



ISTITUTO TECNICO INDUSTRIALE STATALE
“NULLO BALDINI”

ESAME DI STATO 2016

Geometria frattale

Georgian Sarghi

Classe 5AIN

Anno Scolastico 2015-2016

Contents

1	Introduzione storica	5
2	Aspetti generali	6
2.1	Autosomiglianza	6
2.2	Struttura dettagliata	6
2.3	Dimensione frattale	7
2.3.1	Conteggio dei box	7
3	Frattali in natura	8
3.1	Strutture ramificate	8
3.2	Strutture irregolari	11
3.3	Spirali	12
4	Algoritmi di generazione	13
4.1	Sistemi di Lindenmayer	13
4.1.1	Turtle graphics	14
4.2	Sistemi di funzioni iterate	15
4.2.1	Trasformazioni nel piano	15
4.2.2	Definizione e algoritmo	17
4.2.3	Algoritmo stocastico	18
4.2.4	Chaos Game	22
5	Esempi classici in matematica	23
5.1	Insieme di Cantor	23
5.2	Triangolo di Sierpinski	25
5.3	Tappeto di Sierpinski	27
5.4	Spugna di Menger	28
6	Curve frattali	29
6.1	Curva di Koch	29
6.2	Curva di Hilbert	30
6.3	Curva del drago	32
7	Dinamica complessa	33
7.1	Metodo del tempo di fuga	33
7.2	Insiemi di Julia	33
7.3	Insieme di Mandelbrot	35
7.4	Frattale di Newton	37
8	Caos e attrattori strani	39
8.1	Mappa logistica	40
8.2	Attrattore di Lorenz	42
8.3	Attrattore di Rössler	44

8.4 Galleria di attrattori	45
--------------------------------------	----

List of Figures

1 Benoît Mandelbrot.	5
2 Autosomiglianza ovvia.	6
3 Curva irregolare assimilabile al profilo di una montagna, che presenta autosomiglianza statistica.	7
4 Curva di Koch.	8
5	9
6 Alberi generati con una semplice procedura ricorsiva.	10
7 Alberi generati con una semplice procedura ricorsiva.	10
8 Generazione di una montagna.	11
9 Isole generate casualmente.	12
10 Esempi di spirali in natura.	12
11 Esempi di spirali in natura.	13
12 Trascrizione delle stringhe in un sistema di Lindenmayer.	13
13 Stringa $A\text{-}A+A\text{-}A$ interpretata in questo modo: $A \rightarrow$ prosegui diritto di una unità, $+$ \rightarrow gira a destra di 60° , $- \rightarrow$ gira a sinistra di 60°	14
14 Esempi di frattali creati con le grammatiche di Lindenmayer. Assiomi e regole di riscrittura sono reperibili online [2]	15
15 Il risultato di una trasformazione applicata al quadrato unitario.	16
16 L'iterazione infinita di una funzione contrattiva trasforma l'insieme in un punto.	17
17 Un esempio di IFS costituito da due funzioni.	18
18 Felce di Barnsley.	19
19 Alcuni esempi di frattali creati con un IFS. Le funzioni che li generano si possono trovare online [2][3].	20
20 Albero costruito con un IFS.	21
21 Alcuni output di <i>chaos game</i>	22
22 Le prime 5 iterazioni nella costruzione dell'insieme di Cantor.	23
23 Varianti dell'insieme di Cantor.	25
24 Prime 5 iterazioni nella costruzione del triangolo di Sierpinski.	25
25 Triangolo di Sierpinski generato con chaos game ($n = 3, r = 0.5$) (vedi 4.2.4).	26
26 In un automa cellulare semplice si hanno due stati: 0 e 1. Ogni linea di celle orizzontale determina la linea successiva tramite l'applicazione di una particolare regola. Nonostante le semplici regole che li governano, gli automi cellulari possono dare output molto complessi. Nell'immagine la prima linea è formata da una singola cella nera (stato 1) che si evolve secondo la regola 161.	27
27 Prime 4 iterazioni nella costruzione del triangolo di Sierpinski.	28
28 Spugna di Menger dopo 4 iterazioni.	28

29	Curva di Koch con angolo di 10°	30
30	Curva di Koch con angolo di 0°	30
31	Procedimento di costruzione di una curva di Hilbert.	31
32	Curva di Hilbert di ordine 11.	31
33	Curva del drago colorata ottenuta con un sistema di Lindenmayer.	32
34	Creazione della curva del drago con una striscia di carta.	33
35	Insiemi di Julia connessi.	34
36	Insiemi di Julia non connessi.	34
37	Zoom nell'insieme di Mandelbrot.	35
38	Autosomiglianza nell'insieme di Mandelbrot.	36
39	A sinistra, l'insieme di Julia definito per $z_0 = -0.743 + 0.132i$. A destra, un ingrandimento dell'insieme di Mandelbrot nella zona corrispondente al numero complesso che ha definito l'insieme di Julia a sinistra.	36
40	Frattale di Newton per $p(z) = z^3 - 1$	37
41	Frattale di Newton per $p(z) = z^3 - 1$ e $a = -\frac{1}{2}$	39
42	Mappa logistica o diagramma di biforcazione.	41
43	Il rapporto tra due cerchi consecutivi nell'insieme di Mandelbrot che si trovano sull'asse reale proseguendo da destra verso sinistra approssima la costante di Feigenbaum. Il motivo è legato alla natura, anch'essa quadratica, dell'equazione che genera l'insieme di Mandelbrot.	41
44	In figura è mostrato come la coordinata x di due orbite inizialmente vicine, si evolve in maniera completamente diversa dopo un breve periodo di tempo.	43
45	L'attrattore di Lorenz con parametri $\alpha = 10$, $\beta = 28$ e $\gamma = \frac{8}{3}$. La condizione iniziale si può vedere nella parte bassa dell'immagine e corrisponde al punto $(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$	43
46	L'attrattore di Rössler, visto da due diverse angolazioni.	44
47	Raddoppiamento di periodo con l'aumentare del parametro c	45

Abstract

La geometria frattale è una delle più attraenti aree della matematica, da molti conosciuta per le bellissime immagini raffiguranti complessi oggetti chiamati *frattali*. Ciò che più mi colpisce di questi oggetti è la semplicità delle regole che li governano; regole che, seppur semplici, portano a risultati dall'inaspettata complessità. A partire dagli anni 50, la geometria frattale ha trovato innumerevoli applicazioni in ingegneria e informatica come in moltissimi altri ambiti ed è stata alla base della formulazione di importanti teorie in biologia e in fisica. Vista la vastità dell'argomento, questa è da considerarsi una breve introduzione, in cui si è cercato di trattare gli aspetti più vicini alla matematica e all'informatica. La tesina contiene diverse immagini, molte delle quali sono state create utilizzando Processing (linguaggio di programmazione parente di Java) e openFrameworks (un framework per C++).

Geometria frattale

Le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, il fulmine non si propaga in linea retta e raramente i fenomeni naturali hanno un andamento lineare.

Benoit Mandelbrot

1 Introduzione storica

La geometria frattale è una branca della matematica sviluppatasi in tempi recenti, utilizzata per caratterizzare oggetti geometrici dalla struttura fine e irregolare: i frattali. Lo studio della geometria frattale è iniziato nel XVII secolo con Gottfried Leibniz che nei suoi scritti diede le prime nozioni di *autosomiglianza* (2.1). Dopo di lui solo pochi matematici si interessarono a queste nuove idee. Ciò è dovuto alle caratteristiche, inusuali per i matematici dell'epoca, dei frattali. Funzioni continue in ogni punto ma derivabili in nessuno, figure di area finita racchiuse da un perimetro infinito, sono alcune delle caratteristiche che valsero a questi oggetti la nomea di "mostri". Inoltre, prima dell'avvento della computer grafica, si era limitati all'osservazione di disegni a mano, che non consentivano di cogliere le implicazioni e la bellezza di ciò che si studiava. Questo cambiò negli anni 60 quando Benoît Mandelbrot iniziò a scrivere il suo famoso articolo dal titolo "*Quanto è lunga la costa della Gran Bretagna?*" in cui illustrava le sue definizioni con l'utilizzo di immagini generate da computer. Mandelbrot fu il primo a proporre la geometria frattale come modello per descrivere la natura ed ebbe il merito di portare su questa nuova geometria l'interesse, non solo di matematici, ma anche di informatici, artisti e gente comune. Oggi, la geometria frattale ha trovato il suo posto in moltissimi campi del sapere. In medicina nella diagnostica di cancro e malattie vascolari, nella computer grafica per la creazione di paesaggi realistici, in elettronica nella costruzione di antenne sempre più piccole ed efficienti e in cosmologia con le teorie che descrivono l'universo come un grande frattale. La geometria frattale ha poi avuto un ruolo importante nella formulazione della teoria del caos, forse la più grande rivoluzione scientifica dai tempi di Newton.



Figure 1: Benoît Mandelbrot.

2 Aspetti generali

Il termine frattale fu coniato nel 1975 da B. Mandelbrot, e deriva dal latino *fractus* (rotto, spezzato o frammentato). Un frattale si può definire brevemente in questo modo:

Un frattale è un oggetto geometrico irregolare che può essere diviso in parti, ognuna delle quali è, almeno in parte, una versione ridotta dell'oggetto originale. - B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*

Questa definizione cita due importanti proprietà dei frattali: la struttura irregolare e l'autosomiglianza, ma per molti aspetti è limitata.

2.1 Autosomiglianza

Un oggetto è auto-simile o autosomigliante se è esattamente o approssimativamente simile a una sua parte. Più in dettaglio, l'autosomiglianza si può classificare in:

- INVARIANZA DI SCALA: È la forma più forte di autosomiglianza. Si ha nel caso in cui la parte dell'oggetto è esattamente uguale all'oggetto intero. Nella curva di Koch (6.1) in figura 4, le parti evidenziate con i colori sono anch'esse curve di Koch di grandezza $\frac{1}{3}$;
- QUASI-AUTOSOMIGLIANZA: Si ha quando la parte è una versione distorta o degenera dell'oggetto intero. Nell'insieme di Mandelbrot (7.3), gli insiemi "satellite" sono versioni distorte del corpo principale;
- AUTOSOMIGLIANZA STATISTICA: È la forma più debole di autosomiglianza. Si ha quando la parte è statisticamente simile all'oggetto intero. È tipica di quei frattali che nascono da un processo di tipo stocastico come il profilo di una montagna o il moto browniano.

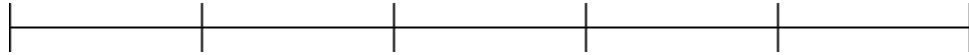


Figure 2: Autosomiglianza ovvia.

2.2 Struttura dettagliata

L'autosomiglianza è una condizione necessaria, ma non sufficiente per poter classificare un oggetto geometrico o naturale come frattale. Infatti, se si pensa ad esempio al contorno di un normale poligono, esso tenderà ad assomigliare sempre più ad una linea retta se posto sotto ingrandimenti sempre maggiori. Ciò che contraddistingue un frattale da un poligono è la struttura irregolare e dettagliata. Contrariamente alle altre figure geometriche, se ingrandito, un frattale si arricchisce di nuovi particolari.

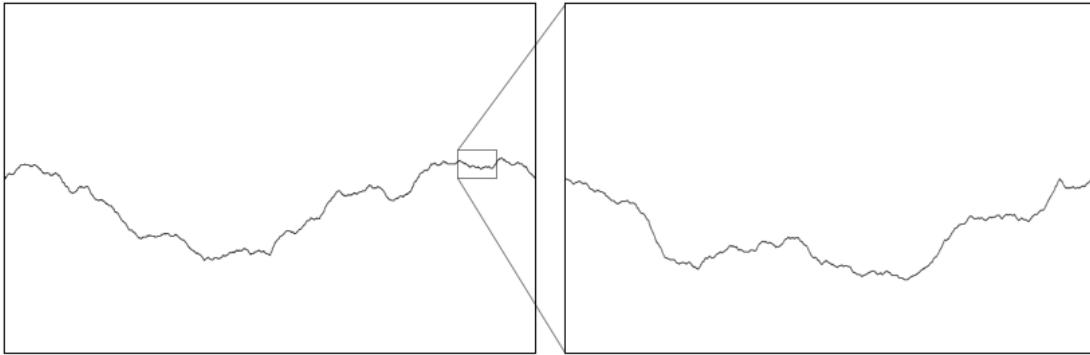


Figure 3: Curva irregolare assimilabile al profilo di una montagna, che presenta autosomiglianza statistica.

2.3 Dimensione frattale

In geometria euclidea, la dimensione di uno spazio o di un oggetto geometrico è indicata dal numero di coordinate necessarie a identificare univocamente un punto al suo interno. Da qui si ottiene che una linea ha dimensione 1, in quanto è necessario un solo numero per identificare un punto che le appartiene. Analogamente, serviranno due numeri per identificare un punto in un quadrato, 3 in un cubo o in una sfera. Nella geometria frattale quando si parla di dimensione non ci si riferisce al numero di coordinate necessarie a specificare un punto, ma al comportamento dell'oggetto a diverse scale di ingrandimento. La dimensione frattale è un indice importante nell'analisi di oggetti astratti e nella caratterizzazione di fenomeni pratici come la turbolenza, i mercati azionari e le reti fluviali. Il calcolo spesso richiede metodi di analisi complessi ed è fatto con l'utilizzo di computer, a meno di casi semplici che verranno descritti in seguito. Le più note definizioni di dimensione frattale sono la dimensione di Hausdorff, la dimensione di Minkowski-Bouligand e la dimensione del conteggio dei box. Quest'ultima verrà in seguito utilizzata per calcolare le dimensioni di alcuni semplici frattali.

2.3.1 Conteggio dei box

Se si raddoppia il lato di un poligono qualsiasi, la sua area diventerà il quadruplo. Se si raddoppia il raggio di una sfera, il suo volume sarà moltiplicato per 8. Se chiamiamo l il fattore di scala, si può pensare a questo numero $N(l)$, come al numero di contenitori (o box), di grandezza pari all'oggetto originale, necessari a contenere completamente l'oggetto ingrandito. Per un poligono si ha $N(l) = l^2$, per una sfera o un cubo $N(l) = l^3$.

$$l^d = N(l) \quad (1)$$

$$\log_l l^d = \log_l N(l) \quad (2)$$

$$d = \frac{\log(N(l))}{\log(l)} \quad (3)$$

L'esponente d che assume l è la dimensione dell'oggetto preso in considerazione. Notare come questo modo di calcolare la dimensione, sia compatibile con la nozione classica in quanto linee, poligoni e solidi continuano ad avere la stessa dimensione intera. Si prenda ora la curva di Koch (6.1) in figura 4. Questa curva frattale, è formata da 4 parti simili alla curva intera mostrate con i colori. Si immagini di ingrandire la parte viola, che di fatto è anch'essa una curva di Koch, di un fattore $l = 3$. A questo punto saranno necessari 4 parti uguali alla parte viola per ricoprire l'oggetto ingrandito. Possiamo applicare la formula 3 per ricavarne la dimensione:

$$d_{Koch} = \frac{\log(N(3))}{\log(3)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1.26 \quad (4)$$

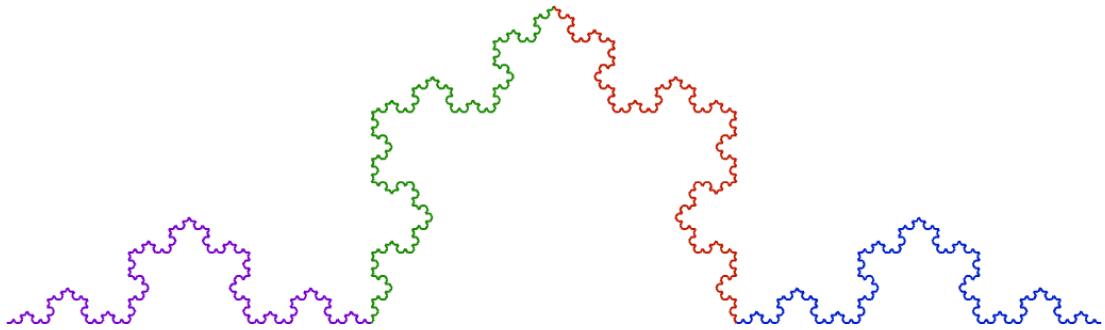


Figure 4: Curva di Koch.

3 Frattali in natura

3.1 Strutture ramificate

Se osserviamo attentamente un albero possiamo constatare che un ramo che si separa dal tronco è simile all'albero intero. Questo ramo sarà, a sua volta, formato da altri rami simili anch'essi al ramo stesso o all'intero albero, e così via fino ad arrivare alle foglie. Strutture ramificate di questo genere sono comunissime in natura, non solo negli alberi. In figura 5 sono mostrati alcuni esempi. La presenza di queste strutture è spiegata dalle leggi della fisica, della matematica e dalla selezione naturale: la forma delle foci a delta, ad esempio, è giustificata dalla dinamica dei fluidi; l'aggregazione a diffusione limitata è un fenomeno che forma cristalli dalla forma ramificata dovuto al moto browniano di particelle cariche.



