Die Hausaufgaben müssen rechtzeitig eingereicht werden. Die Korrektur ist nur notwendig, wenn die Hausaufgaben nicht bestanden wurden. Unter Korrektur dürfen keine Hausaufgaben verspätet eingereicht werden! Wenn Sie keine Hausaufgaben einreichen, wird die Übung als nicht bestanden gewertet! Sie erhalten für jede Übung von einem Tutor einen Laufzettel, der ihre Ergebnisse dokumentiert.	Abgabe **Hausaufgaben** bis: **Mo, 21.06.2021** 19:00 Uhr (MESZ) Abgabe **Korrektur** bis: **Mo, 05.07.2021** 19:00 Uhr (MESZ)

Technische Mechanik IV, SS 2021
Übungsblatt 5

Thema: **Prinzip von d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung**

Formelsammlung:

Prinzip: $\boxed{\delta W = 0}$

„Die Bewegung verläuft so, dass stets die insgesamt am System geleistete virtuelle Arbeit verschwindet."

Virtuelle Arbeit: $\boxed{\delta W = \delta W_e + \delta W_T = 0}$

δW_e – gesamte virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte
δW_T – gesamte virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

$$\boxed{\sum_{(i)} \left\{ \left(\underset{\sim}{F}_{e,i} + \underset{\sim}{F}_{T,i} \right) \cdot \delta \underset{\sim}{r}_{S,i} + \left(\underset{\sim}{M}_{e,i} + \underset{\sim}{M}_{T,i} \right) \cdot \delta \underset{\sim}{\varphi}_i \right\} = 0}$$

$\underset{\sim}{F}_{e,i}$ – eingeprägte Kräfte an Körper i
$\underset{\sim}{F}_{T,i}$ – Trägheitskräfte an Körper i

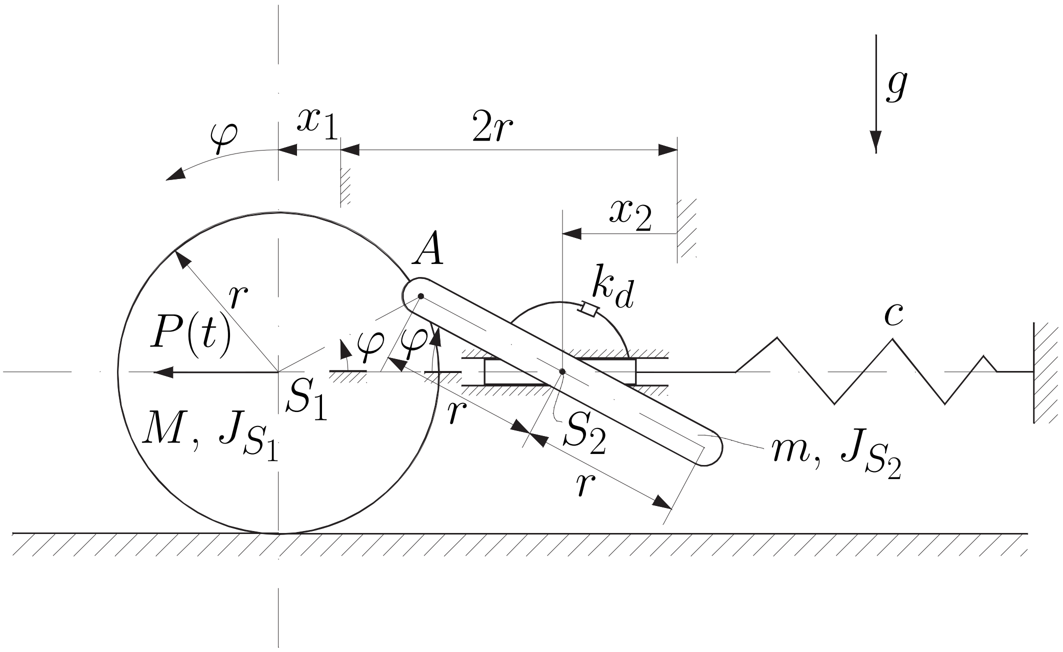
$\underset{\sim}{M}_{e,i}$ – eingeprägte Momente an Körper i
$\underset{\sim}{M}_{T,i}$ – Trägheitsmomente an Körper i (siehe z.B. TM IV, Blätter 3,4)

$\delta \underset{\sim}{r}_{S,i}$ – virtuelle Schwerpunktsverrückung von Körper i
$\delta \underset{\sim}{\varphi}_i$ – virtuelle Verdrehung von Körper i

Anmerkungen:

- Ermittlung der virtuellen Verrückungen und Verdrehungen durch Berechnung des entsprechenden totalen Differentials mit $\mathrm{d}t = 0$.
- Zwangskräfte und -momente leisten in der Summe keine virtuelle Arbeit am System. Die tatsächliche mechanische Arbeit muss i.A. nicht verschwinden.
- Nach Ermittlung der Bewegung können die Zwangskräfte und -momente durch Einsetzen in das Prinzip von d'Alembert nachträglich berechnet werden.

