Die Hausaufgaben müssen rechtzeitig eingereicht werden. Die Korrektur ist nur notwendig, wenn die Hausaufgaben nicht bestanden wurden. Unter Korrektur dürfen keine Hausaufgaben verspätet eingereicht werden! Wenn Sie keine Hausaufgaben einreichen, wird die Übung als nicht bestanden gewertet! Sie erhalten für jede Übung von einem Tutor einen Laufzettel, der ihre Ergebnisse dokumentiert.	Abgabe **Hausaufgaben** bis: **Mo, 28.06.2021** 19:00 Uhr (MESZ) Abgabe **Korrektur** bis: **Mo, 12.07.2021** 19:00 Uhr (MESZ)

Technische Mechanik IV, SS 2021

Übungsblatt 6

Thema: **Lagrangesche Gleichungen I. Art für Massenpunkte**
Lagrangsche Gleichungen II. Art für ebene Scheibenbewegungen

Formelsammlung:

I. Lagrangesche Gleichungen I. Art

- räumliche Massenpunktbewegung, Position $\underset{\sim}{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$
- pro Massenpunkt n holonom-skleronome implizite Nebenbedingungen $\varphi_i = \varphi_i\,(x, y, z) = 0,\ i = 1 \dots n$
- maximal $n = 3$ pro Massenpunkt (Bewegung dann völlig eingeschränkt)

d'Alembertsches Prinzip: $\boxed{\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{F}_e + \underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{0}}$

Zwangskräfte durch NB: $\underset{\sim}{Z} = \sum_{i=1}^{n} \nabla\varphi_i\,\lambda_i$ mit: λ_i – proportional i-ter Zwangskraft (skalar)
$\nabla\varphi_i$ – Richtung i-te Zwangskraft (vektoriell)
$\nabla\varphi_i = \mathrm{grad}\,(\varphi_i) = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\underset{\sim}{e}_x + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\underset{\sim}{e}_y + \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\underset{\sim}{e}_z$

II. Lagrangesche Gleichungen II. Art

Lagrangesche Gleichungen: $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i}$ $\quad i = 1, 2, \dots, f$

mit kinetischem Potential: $\boxed{L = T - V}$

und

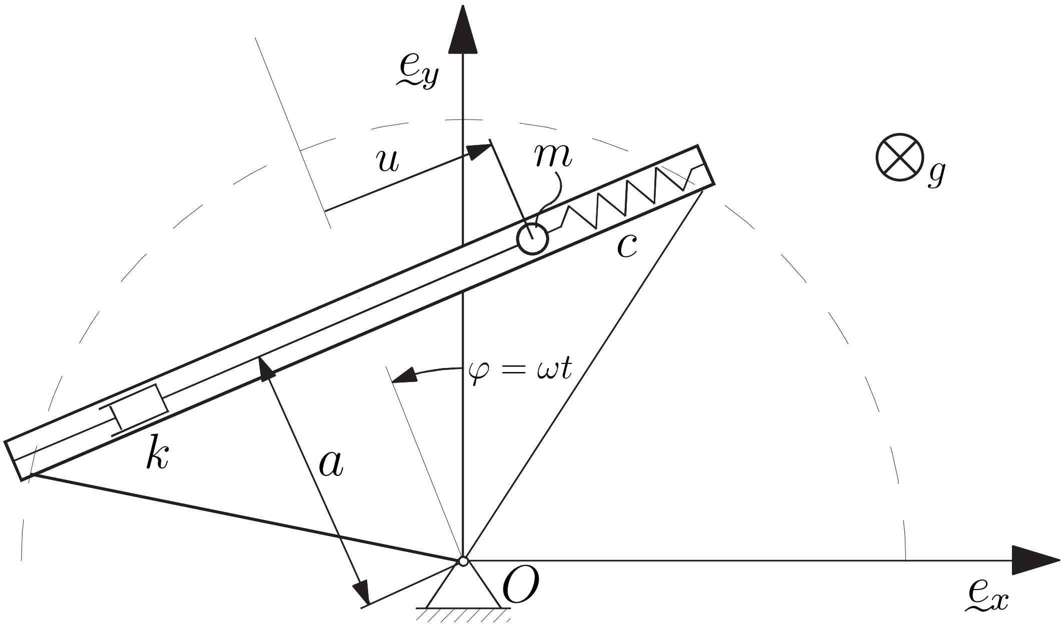
f – Anzahl der Freiheitsgrade des Gesamtsystems
q_i – i-te generalisierte Koordinate (Winkel, Weg, ...)
$\dot{q}_i$ – i-te generalisierte Geschwindigkeit
$T = T\left(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t\right)$ – kinetische Energie (vollständig! siehe Blatt TM IV, Blatt 4)
$V = V\left(\underset{\sim}{q}, t\right)$ – potentielle Energie
$Q_i = Q_i\left(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t\right)$ – generalisierte Kraft (auch Moment) zu i-ter gen. Koordinate

