

SEMINAR 2

Baze de numerație

Trecerea dintr-o bază b în baza 10

$$\begin{aligned} \overline{r_n r_{n-1} r_{n-2} \dots r_1 r_0, z_0 z_1 \dots z_m}_b \\ = r_n \cdot b^n + r_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + r_1 \cdot b + r_0 + z_1 \cdot b^{-1} + z_2 \cdot b^{-2} + \dots + z_m \cdot b^{-m} \\ = (\dots (r_n \cdot b + r_{n-1}) \cdot b + \dots + r_1) \cdot b + r_0 + b^{-1} \cdot (z_1 + b^{-1} \cdot (z_2 + \dots + b^{-1} \cdot z_m)) \end{aligned}$$

Exemple:

Transformați în baza 10

(a) 11001001_2

(b) $ZECE_{26}$

(c) $11,101_2$

(d) Z, ECE_{26}

Literele A, B, ..., Z sunt folosite pentru a reprezenta cele 26 de cifre în baza 26:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

$$(a) \ 11001001_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 = 201$$

$$(b) \ ZECE_{26} = 25 \cdot 26^3 + 4 \cdot 26^2 + 2 \cdot 26 + 4 = 442160$$

$$(c) \ 11,101_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-3}$$

$$(d) \ Z, ECE_{26} = 25 + 4 \cdot 26^{-1} + 2 \cdot 26^{-2} + 4 \cdot 26^{-3} \sim 25.157$$

Trecerea din baza 10 în baza oarecare b

Fie $x \in \mathbb{N}$

$$x_{10} = b \cdot q_0 + r_0, r_0 < b$$

$$q_0 = b \cdot q_1 + r_1, r_1 < b$$

$$q_1 = b \cdot q_2 + r_2, r_2 < b$$

$$q_2 = b \cdot q_3 + r_3, r_3 < b$$

...

$$q_{n-2} = b \cdot q_{n-1} + r_{n-1}, r_{n-1} < b$$

$$q_{n-1} = b \cdot 0 + r_n, r_n < b$$

$$x_{10} = \overline{r_n r_{n-1} \dots r_1 r_0}_b$$

Fie $y < 1$

$$y_{10} = \overline{0, z_1 z_2 z_3 \dots}$$

$$z_1 = [by]$$

$$z_2 = [b^2 y] - bz_1$$

$$z_3 = [b^3 y] - b^2 z_1 - bz_2 \dots$$

Exemplu:

(a) Transformați rezultatele obținute anterior înapoi în baza inițială:

$$442160 = 17006 \cdot 26 + 4; 4 = E$$

$$17006 = 654 \cdot 26 + 2; 2 = C$$

$$654 = 25 \cdot 26 + 4; 4 = E$$

$$25 = 0 \cdot 26 + 25; 25 = Z$$

$$442160_{10} = ZECE_{26}$$

(b) Transformați π în baza 2 considerând aproximarea $\pi \sim 3.1415926$

$$3.1415926 = 3 + 0.1415926 \dots = 1 \times 2^1 + 1 \times 2 + \dots + 0.1415926 \dots$$

$$0.1415926 \dots = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \frac{z_4}{2^4} + \dots$$

$$z_1 = [0.1415926 \cdot 2] = 0$$

$$z_2 = [0.1415926 \cdot 4] - 0 = 0$$

$$z_3 = [0.1415926 \cdot 8] - 0 = 1$$

$$z_4 = [0.1415926 \cdot 16] - 1 \cdot 2 = 0$$

Deci $\pi \sim 11.0010 \dots_2$

Trecerea dintr-o bază b_1 într-o bază b_2

Nu avem un algoritm simplu de a transforma un număr din baza b_1 în baza b_2 . De aceea, trebuie să transformăm numărul nr în baza 10 și apoi din baza 10 în baza b_2 .