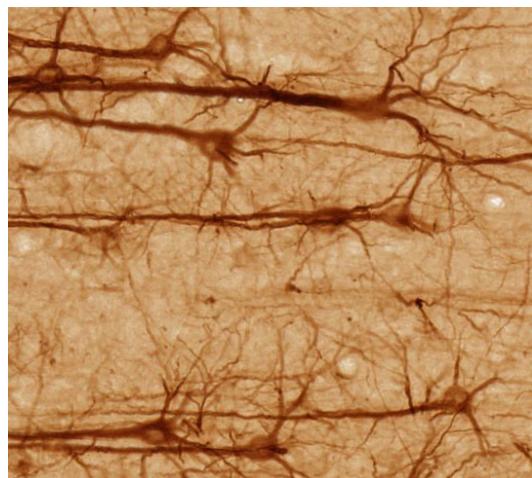
(a) Foto satellitare (Birmania).



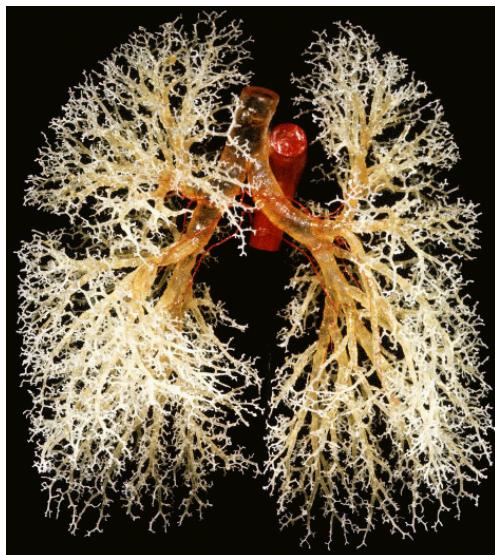
(b) Pianta frattale.



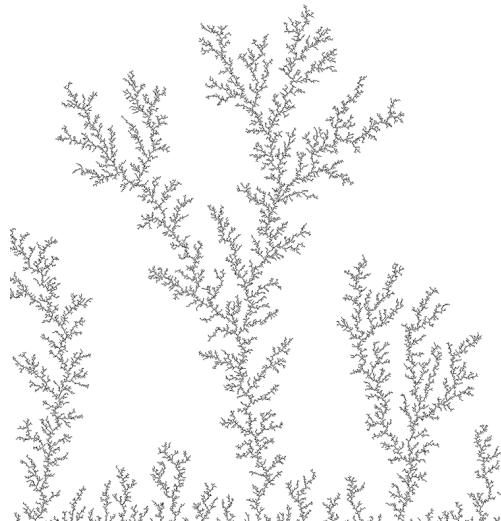
(c) Ramo di un albero.



(d) Dendriti nei neuroni.



(e) Modello dei polmoni.



(f) Aggregazione a diffusione limitata.

Figure 5

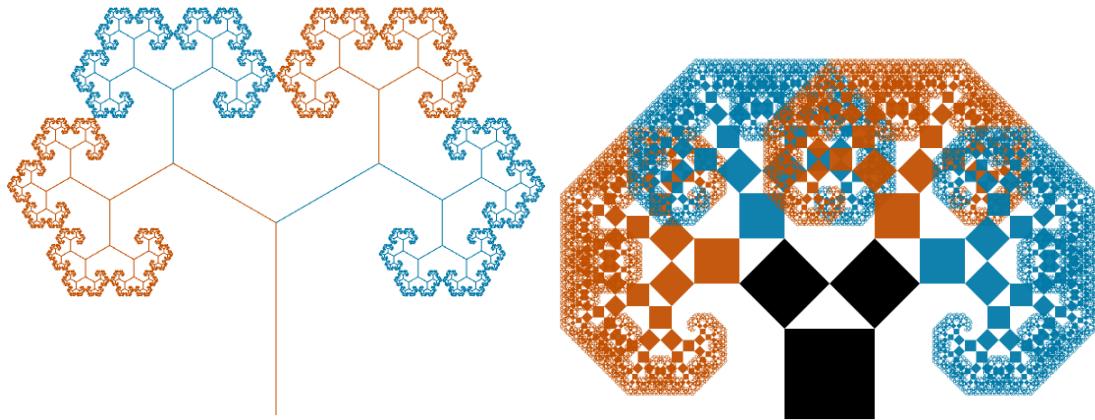


Figure 6: Alberi generati con una semplice procedura ricorsiva.

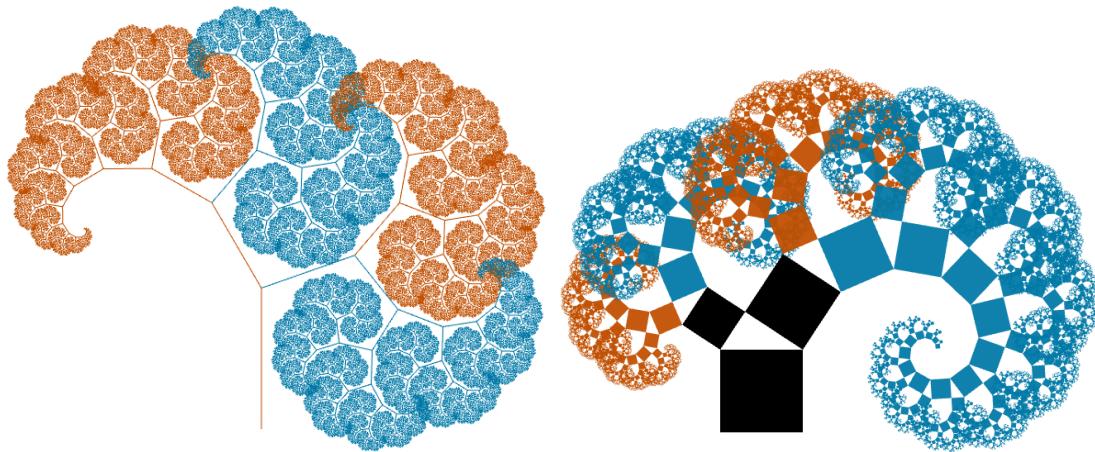


Figure 7: Alberi generati con una semplice procedura ricorsiva.

Nei viventi la selezione per pattern frattali è giustificata dalle proprietà uniche che essi hanno. In particolare, una struttura ramificata come quella degli alberi o dei polmoni ottimizza il rapporto tra superficie e volume e consente di avere più foglie, nel caso degli alberi, più alveoli polmonari, nel caso dei polmoni. Un altro esempio sorprendente è quello del sistema circolatorio. Ogni cellula deve trovarsi a non più di 100 micron da un vaso sanguigno per poter ricevere l'ossigeno e i nutrienti necessari per sopravvivere. Il sistema circolatorio può fare questo occupando solo il 5% del volume corporeo. Inoltre vi sono modelli matematici come le grammatiche di Lindenmayer (4.1), spesso utilizzate in computer grafica per la creazione di pattern frattali, che si ispirano proprio alla natura.

3.2 Strutture irregolari

La maggior parte degli oggetti modellati dalla natura è di forma irregolare. Ne sono esempi le montagne, le nuvole, e le coste. Queste forme sono difficilmente descrivibili dalla geometria che normalmente si studia a scuola, eppure sono le più frequenti. La geometria frattale è il più efficace strumento per descrivere queste forme irregolari. Montagne, coste e nuvole rientrano nella categoria dei frattali stocastici ovvero quei frattali in cui l'autosomiglianza è nella sua forma più debole. Le misure ottenute dall'analisi frattale, come il calcolo della dimensione, rimangono invariate a diverse scale di ingrandimento. Se si guarda con il binocolo una montagna si vedrà che è formata da rocce e se si riesce a guardare più da vicino si vedrà il granello di sabbia. Montagne, rocce, granelli di sabbia, hanno tutti una forma approssimativamente simile. Questa somiglianza è ciò che consente di utilizzare la geometria frattale per la generazione di scenari naturali che vanno oltre le strutture ramificate.

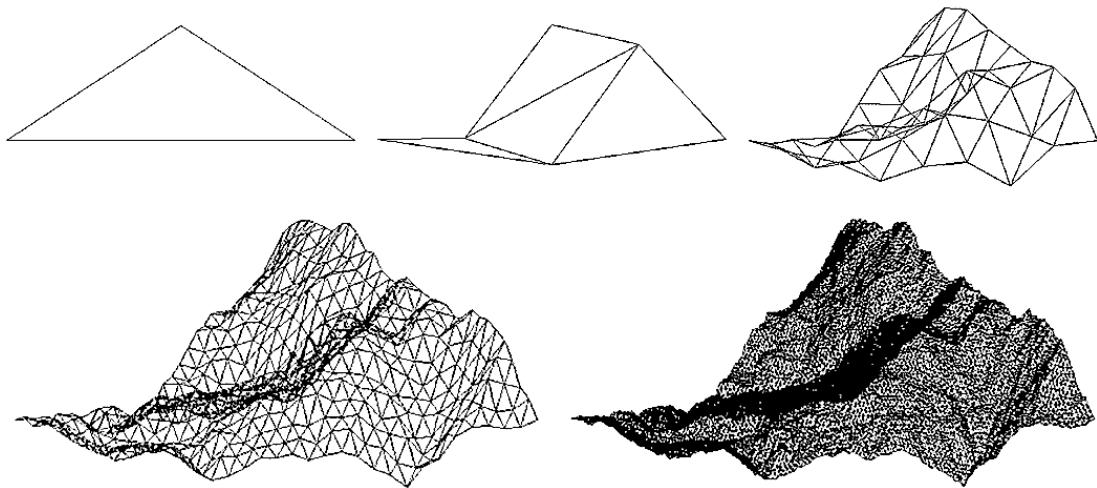


Figure 8: Generazione di una montagna.

Generalmente gli algoritmi che sfruttano la geometria frattale per generare strutture naturali realistiche, prendono in input un oggetto regolare come un segmento o un poligono. Questo oggetto regolare viene poi diviso in parti più piccole di forma simile. Se si aggiunge a ogni parte un elemento stocastico e si itera la procedura si otterranno forme che ben approssimano quelle in natura. In figura 8 è mostrata la generazione di una montagna. Il triangolo preso in input, viene spezzato in triangoli più piccoli, ognuno dei quali viene spostato di un valore casuale. La procedura così iterata forma una montagna dall'aspetto realistico.

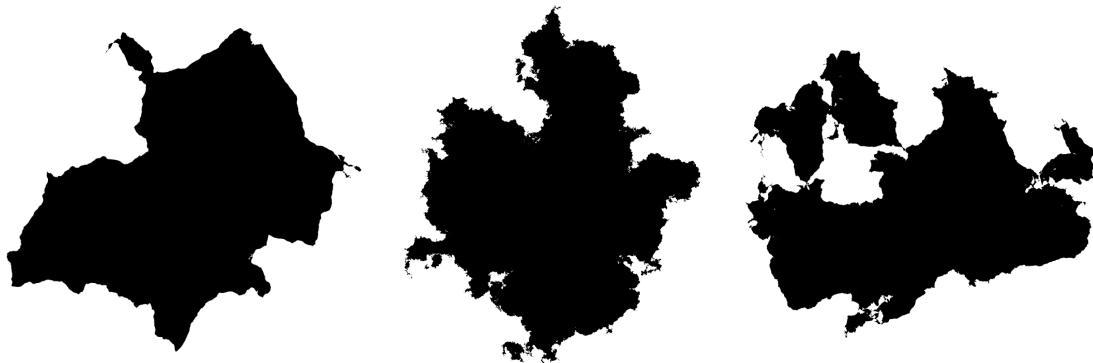


Figure 9: Isole generate casualmente.

In figura 9 è mostrato l'output di un programma che genera isole. In questo caso l'input sarà un poligono e il procedimento sarà analogo a quello descritto per le montagne. Ogni lato sarà diviso a metà; l'angolo compreso tra ogni coppia di nuovi lati verrà poi modificato in maniera casuale.

3.3 Spirali



Figure 10: Esempi di spirali in natura.

Le spirali possono essere viste come una particolare forma di autosomiglianza e sono tra le forme più comuni in natura (fig. 10 e 11).



Figure 11: Esempi di spirali in natura.

4 Algoritmi di generazione

La creazione di immagini frattali con un computer può essere realizzata in moltissimi modi. Tra i processi che danno vita a oggetti autosomiglianti, molti hanno la caratteristica di essere ricorsivi. Se ci si trova nella situazione in cui l'output di un'operazione è l'input successivo della stessa, si ha in un sistema dinamico il cui risultato finale potrebbe, con tutta probabilità, essere un frattale. Negli anni sono state sviluppate tecniche standard per la generazione di frattali. Di queste, ne verranno approfondite due: le grammatiche di Lindenmayer e il sistemi di funzioni iterate. Tutti i frattali descritti nelle sezioni 5 e 6 possono essere generati con l'utilizzo di almeno una tra le tecniche descritte di seguito.

4.1 Sistemi di Lindenmayer

I sistemi di Lindenmayer o grammatiche di Lindenmayer sono un metodo di generazione di frattali sviluppato nel 1968 dal botanico ungherese Aristid Lindenmayer. Sono nati come modello per descrivere il processo di crescita delle piante, ma oggi sono principalmente utilizzati per la generazione di molti dei frattali che verranno in seguito descritti. Un sistema di Lindenmayer è formato dalle seguenti componenti:

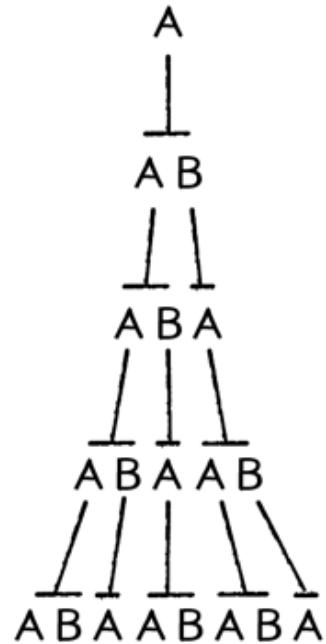


Figure 12: Trascrizione delle stringhe in un sistema di Lindenmayer.

- ALFABETO: L’alfabeto è un insieme V di simboli. Vi sono due tipi di simboli: variabili (sostituibili con altri simboli) e costanti (non sostituibili);
- ASSIOMA: L’assioma, detto anche *iniziatore* è una stringa di simboli di V ;
- REGOLE DI RISCRITTURA: Una regola di riscrittura è un’assegnazione di un simbolo a una stringa.

All’assioma si applicano le regole di riscrittura ottenendo una lunga stringa di simboli. In figura 12 è mostrato un esempio di ciò, in cui all’assioma A vengono applicate le regole di riscrittura $A \rightarrow AB$ e $B \rightarrow A$. La natura ricorsiva dei sistemi di Lindenmayer fa sì che l’*interpretazione* di queste stringhe dia origine a frattali.

4.1.1 Turtle graphics

Turtle graphics è un termine spesso associato al linguaggio di programmazione Logo. In Logo si ha una tartaruga (*the turtle*) che, interpretando i comandi che le si danno, si muove sullo schermo tracciando linee. La tartaruga ha le seguenti proprietà:

- POSIZIONE;
- DIREZIONE;
- PENNA con attributi come colore e spessore.

I frattali creati con le grammatiche di Lindenmayer nascono dall’interpretazione di una stringa, come comandi per questa immaginaria tartaruga che si muove sullo schermo. In figura 13 è mostrato un esempio di interpretazione di una stringa con turtle graphics, mentre in figura 14 sono presentati due esempi di frattali creati con questo metodo.

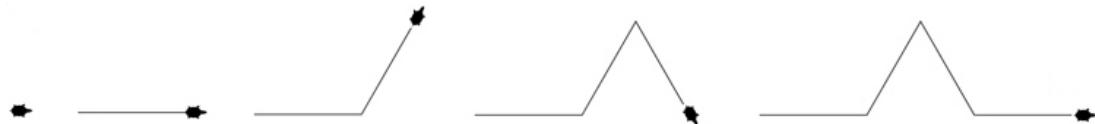


Figure 13: Stringa $A-A++A-A$ interpretata in questo modo: $A \rightarrow$ prosegui diritto di una unità, $+$ → gira a destra di 60° , $-$ → gira a sinistra di 60° .