Aufgabe TMIV-05/03



Das gezeichnete System besteht aus einer Walze der Masse M mit der auf den Schwerpunkt S_1 bezogenen Drehmasse $J_{S1} = \frac{M}{2}r^2$ und aus einer Stange der Masse m mit der Drehmasse $J_{S2} = \frac{m}{3}r^2$ bezüglich des Schwerpunktes S_2. Die Stange ist in S_2 reibungsfrei horizontal geführt und in A mit der Walze reibungsfrei gelenkig verbunden. Die in S_2 angreifende, fest mit der Umgebung verbundene Schraubenfeder mit der Federkonstanten c ist für $x_2 = 0$ spannungslos. Der Dämpfer mit der Dämpfungskonstanten k_d arbeitet winkelgeschwindigkeitsproportional ($k_d\dot{\varphi}$). Eine in S_1 angreifende Kraft $P(t)$ regt das System zu Schwingungen an, wobei die Walze stets auf der Unterlage abrollen soll. Für die horizontale Lage des Stabes gelte

$$x_1(\varphi = 0) = x_2(\varphi = 0) = 0 \ .$$

1. Schneiden Sie das System als Ganzes von seiner Umgebung frei und bringen Sie in einer allgemeinen Lage sämtliche Kräfte und Momente einschließlich der Trägheitswirkungen an.

2. Berechnen Sie die virtuelle Arbeit δW, die am System verrichtet wird.

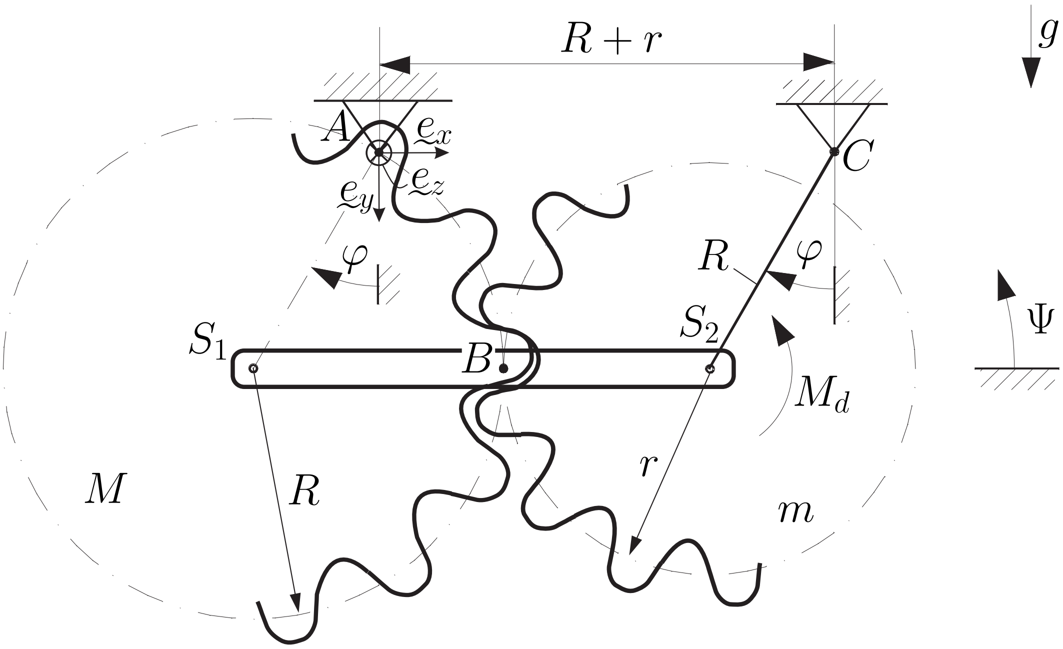
3. Ermitteln Sie über die Rollbedingung an der Walze und die geometrische Beziehung

$$2r + x_1 = x_2 + 2r\cos\varphi$$

   die Zusammenhänge $x_1(\varphi), x_2(\varphi)$ und $\dot{x}_1(\dot{\varphi})$, $\dot{x}_2(\varphi, \dot{\varphi})$, sowie die zugehörigen virtuellen Verrückungen.