Bestimmung der generalisierten Kräfte Q_i: $\boxed{\delta W = \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{F}_j \cdot \delta\underset{\sim}{r}_j + \sum_{k=1}^{m} M_k\,\delta\varphi_k \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{f} Q_i\,\delta q_i}$ mit: $\delta\underset{\sim}{r}_j = \sum_{(i)} \frac{\partial \underset{\sim}{r}_j}{\partial q_i}\,\delta q_i$

$\delta\varphi_k = \sum_{(i)} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i}\,\delta q_i$

δW – virtuelle Arbeit der nicht in V berücksichtigten n potentiallosen Kräfte $\underset{\sim}{F}_j$ und m potentiallosen Momente M_k entlang ihrer virtuellen Verschiebungen und Verdrehungen (siehe TMIV Blatt 5).

Anmerkung: Ist f die Anzahl der Freiheitsgrade, so beschreiben f generalisierte Koordinaten q_i den Systemzustand vollständig. Diese können die Dimension einer Lage oder auch eines Winkels haben und sind voneinander unabhängig.



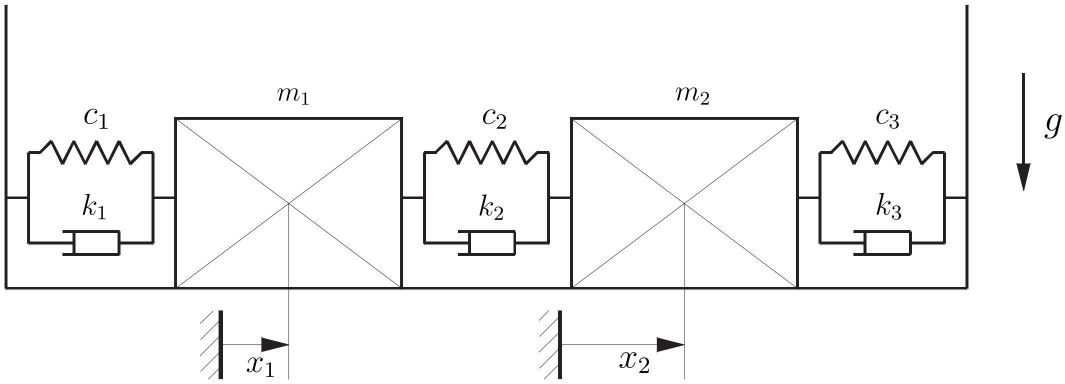
In einer masselosen Führungsschiene, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einer zum Gravitationsfeld senkrechten Ebene um den raumfesten Punkt O rotiert, kann sich ein Massenpunkt m reibungsfrei bewegen, der mit einer Feder c und einem Dämpfer k mit der Schiene verbunden ist. Feder und Dämpfer sind masselos, für $u = 0$ ist die Feder entspannt.

1. Ermitteln Sie in allgemeiner Lage den Ortsvektor $\underset{\sim}{r}$ des Massenpunktes und daraus dessen Geschwindigkeit $\underset{\sim}{v}$.

2. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen II. Art die Bewegungsgleichung des Massenpunktes in u.