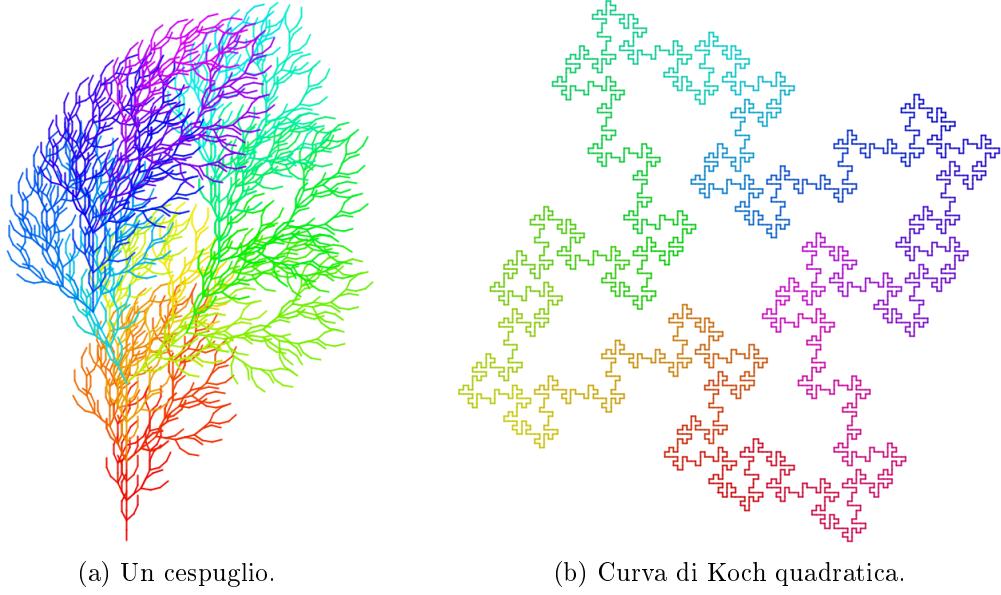


Figure 14: Esempi di frattali creati con le grammatiche di Lindenmayer. Assiomi e regole di riscrittura sono reperibili online [2]

4.2 Sistemi di funzioni iterate

I sistemi di funzioni iterate o IFS (dall’inglese *Iterated Function Systems*) sono uno dei metodi più utilizzati per la creazione di frattali. Gli algoritmi che ne derivano, si basano sull’iterazione di un sistema di trasformazioni geometriche e danno sempre come risultato figure autosomiglianti. Gli IFS trattati di seguito nascono da trasformazioni nel piano, ma il metodo è estendibile a un numero qualsiasi di dimensioni.

4.2.1 Trasformazioni nel piano

Una trasformazione nel piano cartesiano è descritta informalmente in termini di rotazione, traslazione e dilatazione. Una descrizione più precisa si può dare in termini di un prodotto di matrici.

$$f(A) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_x & 0 \\ 0 & d_y \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \quad (5)$$

Dove A è un insieme qualsiasi di punti nel piano. La prima matrice che compare è quella responsabile della rotazione di un angolo θ rispetto all’origine, la seconda si occupa di dilatare lungo gli assi, e infine l’ultima, si occupa di traslare. Sviluppando il prodotto si ottiene:

$$f(A) = \begin{pmatrix} d_x \cos \theta & -d_y \sin \theta \\ d_x \sin \theta & d_y \cos \theta \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \quad (6)$$

È importante ricordare che il prodotto tra due matrici non gode della proprietà commutativa. Ciò si rispecchia nel fatto che ruotare prima di dilatare è diverso da dilatare prima di ruotare. Nel caso delle funzioni usate per gli IFS viene prima effettuata la rotazione e poi la dilatazione. In figura 15 è illustrato il risultato che una di queste funzioni di trasformazione può avere su un quadrato.

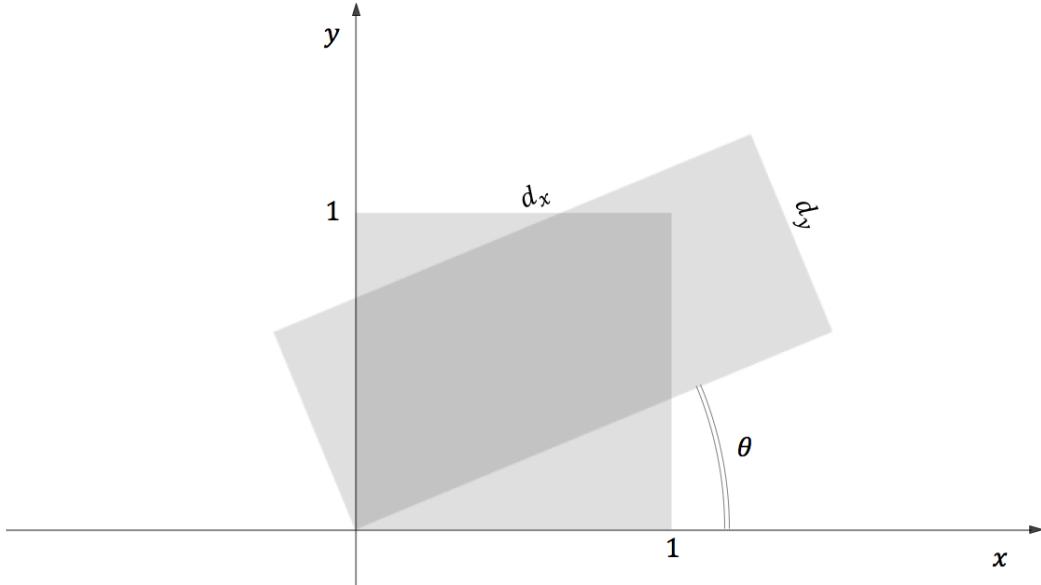


Figure 15: Il risultato di una trasformazione applicata al quadrato unitario.

È di fondamentale importanza che le trasformazioni che compongono un IFS siano *contrattive*. Si consideri un insieme A , a cui viene applicata una trasformazione f . Dati due punti $p_1, p_2 \in A$, essi saranno trasformati da f in $f(p_1)$ e $f(p_2)$. La trasformazione f si dice contrattiva se vale la seguente diseguaglianza:

$$d(f(p_1), f(p_2)) \leq kd(p_1, p_2) \quad \text{con } 0 < k < 1 \quad (7)$$

dove d è la distanza tra due punti. In maniera più informale si può dire che una trasformazione contrattiva contrae l'insieme, avvicinando una qualsiasi coppia di punti dell'insieme di partenza. La funzione applicata in figura 15 chiaramente non gode di questa proprietà. Secondo il *teorema di punto fisso di Banach*, la contrattività di una funzione di trasformazione fa sì che, l'iterazione infinita di quest'ultima su un insieme qualsiasi di punti, dia come risultato nel limite, un punto. In figura 16 è mostrato l'effetto dell'iterazione di una funzione contrattiva.

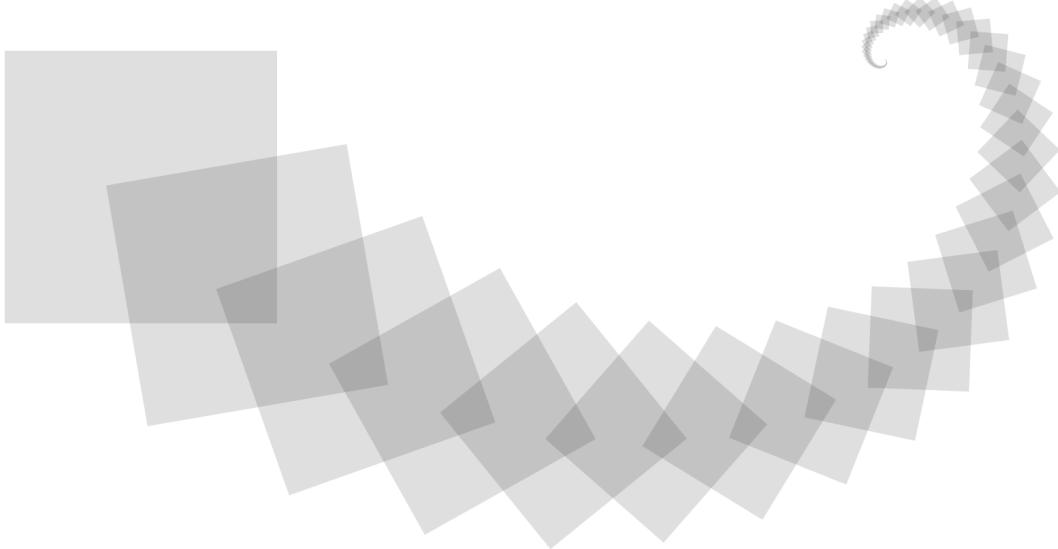


Figure 16: L'iterazione infinita di una funzione contrattiva trasforma l'insieme in un punto.

All'atto pratico, per verificare se una data trasformazione è contrattiva oppure no, si calcola il determinante della matrice risultante della moltiplicazione delle matrici di rotazione e dilatazione. Essendo, per le trasformazioni nel piano, una matrice 2×2 il calcolo è semplice:

$$s = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad (8)$$

s prende il nome di coefficiente di contrazione. Se $s < 1$ la funzione è contrattiva.

4.2.2 Definizione e algoritmo

Un IFS è dato da un insieme finito di trasformazioni contrattive e si indica con:

$$\{f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, N\}, N \in \mathbb{N} \quad (9)$$

Si può dimostrare che il coefficiente di contrazione di un IFS è uguale al massimo dei coefficienti di contrazione. Indicando con s_i il coefficiente di contrazione della i -esima funzione si ha:

$$s = \max \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$$

La creazione di un'immagine utilizzando un IFS parte con l'applicazione di ogni funzione f_i a un insieme qualsiasi A_0 . A_1 sarà l'unione degli insiemi $f_i(A_0)$. Questa operazione è solitamente indicata con l'operatore di Hutchinson:

$$A_{m+1} = H(A_m) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A_m) \quad (10)$$

dove A_m è il risultato di m iterazioni dell'operatore di Hutchinson sull'insieme A_0 . Se si itera questa operazione infinite volte si ottiene un insieme chiuso e limitato A_∞ tale che:

$$A_\infty = H(A_\infty) \quad (11)$$

L'esistenza di questo insieme è una diretta conseguenza del teorema del punto fisso di Banach applicato questa volta a un sistema di funzioni.

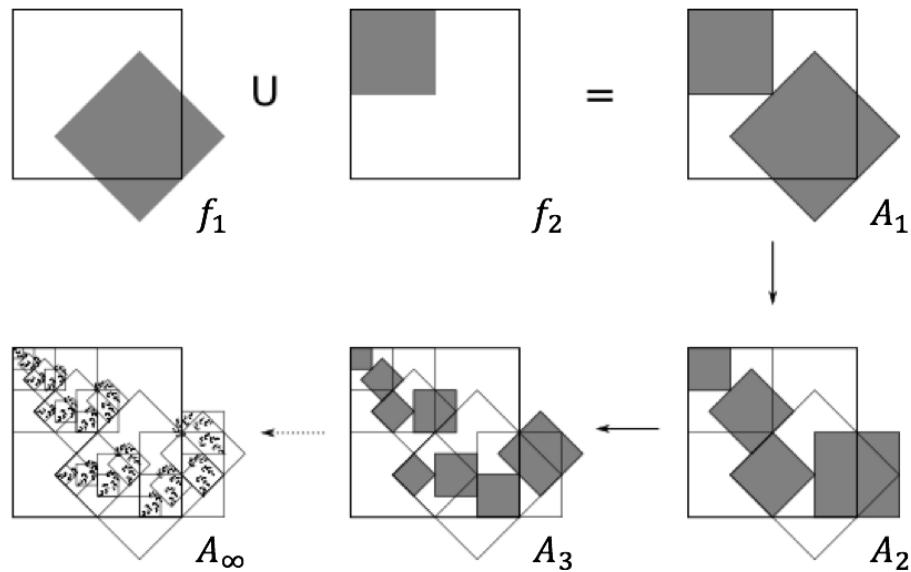


Figure 17: Un esempio di IFS costituito da due funzioni.

Col crescere del numero delle iterazioni si vedrà l'insieme di partenza trasformarsi gradualmente (17). Ciò che emerge dalle iterazioni è a volte chiamato attrattore del sistema ed è sempre un frattale.

4.2.3 Algoritmo stocastico

Per ragioni di efficienza, gli algoritmi che implementano gli IFS utilizzano come insieme di partenza un punto casuale. Utilizzando un'immagine diversa si potrebbe osservare l'effetto della transizione graduale al frattale, ma il processo sarebbe oneroso. Partendo con un punto, i calcoli si alleggeriscono e il risultato sarà il medesimo. Il problema a questo punto è quello mostrato in figura 18a in cui è presentata la famosa felce di Barnsley.



Figure 18: Felce di Bansley.

La non uniformità dell'immagine è dovuta al fatto che non tutte le funzioni di trasformazione sono responsabili della stessa area. Per risolvere questo problema si utilizza un'euristica legata ai coefficienti di contrazione per assegnare delle probabilità alle funzioni di contrazione. Se il coefficiente di contrazione di una funzione è più alto, le sarà assegnata una probabilità. La frequenza con cui la trasformazione applicata dipenderà dalla probabilità che le si assegna.

f_i	a	b	c	d	e	f	p
f_1	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.60	0.85
f_2	0.20	-0.26	0.23	0.22	0	1.60	0.07
f_3	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07
f_4	0	0	0	0.16	0	0	0.01

Table 1: Trasformazioni per la felce di Barnsley.

In tabella 1 sono riportate le funzioni per la felce di Barnsley in figura 18b. La cor-

rispondenza tra le colonne della tabella e l'equazione 6 è la seguente:

$$f_i(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (12)$$

L'effetto di un'applicazione pesata è evidente nella felce di Barnsley come in molti altri frattali generati con IFS. In figura 19a, 19b e 20 sono mostrati alcuni frattali generati con degli IFS. I colori differenziano le aree generate dalle diverse funzioni di trasformazione nel sistema.

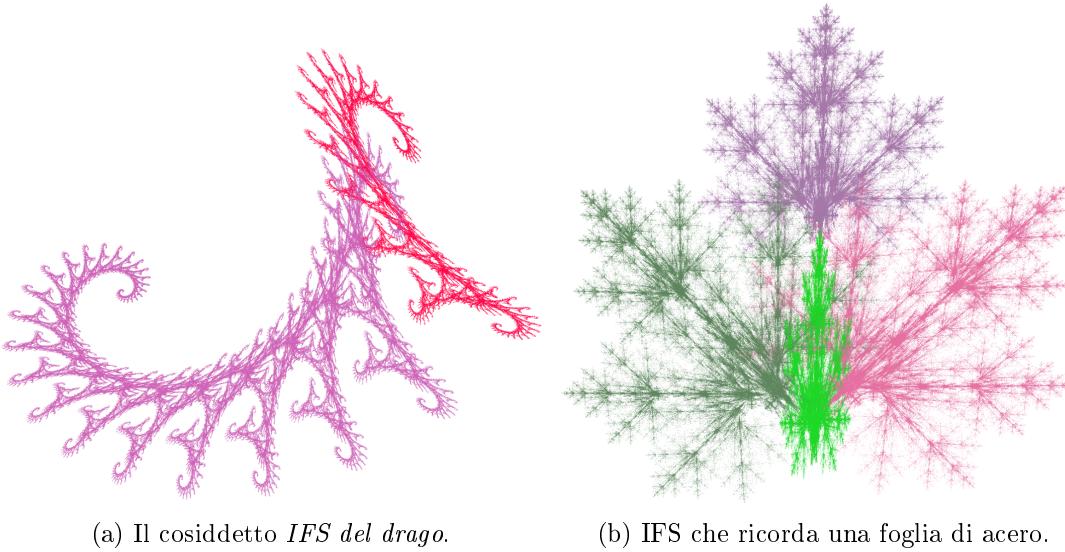


Figure 19: Alcuni esempi di frattali creati con un IFS. Le funzioni che li generano si possono trovare online [2][3].

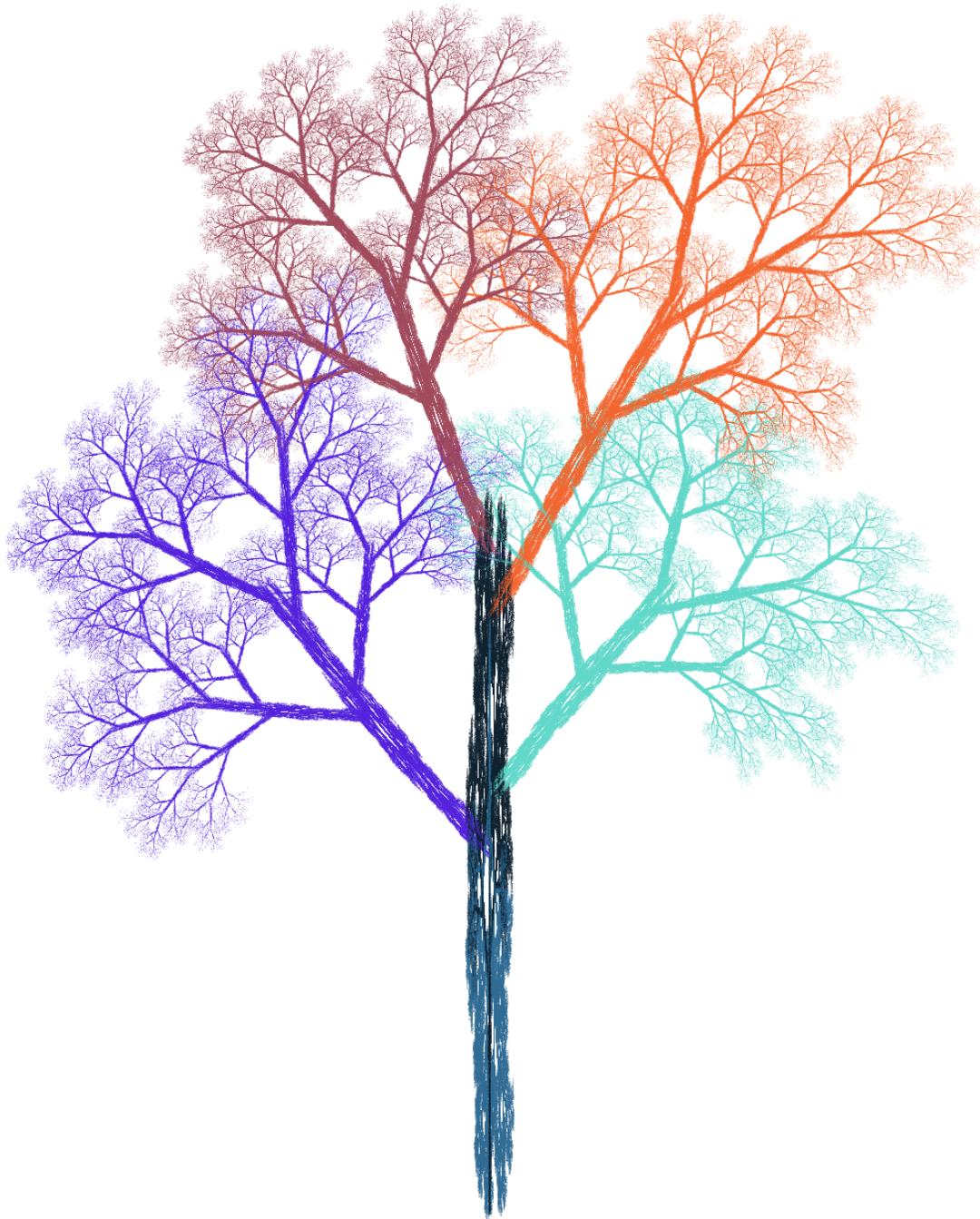


Figure 20: Albero costruito con un IFS.

