

ΓΕΩΡΓΙΑ ΜΠΟΥΣΜΠΟΥΚΕΑ

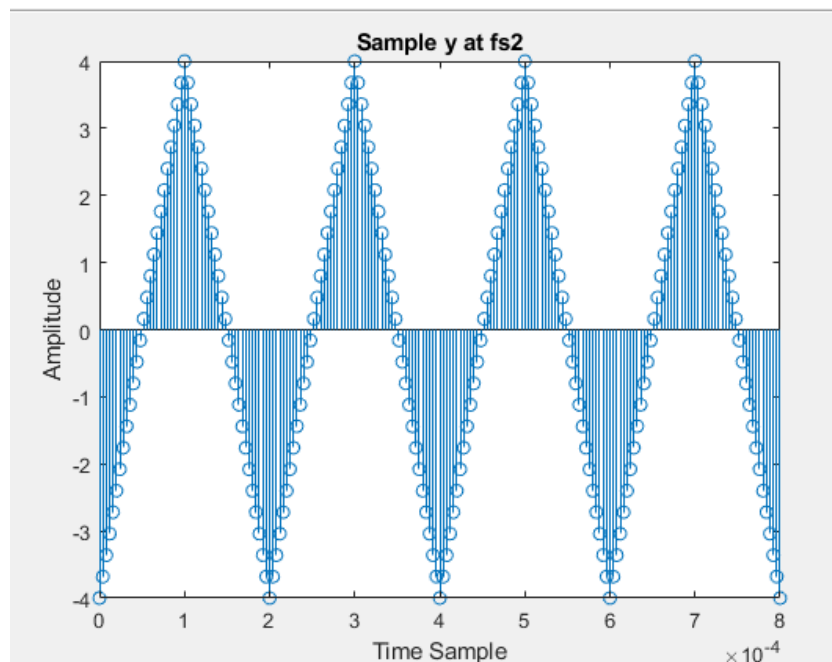
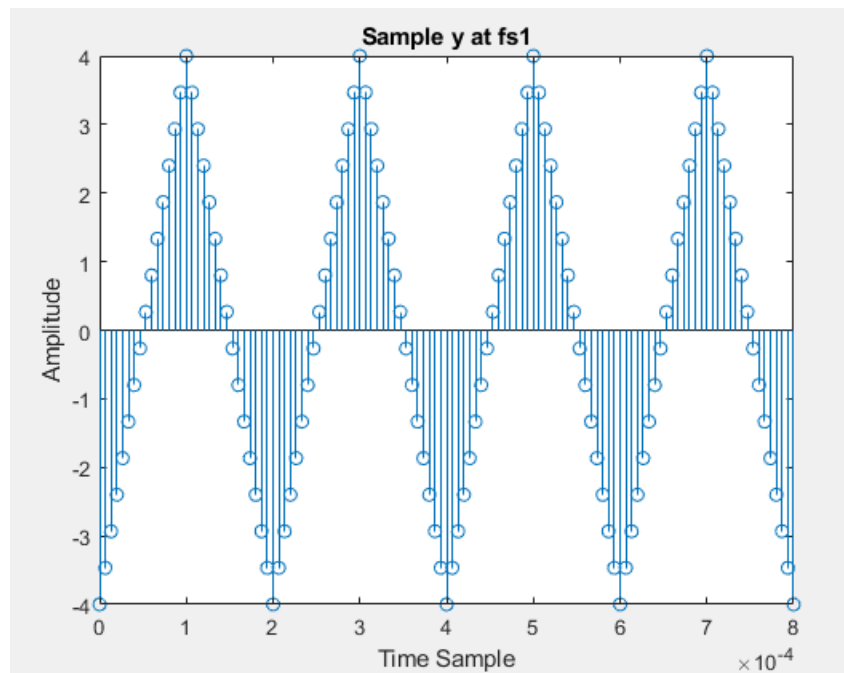
HMMY- 21/1/2022

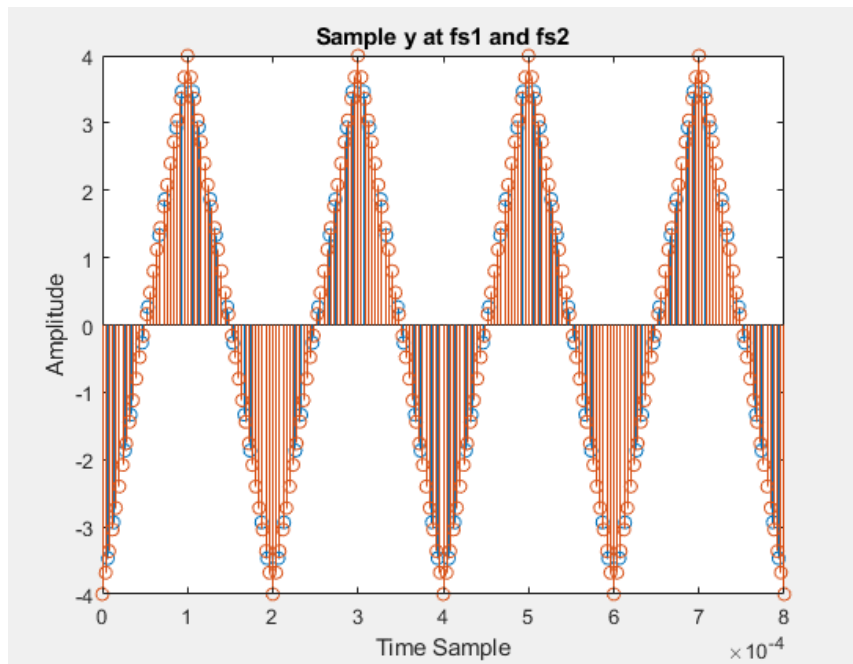
AM: el 19059

1η άσκηση

A)

Για $f_m=5\text{kHz}$ οι δειγματοληψίες στις δύο συχνότητες φαίνονται παρακάτω (χρησιμοποιούμε την εντολή stem):



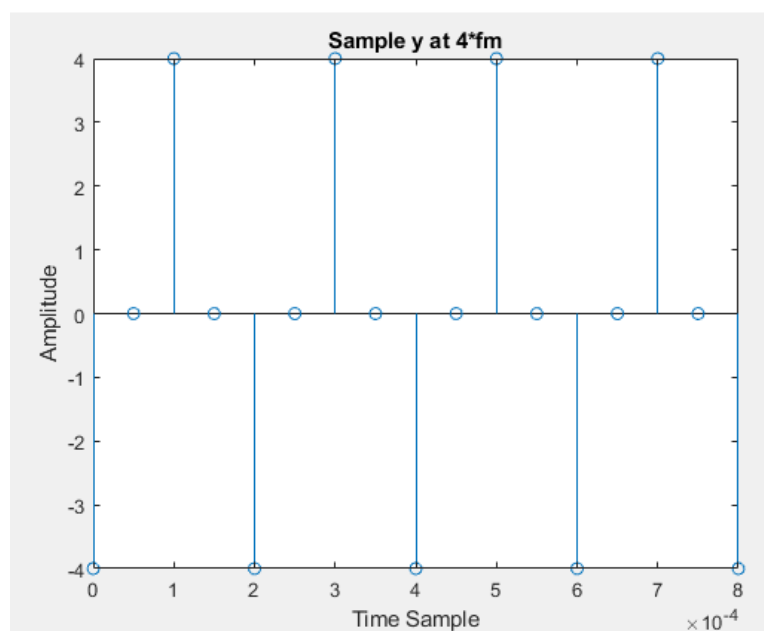


B)

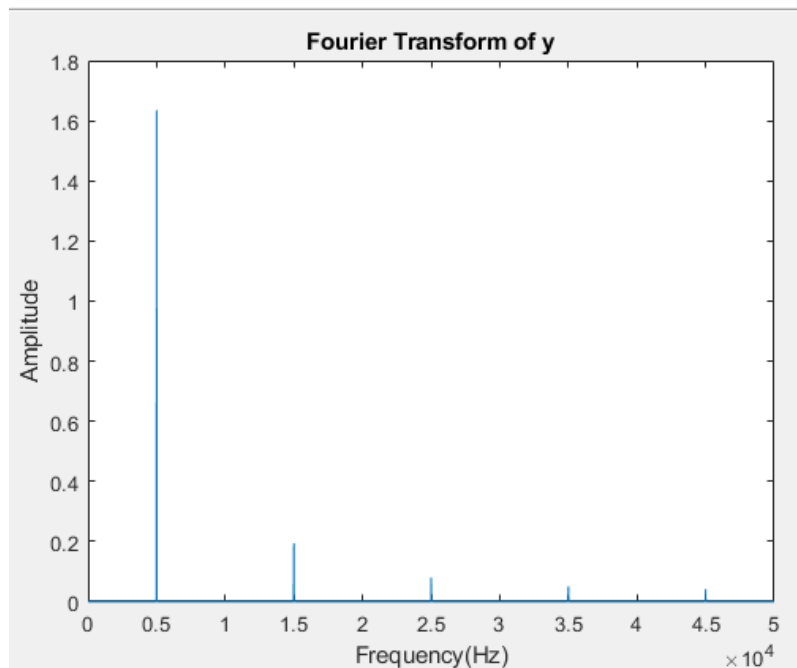
Γνωρίζουμε από το Θεώρημα Δειγματοληψίας Nyquist- Shannon πως, για να μην υπάρχει παραμόρφωση(aliasing) στο δειγματοληπτούμενο σήμα, θα πρέπει για την συχνότητα δειγματοληψίας f_s να ισχύει: $f_s > 2W$, όπου W το εύρος ζώνης του σήματος στο πεδίο της συχνότητας. Για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, ο μετασχηματισμός Fourier του προκύπτει ως

$X(f) = \sum c_n \delta(f - n f_m)$, όπου c_n οι συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier. Δηλαδή εμφανίζει φασματικές γραμμές σε ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας του σήματος.