Aufgabe TMIV-06/05

— Beispiel —

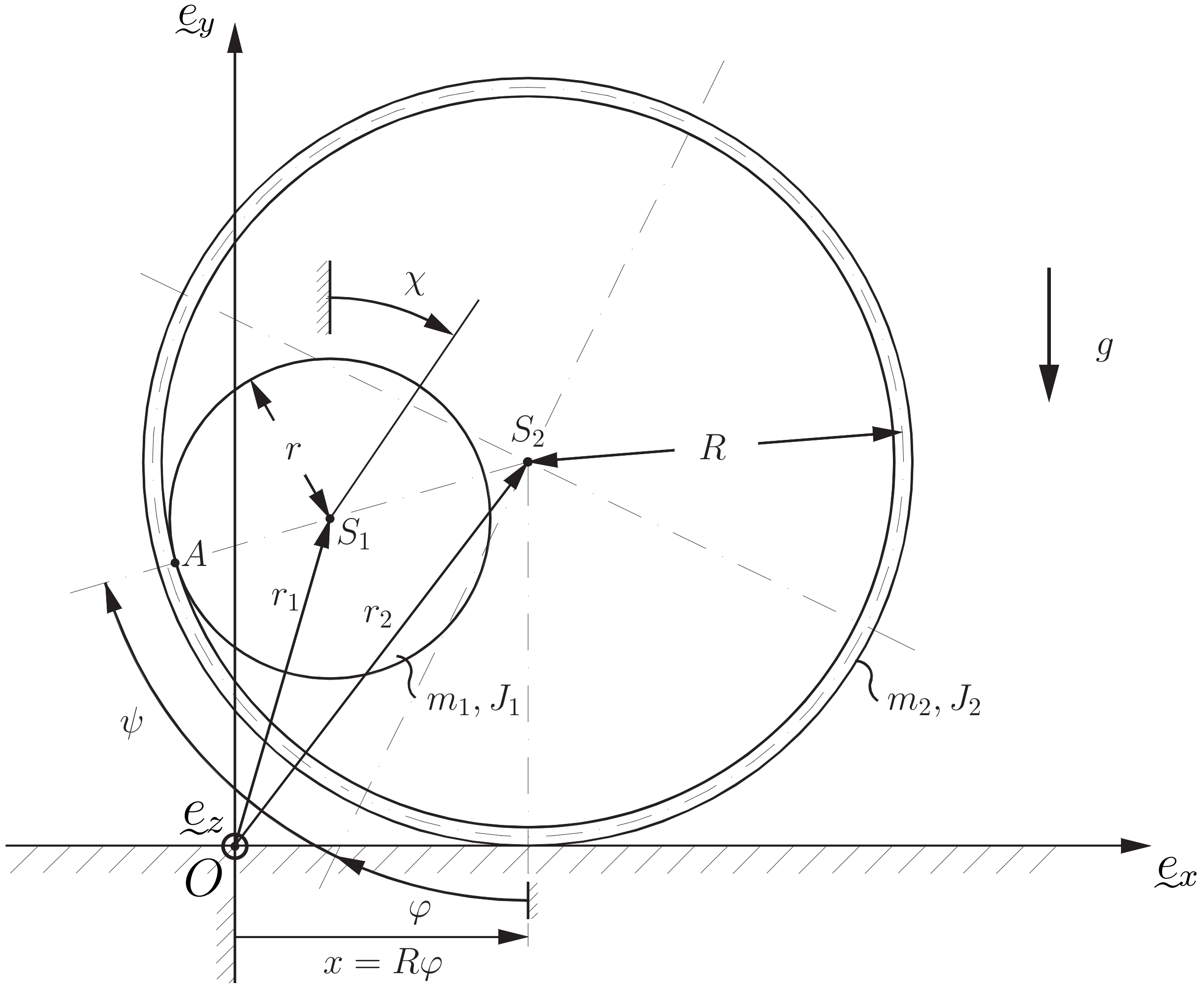


Das skizzierte Schwingungssystem besteht aus zwei Massenpunkten m_1 und m_2, drei masselosen Federn c_1, c_2 und c_3 sowie drei masselosen Dämpfern k_1, k_2 und k_3. In der Ruhelage $x_1 = x_2 = 0$ sind die Federn spannungslos. Reibungsverluste werden vernachlässigt.

Bestimmen Sie mittels der Lagrangeschen Gleichungen II. Art die Bewegungsgleichungen des Systems in x_1 und x_2.

Aufgabe TMIV-06/09

$$\left(\tfrac{3}{2}m_1 + 8m_2\right) r^2\ddot{\varphi} - \tfrac{3}{2}m_1 r^2\ddot{\psi} + m_1 g r(\varphi+\psi) = 0$$
$$\tfrac{3}{2}m_1 r^2\ddot{\psi} - \tfrac{3}{2}m_1 r^2\ddot{\varphi} + m_1 g r(\varphi+\psi) = 0$$



Auf einer horizontalen Unterlage rollt ein dünner, homogener Reif (Masse m_2, Radius R, Drehmasse $J_2 = m_2 R^2$) mit dem Drehwinkel φ. Auf seinem Innendurchmesser rollt unter dem Einfluß der Schwerkraft eine volle, homogene Walze (Masse m_1, Radius r, Drehmasse $J_1 = \frac{1}{2}m_1 r^2$), deren Schwerpunktlage durch die Relativwinkelkoordinate ψ beschrieben wird. Die Absolutdrehung der Walze betrage χ.

1. Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\underset{\sim}{r}_1$ und $\underset{\sim}{r}_2$ der Massenschwerpunkte S_1 und S_2 sowie deren Geschwindigkeiten $\dot{\underset{\sim}{r}}_1$ und $\dot{\underset{\sim}{r}}_2$ für eine allgemeine Lage des Systems.

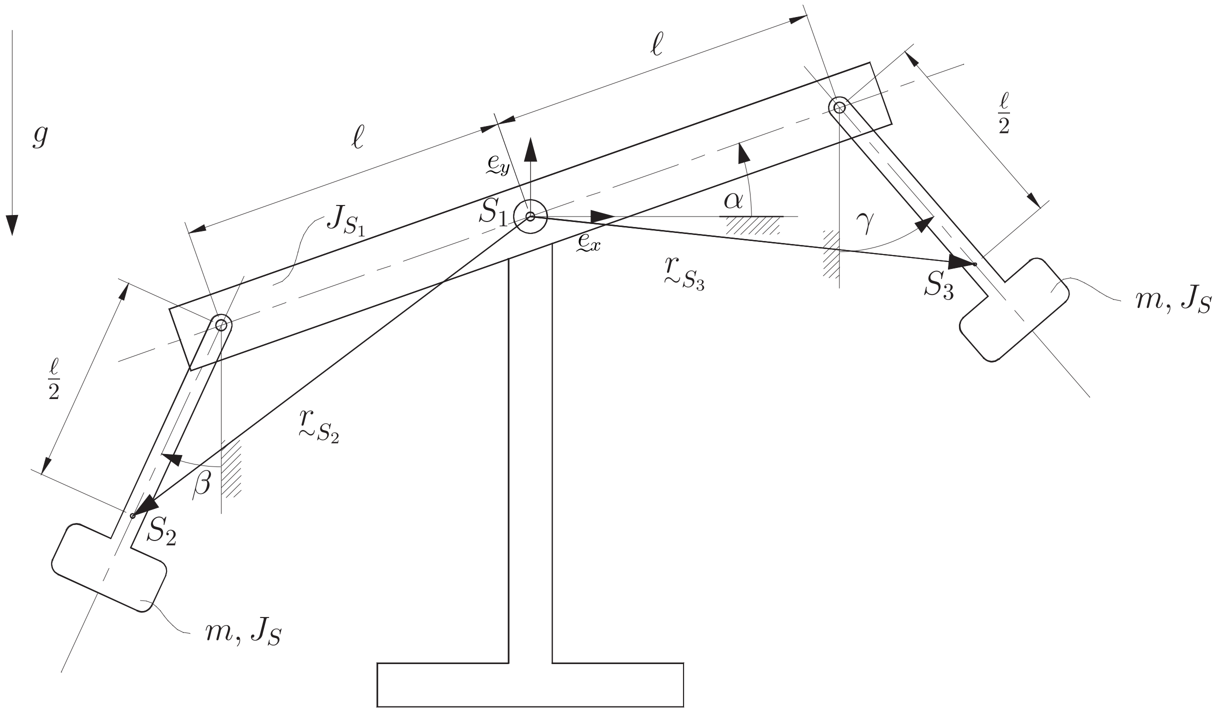
2. Bestimmen Sie mittels der kinematischen Beziehung $\dot{\chi} = \dot{\varphi} + (1 - \frac{R}{r})\dot{\psi}$ und für $R = 2r$ die kinetische Energie $T(\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \varphi, \psi)$ und die potentielle Energie $V(\varphi, \psi)$ des Systems.

3. Berechnen Sie mittels der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen des Systems.
   Hinweis: Nehmen Sie an, dass $\cos(\varphi+\psi) \approx 1 - \frac{1}{2}[\varphi+\psi]^2$ gilt und vernachlässigen Sie die Terme dritter und höherer Ordnungen.