4.2.4 Chaos Game

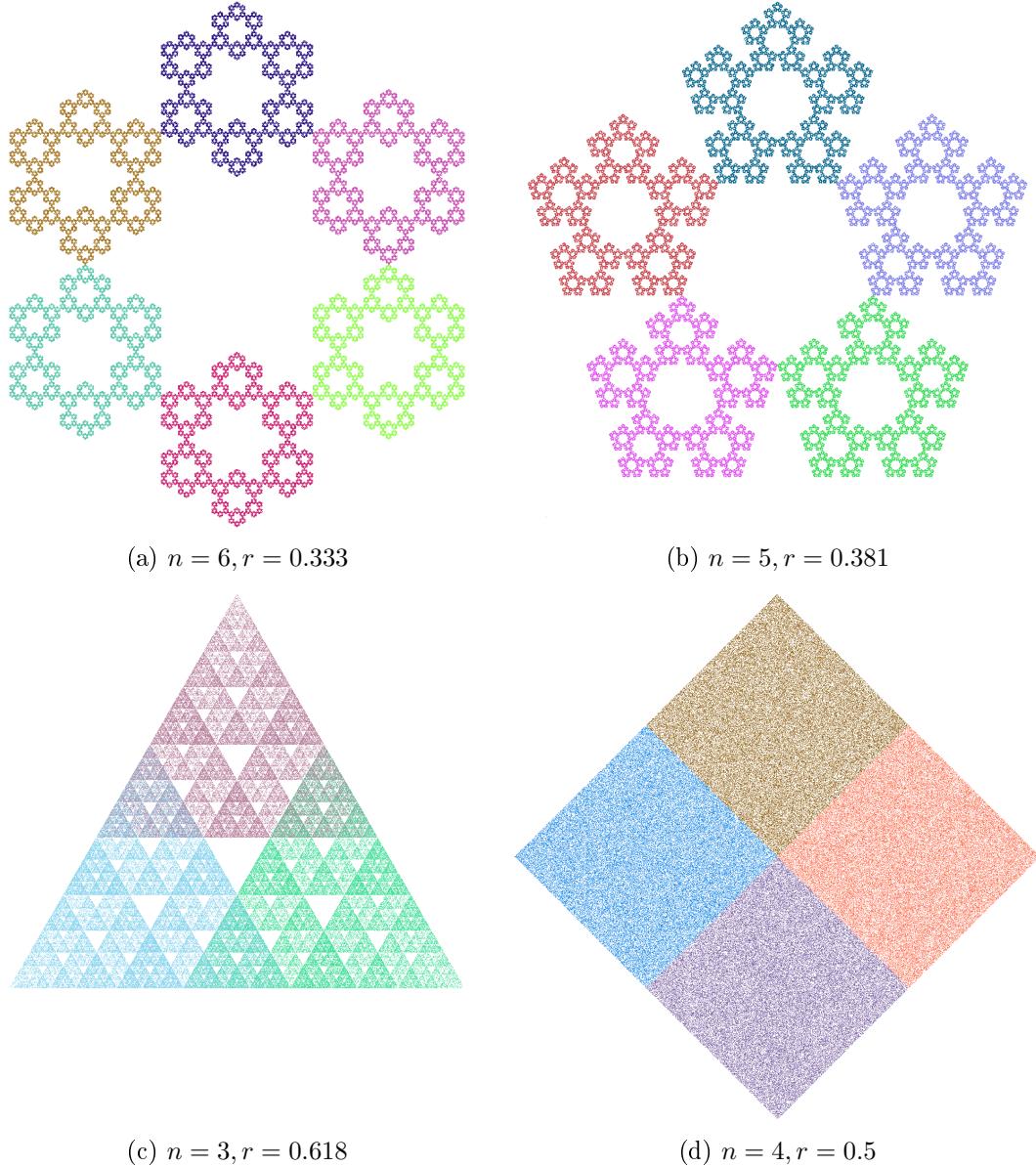


Figure 21: Alcuni output di *chaos game*.

Chaos game è un algoritmo descritto per la prima volta da Michael Barnsley nel 1988. Dato un poligono regolare di n lati, si sceglie a caso un punto al suo interno. Si iterano poi i seguenti passi:

1. si sceglie a caso un vertice del poligono;

2. si disegna un nuovo punto ad una frazione di distanza r tra il punto e il vertice scelto;
3. si utilizza il punto appena disegnato per ripetere dal passo 1.

L'output di questo algoritmo è spesso, ma non sempre, un frattale. Si può pensare di disegnare un punto a una frazione di distanza da un altro punto come a una trasformazione simile a quella negli IFS.

5 Esempi classici in matematica

Quelli descritti in seguito sono frattali dalla semplice costruzione, i primi ad essere stati descritti in maniera formale tra la fine dell'800 e i primi del 900. La procedura di costruzione di questi frattali consiste nell'applicazione di una certa regola ad un normale oggetto geometrico, come un segmento o un triangolo. Questa regola consiste, di solito, in un'eliminazione che lascia delle parti simili all'oggetto di partenza. A queste parti simili si applica di nuovo la regola e così via. Nonostante la semplicità della costruzione questi frattali hanno impegnato i matematici per molto tempo e portato a grandi rivoluzioni concettuali.

5.1 Insieme di Cantor



Figure 22: Le prime 5 iterazioni nella costruzione dell'insieme di Cantor.

L'insieme di Cantor è un sottoinsieme dei numeri reali. È stato scoperto nel 1874 da Henry John Stephen Smith e formalmente descritto dal matematico tedesco Georg Cantor nel 1883. Con lo studio di questo insieme Cantor e altri hanno posto le basi della topologia generale. La costruzione dell'insieme di Cantor è descritta da 3 semplici passi:

Si parte considerando l'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$:

1. Si suddivide l'intervallo in 3 intervalli uguali.
2. Dei 3 intervalli si elimina quello centrale.

3. Si torna al passo 1 per ognuno dei 2 intervalli rimasti.

Nel primo passo eliminiamo l'intervallo $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, nel secondo $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ e $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ e così via. Se applichiamo questa procedura infinite volte otteniamo l'insieme di Cantor, che denoteremo con \mathbb{F} . Il totale delle parti eliminate risulta essere:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) \quad (14)$$

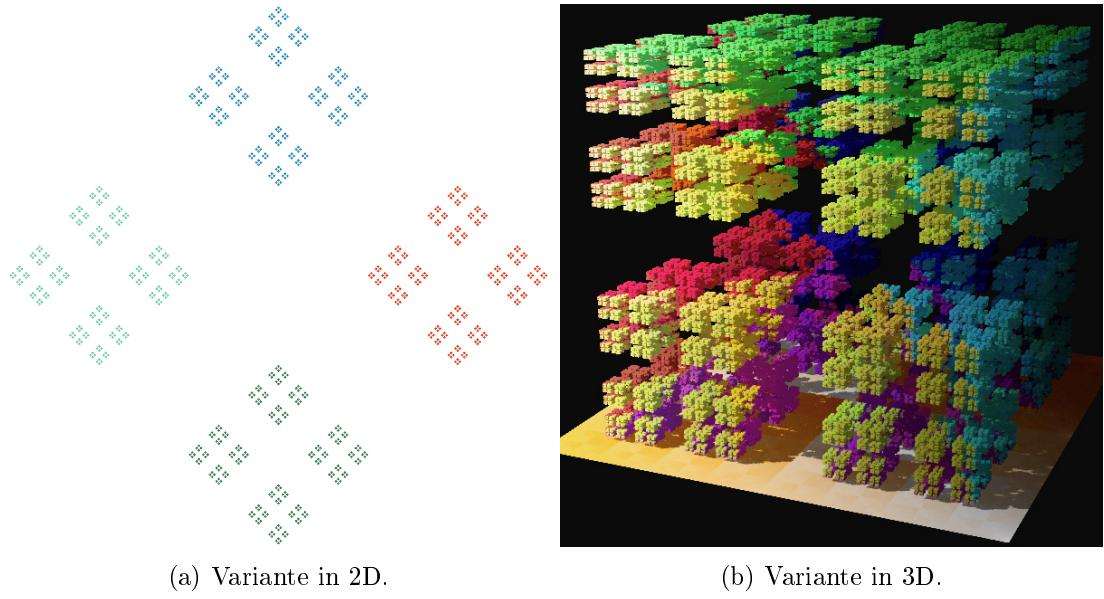
$$= 1 \quad (15)$$

Si potrebbe quindi pensare che nulla sia rimasto, e che l'insieme \mathbb{F} non sia altro che l'insieme vuoto. Se si considera però, che ogni intervallo che nasce nel processo di creazione è chiuso, si ha che le iterazioni successive eliminaranno solo parti di intervallo strettamente comprese tra gli estremi. Ciò vuol dire che per ogni nuovo intervallo nato ci saranno due punti, gli estremi, che non verranno mai eliminati. Il numero di intervalli è 2 dopo la prima iterazione, 4 dopo la seconda, 8 dopo la terza. Per infinite iterazioni si hanno infiniti intervalli, per infiniti intervalli si hanno infiniti punti. Si può anche dimostrare che \mathbb{F} non è numerabile¹ e che consiste di tutti i numeri nell'intervallo $[0, 1]$ che non hanno cifre 1 quando espressi in base 3. È forse un fatto difficile da realizzare, ma ciò implica che ci sono tanti elementi in \mathbb{F} quanti ce ne sono nell'intervallo di partenza.

Nonostante \mathbb{F} sia da considerarsi l'insieme ottenuto dall'iterazione di infiniti passi, è interessante notare l'autosomiglianza emergere dai passi intermedi. In figura 22 si può notare come, a ogni passo successivo si abbiano due copie rimpicciolite di ciò che si ha nel precedente. La dimensione dell'insieme \mathbb{F} si può facilmente calcolare con il metodo del conteggio dei box. È conveniente scegliere un fattore di ingrandimento $l = 3$ in modo tale l'oggetto ingrandito di 3 volte sia formato da 2 elementi uguali all'oggetto originale più uno spazio vuoto centrale. Pertanto sono 2 i contenitori di dimensione uguale all'oggetto originale necessari a contenere quello ingrandito. Applicando l'equazione (3):

$$D_{\mathbb{F}} = \frac{\log(N(3))}{\log(3)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 0,63 \quad (16)$$

¹Non numerabile significa che non possibile elencare in ordine gli elementi dell'insieme. L'esempio più noto di insieme non numerabile è \mathbb{R} , la cui non numerabilità si può dimostrare con il procedimento della diagonale di Cantor.



(a) Variante in 2D.

(b) Variante in 3D.

Figure 23: Varianti dell'insieme di Cantor.

5.2 Triangolo di Sierpinski

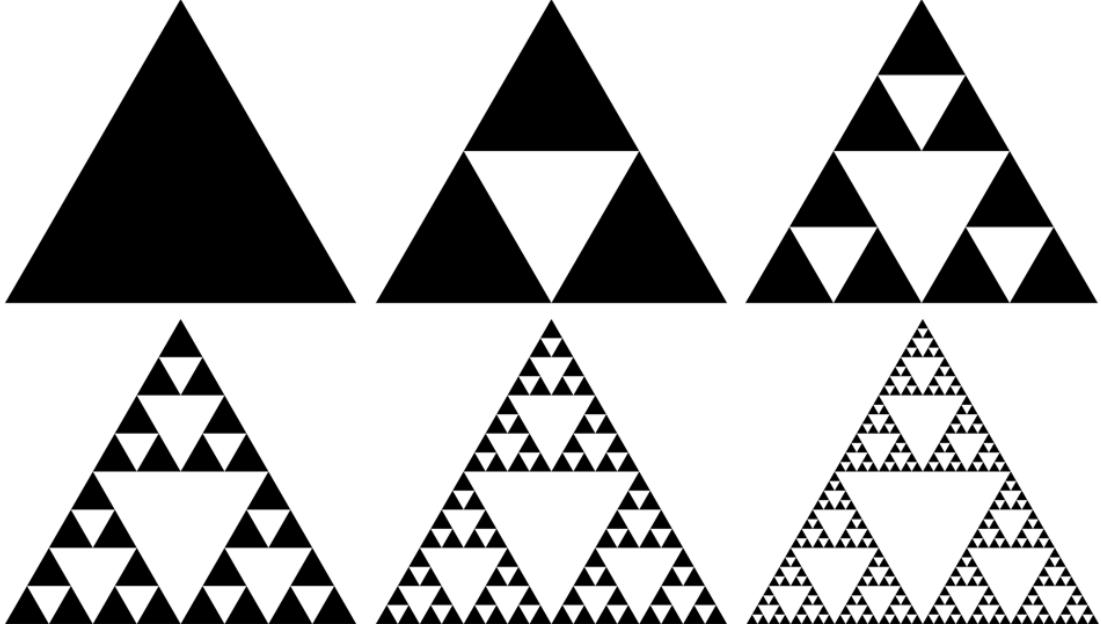


Figure 24: Prime 5 iterazioni nella costruzione del triangolo di Sierpinski.

Il triangolo di Sierpinski è uno dei frattali più noti. Prende il nome dal matematico polacco Wacław Sierpiński che per primo ne diede una descrizione formale, ma compare

come elemento decorativo molti secoli prima del suo lavoro. Nella creazione del triangolo di Sierpinski si parte da un triangolo equilatero:

1. Si suddivide il triangolo in 4 triangoli equilateri più piccoli (fig. 24);
2. Si elimina il triangolo centrale;
3. Si torna al passo 1 per ognuno dei 3 triangoli rimasti.

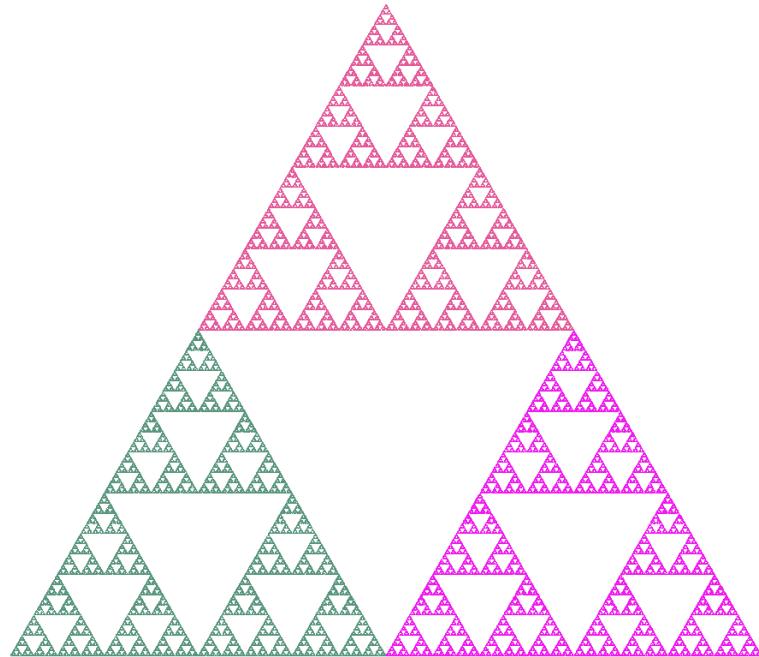


Figure 25: Triangolo di Sierpinski generato con chaos game ($n = 3, r = 0.5$) (vedi 4.2.4).