Exemplu:

$$1111_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 15_{10} = F_{16}.$$

Exerciții

1. Transformați în baza 7 și înmulțiți 160 și 199.
2. Transformați 10^6 în bazele 2, 7 și 26.
3. Transformați $\pi = 3,1415926$ în baza 2 (calculând primele 15 zecimale de după virgulă) și în baza 26 (calculând primele 3 zecimale de după virgulă).
4. Determinați cmmdc al următoarelor numere scrise în baza 2:
(101000110101)₂; (100001111011)₂. Verificați egalitatea în baza 10.
5. Împărțiți 40122_7 la 126_7

Complexități. Operații pe biți

Numărul de cifre al unui număr într-o bază b

Fie x un număr astfel încât scrierea sa în baza b are $n + 1$ cifre:

$$x_{10} = \overline{r_n r_{n-1} \dots r_1 r_0}_{(b)}$$

Rezultă atunci că

$$\underbrace{\overline{10 \dots 0}_{(b)}}_{n \text{ zerouri}} \leq \overline{r_n r_{n-1} \dots r_1 r_0}_{(b)} \leq \underbrace{\overline{10 \dots 0}_{(b)}}_{n+1 \text{ zerouri}}$$

Trecând în baza 10, obținem:

$$b^n \leq x < b^{n+1}$$

Logaritmând

$$n \leq \log_b x < n + 1 \Rightarrow n = [\log_b x] \Rightarrow n + 1 = [\log_b x] + 1$$

Adunarea a două numere pe biți (bit = Binary digit)

Prezentăm un exemplu

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & + \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 &
 \end{array}$$

Fie două numere în formă binară. Fie k lungimea pe biți a celui mai mare dintre ele (dacă unul dintre ele are mai puțini biți se completează cu 0 în față).

Date două numere pe biți, se fac k operații elementare (ignorând deplasările pe biți).

Înmulțirea a două numere pe biți

Considerând două numere de k respectiv l biți, numărul de operații este maximizat de kl .

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \times & \longrightarrow & k \text{ biți} \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \longrightarrow & l \text{ biți} \\
 \hline
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & & \\
 \hline
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & &
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{ccccccccc} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}} \right\} \text{Maxim } l \text{ numere de } k \text{ biți}$$

Exerciții

1. Calculați numărul de operații necesare pentru înmulțire în funcție de numere.
2. Găsiți numărul de operații necesare pentru a calcula $n!$.
3. Estimați timpul necesar pentru a converti un număr pe k biți în baza b .
4. Estimați timpul necesar pentru a converti un număr pe k biți în baza 10.

Ridicarea la putere

Metoda pătratelor succesive

Problemă: Calculați $a^b \pmod{c}$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Idee:

Dacă $b = 2b_1$, atunci $a^b = (a^2)^{b_1}$.

Altfel ($b = 2b_1 + 1$), atunci $a^b = a \cdot (a^2)^{b_1}$.

Continuăm apoi algoritmul pentru b_1 .

Exemplu:

Vrem să calculăm $2^{15} \pmod{7}$.

Metoda pătratelor succesive ne dă următorul șir de egalități:

$$2^{15} = 2 \cdot 2^{14} = 2 \cdot (2^2)^7 = 2 \cdot 4^7 = (2 \cdot 4) \cdot 4^6 = 8 \cdot (4^2)^3 = 8 \cdot 16^3 = (8 \cdot 16) \cdot 16^2 = 128 \cdot 16^2 = 128 \cdot 256 = 32768.$$

Deoarece vrem să facem calculele modulo 7, la fiecare pas putem scrie egalitățile modulo 7:

$$2^{15} \equiv 2 \cdot 2^{14} \equiv 2 \cdot (2^2)^7 \equiv 2 \cdot 4^7 \equiv (2 \cdot 4) \cdot 4^6 \equiv 1 \cdot (4^2)^3 \equiv 1 \cdot 2^3 \equiv (1 \cdot 2) \cdot 2^2 \equiv 2 \cdot 2^2 \equiv 2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{7}$$

Exerciții

1. Calculați:
 - a. $2^{40} \pmod{105}$
 - b. $3^{65} \pmod{101}$
 - c. $2^{127} \pmod{2011}$
 - d. $11^{2013} \pmod{503}$

- e. $17^{51}(\text{mod } 53)$
 f. $2^{1000000}(\text{mod } 77)$

Implementare

Date de intrare:

$c \in \mathbb{N}^*$ - ordinul grupului în care facem calculele

$a \in \mathbb{Z}_c$ - baza puterii

$b \in \mathbb{N}$ - exponentul

Date de ieșire:

$p \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $p \equiv a^b(\text{mod } c)$

Pseudocod:

Introducem c, a, b ;

Afișăm $a_la_b_mod_c(a, b, c)$:

{

Inițializăm $p=1$; // deoarece vrem să calculăm un produs

$a \equiv (a \% c)(\text{mod } c)$;