4. Bestimmen Sie mit dem Prinzip von d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung die Bewegungsgleichung des Systems in φ.

5. Geben Sie für $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi} \ll 1$ die linearisierte Bewegungsgleichung an.



Zwei als volle, homogene Kreisscheiben anzusehende Zahnräder mit den Massen M und m rollen im Punkt B auf ihren Teilkreisen vom Radius R bzw. r ab. Ihre Mittelpunkte S_1 und S_2 sind durch eine masselose Stange der Länge $(R+r)$ gelenkig miteinander verbunden. Das große Zahnrad ist an seinem Teilkreisumfang im Punkt A reibungsfrei pendelnd aufgehängt, das kleine Zahnrad hängt an einem masselosen Faden mit der Länge R und wird durch ein Moment M_d angetrieben.

1. Stellen Sie die Abrollgeschwindigkeit beider Räder im Punkt B auf und ermitteln Sie daraus die Beziehung zwischen $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$, $\ddot{\varphi}$ und $\ddot{\psi}$, $\delta\varphi$ und $\delta\psi$.

2. Schneiden Sie das System als Ganzes im Sinne d'Alemberts frei.

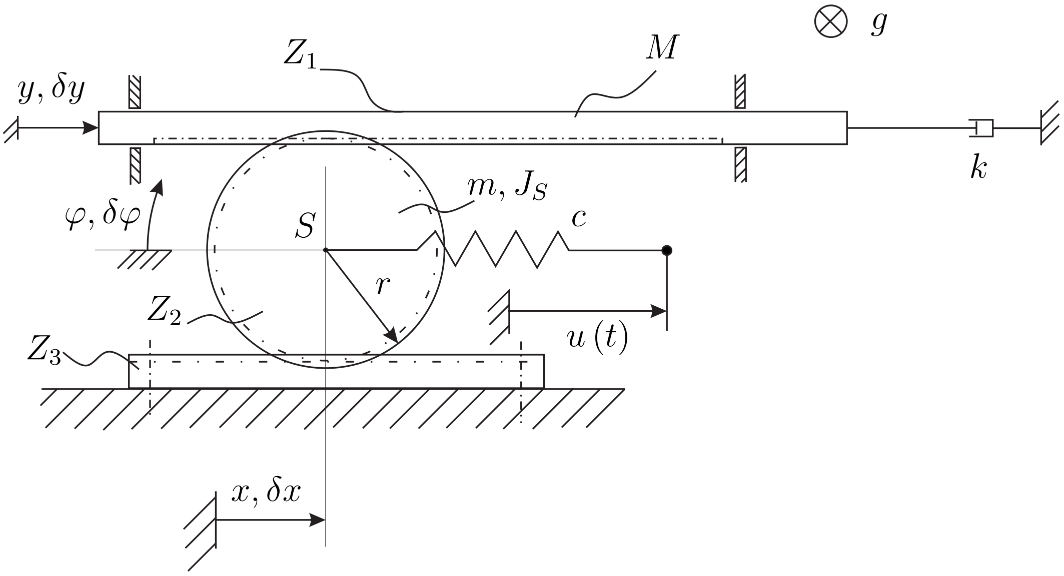
3. Ermitteln Sie mit dem Prinzip von d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung die Bewegungsgleichung des Systems in φ.

4. Geben Sie für $\varphi = \omega t$ den zeitlichen Verlauf des Antriebsmoments M_d an.

Aufgabe TMIV-05/04

— Hausaufgabe —

$T = \frac{1}{2}(M + \frac{3}{8}m)\dot{y}^2$



Das dargestellte System besteht aus einer reibungsfrei geführten Zahnstange Z_1 der Masse M sowie aus einem Zahnrad Z_2 der Masse m und der auf seinen Schwerpunkt S bezogenen Drehmasse $J_S = \frac{1}{2}mr^2$. Der Schwerpunkt S wird über eine masselose Feder c nach dem vorgegebenen Weg-Zeit-Gesetz $u(t)$ erregt. Für $u = x = y = 0$ sei die Feder spannungslos. Die Zahnstange Z_1 ist über einen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer mit der Dämpferkonstanten k mit der festen Umgebung verbunden. Das Zahnrad Z_2 soll sowohl auf der Zahnstange Z_1 als auch auf der festen Zahnstange Z_3 abrollen. Das Zahnrad hat den Radius r.