Dei frattali descritti in questa sezione, il triangolo di Sierpinski è forse quello più sorprendente. Oltre a poter essere costruito tramite semplici algoritmi ricorsivi (grammatiche di Lindenmayer e IFS), il triangolo di Sierpinski compare in diversi altri contesti:

- Nel triangolo di Pascal, se si colorano i numeri pari di bianco e i dispari di nero, si ottiene un'approssimazione del triangolo di Sierpinski;
- Dagli stati del gioco delle torri di Hanoi si può costruire un grafo planare non orientato a forma di triangolo di Sierpinski;
- Negli automi cellulari come la *Regola 161* e *Game of Life* si possono avere evoluzioni che approssimano il triangolo di Sierpinski;
- In *chaos game*, un particolare tipo di IFS descritto nella sezione 4.2.4.

La dimensione del triangolo di Sierpinski è facilmente calcolabile con il metodo del conteggio dei box. Se lo si ingrandisce di un fattore $l = 2$ si otterrà un oggetto formato da 3 oggetti grandi quanto l'oggetto di partenza. Per l'equazione 3:

$$d_{triangolo} = \frac{\log(N(2))}{\log(2)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,58 \quad (17)$$

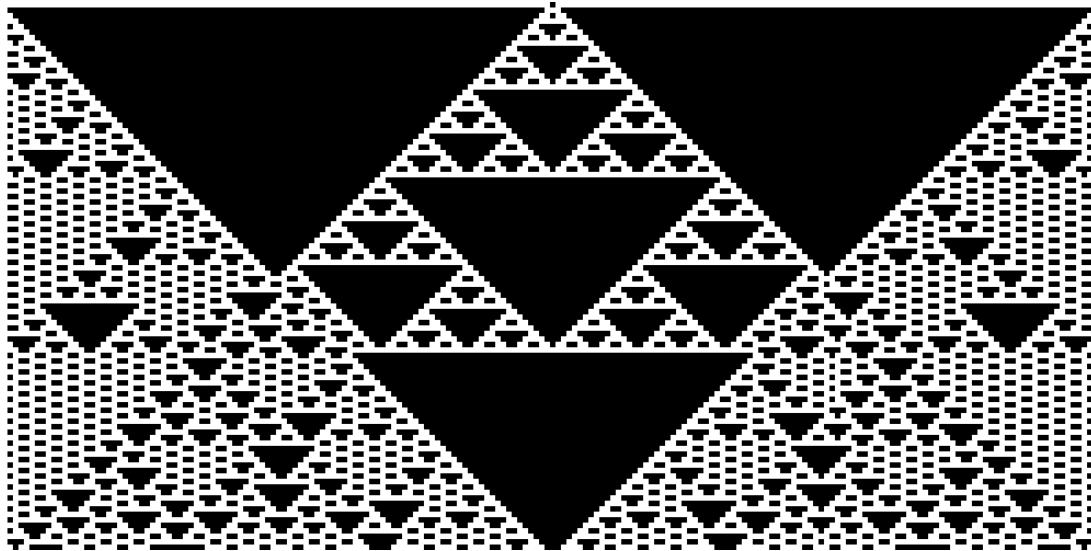


Figure 26: In un automa cellulare semplice si hanno due stati: 0 e 1. Ogni linea di celle orizzontale determina la linea successiva tramite l'applicazione di una particolare regola. Nonostante le semplici regole che li governano, gli automi cellulari possono dare output molto complessi. Nell'immagine la prima linea è formata da una singola cella nera (stato 1) che si evolve secondo la regola 161.

5.3 Tappeto di Sierpinski

Il tappeto di Sierpinski è un frattale simile all'insieme di Cantor, la cui costruzione, partendo da un quadrato, segue le seguenti regole:

1. Si suddivide il quadrato in 9 quadrati più piccoli;
2. Dei 9 quadrati si elimina quello centrale;
3. Si torna al passo 1 per ognuno degli 8 quadrati rimasti.

Iterando questa procedura si ottiene il frattale in figura 27.

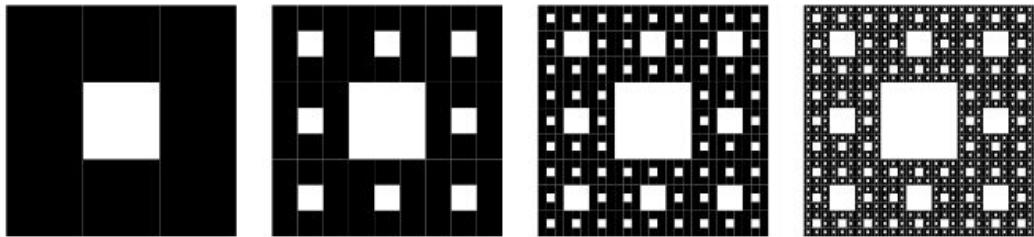


Figure 27: Prime 4 iterazioni nella costruzione del triangolo di Sierpinski.

Il tappeto di Sierpinski ha proprietà analoghe all'insieme di Cantor: la sua area è nulla e il numero di punti che lo compone ha la cardinalità del continuo. Si può calcolare la dimensione di questo frattale con il metodo del conteggio dei box. Il fattore di ingrandimento l sarà, per convenienza, ancora 3. L'oggetto ingrandito conterrà 8 oggetti della stessa grandezza di quello di partenza. Si ha quindi:

$$D_{tappeto} = \frac{\log(N(3))}{\log(3)} = \frac{\log(8)}{\log(3)} \approx 1,89 \quad (18)$$

5.4 Spugna di Menger

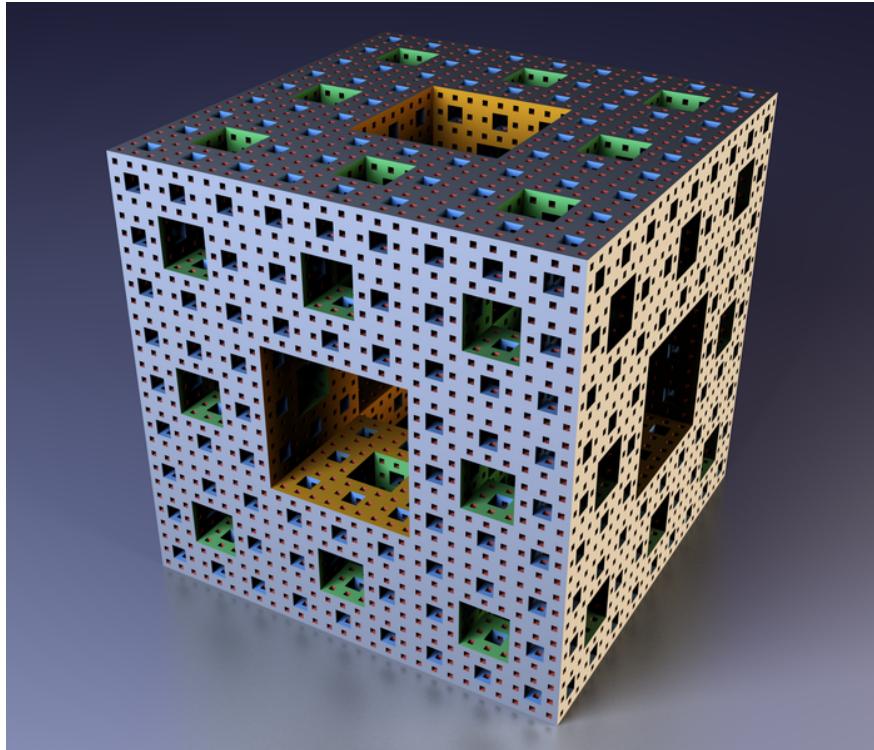


Figure 28: Spugna di Menger dopo 4 iterazioni.

La spugna di Menger è un altro frattale che deriva dall'insieme di Cantor per la cui costruzione si parte da un cubo e si seguono i seguenti passi:

1. Si suddivide il cubo in 27 cubi più piccoli, come nel cubo di Rubik;
2. Dei 27 cubi si eliminano quello centrale e i 6 cubi centrali di ogni faccia;
3. Si torna al passo 1 per ognuno degli 20 cubi rimasti.

Iterando questa procedura si ottiene il frattale in figura 28. La spugna di Menger contiene una quantità di punti pari alla cardinalità del continuo e ha volume nullo quando l'iterazione è protratta all'infinito. Con il metodo del conteggio dei box se ne può calcolare la dimensione. Ancora una volta, conviene prendere un fattore di ingrandimento $l = 3$. L'oggetto ingrandito di 3 volte contiene 20 copie dell'oggetto di partenza (in altre parole, sono necessari 20 box della stessa grandezza dell'originale per contenere l'oggetto ingrandito).

$$D_{menger} = \frac{\log(N(3))}{\log(3)} = \frac{\log(20)}{\log(3)} \approx 2,73 \quad (19)$$

6 Curve frattali

6.1 Curva di Koch

La curva di Koch è una delle prime curve frattali ad essere state descritte. Appare per la prima volta in un articolo del 1904 del matematico svedese Helge von Koch. Come accade anche per i frattali precedenti, la generazione della curva di Koch consiste nel prendere un oggetto geometrico semplice, in questo caso un segmento, e nella ripetizione di semplici passi:

1. Si divide il segmento del lato in 3 segmenti della stessa lunghezza;
2. Si elimina il segmento centrale e si sostituisce con due segmenti uguali formanti un angolo di 60° ;
3. Si torna al passo 1 per ognuno dei 4 segmenti ottenuti.

Dopo il primo passo si ottengono 4 segmenti, dopo il secondo $4 \times 4 = 16$ e così via. Ciò che otteniamo è il frattale in figura 4, di cui nella sezione 2.3.1 si è calcolato la dimensione ($d \approx 1.26$). Si può dimostrare che la curva di Koch ha lunghezza infinita. Prendendo 3 curve di Koch a formare una specie di triangolo equilatero, si ottiene il cosiddetto fiocco di Koch, un oggetto di area finita e perimetro infinito. Un'altra variante della curva di Koch si ottiene se si modifica l'angolo che formano i due segmenti che si sostituiscono al posto di quello centrale eliminato al passo 2. In figura 29 è mostrata la variante con angolo di 10° . Con angolo di 0° diventa una curva di copertura² (fig. 30).

²Le curve di copertura sono particolari curve frattali senza intersezioni che ricoprono interamente il piano (hanno dimensione 2)

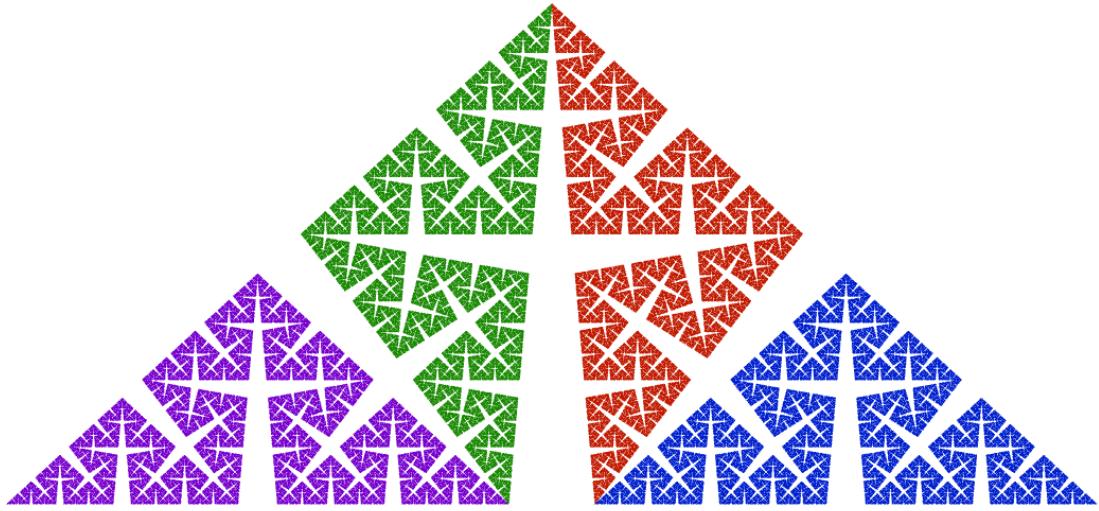


Figure 29: Curva di Koch con angolo di 10° .

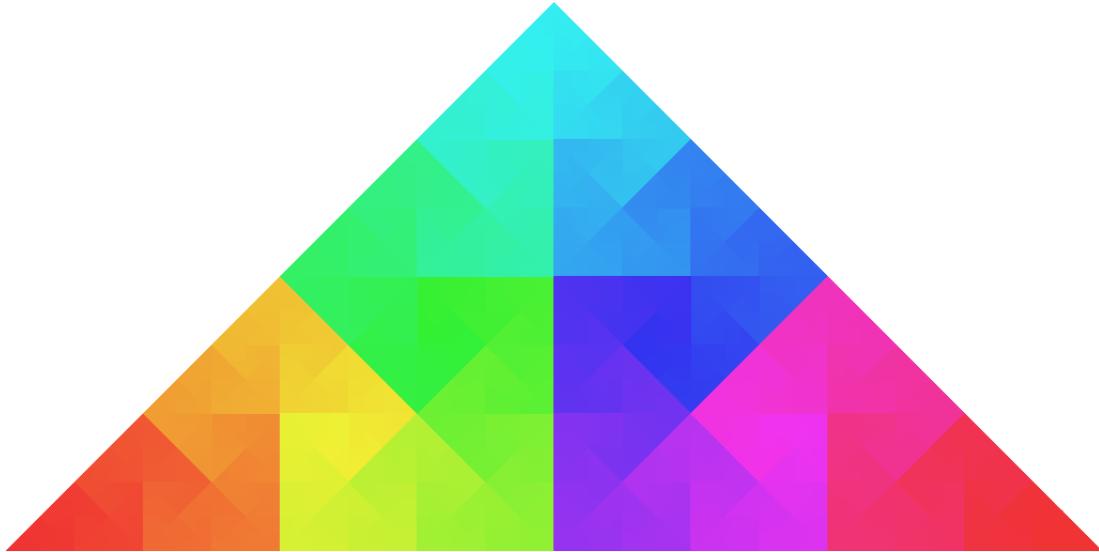


Figure 30: Curva di Koch con angolo di 0° .

6.2 Curva di Hilbert

La più conosciuta delle curve di copertura frattali è la curva di Hilbert, la quale fa parte della famiglia delle curve di Peano. Nel 1878 Cantor mostrò come, l'insieme dei punti che formano un linea retta, abbia la stessa cardinalità dell'insieme dei punti nel piano. Le curve di Peano sono il tentativo di trovare una corrispondenza biunivoca tra questi due insiemi. La curva di Hilbert ha anche la proprietà di far corrispondere punti vicini sul segmento a punti vicini nel quadrato. Questa proprietà la rende utile per la

visualizzazione di dati: si possono creare immagini a partire da dati unidimensionali.

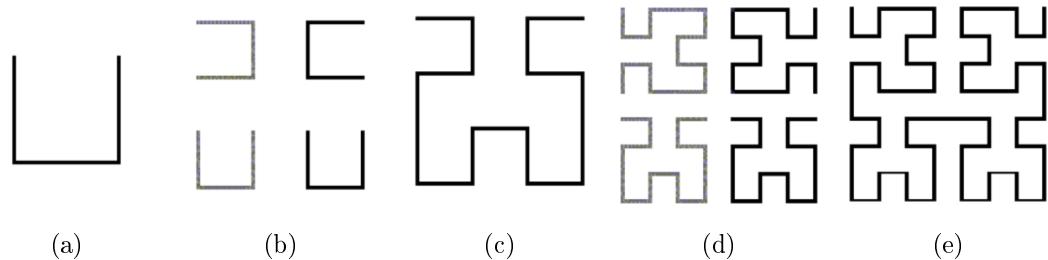


Figure 31: Procedimento di costruzione di una curva di Hilbert.