Cât timp $(b > 0)$ {

Dacă $(b \% 2 == 1)$; **atunci** $p = (p * a) \% c$;

$a = (a * a) \% c$;

$b = b / 2$;

Returnăm p ;

Cod

```
int a_la_b_mod_c(int a, int b, int c)
{
    int p = 1;
    a = modulo(a, c);
    while (b > 0)
    {
        if (b % 2)
            p = modulo((p*a), c);
        a = modulo((a*a), c);
        b /= 2;
    }
    return p;
}
```

Exemplu execuție:

$a = 9, b = 15, c = 7$;
 $a_la_b_mod_c(9; 15; 7)$:
 $p = 1$;
 $a = 9 \% 7 = 2$;
 $(15 > 0)$;
 $(15 \% 2 = 1)$;
 $p = (1 * 2) \% 7 = 2$;
 $a = (2 * 2) \% 7 = 4$;
 $b = 15 / 2 = 7$;
 $(7 > 0)$;
 $(7 \% 2 = 1)$;
 $p = (2 * 4) \% 7 = 1$;
 $a = (4 * 4) \% 7 = 2$;

```
b = 7/2 = 3;  
(3 > 0);  
(3%2 = 1);  
p = (1*2)%7 = 2;  
a = (2*2)%7 = 4;  
b = 3/2 = 1;  
(1 > 0);  
(1%2 = 1);  
p = (2*4)%7 = 1;  
a = (4*4)%7 = 2;  
b = 1/2 = 0;  
returnează 1;
```

TEME

1. Estimați complexitatea pentru convertirea unui număr de k biți în baza 10/ într-o bază oarecare b și invers.

Pentru exercițiile de mai jos, rezolvați cel corespunzător numărului vostru din fișierul Excel.

2. Schimbări de baze

1.
 - a) Converteți numărul 101010 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 3E din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 213 din baza 5 în baza 4.
 - d) Scădeți numerele 3C și 17 în baza 8.
2.
 - a) Converteți numărul 111000 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 4D din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 233 din baza 8 în baza 4.
 - d) Adunați numerele 27 și 14 în baza 6.
3.
 - a) Converteți numărul 100100 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 2F din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 331 din baza 6 în baza 4.
 - d) Înmulțiți numerele 26 și 13 în baza 7.
4.
 - a) Converteți numărul 101001 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 5A din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 322 din baza 8 în baza 4.
 - d) Împărțiți numerele 37 și 15 în baza 9.
5.
 - a) Converteți numărul 110110 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 2C din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 111 din baza 7 în baza 4.

- d) Scădeți numerele 3A și 18 în baza 6.
- 6.
- a) Converteți numărul 111100 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 3B din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 233 din baza 6 în baza 4.
 - d) Înmulțiți numerele 25 și 11 în baza 8.
- 7.
- a) Converteți numărul 100101 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 4E din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 221 din baza 8 în baza 4.
 - d) Adunați numerele 22 și 12 în baza 5.
- 8.
- a) Converteți numărul 101011 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 3C din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 122 din baza 6 în baza 4.
 - d) Împărțiți numerele 26 și 11 în baza 7.
- 9.
- a) Converteți numărul 110111 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 1F din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 321 din baza 7 în baza 4.
 - d) Scădeți numerele 3D și 19 în baza 8.
- 10.
- a) Converteți numărul 101100 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 2D din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 233 din baza 8 în baza 4.
 - d) Înmulțiți numerele 27 și 13 în baza 6.
- 11.
- a) Converteți numărul 110001 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 4B din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 221 din baza 6 în baza 4.
 - d) Adunați numerele 24 și 14 în baza 7.
- 12.
- a) Converteți numărul 1010011 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 3A din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 323 din baza 8 în baza 4.
 - d) Împărțiți numerele 37 și 15 în baza 9.
- 13.
- a) Converteți numărul 110010 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 2F din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 212 din baza 6 în baza 4.
 - d) Scădeți numerele 3B și 17 în baza 8.
- 14.
- a) Converteți numărul 1011010 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 4C din baza 16 în baza 10.