Στην περίπτωση της τριγωνικής παλμοσειράς για $f_m = 5\text{kHz}$ το δειγματοληπτούμενο σήμα είναι:



Ο μετασχηματισμός Fourier είναι:

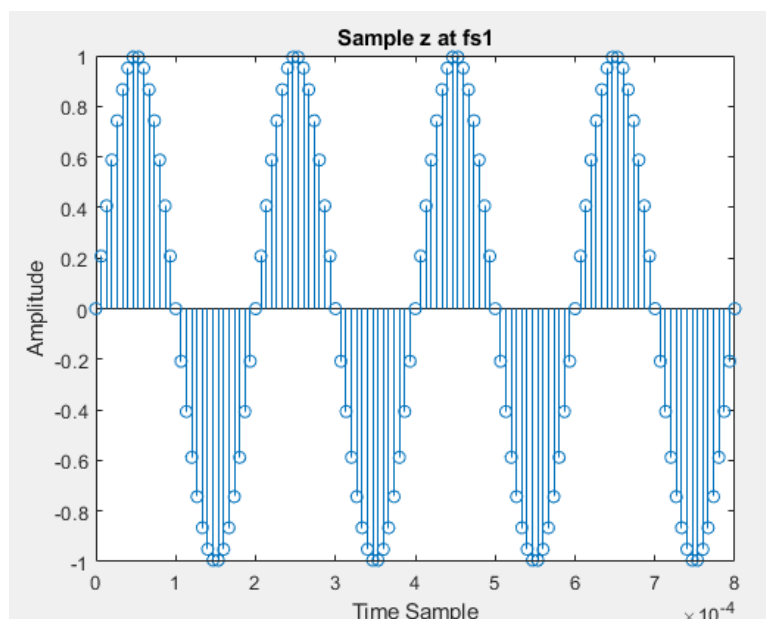


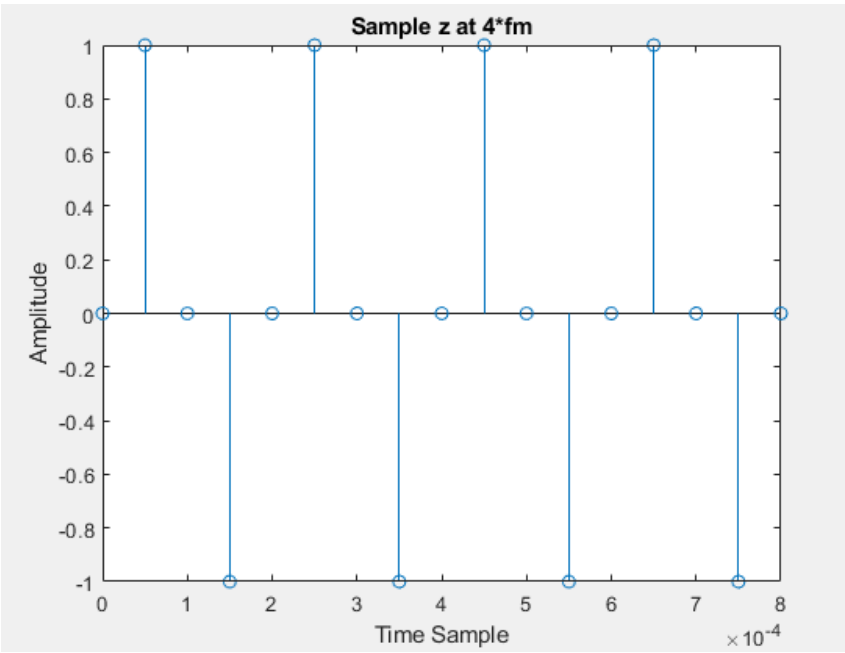
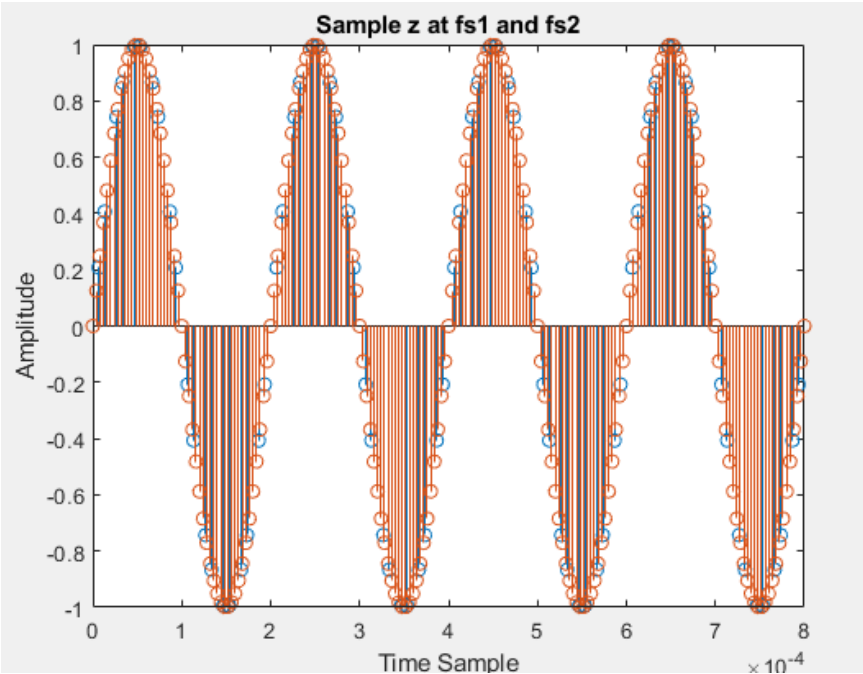
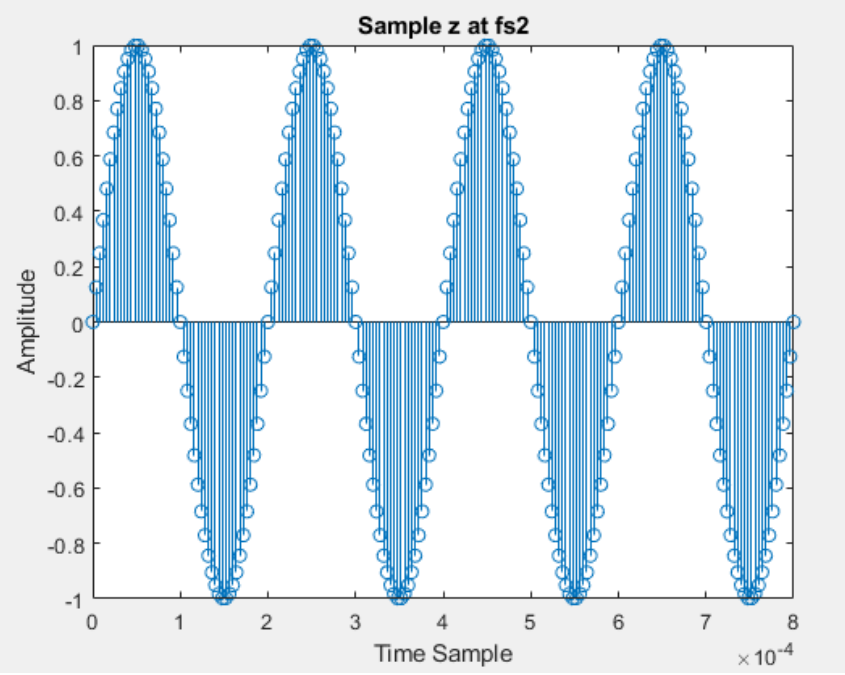
Παρατηρούμε πως κάποιες αρμονικές συνιστώσες του σήματος έχουν φάσμα σε συχνότητες μεγαλύτερες της $4f_m$. Το σήμα έχει άπειρο φάσμα, άρα δεν μπορεί να ισχύει $f_s > 2W$ και υπάρχει aliasing. Με $f_s = 4f_m = 20\text{kHz}$ μπορούμε να ανακτήσουμε το φασματικό περιεχόμενο μόνο της πρώτης φασματικής γραμμής, η οποία είναι και η θεμελιώδης.

Γ)

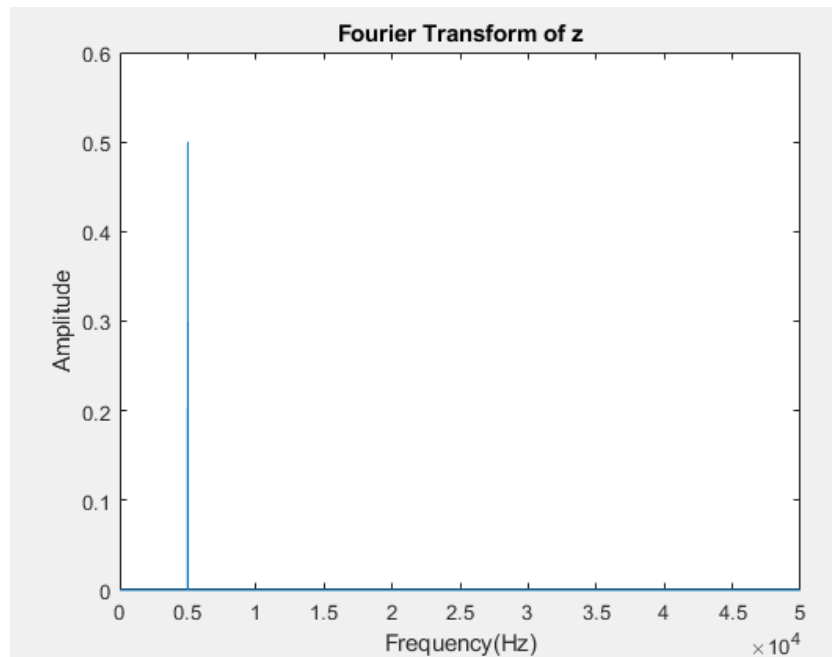
i.

