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\mu^n}}$

Άρα για μ=10 πελάτες/sec και $\lambda_i = \frac{\lambda}{i+1}$, με λ=5 πελάτες/sec προκύπτουν:

$\lambda_0 = 5,\ \lambda_1 = 2.5,\ \lambda_2 = 1.666,\ \lambda_3 = 1.25$

Άρα από τις παραπάνω εξισώσεις θα έχουμε για N=4:

$$\mathbf{P_0 = 0.066,\ P_1 = 0.3033,\ P_2 = 0.0758,\ P_3 = 0.0126,\ P_4 = 0.00158}$$

Η πιθανότητα απώλειας πελάτη είναι η πιθανότητα το σύστημα να απορρίψει πελάτη, επειδή είναι πλήρες, άρα είναι $\mathrm{P}\{blocking\} = \mathrm{P}_4 = 0.00158$

B)

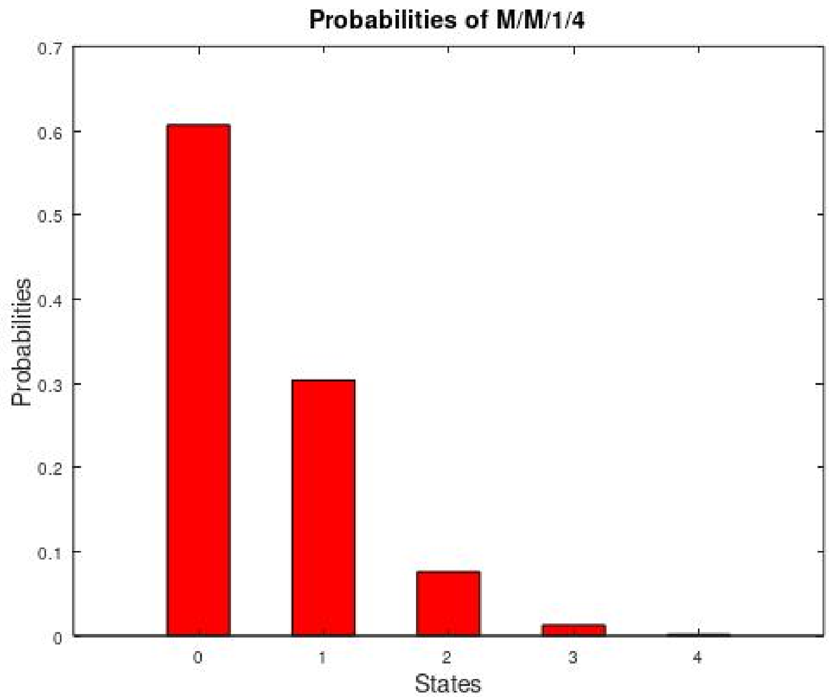
i.

Χρησιμοποιώ την συνάρτηση ctmcbd() του πακέτου queueing, η οποία επιστρέφει την μήτρα του ρυθμού μεταβάσεων, Q, για ορισμένες τιμές λ, μ σε κάθε κατάσταση:

```
Q =

   -5.0000    5.0000         0         0         0
   10.0000  -12.5000    2.5000         0         0
         0   10.0000  -11.6667    1.6667         0
         0         0   10.0000  -11.2500    1.2500
         0         0         0   10.0000  -10.0000
```

ii.

Χρησιμοποιώ την συνάρτηση ctmc(), η οποία επιστρέφει τις εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων, για δεδομένη μήτρα Q. Τις απεικονίζω σε ραβδόγραμμα, καθώς ακόμη παίρνω τις ακριβείς τιμές τους, οι οποίες ταυτίζονται με τις θεωρητικά υπολογισμένες του (α) ερωτήματος:




```
P =

   6.0664e-01   3.0332e-01   7.5829e-02   1.2638e-02   1.5798e-03
```

iii.

Για τον μέσο όρο πληθυσμού- κατάστασης E[n(t)] ισχύει σε ισορροπία: $\mathrm{E}[n(t)] \rightarrow E(k) = \sum_{k=0}^{N} k \cdot \mathrm{P}_k$

Οπότε προκύπτει:

```
mean num clients = 0.4992
```

iv.