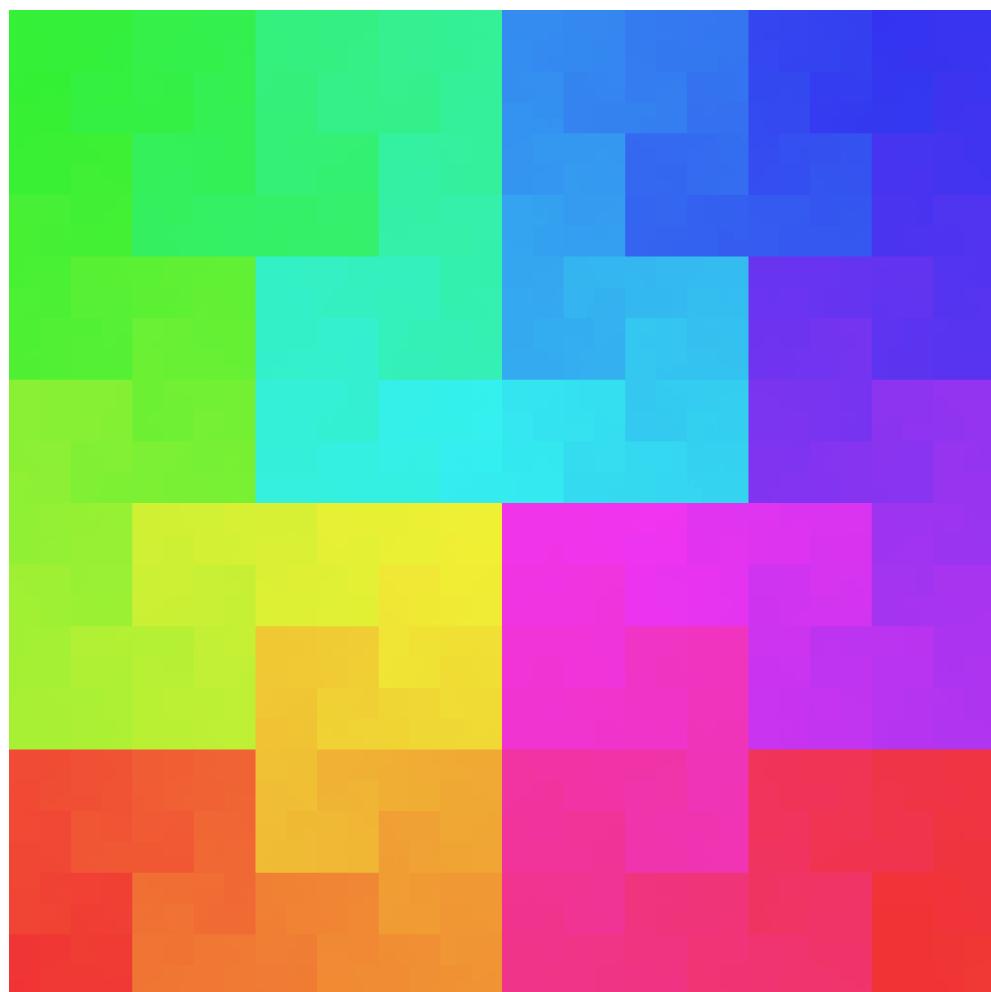


Figure 32: Curva di Hilbert di ordine 11.

Per costruire la curva di Hilbert si parte dalla curva in figura 31a e si procede posizio-

nando 4 copie questa in una sorta griglia 2×2 come mostrato in figura 31b. Unendo gli estremi più vicini si ottiene una curva di Hilbert di secondo ordine come quella in figura 31c. Il procedimento iterato infinite volte da come risultato una curva che ricopre ogni punto del quadrato. In figura 32 è mostrata una curva di Hilbert di ordine 6 che è stata costruita con un sistema di Lindenmayer.

6.3 Curva del drago

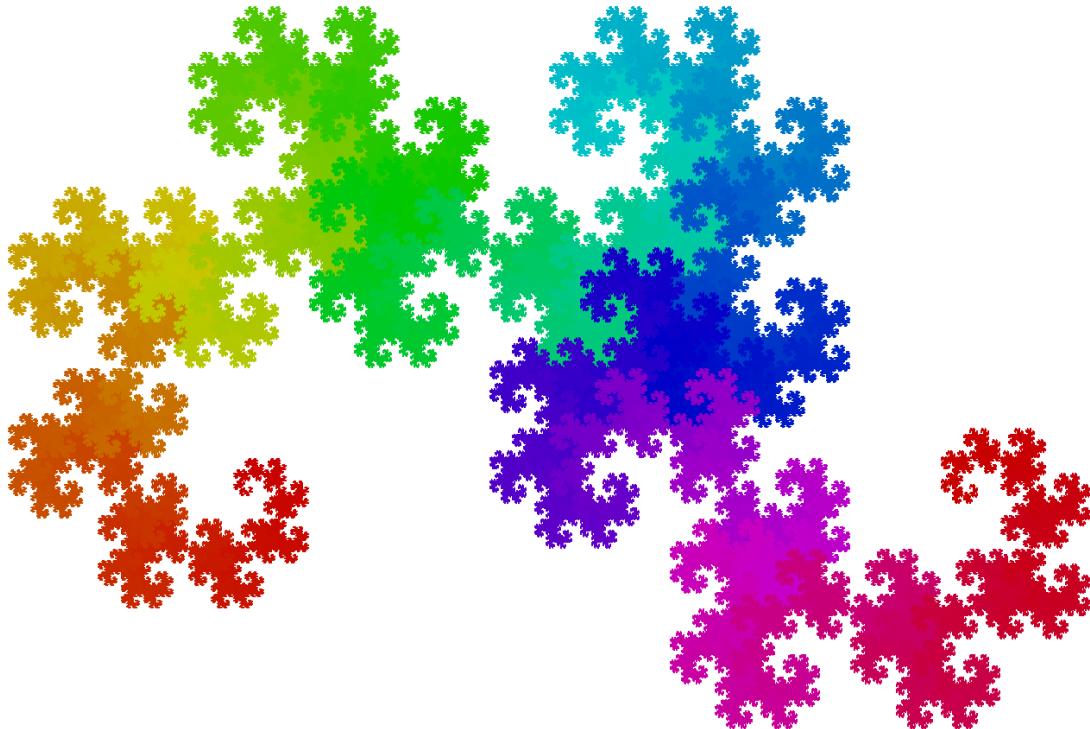


Figure 33: Curva del drago colorata ottenuta con un sistema di Lindenmayer.

La curva del drago è un curva frattale dalle interessanti proprietà. La più interessante è forse la possibilità di costruirne una utilizzando una striscia di carta. Il procedimento è illustrato in figura 34. Si piega la carta in due il maggior numero di volte possibile e si riapre mantenendo delle pieghe di 90° . L'autosomiglianza del pattern che si ottiene è evidente in figura 33, ottenuta con un sistema di Lindenmayer.

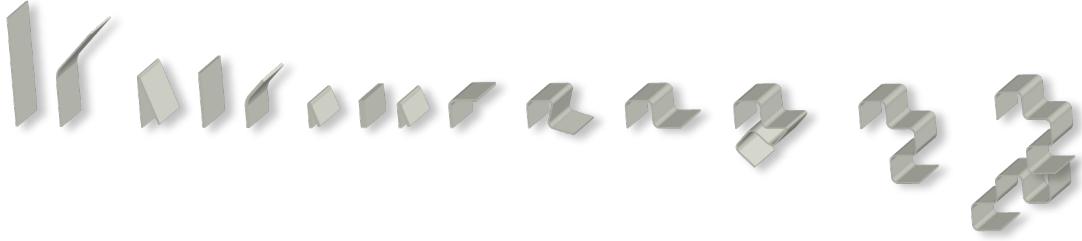


Figure 34: Creazione della curva del drago con una striscia di carta.

7 Dinamica complessa

7.1 Metodo del tempo di fuga

L'algoritmo del tempo di fuga è un algoritmo spesso utilizzato per la rappresentazione di frattali derivanti da funzioni di variabile complessa, come l'insieme di Mandelbrot e gli insiemi di Julia. Individuata una regione di piano complesso, si effettua una mappatura da pixel a punto. Per ogni pixel sarà definito un numero complesso che viene utilizzato per la generazione di una sequenza ottenuta dall'iterazione di un'equazione della forma $x_{n+1} = G(x_n)$. Il *tempo di fuga* è indicato dall'indice del primo termine nella sequenza che possiede una certa caratteristica. Questo indice può essere utilizzato per la colorazione del pixel in base a una *palette* di colori e consente di creare immagini dalla sorprendente bellezza.

7.2 Insiemi di Julia

Gli insiemi di Julia sono una classe di insiemi nel piano complesso. Oltre ad essere frattali, conosciuti per le stupende immagini colorate, sono molto importanti nel contesto della dinamica complessa³. Gli insiemi di Julia sono definiti iterando un polinomio quadratico di questo tipo:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (20)$$

Per ogni valore del parametro c è definito un insieme di Julia \mathbb{J}_c , che si ottiene iterando questo polinomio per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$. Se la sequenza ottenuta diverge si dirà che $z_0 \notin \mathbb{J}_c$, e si colorerà il punto corrispondente a z_0 di bianco. La divergenza sarà determinata dal modulo⁴ $|z_n|$: si può dimostrare che se $|z_n| \geq 2$, la sequenza sicuramente divergerà. In caso contrario, ai fini della rappresentazione grafica, si assumerà che z_0 appartenga a \mathbb{J}_c , e lo si colorerà di nero. Essendo l'andamento di z_n caotico, non sarà infatti possibile affermare con certezza l'appartenenza di z_0 all'insieme, a meno di casi particolari in cui la sequenza si ripete ciclicamente. Per questo motivo, maggiore è il numero di

³La dinamica complessa è lo studio dei sistemi dinamici definiti dall'iterazione di una funzione di variabile complessa.

⁴Il modulo di un numero complesso $z = a + bi$ è un numero reale che indica la distanza nel piano complesso di z dall'origine. Si calcola con il teorema di Pitagora: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

termini che si generano, maggiore sarà il dettaglio della rappresentazione. Se si volessero aggiungere i colori, o una scala di grigi, si dovrebbe tenere conto del cosiddetto *tempo di fuga*, ovvero dell'indice del primo termine il cui modulo ha superato la soglia di divergenza, in questo caso 2. In figura 35 e 36 sono mostrati alcuni insiemi di Julia.



Figure 35: Insiemi di Julia connessi.

Gli insiemi di Julia si dividono in connessi e non connessi. Dal confronto delle immagini sono evidenti le differenze. I primi sono più compatti, formati da una singola isola connessa. I secondi sono invece formati da diverse parti disconnesse. I valori di c che danno origine agli insiemi di Julia connessi formano il famoso insieme di Mandelbrot (7.3).

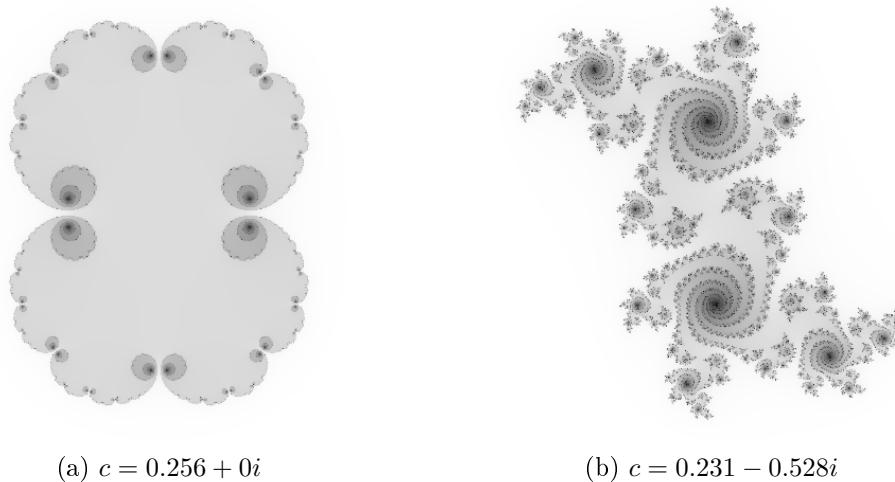


Figure 36: Insiemi di Julia non connessi.

7.3 Insieme di Mandelbrot

L'insieme di Mandelbrot è un frattale conosciuto anche al di fuori della matematica per le bellissime immagini a colori divulgate a partire dagli anni 80. È definito come l'insieme \mathbb{M} nel piano complesso formato dai punti $c \in \mathbb{Z}$ che definiscono insiemi di Julia connessi (7.2). Per visualizzare l'insieme si sfrutta il fatto che, un insieme di Julia è connesso, se contiene l'origine. In altre parole, per capire se \mathbb{J}_c è connesso, basterà osservare il comportamento della sequenza data dal polinomio (20) per $z_0 = 0$. L'insieme di Mandelbrot sarà definito in questo modo:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases} \quad (21)$$

$$c \in \mathbb{M} \iff \lim_{z \rightarrow \infty} |z_n| \leq 2 \quad (22)$$

Come per gli insiemi di Julia, si può utilizzare l'indice del primo termine che supera la soglia di divergenza, per aggiungere tonalità e colori.



Figure 37: Zoom nell'insieme di Mandelbrot.

L'insieme di Mandelbrot è a volte descritto come un *aggregatore* di insiemi di Julia. Questo perchè, ingrandendo il contorno dell'insieme di Mandelbrot in prossimità di un numero complesso q , si potranno trovare versioni distorte dell'insieme di Julia definito per $z_0 = q$ (fig. 39).

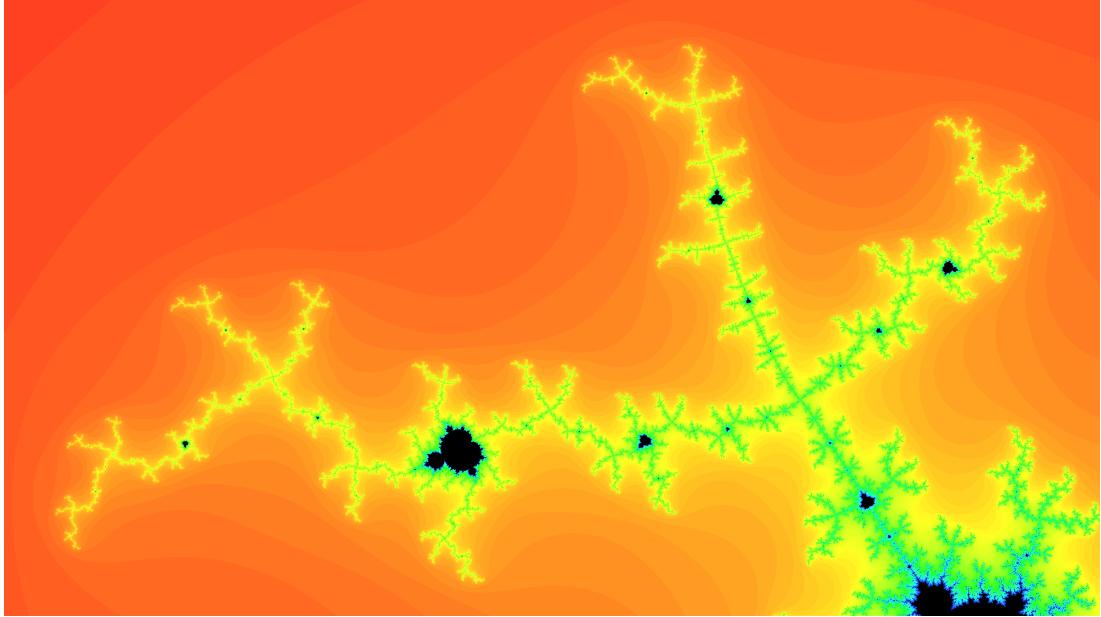


Figure 38: Autosomiglianza nell'insieme di Mandelbrot.

Gli insiemi di Julia e il frattale di Mandelbrot sono sicuramente i più conosciuti e forse più importanti tra i frattali nella dinamica complessa. Dietro questi oggetti dall'incredibile complessità si celano molti misteri che probabilmente occuperanno i matematici per i secoli a venire.

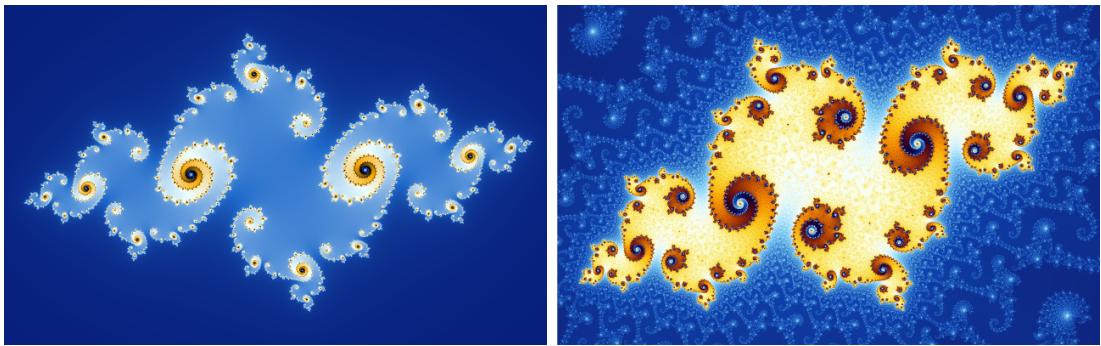


Figure 39: A sinistra, l'insieme di Julia definito per $z_0 = -0.743 + 0.132i$. A destra, un ingrandimento dell'insieme di Mandelbrot nella zona corrispondente al numero complesso che ha definito l'insieme di Julia a sinistra.