Για $f_m = 5\text{kHz}$ οι δειγματοληψίες στις τρεις συχνότητες φαίνονται παρακάτω:





Ο μετασχηματισμός Fourier είναι:



Εδώ παρατηρούμε πως το φάσμα δεν είναι άπειρης διάρκειας αλλά έχει εύρος ζώνης ίσο με f_m . Επομένως με $f_s=4f_m$ είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή του σήματος.

ii.

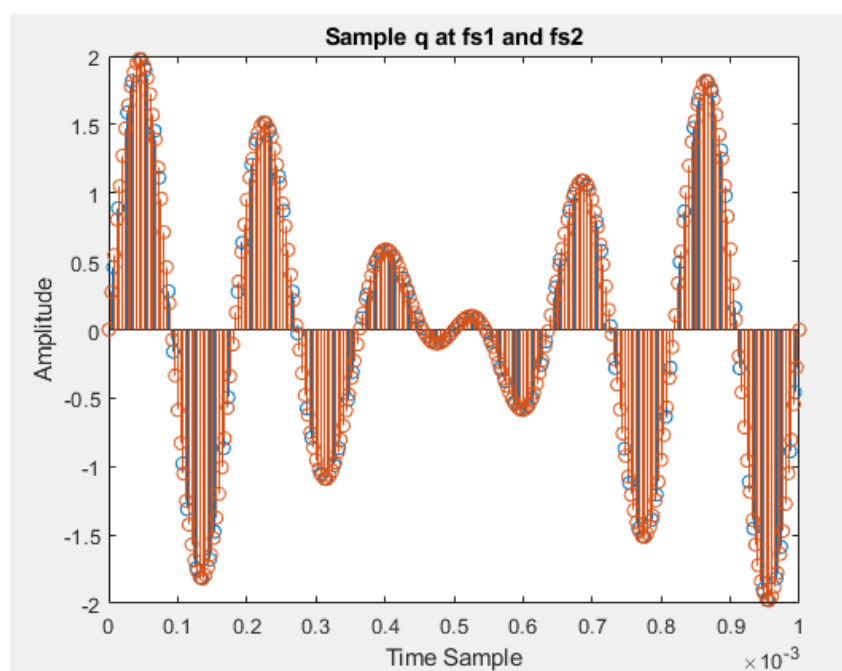
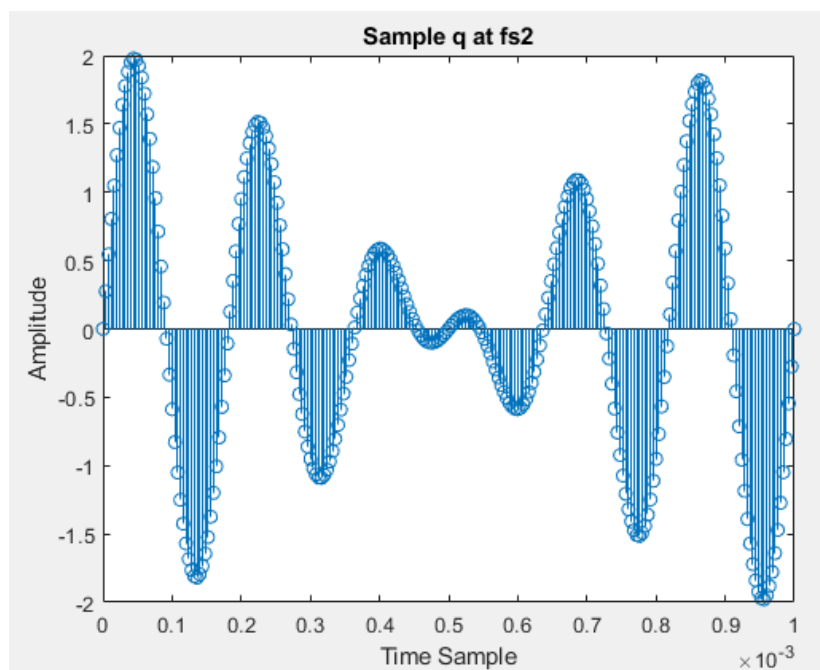
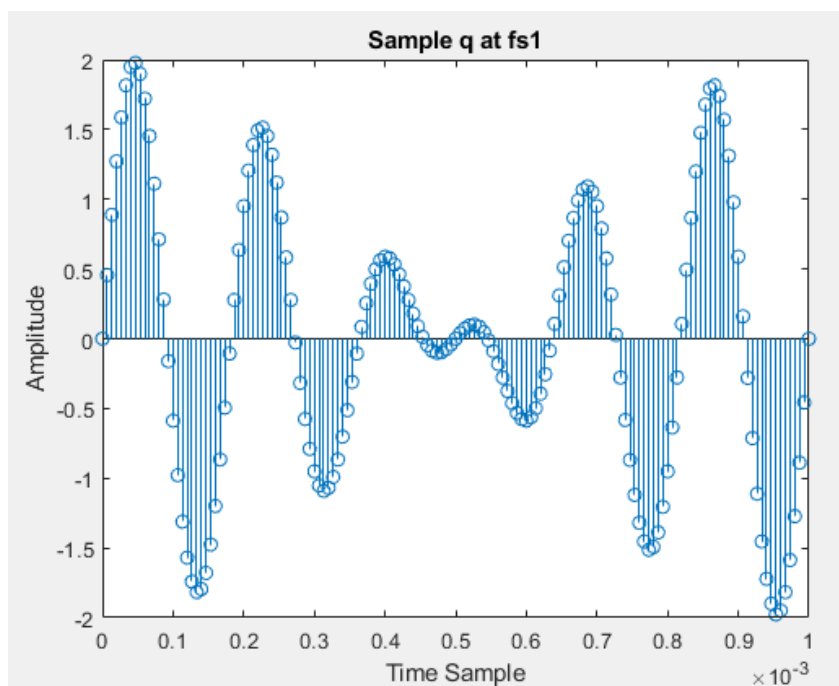
Το άθροισμα περιοδικών σημάτων με ρητό λόγο συχνοτήτων είναι περιοδικό σήμα με συχνότητα ίση με το GCD των δύο συχνοτήτων.

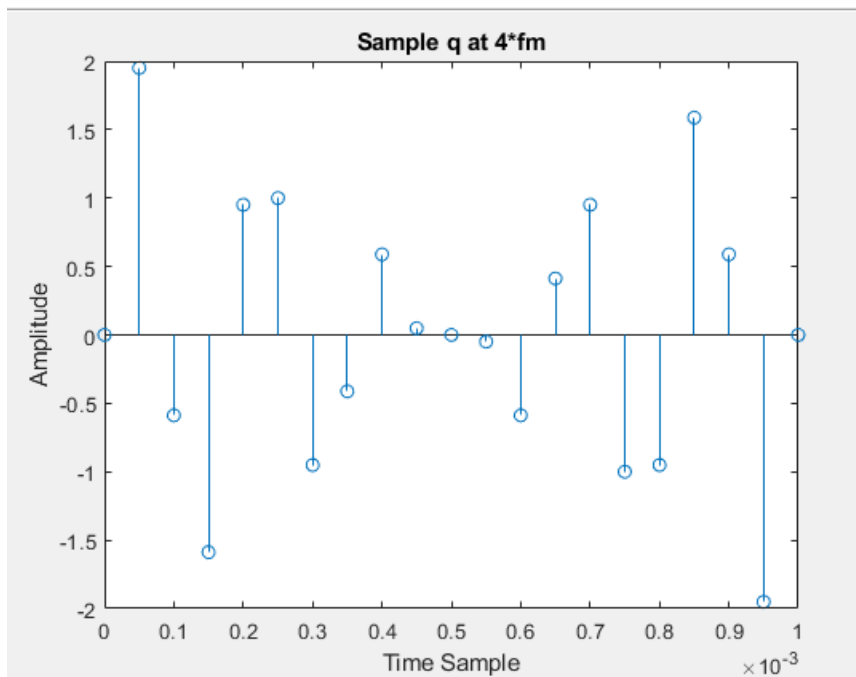
Εδώ: **$\text{GCD}(f_m, f_m+\Lambda) = 1\text{kHz}$**

Με χρήση τριγωνομετρικής ταυτότητας προκύπτει:

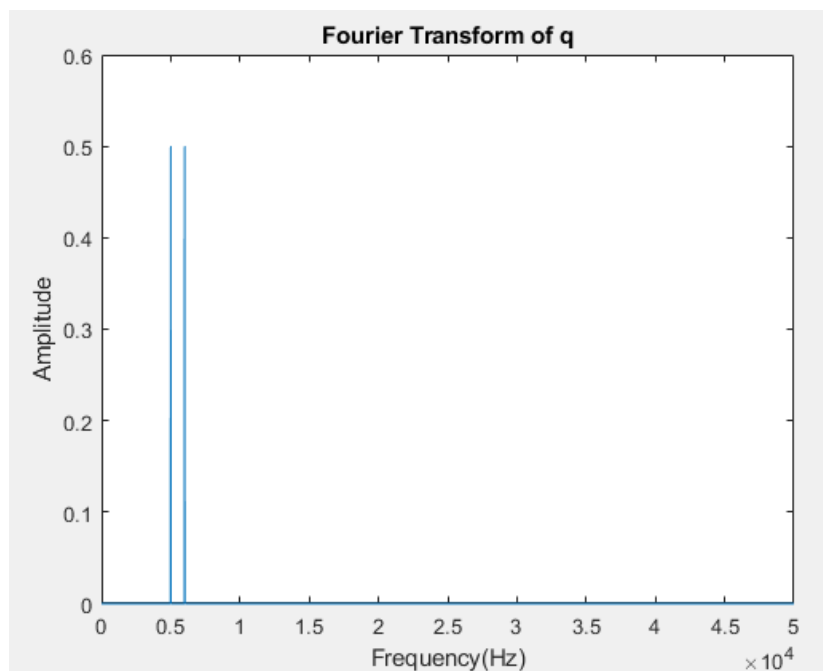
$Q(t) = 2\cos[2\pi(\Lambda/2)t] \cdot \sin[2\pi(f_m + \Lambda/2)t]$, δηλαδή πρόκειται για ημιτονοειδή συνάρτηση συχνότητας $f_m + \Lambda/2$, το πλάτος της οποίας μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο με συχνότητα $\Lambda/2$.