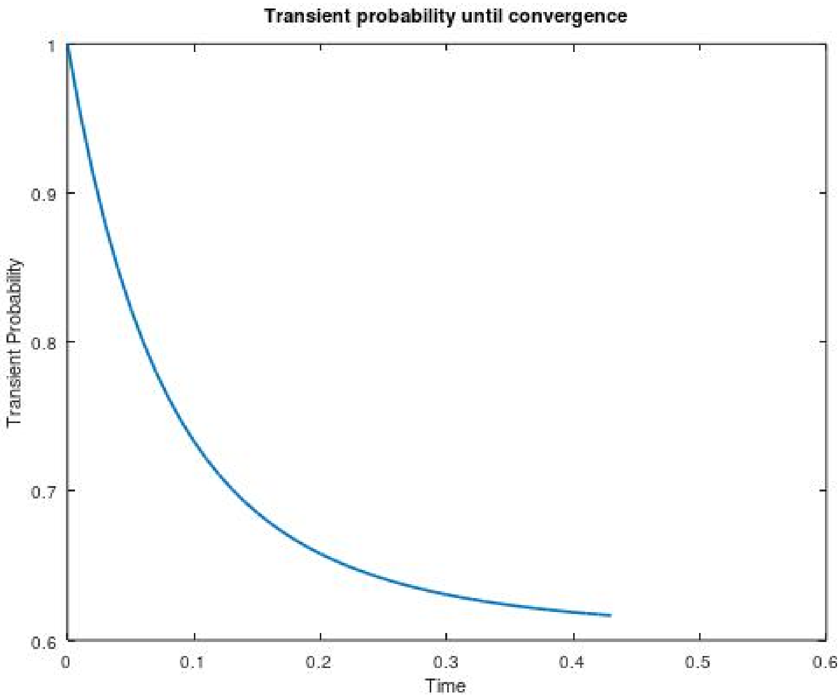
Η πιθανότητα απώλειας πελάτη είναι η πιθανότητα το σύστημα να απορρίψει πελάτη, επειδή είναι πλήρες, άρα είναι $\mathrm{P}\{blocking\} = \mathrm{P}_4$:

```
Pblocking = 1.5798e-03
```

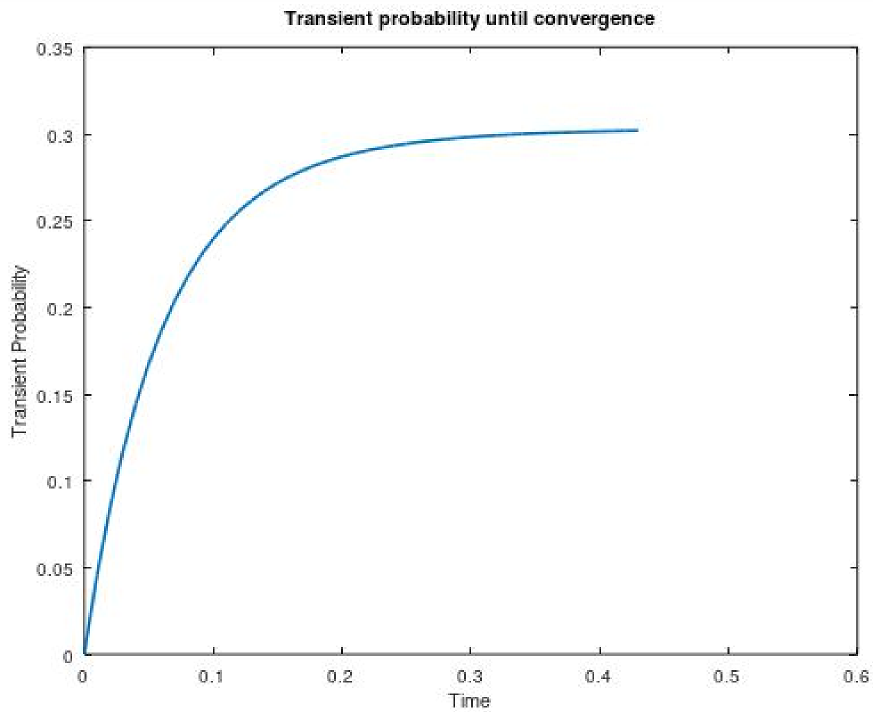
v.