Aufgabe TMIV-06/10

— Hausaufgabe —

$$\left(J_{S_1} + 2m\ell^2\right)\ddot{\alpha} - \tfrac{1}{2}m\ell^2\left[\ddot{\beta}\sin(\alpha+\beta) + \ddot{\gamma}\sin(\alpha-\gamma)\right] - \tfrac{1}{2}m\ell^2\left[\dot{\beta}^2\cos(\alpha+\beta) - \dot{\gamma}^2\cos(\alpha-\gamma)\right] = 0$$



Das skizzierte Dreifachpendel besteht aus einem im Schwerpunkt S_1 frei drehbar gelagerten Balken (Drehmasse J_{S_1}) an dem beidseitig eine Pendelmasse (Masse m, Drehmasse $J_S = J_{S_2} = J_{S_3}$) gelenkig befestigt ist. Der Ausschlag des Balkens gegenüber der horizontalen $\underset{\sim}{e}_x$-Richtung wird mit dem Winkel α, die Ausschläge der beiden Pendel gegen die vertikale $\underset{\sim}{e}_y$-Richtung mit den Winkeln β und γ beschrieben.

1. Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\underset{\sim}{r}_{S_2}$ und $\underset{\sim}{r}_{S_3}$ der beiden Pendelschwerpunkte S_2, S_3 und berechnen Sie daraus die Geschwindigkeiten $\underset{\sim}{v}_{S_2}$ und $\underset{\sim}{v}_{S_3}$ sowie deren Quadrate $\|\underset{\sim}{v}_{S_2}\|^2$ und $\|\underset{\sim}{v}_{S_3}\|^2$.

2. Wie lauten die kinetischen Energie T und die potentielle Energie V des Systems in allgemeiner Lage?

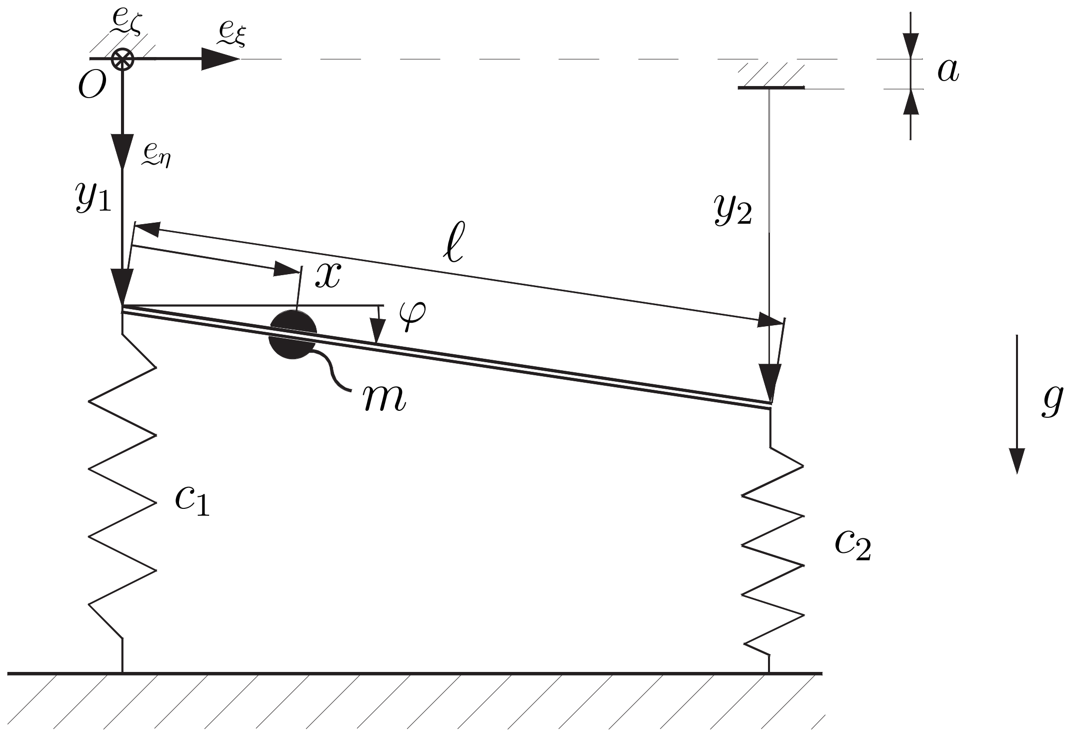
3. Ermitteln Sie über das kinetische Potential L aus den Lagrangeschen Gleichungen die drei Bewegungsgleichungen des Dreifachpendels.