Για $f_m=5\text{kHz}$ οι δειγματοληψίες στις τρεις συχνότητες φαίνονται παρακάτω:





Ο μετασχηματισμός Fourier είναι:



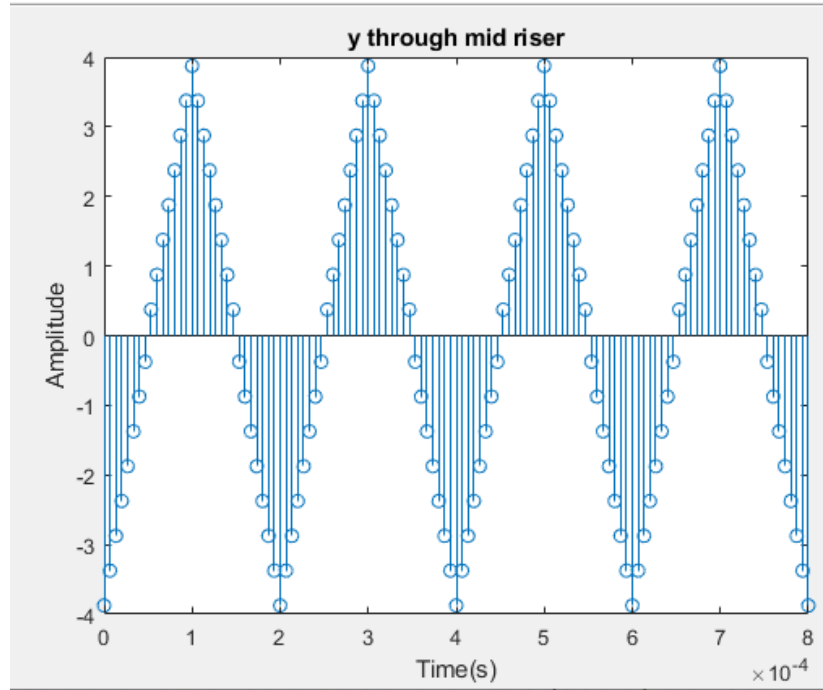
Όπως ήταν αναμενόμενο, ο μετασχηματισμός Fourier είναι φασματικές γραμμές στις δύο θεμελιώδεις συχνότητες, ως υπέρθεση ημιτόνων και έχει εύρος ζώνης την μέγιστη από τις δύο, δηλαδή $f_m + \Delta$. Για να μην υπάρχει aliasing με $f_s = 4f_m$ θα πρέπει $f_s > 2(f_m + \Delta) \Rightarrow f_m > \Delta$, που ισχύει εδώ.

2η άσκηση

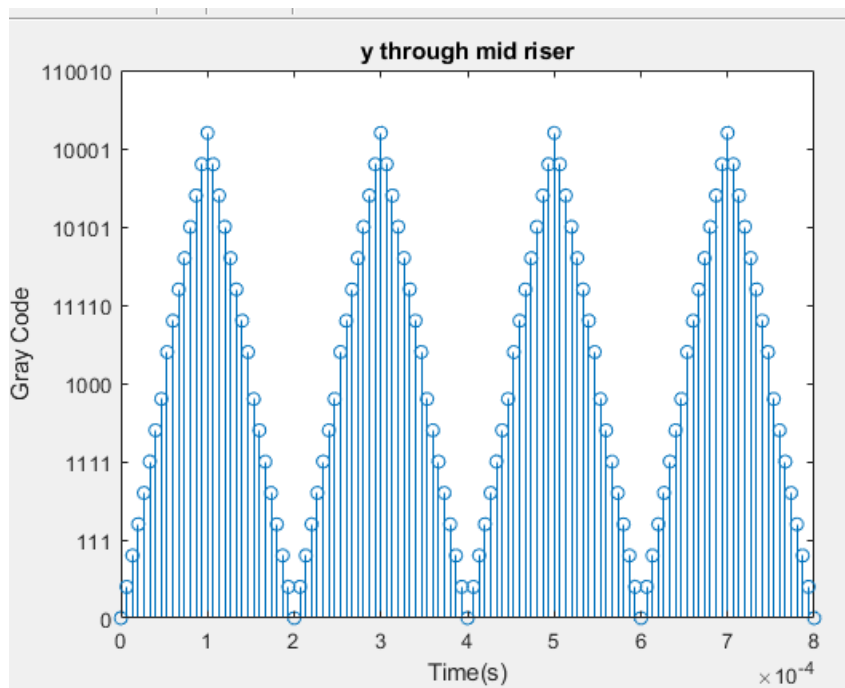
A)

Χρησιμοποιώντας $f_m=5\text{kHz}$ κάνουμε κβάντιση με $R=5$. Επομένως τα επίπεδα κβάντισης είναι $L=2^R$ και το μέγεθος βήματος $\Delta=2*y_{\max}/L$.

Η έξοδος του mid riser είναι:



Ενώ, χρησιμοποιώντας κωδικοποίηση Gray για τα επίπεδα κβάντισης (γίνεται καθαρό με κατάλληλο ζουμ):



B)

i.

Το σφάλμα q δίνεται από την σχέση $q=y$ -quants, όπου y το δειγματοληπτημένο σήμα και quants το κβαντισμένο σήμα. Τα σφάλματα που αντιστοιχούν στα 10 πρώτα δείγματα δίνονται από την: $\text{error_first10}=\text{error}(1,1:10)$;

Αφού τα εμφανίζω υπολογίζω την τυπική τους απόκλιση:

$$\text{Var}_{10}=1/10*\sum q_i^2, i=1,...,10= 0.006457$$

(Παρατηρούμε πως για κάθε i ισχύει $q_i \leq \Delta/2$, όπως και θα έπρεπε)

ii.

Ομοίως για τα 20 πρώτα δείγματα:

$$\text{Var}_{20}=1/20*\sum q_i^2, i=1,...,20= 0.005347$$

iii.

Υπολογίζω την ισχύ όλου του σήματος και προκύπτει **2.3385W**.

Η θεωρητική τιμή της τυπικής απόκλισης του σφάλματος είναι:

$$\sigma^2=1/3*y_{\max}^2*2^{-2R}=0.00521$$

Άρα το SNR κβάντισης:

$$\text{SNR}_{\text{theory}}=P/\sigma^2=448,85$$

$$\text{SNR}_{10\text{FIRST}}=P/\text{Var}_{10}=362,17$$

$$\text{SNR}_{20\text{FIRST}}=P/\text{Var}_{20}=437.35$$

Παρατηρούμε πως όσο περισσότερα δείγματα λαμβάνουμε υπόψιν τόσο προσεγγίζει το SNR την θεωρητική τιμή, που αντιστοιχεί σε όλο το σήμα.

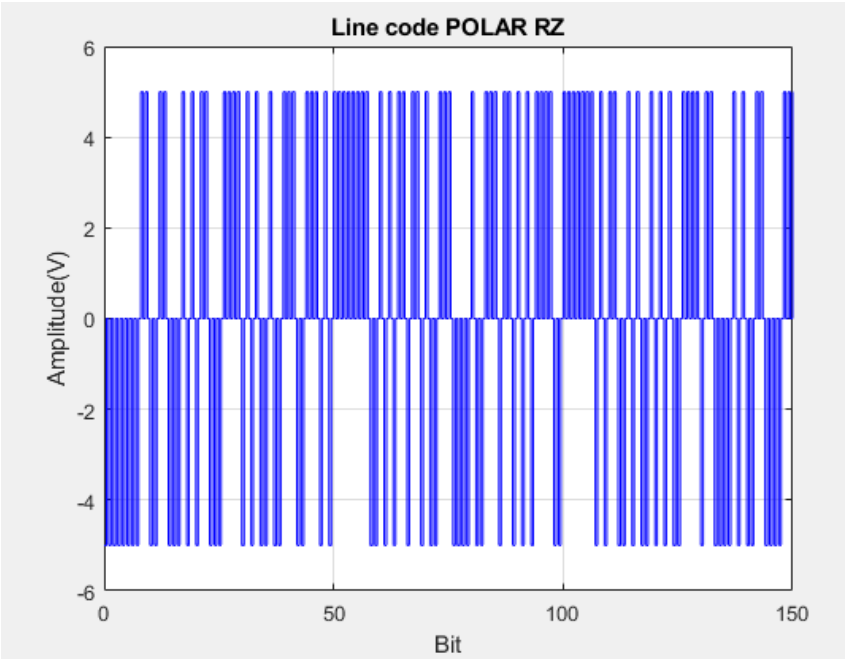
Γ)

Η κωδικοποίηση γραμμής αυτής της πληροφορίας (κωδικοποιημένη κατά Gray) γίνεται ως εξής: Κάθε δείγμα έχει κβαντιστεί σε ένα επίπεδο το οποίο αντιστοιχεί σε έναν 5bit Gray αριθμό, άρα συνολικά σε μία περίοδο θα σταλούν

$$5(\text{bit}/\text{δείγμα})*30\text{δείγματα}=150\text{bit}$$

Στην κωδικοποίηση POLAR RZ με διάρκεια bit $T_b=2\text{ms}$ κάθε bit 1 αντιστοιχεί σε θετικό παλμό πλάτους A , ενώ τα bit 0 σε παλμό πλάτους $-A$. Οι παλμοί αυτοί διαρκούν $T_b/2$ και τα υπόλοιπα $T_b/2$ s επιστρέφουν στο 0.