1. Schneiden Sie das System in einer allgemeinen Lage als Ganzes von seiner Umgebung frei und bringen Sie sämtliche Kräfte sowie Trägheitskräfte und -momente an.

2. Berechnen Sie die virtuelle Arbeit δW, die am System verrichtet wird.

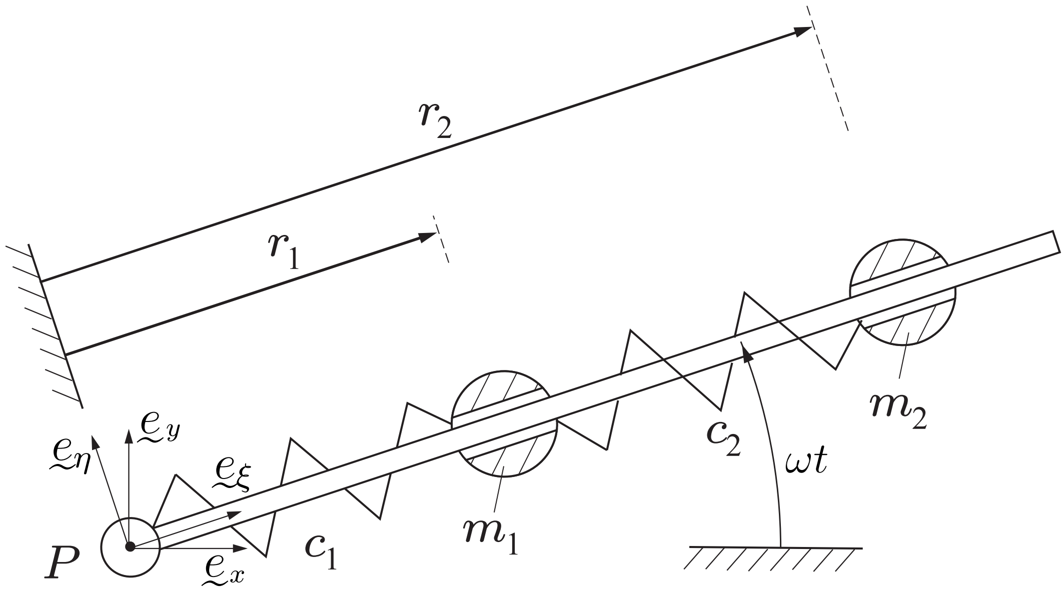
3. Ermitteln Sie den kinematischen Zusammenhang zwischen den (Winkel-)Geschwindigkeiten $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{\varphi}$ sowie zwischen den virtuellen Verschiebungen (Verdrehungen) δx, δy und $\delta\varphi$.

4. Bestimmen Sie mit dem Prinzip von d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung die Bewegungsgleichung des Systems in y.

5. Geben Sie für eine allgemeine Lage die kinetische Energie $T(\dot{y})$ und die potentielle Energie $V(y)$ an.

Aufgabe TMIV-05/11

$$-m_1\left(\ddot{r}_1 - r_1\omega^2\right) - c_1 r_1 - c_2 r_1 + c_1 r_{10} - c_2 r_{20} + c_2 r_2 = 0$$



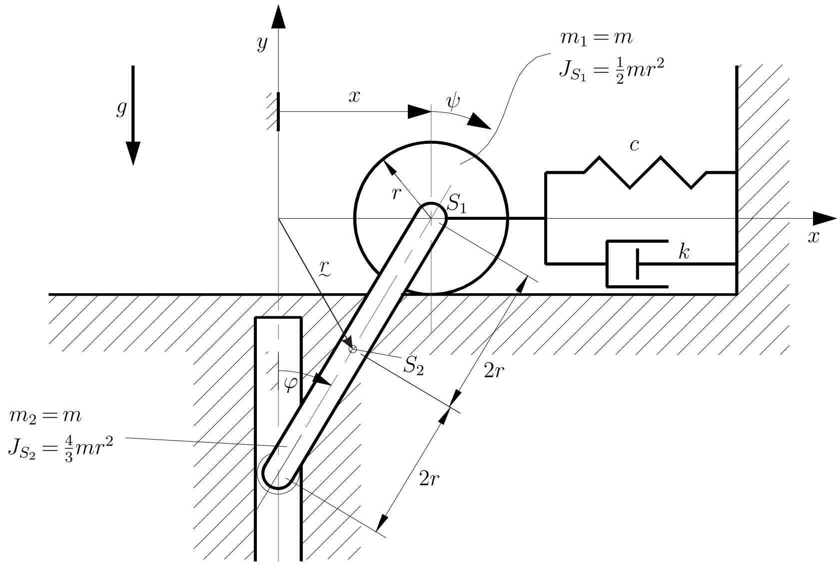
Das abgebildete System besteht aus zwei federnd gelagerten Punktmassen, die reibungsfrei auf einer mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = konst.$ geführten Schiene gleiten können. Mit dem Prinzip von d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung sind die Bewegungsgleichungen zu ermitteln.