- c) Converteți numărul 221 din baza 8 în baza 4.
 - d) Înmulțiți numerele 25 și 12 în baza 5.
- 15.
- a) Converteți numărul 111001 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 2A din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 332 din baza 7 în baza 4.
 - d) Împărțiți numerele 36 și 14 în baza 6.
- 16.
- a) Converteți numărul 100110 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 3D din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 231 din baza 6 în baza 4.
 - d) Adunați numerele 22 și 13 în baza 7.
- 17.
- a) Converteți numărul 1010110 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 2C din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 221 din baza 8 în baza 4.
 - d) Scădeți numerele 3D și 18 în baza 8.
- 18.
- a) Converteți numărul 110011 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 2B din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 322 din baza 7 în baza 4.
 - d) Înmulțiți numerele 27 și 11 în baza 9.
- 19.
- a) Converteți numărul 1010101 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 3E din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 213 din baza 5 în baza 4.
 - d) Împărțiți numerele 3C și 17 în baza 8.
- 20.
- a) Converteți numărul 111000 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 4D din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 233 din baza 8 în baza 4.
 - d) Adunați numerele 27 și 14 în baza 6.
- 21.
- a) Converteți numărul 100101 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 2F din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 331 din baza 6 în baza 4.
 - d) Înmulțiți numerele 26 și 13 în baza 7.
- 22.
- a) Converteți numărul 101001 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 5A din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 322 din baza 8 în baza 4.
 - d) Împărțiți numerele 37 și 15 în baza 9.
- 23.
- a) Converteți numărul 110110 din baza 2 în baza 10.

- b) Converteți numărul 2C din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 111 din baza 7 în baza 4.
 - d) Scădeți numerele 3A și 18 în baza 6.
- 24.
- a) Converteți numărul 111100 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 3B din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 233 din baza 6 în baza 4.
 - d) Înmulțiți numerele 25 și 11 în baza 8.
- 25.
- a) Converteți numărul 100101 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 4E din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 221 din baza 8 în baza 4.
 - d) Adunați numerele 22 și 12 în baza 5.
- 26.
- a) Converteți numărul 101011 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 3C din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 122 din baza 6 în baza 4.
 - d) Împărțiți numerele 26 și 11 în baza 7.
- 27.
- a) Converteți numărul 110111 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 1F din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 321 din baza 7 în baza 4.
 - d) Scădeți numerele 3D și 19 în baza 8.
- 28.
- a) Converteți numărul 101100 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 2D din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 233 din baza 8 în baza 4.
 - d) Înmulțiți numerele 27 și 13 în baza 6.
- 29.
- a) Converteți numărul 110001 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 4B din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 221 din baza 6 în baza 4.
 - d) Adunați numerele 24 și 14 în baza 7.
- 30.
- a) Converteți numărul 1010011 din baza 2 în baza 10.
 - b) Converteți numărul 3A din baza 16 în baza 10.
 - c) Converteți numărul 323 din baza 8 în baza 4.
 - d) Împărțiți numerele 37 și 15 în baza 9.

3. Exponențiere modulară

1. Calculează $2^{13} \bmod 17$.
2. Calculează $5^{17} \bmod 23$.

3. Calculează $3^{25} \bmod 19$.
4. Calculează $7^{18} \bmod 13$.
5. Calculează $11^{31} \bmod 29$.
6. Calculează $6^{23} \bmod 11$.
7. Calculează $2^{40} \bmod 41$.
8. Calculează $10^{21} \bmod 17$.
9. Calculează $13^{15} \bmod 29$.
10. Calculează $4^{28} \bmod 19$.
11. Calculează $8^{35} \bmod 37$.
12. Calculează $19^{12} \bmod 23$.
13. Calculează $16^{20} \bmod 29$.
14. Calculează $9^{16} \bmod 31$.
15. Calculează $23^{27} \bmod 43$.
16. Calculează $12^{33} \bmod 47$.
17. Calculează $3^{44} \bmod 59$.
18. Calculează $25^{19} \bmod 37$.
19. Calculează $14^{30} \bmod 41$.
20. Calculează $6^{25} \bmod 43$.
21. Calculează $17^{22} \bmod 47$.
22. Calculează $5^{36} \bmod 61$.
23. Calculează $21^{14} \bmod 31$.
24. Calculează $33^{18} \bmod 67$.
25. Calculează $8^{41} \bmod 53$.
26. Calculează $27^{23} \bmod 59$.
27. Calculează $11^{39} \bmod 67$.
28. Calculează $29^{20} \bmod 71$.
29. Calculează $16^{35} \bmod 79$.
30. Calculează $38^{28} \bmod 83$.