$\Gamma \propto A=5V$:

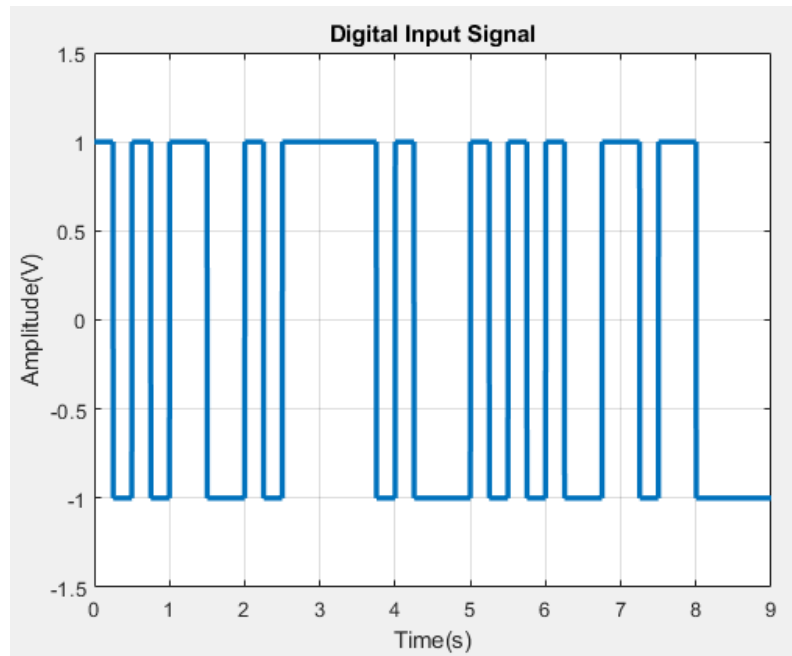


3η άσκηση

Παράγω την εξής 36bit ακολουθία με ίση πιθανότητα εμφάνισης 0 και 1, για την οποία η διάρκεια ψηφίου είναι $T_b = 0.25s$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Και σε NRZ-Polar είναι:



A)

(el19059-> 1+9+5+9=24 άρα fc=1Hz)

i.

Με την διαμόρφωση BPSK για τη μετάδοση του 1 θεωρούμε μηδενική αρχική φάση, για το μηδέν ολισθαίνουμε τη φάση κατά 180 μοίρες, κρατώντας τα υπόλοιπα στοιχεία ίδια.

$$\text{BPSK}(t) = s_1(t) = A_c \cos(2\pi f_c t), \text{ για bit 1}$$

$$=s_2(t)=A_c \cos(2\pi f_c t + \pi), \text{ για bit 0}$$

(όπου $0 < t < T_b$)

Δηλαδή κάθε σύμβολο αναπαρίσταται με 1 bit (ίδια για κωδικοποίηση Gray).

Άρα για την παραπάνω ακολουθία η αντιστοίχιση σε σύμβολα είναι:

S1 s2 s1 s2 s1 s1 s2 s2 s1 s2 s1 s1 s1 s1 s1 s2 s1 s2 s2 s2 s1
s2 s1 s2 s1 s2 s2 s1 s1 s2 s1 s1 s2 s2 s2 s2

QPSK(t) = s1(t) = Ac*cos(2πfct), για 00

s2(t) = Ac*cos(2πfct+3π/2), για 01

s3(t) = Ac*cos(2πfct+π), για 11

s4(t) = Ac*cos(2πfct+π/2), 10

(όπου 0<t<2*Tb) (κωδικοποίηση Gray)

Δηλαδή κάθε σύμβολο αναπαρίσταται με 2 bit .

Άρα για την παραπάνω ακολουθία η αντιστοίχιση σε σύμβολα είναι:

S4 s4 s3 s1 s4 s3 s3 s4 s4 s1 s4 s4 s4 s2 s4 s3 s1 s1

8PSK(t) = s1(t) = Ac*cos(2πfct), για 000

s2(t) = Ac*cos(2πfct + π/4), για 001

s3(t) = Ac*cos(2πfct + π/2), για 011

s4(t) = Ac*cos(2πfct + 3π/4), για 010

s5(t) = Ac*cos(2πfct + π), για 110

s6(t) = Ac*cos(2πfct + 5π/4), για 111

s7(t) = Ac*cos(2πfct + 3π/2), για 101

s8(t) = Ac*cos(2πfct + 7π/4), για 100

(όπου 0<t<3*Tb) (κωδικοποίηση Gray)

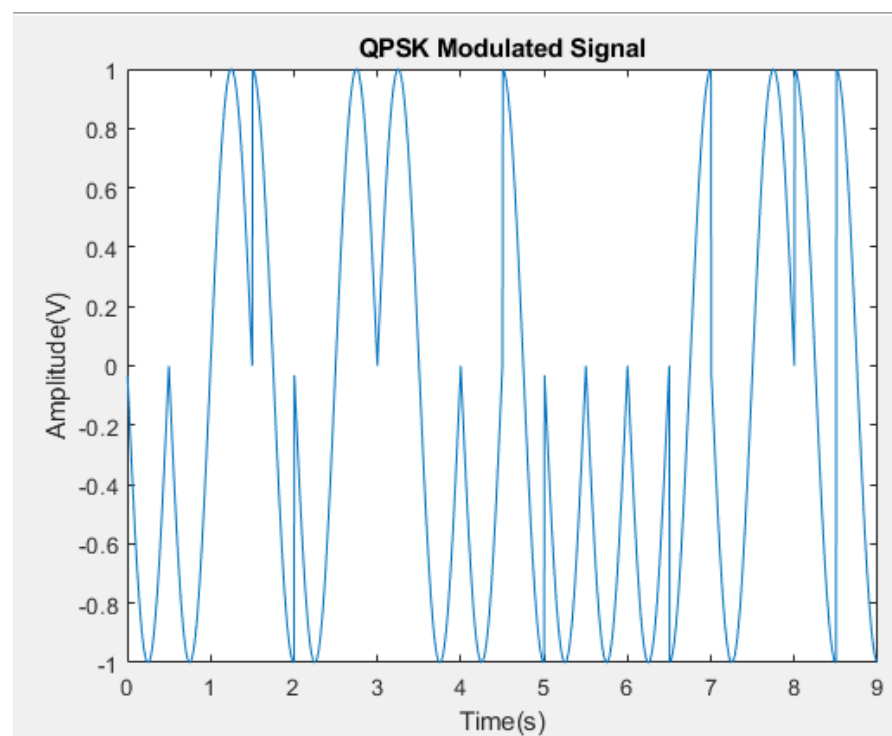
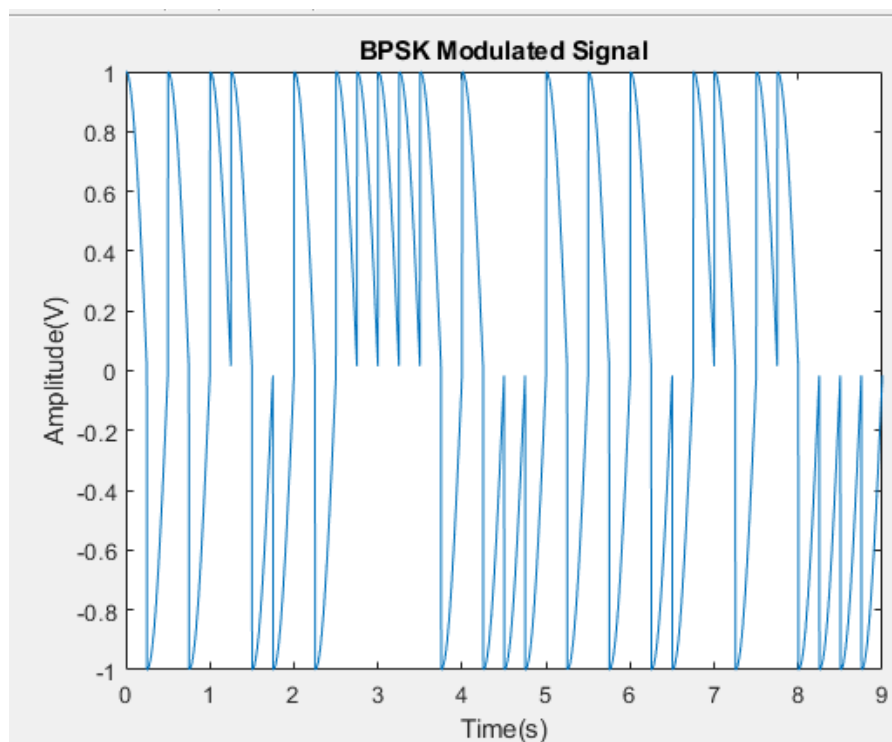
Δηλαδή κάθε σύμβολο αναπαρίσταται με 3 bit .

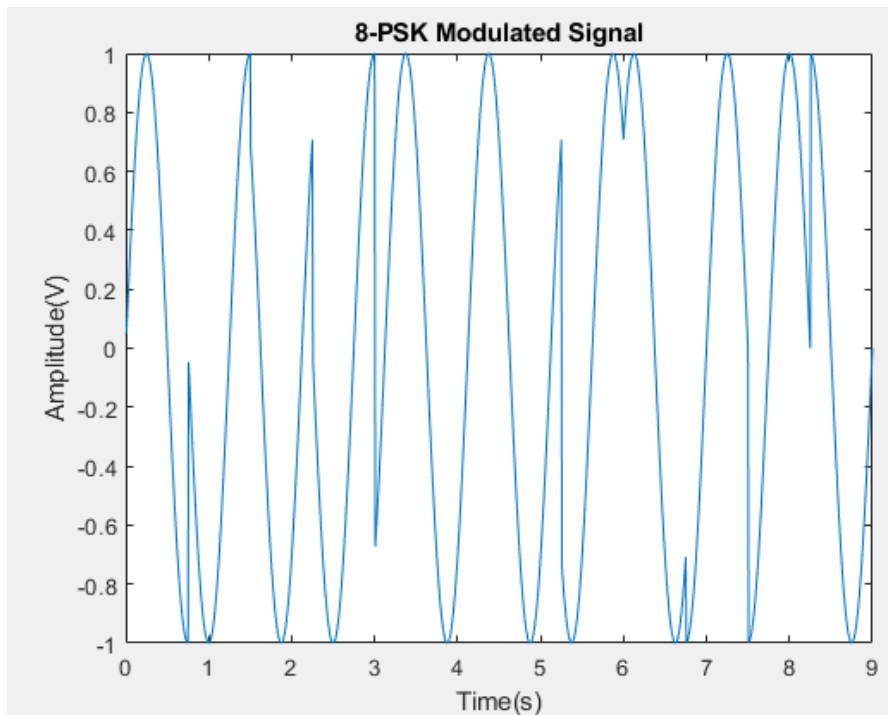
Άρα για την παραπάνω ακολουθία η αντιστοίχιση σε σύμβολα είναι:

S7 s3 s2 s3 s6 s4 s2 s4 s8 s5 s5 s1

ii.