4. Lösen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen aus 3. mit Hilfe von MAPLE. Vergleichen Sie die Winkel β und γ während der Zeit $t = 0\ldots 40\,\mathrm{s}$ in einem Diagramm. Verwenden Sie die Anfangsbedingungen (ABn) $\alpha(0) = \pi/10$, $\beta(0) = \gamma(0) = 1.2\,\mathrm{rad}$, $\dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ und folgende Parameter: $\ell = 0.1\,\mathrm{m}$, $m = 0.2\,\mathrm{kg}$, $J_{S_1} = 1.2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$, $J_S = 5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.
   Wie müsste die Bewegung aussehen, wenn die AB $\alpha(0) = 0$ gewählt wird (die übrigen ABn bleiben unverändert)? Worin besteht der wesentliche Unterschied zum oben berechneten Ergebnis?
   Hinweis: Nutzen Sie beim programmieren der Lösung in MAPLE `theta` anstatt `gamma`. Drucken Sie den vollständigen MAPLE-Code mit Diagramm aus und fügen Sie ihn der Lösung bei.

Aufgabe TMIV-06/08

— freiwillig —

$$m[\ddot{y}_1 + 2\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + x\ddot{\varphi}\cos\varphi - x\dot{\varphi}^2\sin\varphi + \ddot{x}\sin\varphi] + c_1 y_1 + c_2(y_1 + \ell\sin\varphi - a) - mg = 0$$
$$m[\ddot{x} + \ddot{y}_1\sin\varphi - x\dot{\varphi}^2 - g\sin\varphi] = 0$$
$$m[\ddot{y}_1 x\cos\varphi + \ddot{\varphi}x^2 + 2\dot{x}x\dot{\varphi} - xg\cos\varphi] + c_2(y_1 + \ell\sin\varphi - a)\ell\cos\varphi = 0$$



Ein masseloser, starrer Stab der Länge ℓ werde an seinen beiden Enden durch ebenfalls masselose Federn mit den Federkonstanten c_1 und c_2 abgestützt. Unter der Wirkung der Schwerkraft gleite die Masse m reibungsfrei entlang des Stabes. In allgemeiner Lage werden die Federauslenkungen durch y_1 bzw. y_2, die Stabneigung durch φ und die Relativkoordinate der Masse m durch x angegeben.

1. Bestimmen Sie für eine allgemeine Lage des Systems
   a) den Ortsvektor $\underset{\sim}{r}$ der Masse m sowie daraus den Betrag seiner Geschwindigkeit $v = \|\dot{\underset{\sim}{r}}\|$
   b) und die kinetische Energie $T(x, \dot{x}, \dot{y}_1, \varphi, \dot{\varphi})$ und die potentielle Energie $V(x, y_1, \varphi)$ des Systems.

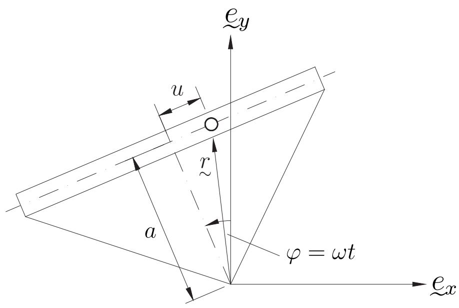
   Hinweis: Geben Sie y_2 als Funktion von x, y_1, φ und a an.

2. Stellen Sie mithilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen des Systems in x, φ und y_1 auf.

3. Linearisieren Sie für kleine Bewegungen des Systems ($x, \varphi, y_1 \ll 1$) die Bewegungsgleichungen des Systems. Sie können ebenfalls annehmen, dass die Geschwindigkeiten ($\dot{x}, \dot{\varphi}, \dot{y}_1 \ll 1$) und Beschleunigungen ($\ddot{x}, \ddot{\varphi}, \ddot{y}_1 \ll 1$) ebenfalls klein sind. Warum tritt in einer der linearisierten Gleichungen keine Trägheitskraft mehr auf?

Lösung zu Aufgabe TMIV-06/01

1.