7.4 Frattale di Newton

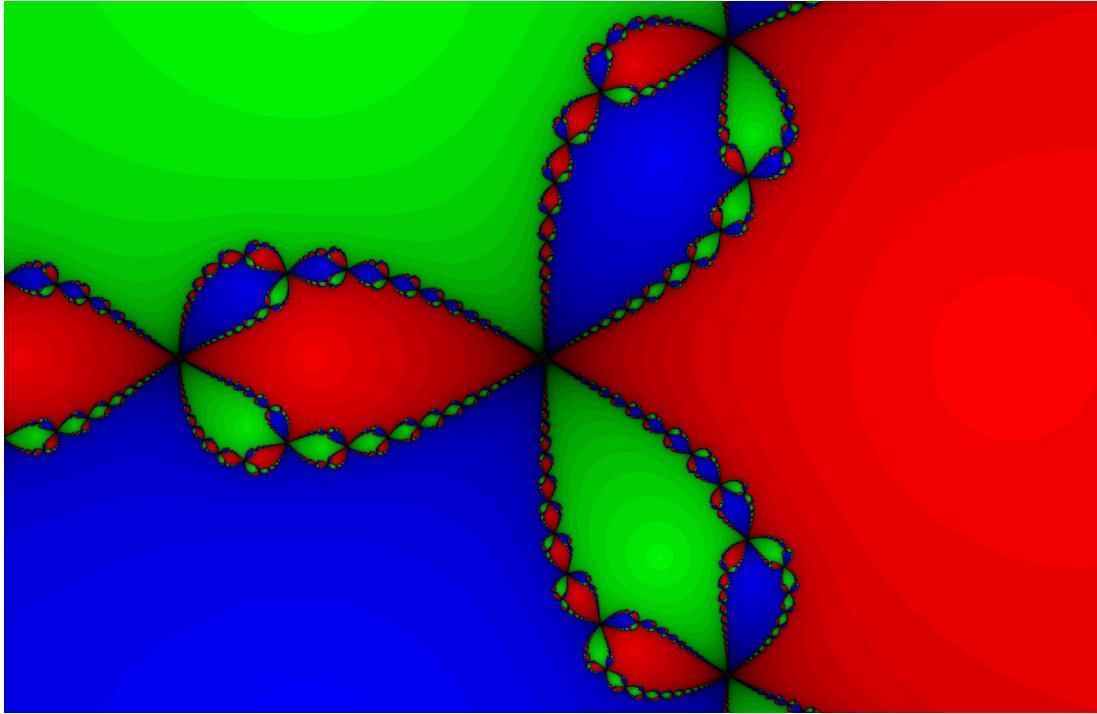


Figure 40: Frattale di Newton per $p(z) = z^3 - 1$.

Un altro frattale, forse meno noto, che deriva da funzioni a variabile complessa, è il frattale di Newton. Esso è l'estensione nei numeri complessi di una tecnica per il calcolo delle radici di funzioni polinomiali di variabile reale detto metodo di Newton. Spesso, con polinomi di grado superiore al terzo, è difficile trovare le radici in modo analitico. Il metodo di Newton è usato proprio per trovare approssimazioni di queste radici tramite l'iterazione della seguente equazione:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)} \quad (23)$$

Se si itera con un numero reale $z_0 = x$ la sequenza di numeri convergerà verso una delle soluzioni reali di $p(x) = 0$. Per esempio, volessimo calcolare $\sqrt{2}$ usando questo metodo, potremmo prendere come polinomio $p(x) = x^2 - 2$ e iterare con un valore iniziale ragionevole, ad esempio 2.

n	x	$\text{prec}(x)$
1	1.5	2
2	1.4166666666666666	1.4
3	1.4142156862745098	1.41
4	1.4142135623746899	1.41421
5	1.4142135623730950	1.41421356237

Table 2: Convergenza quadratica nel metodo di Newton.

Come si vede in tabella 2, con solo 5 iterazioni si hanno già 11 cifre di precisione. Si sarebbe potuto ottenere anche l'altra radice: $-\sqrt{2}$, ma la scelta del valore iniziale 2 ha portato a questa specifica radice. L'insieme di punti iniziali che fanno sì che il metodo porti a una specifica radice è chiamato *bacino di attrazione* di quella radice. Se si applica il metodo a funzioni polinomiali di variabile complessa, sarà possibile individuare, e quindi colorare con colori differenti, i diversi bacini di attrazione per le radici, complesse o reali, di quel dato polinomio. Se si prende, ad esempio, il polinomio $p(z) = z^3 - 1$ si deduce che vi saranno 3 bacini di attrazione, uno per ogni radice. Colorare i diversi bacini di attrazione con colori diversi (sfumati in base alla velocità di convergenza) dà come risultato l'immagine in figura 40. In rosso sono tutti i numeri complessi che fanno parte del bacino di attrazione per $z = 1$, in verde per $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e in blu per $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Il risultato di questa procedura è un bellissimo frattale. Si può applicare la stessa procedura per un qualsiasi polinomio, e ancora una volta ci si ritroverà davanti un frattale. Una ulteriore generalizzazione del metodo di Newton è la seguente:

$$z_{n+1} = z_n - a \frac{p(z_n)}{p'(z_n)} \quad (24)$$

Con $a = 1$ si ha il frattale di Newton. In figura lo stesso polinomio $p(z) = z^3 - 1$ con $a = -\frac{1}{2}$. Ancora una volta, il risultato è un frattale.

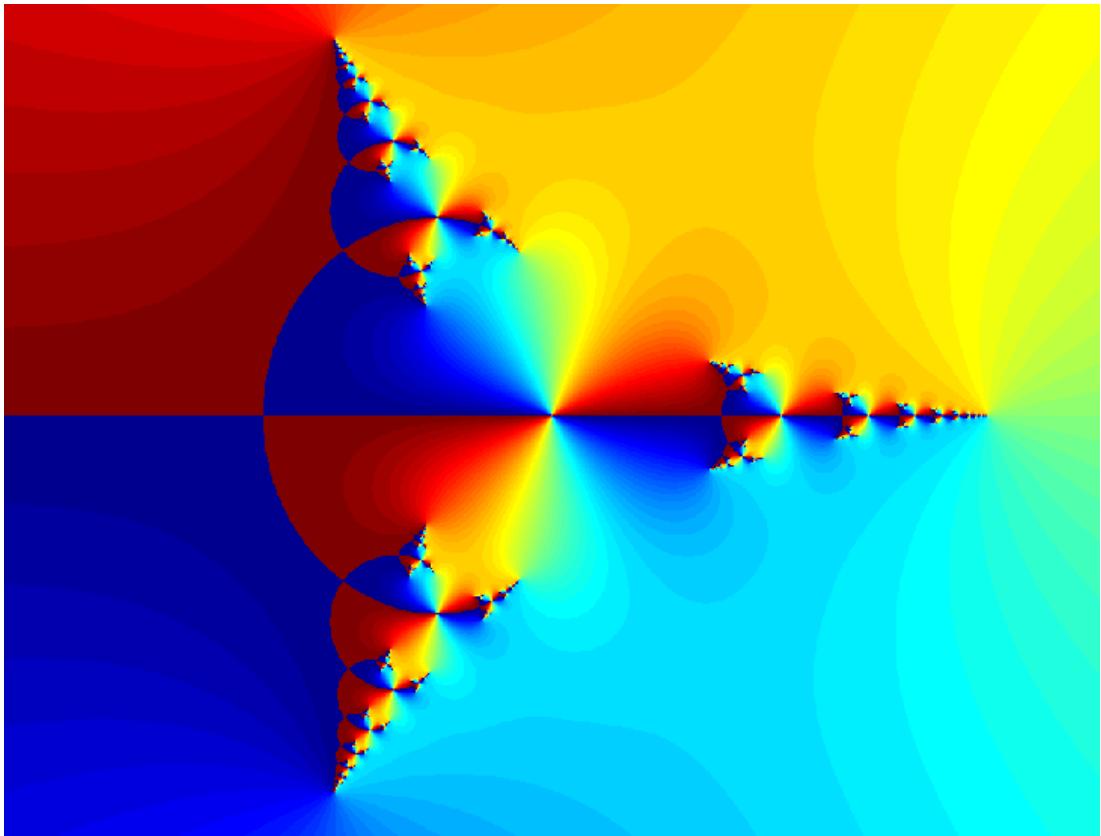


Figure 41: Frattale di Newton per $p(z) = z^3 - 1$ e $a = -\frac{1}{2}$.

8 Caos e attrattori strani

Gli attrattori strani sono i frattali che emergono dallo studio di alcuni sistemi dinamici. Il concetto di sistema dinamico ha origine nella meccanica newtoniana. Un sistema dinamico è descritto da un insieme di equazioni che determinano, dato lo stato attuale, lo stato successivo dopo un breve periodo di tempo. Risolvere il sistema significa trovare una funzione che per ogni istante di tempo, dia come risultato lo stato a quell'istante. Ciò è particolarmente difficile da fare, soprattutto per quei sistemi governati da equazioni non lineari. Solo con l'avvento dei computer è stato possibile analizzare questi sistemi, e ciò ha portato allo sviluppo della teoria del caos. I sistemi di cui si parlerà in questa sezione sono descritti da equazioni non lineari cui evoluzione è fortemente dipendente dalle condizioni iniziali. La rappresentazione dello spazio delle fasi di questi sistemi spesso da origine ad attrattori di dimensione non intera.

8.1 Mappa logistica

La mappa logistica è un esempio di come un comportamento complesso e caotico possa nascere da una semplice equazione non lineare. L'equazione della mappa logistica può essere utilizzata per modellare la numerosità di una popolazione in un ambiente con risorse limitate ed è la seguente:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (25)$$

Dove r è il rapporto tra il tasso di riproduzione e il tasso di mortalità e x_n è un numero tra 0 e 1 che rappresenta il rapporto tra la popolazione esistente e quella massima possibile. Se si prende come condizione iniziale $x_0 = 0.5$ e si itera questa semplice equazione di secondo grado con diversi valori del parametro r si trova che:

Con r tra 0 e 1, la popolazione morirà, x converge verso 0;

Con r 1 e 3, x si stabilizzerà a $\frac{r-1}{r}$;

Con r tra 3 e 3.44949, x oscillerà tra due valori;

Con r tra 3.44949 e 3.54409, x oscilla tra 4 valori, poi tra 8, 16 e così via;

Con r tra 3.54409 e 4, x alterna orbite periodiche a orbite caotiche;

Con r maggiore di 4, x diverge.

La visualizzazione di questo comportamento è chiamata mappa logistica o diagramma di biforcazione⁵ (fig. 42). Con l'aumentare del parametro si ha un continuo raddoppia-
mento del periodo fino a entrare nel regime caotico. Questo comportamento è comune a tantissimi sistemi dinamici. Se r_n è il valore del parametro r a cui avviene l' n -esima biforcazione si ha che:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{r_n - r_{n-1}} = 4.6692016091... \quad (26)$$

Per qualsiasi sistema che approccia al caos con una serie di biforcazioni. δ è la *costante di Feigenbaum* in onore di Mitchell Feigenbaum che nel 1978 dimostrò la sua universalità. In figura 43 è mostrata la relazione che c'è tra la mappa logistica e l'insieme di Mandelbrot. La mappa logistica è un frattale la cui dimensione è stata stimata essere circa 0.538.

⁵Un altro strumento frequentemente utilizzato nello studio delle biforcazioni è il diagramma a ragnatela.[1]

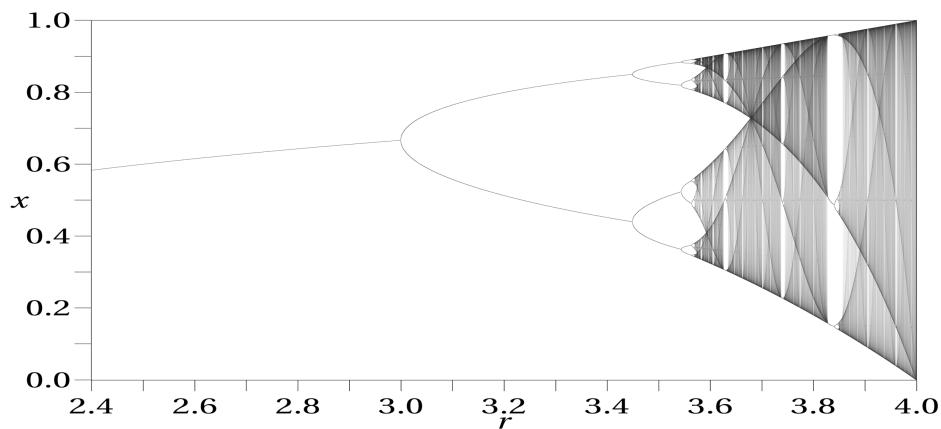


Figure 42: Mappa logistica o diagramma di biforcazione.

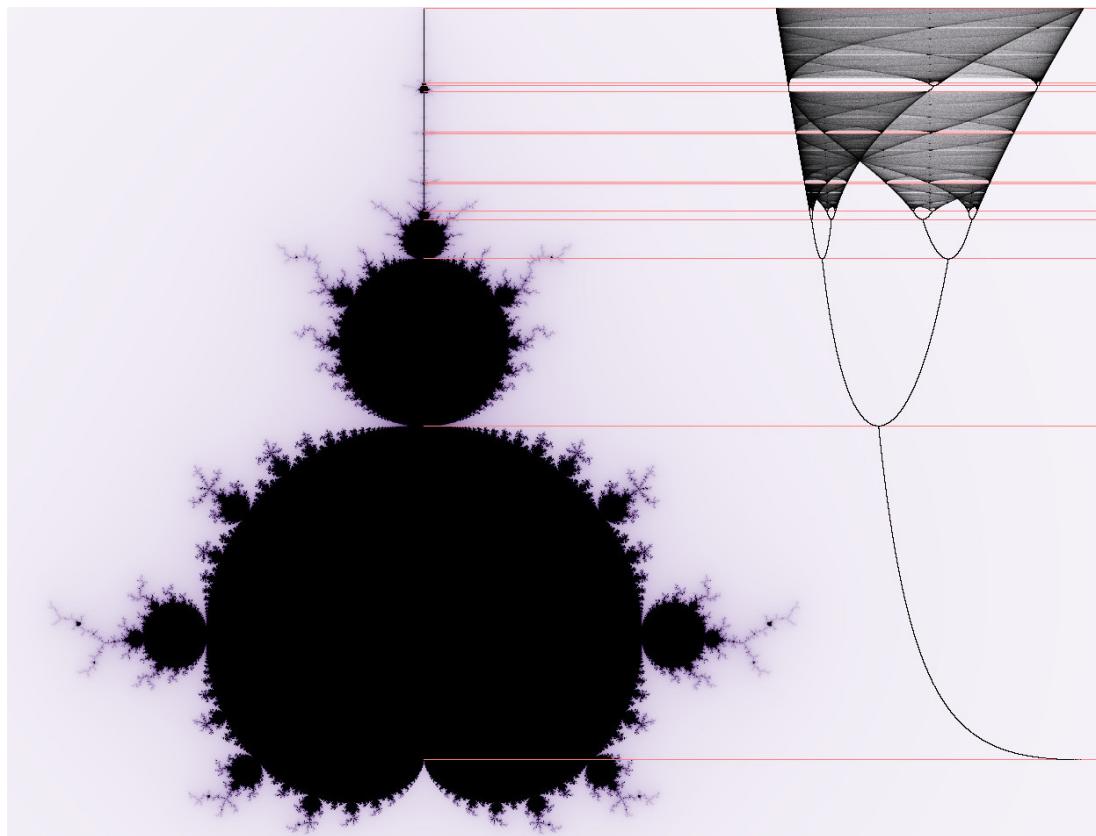


Figure 43: Il rapporto tra due cerchi consecutivi nell'insieme di Mandelbrot che si trovano sull'asse reale proseguendo da destra verso sinistra approssima la costante di Feigenbaum. Il motivo è legato alla natura, anch'essa quadratica, dell'equazione che genera l'insieme di Mandelbrot.

8.2 Attrattore di Lorenz

L'attrattore di Lorenz, scoperto dall'omonimo matematico, è uno dei simboli della teoria del caos. Durante gli anni 50 i metodi utilizzati per le previsioni meteorologiche erano basati statistici lineari; Lorenz mise in discussione questi metodi nell'articolo *Deterministic Nonperiodic Flow*, con il quale pose le basi della teoria del caos. In questo articolo affermava:

Two states differing by imperceptible amounts may eventually evolve into two considerably different states. If, then, there is any error whatever in observing the present state, and in any real system such errors seem inevitable, an acceptable prediction of an instantaneous state in the distant future may well be impossible. In view of the inevitable inaccuracy and incompleteness of weather observations, precise very-long-range forecasting would seem to be nonexistent.

Questa è la prima descrizione di ciò che è oggi noto come *effetto farfalla*. Il termine è stato utilizzato per la prima volta dallo stesso Lorenz nel 1963 nel corso di una conferenza dal titolo *Può, il batter d'ali di una farfalla in Brasile, provocare un tornado in Texas?*. Lorenz arrivò a questi risultati dopo lo studio di un particolare sistema di equazioni differenziali di primo ordine:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y - x) \quad (27)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\beta - z) - y \quad (28)$$

$$\frac{dz}{dt} = yx - \gamma z \quad (29)$$

dove x, y, z rappresentano lo stato del sistema, α, β, γ i parametri e t il tempo. Questo sistema deriva da una semplificazione delle equazioni che descrivono il movimento termico di convezione di un fluido (come l'atmosfera). Lorenz fece simulare il sistema e si accorse che differenze arbitrariamente piccole nelle condizioni iniziali portavano a risultati completamente differenti. Si può rappresentare l'evoluzione di uno stato iniziale in uno spazio tridimensionale che prende il nome di *spazio delle fasi*. Un punto (x, y, z) nel piano tridimensionale è quindi uno stato del sistema per il quale le equazioni definiscono un vettore che indica la direzione verso cui il sistema evolverà. In figura 45 è mostrato come una condizione iniziale (che si vede nella parte bassa dell'immagine) evolve nel tempo tracciando una traiettoria che è attratta da un oggetto geometrico simile a una farfalla. L'autosomiglianza dell'attrattore di Lorenz sta nelle densità delle traiettorie che lo compongono. Tra due traiettorie nell'attrattore ve ne sono infinite altre, nello stesso modo in cui tra due numeri reali vi sono infiniti numeri reali. La sua dimensione frattale è 2.06 ± 0.01 .