Τα αντίστοιχα διαγράμματα:

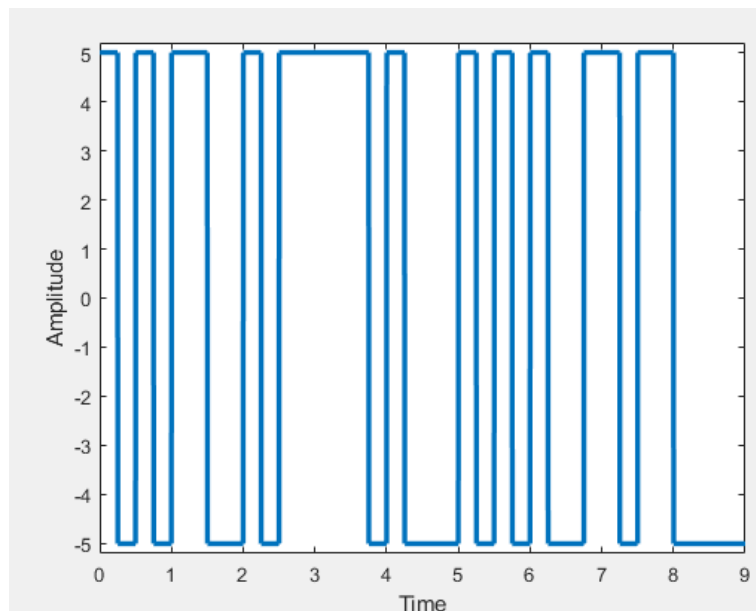




B)

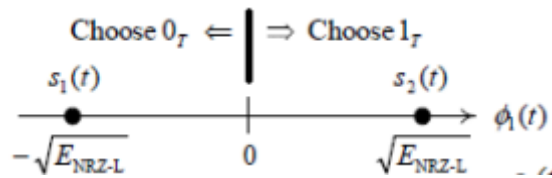
Για $A=5V$:

Η ζητούμενη διαμόρφωση B-PAM σήμα αντιστοιχεί σε κωδικοποίηση γραμμής NRZ – Polar, οπότε είναι:

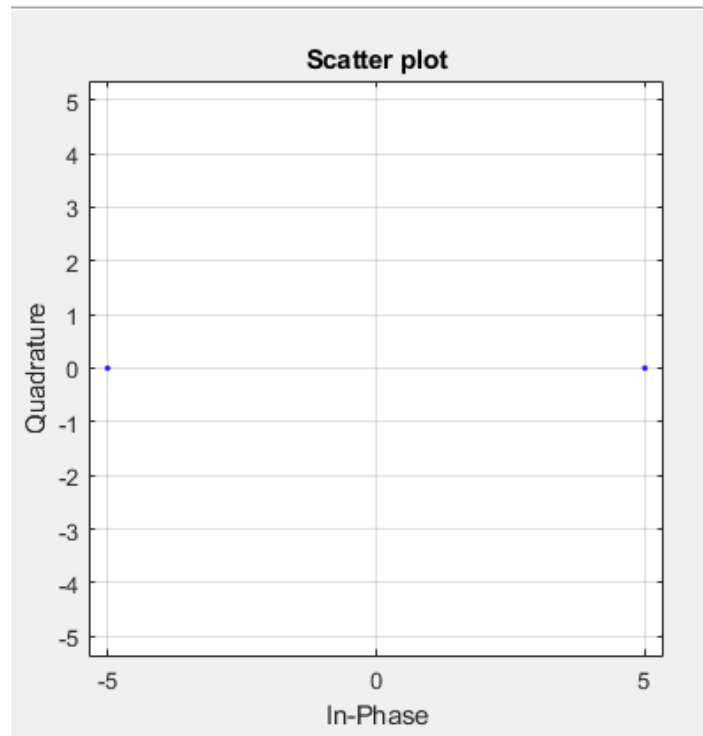


Γ)

Εκπέμπονται $k=1\text{bit}$ ανά παλμό άρα απαιτούνται $M=2k=2$ τιμές πλάτους, που αντιστοιχούν στις κυματομορφές $s_1(t)$ για το 0 και $s_2(t)$ για το 1. Καθώς η πιθανότητα εμφάνισης 0 ή 1 είναι ίδια, ο άξονας $x=0$ είναι στην πλευρά του δέκτη το κατώφλι απόφασης.



Χρησιμοποιώντας το scatterplot ο αστερισμός του διαμορφωμένου σήματος είναι:



Δ)

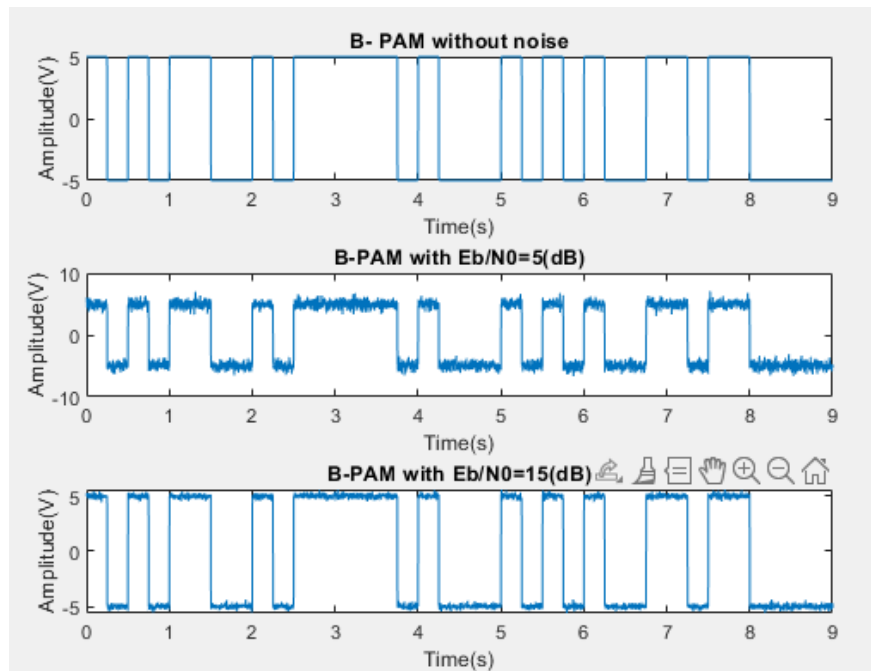
Θεωρώντας ότι ο θόρυβος έχει μόνο πραγματικό μέρος ισχύει:

$$\text{SNR} = E_b/N_0 + 10 \log k,$$

όπου $k=1$ το πλήθος των συμβόλων που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ενός bit.

Για την παραγωγή του θορύβου χρησιμοποιώ αντικείμενο `comm.AWGNChannel`, στο οποίο ορίζω το property 'NoiseMethod' σε 'Signal to noise ratio (SNR)' και δίνω ως παράμετρο το εκάστοτε SNR.

Οπότε:



Παρατηρώ πως όσο μεγαλώνει το E_b/N_0 και συνεπώς το SNR τόσο μικρότερη είναι η επίδραση του θορύβου στο σήμα.

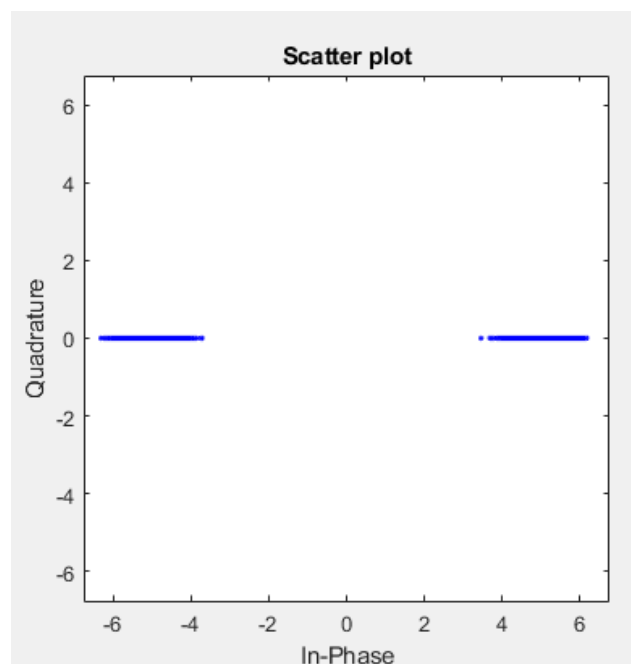
E)

Θεωρώντας τώρα τον θόρυβο ως μιγαδική μεταβλητή χρησιμοποιώ τον τύπο

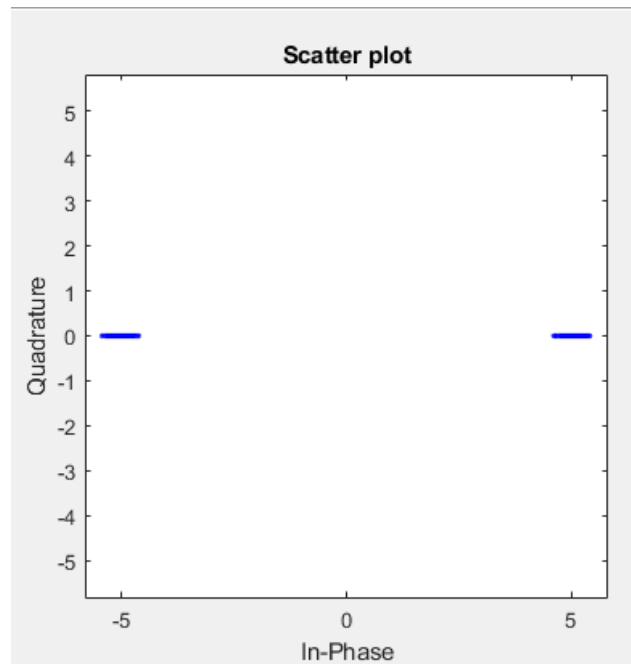
$$SNR = Eb/N_0 + 3 + 10 \log k$$

Οι αστερισμοί είναι:

Για $E_b/N_0 = 5\text{dB}$:



Για $E_b/N_0=15\text{dB}$:



Ομοίως με πριν, όσο μειώνεται ο λόγος E_b/N_0 τόσο αυξάνεται ο κίνδυνος οι κυματομορφές s_1, s_2 να περάσουν το κατώφλι και να παρερμηνευτούν.