Απεικονίζω τις πιθανότητες να βρεθεί το σύστημα σε κάθε κατάσταση ως συναρτήσεις του χρόνου, μέχρι να συγκλίνουν στις εργοδικές πιθανότητες ισορροπίας κατά 99%:

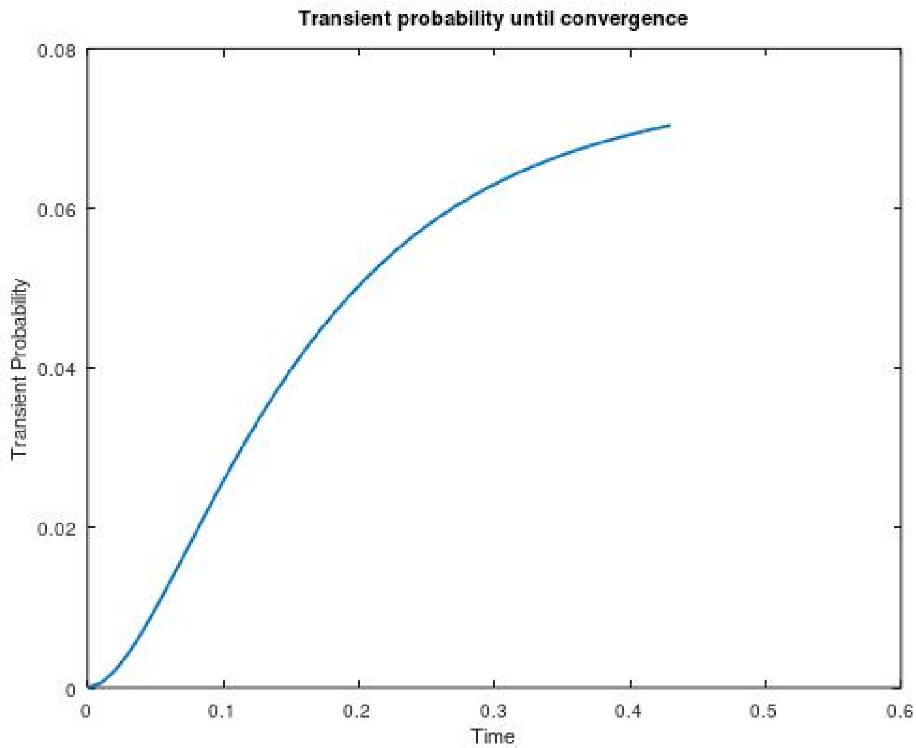
State 0:



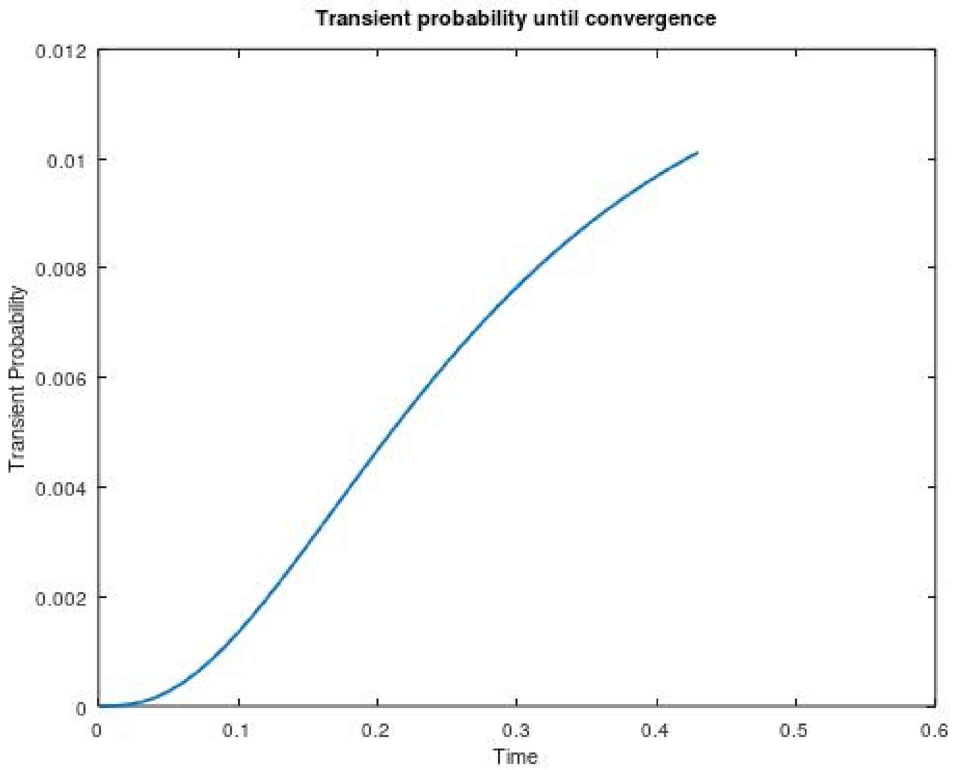
State 1:



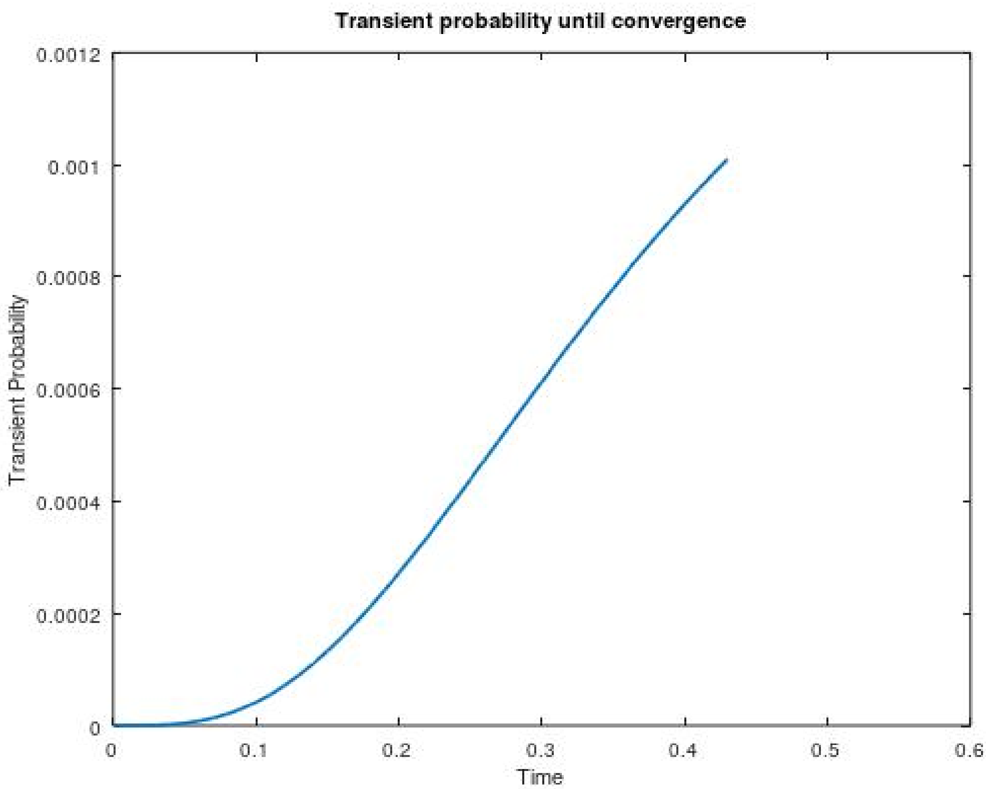
State 2:



State 3:



State 4:



Κώδικας:

```
%ask3
%b

m=10;
lambda=5;
N=4;
states = [0, 1, 2, 3, 4]; % system with capacity 4 states
% the initial state of the system. The system is initially empty.
initial_state = [1, 0, 0, 0, 0];

%i
births_B = [lambda, lambda/2, lambda/3, lambda/4];
deaths_D = [m, m, m, m];
Q=ctmcbd(births_B, deaths_D)

%ii
P=ctmc(Q)
figure(1);
bar(states, P, "r", 0.5);
title("Probabilities of M/M/1/4", "fontsize", 14)
xlabel("States", "fontsize", 14)
ylabel("Probabilities", "fontsize", 14)

%iii
mean_num_clients=0;
for i=1: 1:N+1
  mean_num_clients=mean_num_clients+(i-1)*P(i);  %array indexes starts from 1
endfor

display(mean_num_clients);

%iv
Pblocking=P(N+1);
display(Pblocking);

%v
for i = 1:1:N+1
  index = 0;
  for T = 0 : 0.01 : 50
    index = index + 1;
    Pn = ctmc(Q, T, initial_state);
    Probn(index) = Pn(i);
    if Pn - P < 0.01
      break;
    endif
  endfor

  t = 0 : 0.01 : T;
  figure(i+1);
  plot(t, Probn, "linewidth", 1.3);
  title("Transient probability until convergence");
  xlabel("Time");
  ylabel("Transient Probability");
endfor
```