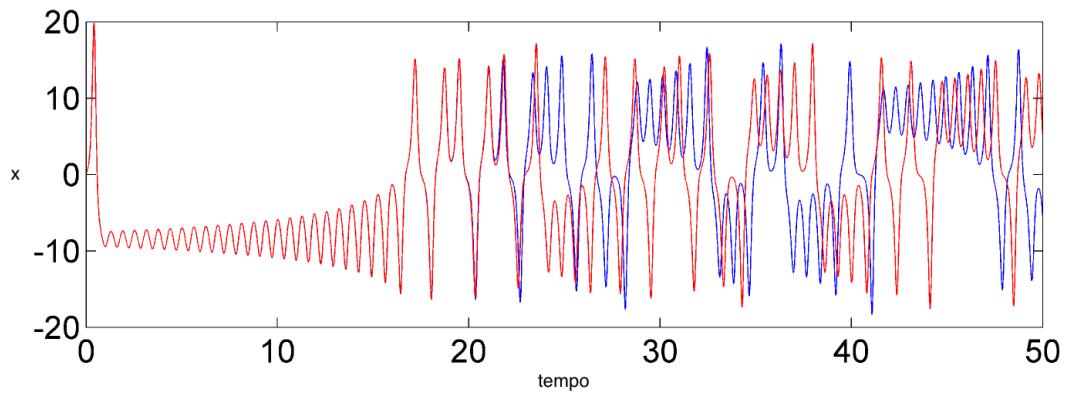


Figure 44: In figura è mostrato come la coordinata x di due orbite inizialmente vicine, si evolve in maniera completamente diversa dopo un breve periodo di tempo.

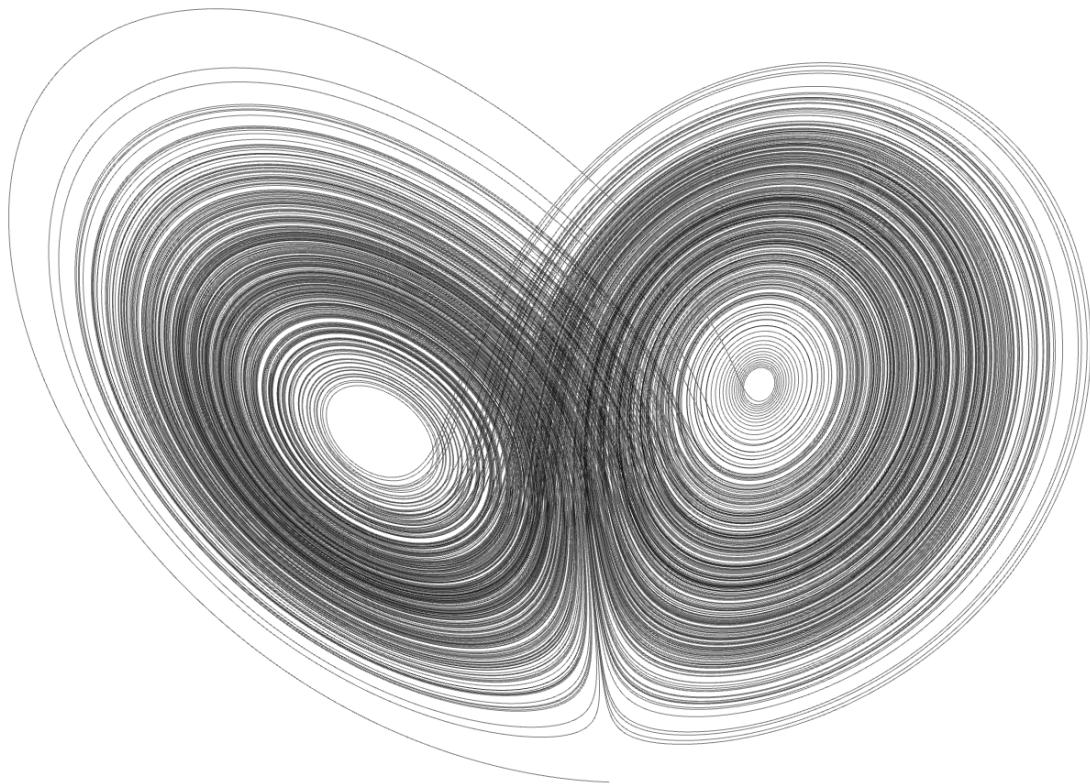


Figure 45: L'attrattore di Lorenz con parametri $\alpha = 10$, $\beta = 28$ e $\gamma = \frac{8}{3}$. La condizione iniziale si può vedere nella parte bassa dell'immagine e corrisponde al punto $(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$.

8.3 Attrattore di Rössler

L'attrattore di Rössler è stato scoperto nel 1976 da Otto Rössler e deriva da una semplificazione del sistema di Lorenz. Inizialmente nato come modello teorico, oggi è utile per modellare l'equilibrio in alcune reazioni chimiche. Il sistema dell'attrattore di Rössler è il seguente:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z \quad (30)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay \quad (31)$$

$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \quad (32)$$

Si può vedere come due delle equazioni siano lineari, invece che una come nel sistema di Lorenz. Otto Rössler studiò l'attrattore per $a = 0.2$, $b = 0.2$ e $c = 5.7$ che è mostrato in figura 46.

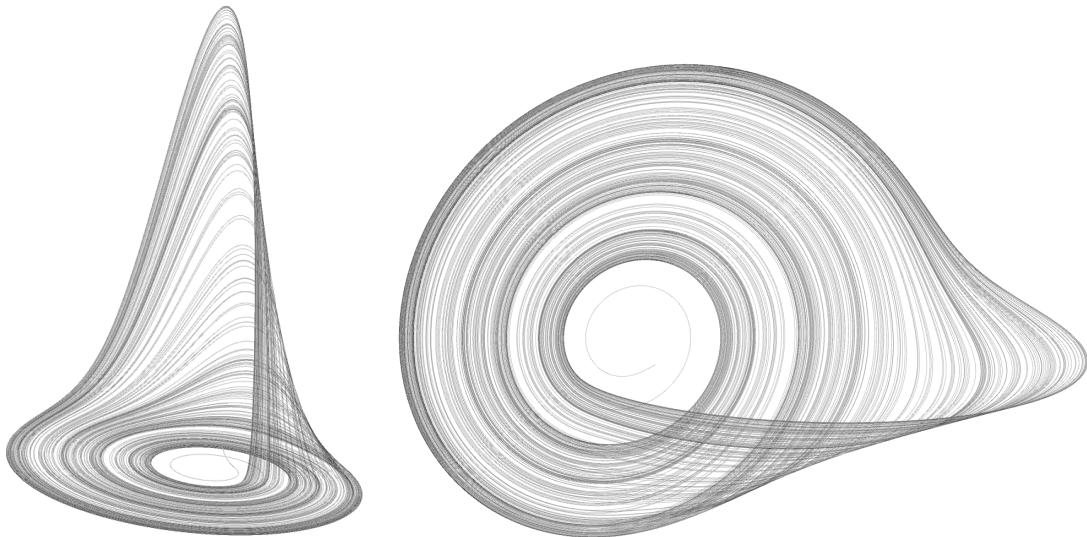


Figure 46: L'attrattore di Rössler, visto da due diverse angolazioni.

Variando il parametro c si vedrebbe un comportamento analogo a quello visto nella mappa logistica. Per valori bassi del parametro l'attrattore disegnerà una linea chiusa nello spazio di periodo 1. Aumentando il valore del parametro si avrà un raddoppiamento di periodo che porterà al regime caotico (fig. 47). Il rapporto tra i valori consecutivi di c nei punti di biforcazione è la costante di Feigenbaum. La sua dimensione frattale dell'attrattore di Rössler è 2.01 ± 0.01 .

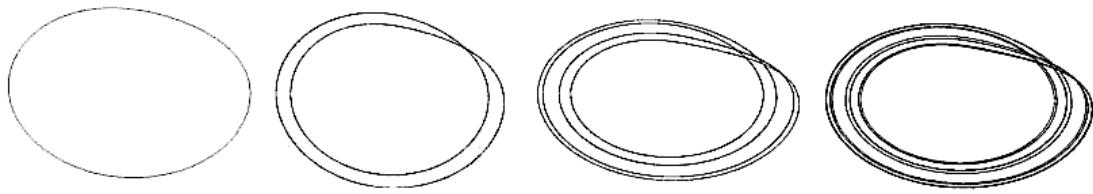


Figure 47: Raddoppiamento di periodo con l'aumentare del parametro c .

8.4 Galleria di attrattori

Seguono alcune interessanti immagini create a partire da equazioni simili a quelle sopra descritte.

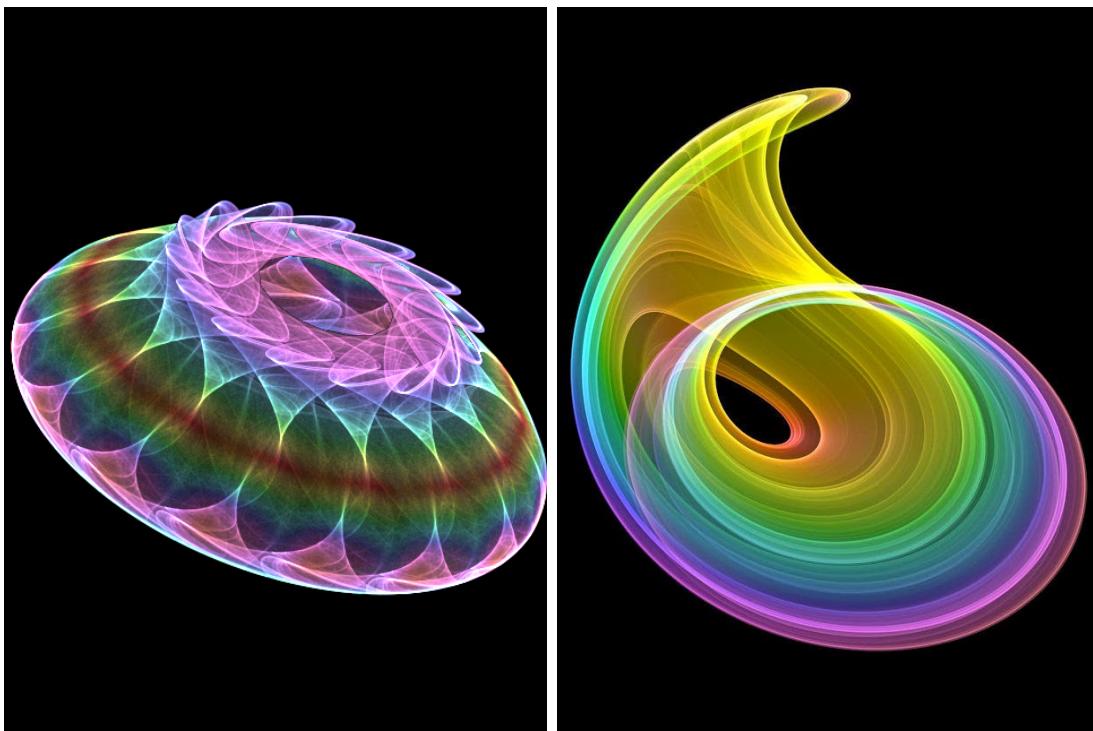


Figure 48

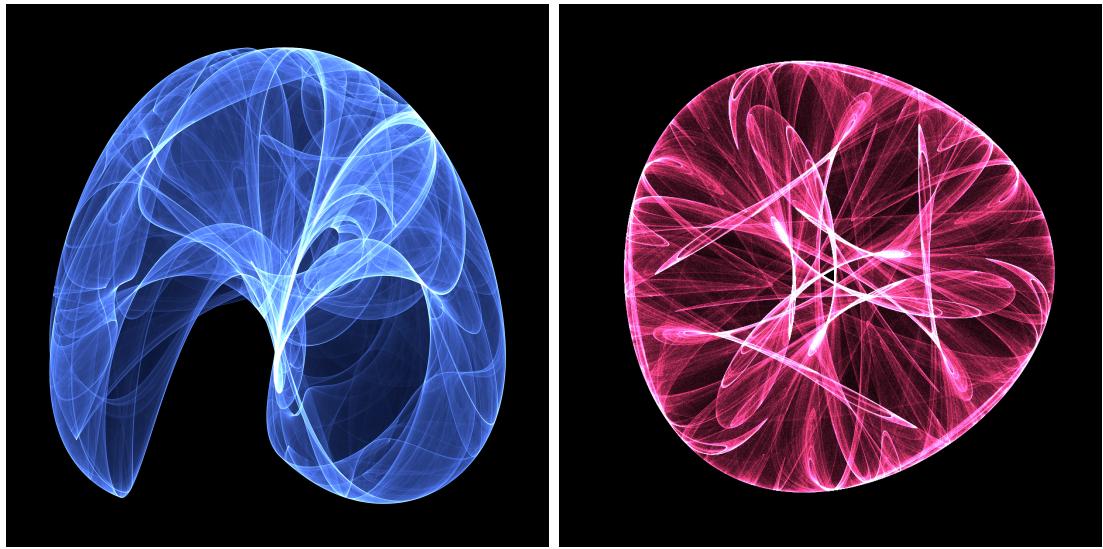


Figure 49

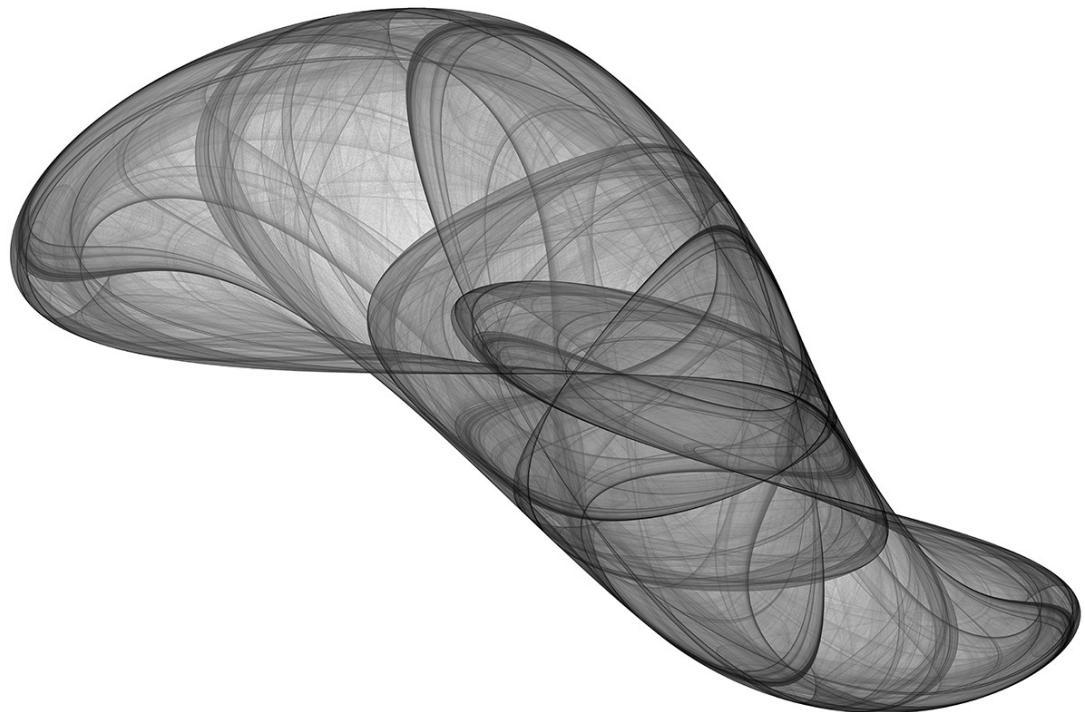


Figure 50

References

- [1] Wikipedia, the free encyclopedia. <https://en.wikipedia.org>, 2016.
- [2] Paul Bourke. Paul bourke - personal pages. <http://paulbourke.net/>.
- [3] Agnes Scott College Larry Riddle. Classic iterated function systems. <http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifs/ifs.htm>, 1998-2016.
- [4] Aristid Lindenmayer Przemyslaw Prusinkiewicz. *The Algorithmic Beauty of Plants*. Przemyslaw Prusinkiewicz, 1990.
- [5] Stanford Robert Sapolsky. Human behavioral biology. <https://www.youtube.com/playlist?list=PL848F2368C90DDC3D>.
- [6] Prof. S.Banerjee. Electrical - chaos, fractals and dynamical systems. <https://www.youtube.com/playlist?list=PL465CF583900B36A3>.
- [7] Daniel Shiffman. *The Nature of Code*. Shannon Fry, 2012.
- [8] Cornell University Steven Strogatz. Nonlinear dynamics and chaos. https://www.youtube.com/playlist?list=PLbN57C5Zdl6j_qJA-pARJnKsmR0zPn09V.