1. Stellen Sie die Ortsvektoren zu den Massepunkten auf und bilden Sie die virtuellen Verrückungen.
2. Schneiden Sie die Massepunkte von den Federn, aber **nicht von der Stange**, frei und formulieren Sie die angreifenden Federkräfte vektoriell als Funktion der Koordinaten r_1 und r_2. Die Längen der Federn im unverformten Zustand seien r_{10} und r_{20}.
3. Berechnen Sie die virtuellen Arbeiten der Federkräfte.
4. Tragen Sie die Trägheitskräfte im Sinne d'Alemberts in das System ein und berechnen Sie die virtuellen Arbeiten der Trägheitskräfte.
5. Formulieren Sie das Prinzip von d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung für das Gesamtsystem und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab.

Aufgabe TMIV-05/02

— freiwillig —

$$3\ddot{\varphi} + 2\frac{k}{m}\dot{\varphi} + 2\frac{c}{m}\varphi = 0$$



Eine homogene Walze der Masse m_1, deren Schwerpunkt S_1 über eine Feder c und einen Dämpfer k mit der festen Umgebung verbunden ist, rollt auf einer waagerechten Unterlage ab. Ebenfalls in ihrem Schwerpunkt S_1 ist ein starrer Stab der Masse m_2 und der Länge $4r$ reibungsfrei drehbar gelagert. Das untere Ende des Stabes wird über eine masselose Rolle ohne Reibung in einer vertikalen Nut geführt. Das System bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft, die Feder ist bei $x = 0$ spannungslos. Die Bewegung der Walze wird durch die Koordinaten x und ψ, die Drehung des Stabes mit dem Winkel φ beschrieben.

1. Ermitteln Sie unter Verwendung der geometrischen Beziehung $x = 4r\sin\varphi$ den Ortsvektor $\underline{r}(\varphi)$ zum Schwerpunkt S_2 des Stabes und daraus die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\dot{\underline{r}}(\varphi, \dot{\varphi})$ sowie die Beschleunigung $\ddot{\underline{r}}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$.

2. Schneiden Sie das System als Ganzes von seiner Umgebung frei. Zeichnen Sie in einer allgemeinen Lage alle eingeprägten Kräfte, Zwangskräfte sowie die Trägheitswirkungen in einem Freischnitt ein.

3. Berechnen Sie die virtuelle Arbeit δW, die am System verrichtet wird.

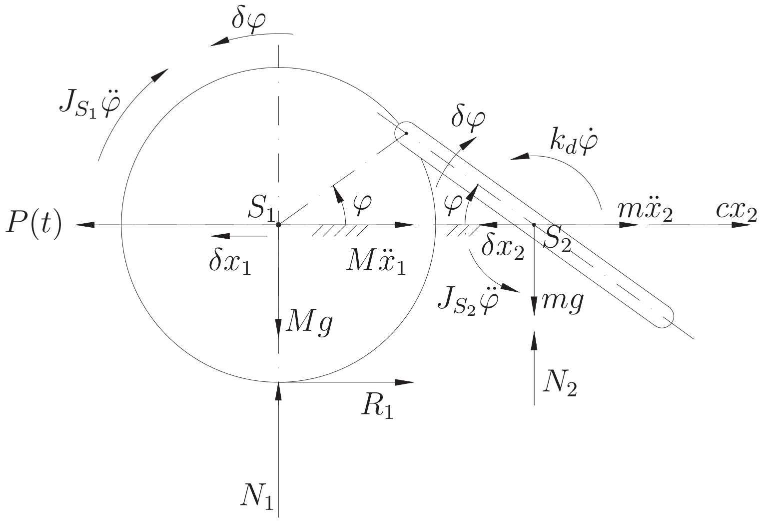
4. Bestimmen Sie die Zusammenhänge $\dot{x}(\varphi, \dot{\varphi})$, $\ddot{x}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ und $\dot{\psi}(\varphi, \dot{\varphi})$, $\ddot{\psi}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ sowie alle virtuellen Verrückungen $\delta x(\varphi, \delta\varphi)$, $\delta r_x(\varphi, \delta\varphi)$, $\delta r_y(\varphi, \delta\varphi)$ und die Verdrehung $\delta\psi(\varphi, \delta\varphi)$.