Δ)

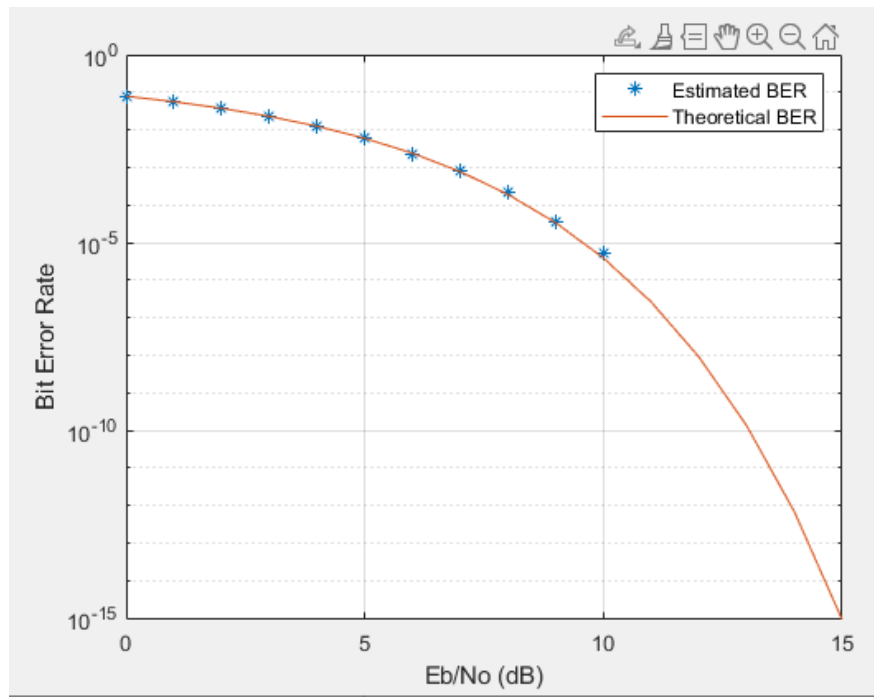
Για την B-PAM η πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου (BER) είναι :

$$P[\text{error}]_{\text{BPAM}} = Q(\sqrt{2E_b/N_0})$$

Παράγοντας ικανοποιητικό αριθμό τυχαίων bits (10^6 bits) και θόρυβο AWGN για τιμές E_b/N_0 από 0-15 dB με βήμα 1 dB εφαρμόζω B-PAM διαμόρφωση στα τυχαία bits και τους προσθέτω AWGN θόρυβο. Στην αποδιαμόρφωση ο δέκτης επιλέγει ανάμεσα στα ψηφία 0 και 1 και μετρώ τα σφάλματα.

Η θεωρητική τιμή του BER υπολογίζεται από την συνάρτηση berawgn .

Προκύπτει:

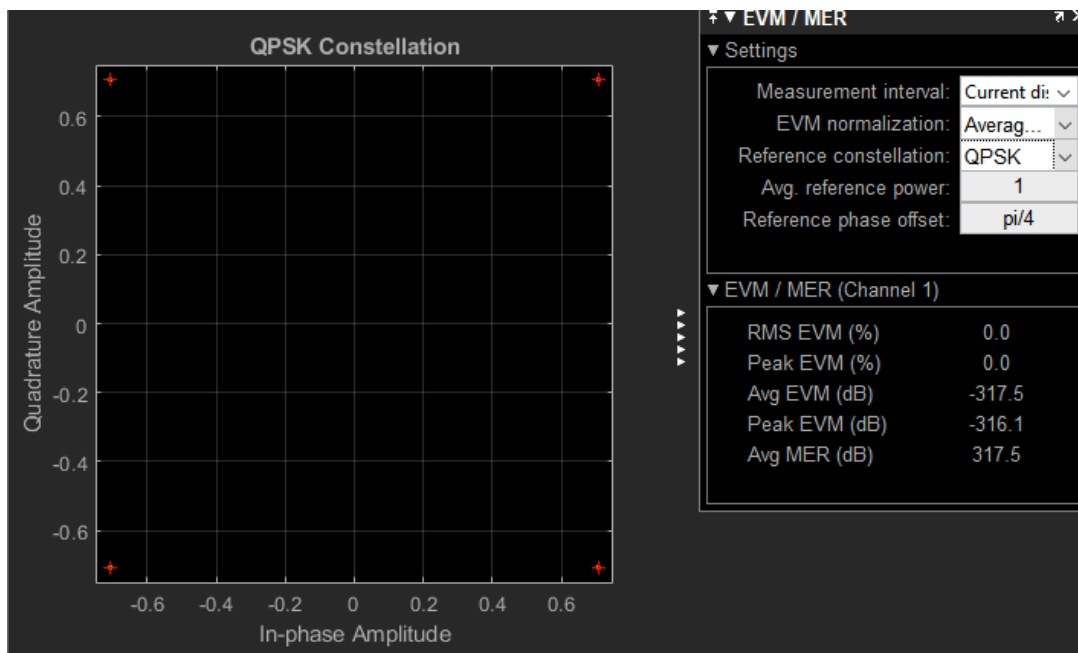


Παρατηρώ ότι οι τιμές της εμπειρικής Πιθανότητας Εσφαλμένου Ψηφίου (BER) δεν παρουσιάζουν μεγάλη απόκλιση από τις αντίστοιχες θεωρητικές. Ακόμη, όπως περιμέναμε, όσο ο λόγος E_b/N_0 αυξάνεται, η πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου για διαμόρφωση B-PAM μειώνεται.

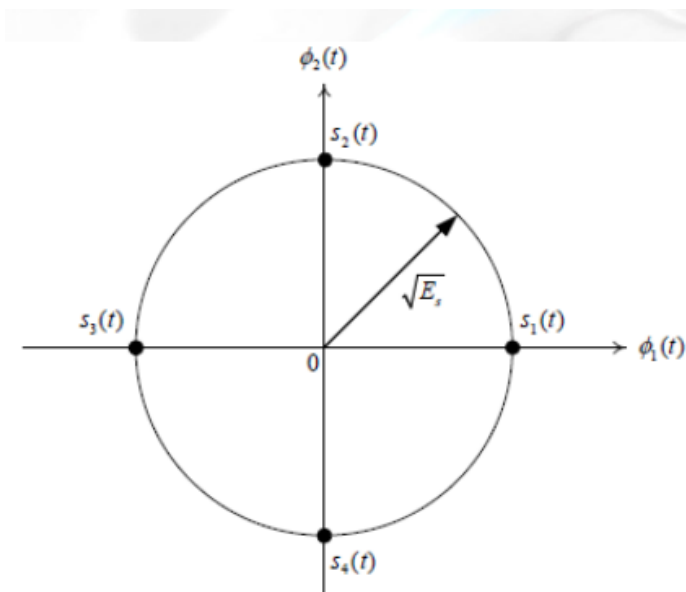
4η άσκηση

A)

Αρχικά δημιουργώ ένα αντικείμενο `comm.QPSKModulator`, στο οποίο ορίζω τα properties `'PhaseOffset'=pi/4`, `'SymbolMapping'='Gray'` και `'BitInput'=true`. Μέσω αυτού του αντικειμένου διαμορφώνω κατά QPSK την αρχική ακολουθία ψηφίων και το διάγραμμα αστερισμού προκύπτει μέσω αντικειμένου `comm.ConstellationDiagram` (ομοίως με πριν $k=1$) (με κατάλληλες ρυθμίσεις):