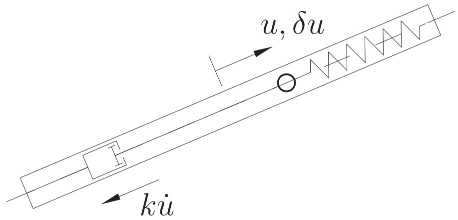
Aus der Skizze:

$$\underset{\sim}{r} = \begin{pmatrix} -a\sin\varphi + u\cos\varphi \\ a\cos\varphi + u\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{und durch Diff.:}$$

$$\underset{\sim}{v} = \begin{pmatrix} -a\dot\varphi\cos\varphi + \dot u\cos\varphi - u\dot\varphi\sin\varphi \\ -a\dot\varphi\sin\varphi + \dot u\sin\varphi + u\dot\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

oder $\underset{\sim}{v} = \begin{pmatrix} (\dot u - a\dot\varphi)\cos\varphi - u\dot\varphi\sin\varphi \\ (\dot u - a\dot\varphi)\sin\varphi + u\dot\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$

2.



Lagrange: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$

Hier: $n = 1, \quad q_1 = u \qquad T = \dfrac{m}{2}v^2$

mit $v^2 = (\dot u - a\dot\varphi)^2 + u^2\dot\varphi^2$

$\hookrightarrow \quad T = \dfrac{m}{2}[(\dot u - a\dot\varphi)^2 + u^2\dot\varphi^2]$

$$V = \frac{c}{2}u^2$$

$$\delta W = \sum_j \underset{\sim}{F}_j \cdot \delta\underset{\sim}{r}_j = Q_1\delta u; \qquad \delta W = -k\dot u\delta u \qquad \to \qquad Q_1 = -k\dot u$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m[(\dot u - a\dot\varphi)^2 + u^2\dot\varphi^2] - \frac{c}{2}u^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot u} = m(\dot u - a\dot\varphi), \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot u} = m(\ddot u - a\ddot\varphi) \quad \text{und da} \quad \dot\varphi = \omega = \text{konst.}$$

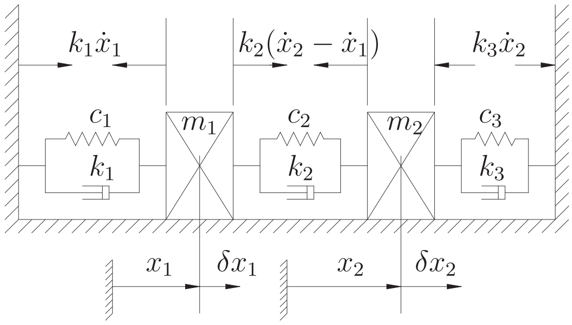
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot u} = m\ddot u$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = m\dot\varphi^2 u - cu \quad \text{und mit} \quad \dot\varphi = \omega = \text{konst.} \quad \to \quad \frac{\partial L}{\partial u} = m\omega^2 u - cu$$

$$\hookrightarrow \qquad m\ddot u - m\omega^2 u + cu = -k\dot u$$

oder geordnet: $\quad \ddot u + \dfrac{k}{m}\dot u + \dfrac{c - m\omega^2}{m}u = 0$

Lösung zu Aufgabe TMIV-06/05



Lagrange: $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$

hier: $\quad n = 2, \quad q_1 = x_1, \quad q_2 = x_2$

Annahme (z.B.): $\quad \dot{x}_2 > \dot{x}_1$

$$T = \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2 = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{c_1}{2}x_1^2 + \frac{c_2}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{c_3}{2}x_2^2$$

$$L = T - V = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{c_1}{2}x_1^2 - \frac{c_2}{2}(x_1 - x_2)^2 - \frac{c_3}{2}x_2^2$$

$$\delta W = -k_1\dot{x}_1\delta x_1 - k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(\delta x_2 - \delta x_1) - k_3\dot{x}_2\delta x_2 = Q_1\delta x_1 + Q_2\delta x_2$$

Koeff. Vergl.: $\quad Q_1 = -k_1\dot{x}_1 + k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad , \quad Q_2 = -k_3\dot{x}_2 - k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\ddot{x}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2 \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -c_1x_1 - c_2(x_1 - x_2) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -c_2(x_1 - x_2)(-1) - c_3x_2$$

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 + c_2x_1 - c_2x_2 = -k_1\dot{x}_1 + k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2x_1 + c_2x_2 + c_3x_2 = -k_3\dot{x}_2 - k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\hookrightarrow \quad \left\| \begin{array}{l} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)\dot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - k_2\dot{x}_2 - c_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)\dot{x}_2 + (c_2 + c_3)x_2 - k_2\dot{x}_1 - c_2x_1 = 0 \end{array} \right\|$$