5. Bestimmen Sie unter Vernachlässigung der Masse des Stabes ($m_2 = J_{S_2} = 0$) mit dem Prinzip von d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung die Bewegungsgleichung des Systems in φ.

6. Geben Sie für $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi} \ll 1$ die linearisierte Bewegungsgleichung an.

Lösung zu Aufgabe TMIV-05/03

1. Freischneiden des Systems:



2. Virtuelle Arbeit δW:

$$\delta W = (P(t) - M\ddot{x}_1)\delta x_1 - J_{s_1}\ddot{\varphi}\delta\varphi - (J_{s_2}\ddot{\varphi} + k_d\dot{\varphi})\delta\varphi - (cx_2 + m\ddot{x}_2)\delta x_2 \qquad (1)$$

$Mg \perp \delta x_1$; $\quad N_2, mg \perp \delta x_2 \quad$: keine virtuelle Arbeit
N_1, R_1 (Rollen!) leisten keine virtuelle Arbeit

3. Zusammenhänge $x_1(\varphi), \dot{x}_1(\dot{\varphi}), x_2(\varphi), \dot{x}_2(\varphi,\dot{\varphi})$; Virtuelle Verrückungen:

Rollbedingung: $\dot{x}_1 = r\dot{\varphi}$ (2) $\quad\rightarrow\quad$ $x_1 = r\varphi$ (3), da $\quad x_1(\varphi = 0) = 0$.

Geometrie : $x_2 = 2r(1 - \cos\varphi) + x_1$ (4), mit (3): $\quad x_2 = 2r(1 - \cos\varphi) + r\varphi \qquad (5)$

$\hookrightarrow \dot{x}_2 = r\dot{\varphi}(1 + 2\sin\varphi)$ (6)

Virtuelle Verrückungen: $\quad \delta x_1 = r\delta\varphi$ (7), $\quad \delta x_2 = r\delta\varphi(1 + 2\sin\varphi)$ (8)

4. Bewegungsgleichung in φ mit Pr. v. d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung:

Prinzip: $\qquad \delta W \overset{!}{=} 0$
Aus (2): $\ddot{x}_1 = r\ddot{\varphi}$; $\qquad$ aus (6): $\ddot{x}_2 = r\ddot{\varphi}(1 + 2\sin\varphi) + 2r\dot{\varphi}^2\cos\varphi$;
Dies mit (7), (8), $\; J_{S1} = \dfrac{M}{2}r^2, \; J_{S2} = \dfrac{m}{3}r^2$ in (1), und mit $\delta\varphi \neq 0$:

$$\left[\frac{3}{2}M + m\left(\frac{1}{3} + (1 + 2\sin\varphi)^2\right)\right] r^2\ddot{\varphi}$$

$$+2mr^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi(1 + 2\sin\varphi) + k_d\dot{\varphi} + cr^2(1 + 2\sin\varphi)[2(1 - \cos\varphi) + \varphi] = rP(t) \qquad (9)$$

5. Linearisierung:

Mit $\qquad \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi} \ll 1 \qquad$ folgt: $\qquad \sin\varphi \approx \varphi, \qquad \cos\varphi \approx 1$;

Eingesetzt in (9), linearisiert: $\qquad \left[\dfrac{3}{2}M + \dfrac{4}{3}m\right] r^2\ddot{\varphi} + k_d\dot{\varphi} + cr^2\varphi = rP(t)$

Lösung zu Aufgabe TMIV-05/07

1. Kinematik: Bestimmung von $\underset{\sim}{V}_B$:

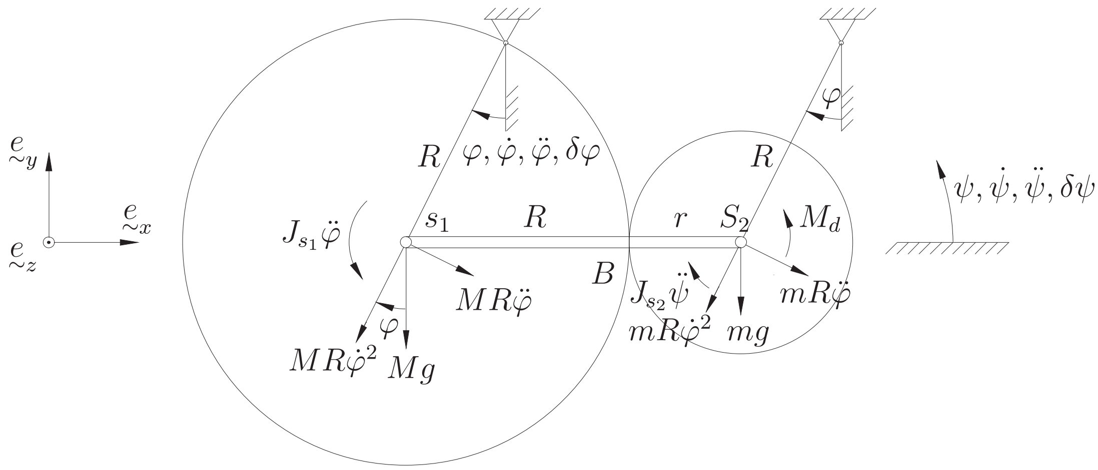
   Großes Rad: $\underset{\sim}{V}_B = \underset{\sim}{V}_{s_1} + (-\dot{\varphi}\underset{\sim}{e}_z) \times (R\underset{\sim}{e}_x) = \underset{\sim}{V}_{s_1} - R\dot{\varphi}\underset{\sim}{e}_y$

   Kleines Rad: $\underset{\sim}{V}_B = \underset{\sim}{V}_{s_2} + (\dot{\psi}\underset{\sim}{e}_z) \times (-r\underset{\sim}{e}_x) = \underset{\sim}{V}_{s_2} - r\dot{\psi}\underset{\sim}{e}_y$

   mit $\underset{\sim}{V}_B = \underset{\sim}{V}_B$ und $\underset{\sim}{V}_{s_1} = \underset{\sim}{V}_{s_2}$ folgt

   $\hookrightarrow \quad \underline{\underline{R\dot{\varphi} = r\dot{\psi}}} \quad \rightarrow \quad R\dfrac{d\varphi}{dt} = r\dfrac{d\psi}{dt} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\dfrac{R}{r}\delta\varphi = \delta\psi}}, \quad \underline{\underline{\ddot{\psi} = \dfrac{R}{r}\ddot{\varphi}}}$

2. Freischnitt nach d'Alembert



3. Prinzip von d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung:

   $\delta W = (-J_R\ddot{\varphi} - Mg\sin\varphi R - MR\ddot{\varphi}R)\delta\varphi + (-J_r\ddot{\psi} + M_d)\delta\psi + (-mg\sin\varphi R - mR\ddot{\varphi}R)\delta\varphi = 0$

   mit $\quad J_R = \dfrac{M}{2}R^2, \quad J_r = \dfrac{m}{2}r^2 \quad \rightarrow$

   $$\left[-\frac{M}{2}R^2\ddot{\varphi} - MR^2\ddot{\varphi} - \frac{m}{2}r^2\left(\frac{R}{r}\right)^2\ddot{\varphi} - mR^2\ddot{\varphi} - MgR\sin\varphi - mgR\sin\varphi + M_d\frac{R}{r}\right]\delta\varphi = 0$$

   mit $\quad \delta\varphi \neq 0: \quad \rightarrow \quad \ddot{\varphi}\left(-\dfrac{3}{2}MR^2 - \dfrac{3}{2}mR^2\right) - gR\sin\varphi(M+m) + M_d\dfrac{R}{r} = 0$

   $\hookrightarrow \quad \underline{\underline{\ddot{\varphi} + \dfrac{2}{3}\dfrac{g}{R}\sin\varphi = \dfrac{2}{3}\dfrac{M_d}{rR(M+m)}}}$

4. M_d :

   mit $\quad \varphi = \omega t, \quad \ddot{\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{M_d = (M+m)gr\sin\omega t}}$