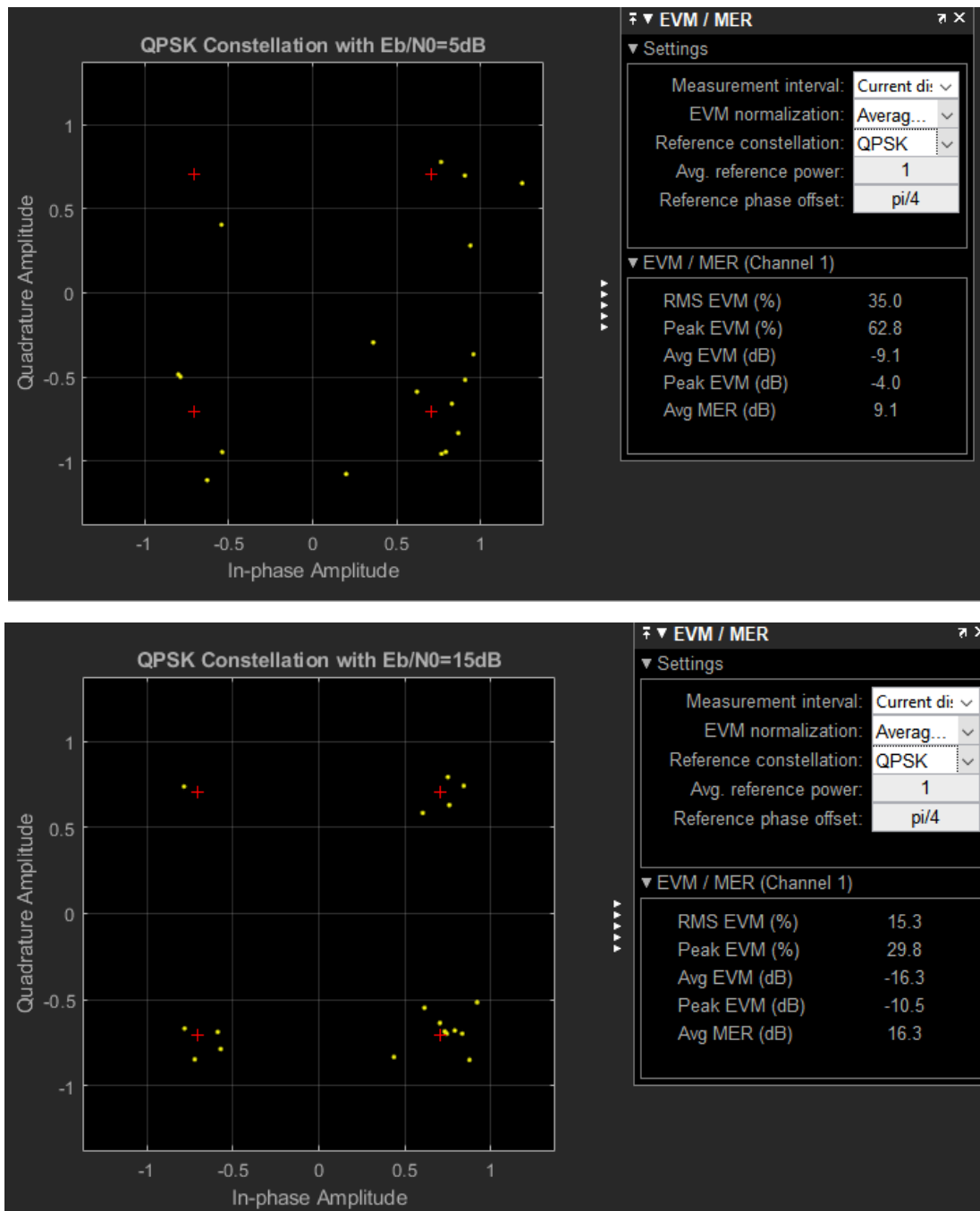


Για την QPSK διαμόρφωση ισχύει $T_s=2T_b$. Άρα: $E_s=A^2 \cdot T_s=0.5$ και η ακτίνα του διαγράμματος (απόσταση κάθε σημείου από το 0) είναι $\sqrt{E_s}=0.707$. Είναι δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα, στραμμένο κατά $\pi/4$:



B)

Ομοίως με πριν, προσομοιώνουμε τον θόρυβο με αντικείμενο comm.AWGNChannel, ορίζοντας το property 'NoiseMethod' σε 'Signal to noise ratio (Eb/No)' και δίνοντάς του τις τιμές 5dB/15dB. Οι αστερισμοί είναι:



Προφανώς ο θόρυβος AWGN αλλοιώνει το διάγραμμα αστερισμού του διαμορφωμένου σήματος, καθώς κάποια σημεία (κυρίως για $E_b/N_0=5\text{dB}$) είναι στα όρια της περιοχής απόφασης κάποιου συμβόλου.

Γ)

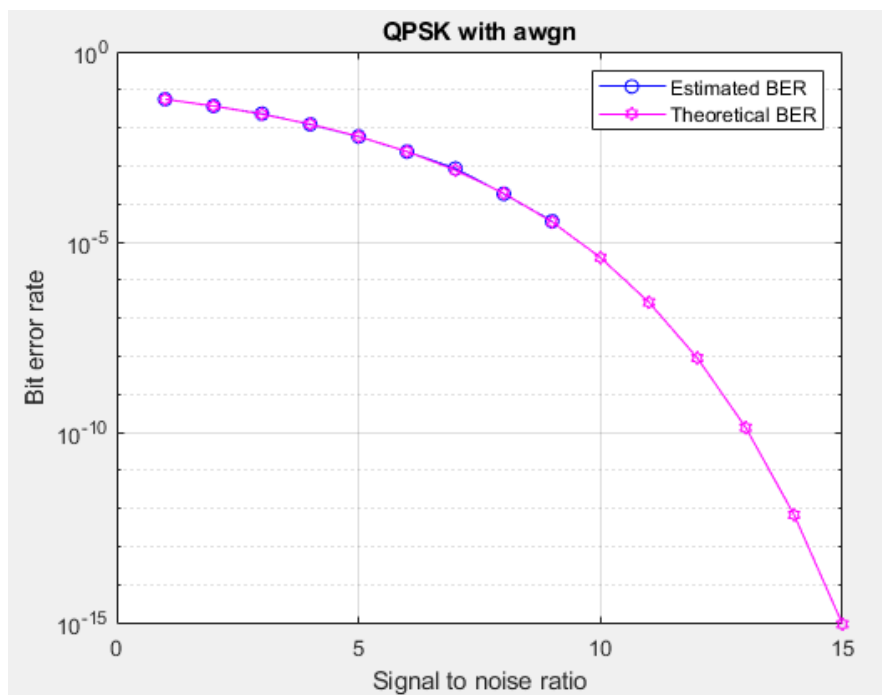
Εφόσον το σήμα QPSK μεταφέρει 2 bits και η ενέργεια ανά σήμα είναι $E_s = A^2 T_b$, η μέση ενέργεια ανά bit είναι $E_b = E_s/2$. Η πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου (BER) QPSK με Gray mapping δίνεται θεωρητικά κατά προσέγγιση από την σχέση:

$$P_b = Q(\sqrt{2 \cdot E_b/N_0}) = 0.5 \cdot Q(\sqrt{E_b/N_0}),$$

όπου Q η συνάρτηση erfc και $E_b/N_0 = 10^{((E_b/N_0)_{\text{dB}}/10)}$ και έγινε χρήση της γνωστής ιδιότητας.

Για την εμπειρική πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου παράγω ικανοποιητικό αριθμό τυχαίων bits (10^5 bits) και θόρυβο AWGN για τιμές E_b/N_0 από 0-15 dB με βήμα 1 dB και εφαρμόζω QPSK διαμόρφωση στα τυχαία bits ενώ τέλος προσθέτω AWGN θόρυβο.

Το διάγραμμα είναι το εξής:



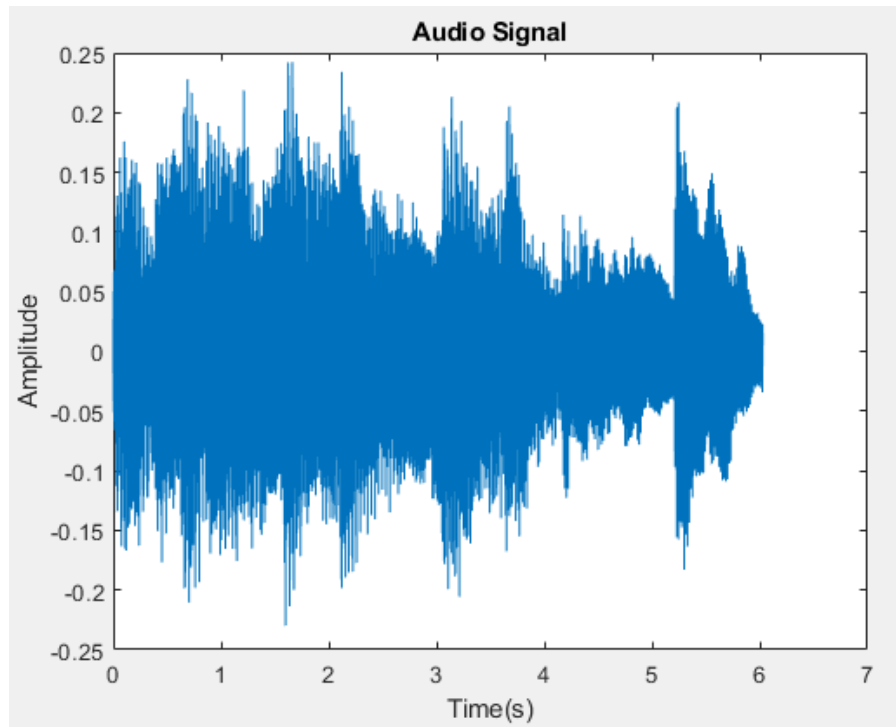
Παρατηρώ ότι οι τιμές της εμπειρικής Πιθανότητας Εσφαλμένου Ψηφίου (BER) δεν παρουσιάζουν μεγάλη απόκλιση από τις αντίστοιχες θεωρητικές. Ακόμη, όπως περιμέναμε, όσο ο λόγος E_b/N_0 αυξάνεται, η πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου μειώνεται.

Το BER δίνεται και για BPSK διαμόρφωση από την σχέση $P_b = Q(\sqrt{2 \cdot E_b/N_0})$. Αυτό καθαρά αποδεικνύει το πλεονέκτημα της QPSK έναντι της BPSK. Με την QPSK διαμόρφωση διπλασιάζεται ο ρυθμός χωρίς να απαιτούμε περισσότερο εύρος ζώνης ή να θυσιάζουμε επίδοση σε εσφαλμένα ψηφία.

5η άσκηση

A)

Διαβάζω και πλοτάρω το σήμα soundfile2_lab2.wav:



B)

Χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική με την πρώτη άσκηση για $R=8$, το δειγματοληπτημένο και το κβαντισμένο σήμα είναι:

