Die Hausaufgaben müssen rechtzeitig eingereicht werden. Die Korrektur ist nur notwendig, wenn die Hausaufgaben nicht bestanden wurden. Unter Korrektur dürfen keine Hausaufgaben verspätet eingereicht werden! Wenn Sie keine Hausaufgaben einreichen, wird die Übung als nicht bestanden gewertet! Sie erhalten für jede Übung von einem Tutor einen Laufzettel, der ihre Ergebnisse dokumentiert.	Abgabe **Hausaufgaben** bis: **Mo, 07.06.2021** 19:00 Uhr (MESZ) Abgabe **Korrektur** bis: **Mo, 21.06.2021** 19:00 Uhr (MESZ)

Technische Mechanik IV, SS 2021
Übungsblatt 3

Thema: **Kreiseltheorie, Drehimpulssatz, Eulersche Kreiselgleichungen**

Formelsammlung:

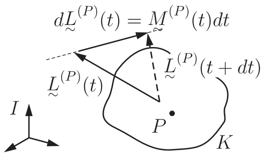
1. **Schwerpunktsatz:** $\boxed{m_{\text{ges}}\ddot{\underset{\sim}{r}}_S = \underset{\sim}{F}_{\text{ges}}}$

2. **Drehimpulssatz: allgemeine räumliche Drehung eines starren Körpers**

Drehimpuls: $\boxed{\underset{\sim}{L}^{(P)} = \Phi^{(P)}\,\underset{\sim}{\omega}}$ mit $\Phi^{(P)}$ = Trägheitstensor bzgl. P (i.A. zeitabhängig!)
$\underset{\sim}{\omega}$ = Winkelgeschwindigkeit des Körpers

Drehimpulssatz: $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\sim}{L}^{(P)} = \underset{\sim}{M}^{(P)}}$

– Bezugspunkt P hierbei entweder bewegter Schwerpunkt S oder raumfester Punkt O
– Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cdot) = \frac{{}^I\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cdot)$ bzgl. Inertialsystem I



Im mit Winkelgeschwindigkeit ${}^I\underset{\sim}{\omega}^B$ bzgl. Inertialsystem I rotierenden $\{\underset{\sim}{e}_{x'}, \underset{\sim}{e}_{y'}, \underset{\sim}{e}_{z'}\}$-Koordinatensystem B gilt die Beziehung (s. TMIII Nr. 2, Relativmechanik):

$$(*)\quad \boxed{\frac{{}^I\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\sim}{L} = \frac{{}^B\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\sim}{L} + {}^I\underset{\sim}{\omega}^B \times \underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{M}}$$

$\frac{{}^I\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ – Zeitableitung im Inertialsystem I

$\frac{{}^B\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ – Zeitableitung im rotierenden Bezugssystem B

$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}^{(P)}$ – Drehimpuls bzgl. P, $\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M}^{(P)}$ – Gesamtmoment bzgl. P

Auswertung: zweckmäßigerweise in Koordinatensystemen, in denen Trägheitsmatrix Φ konstant ist.

a) Körperfestes, mitrotierendes Koordinatensystem mit $\boxed{{}^I\underset{\sim}{\omega}^B = {}^I\underset{\sim}{\omega}^K}$:

körperfest $\rightarrow \Phi = \text{const}$;
$(*)$ im $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta, \underset{\sim}{e}_\zeta\}$-HAS liefert
Eulersche Kreiselgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} J_\xi\dot{\omega}_\xi - (J_\eta - J_\zeta)\omega_\eta\omega_\zeta &= M_\xi \\ J_\eta\dot{\omega}_\eta - (J_\zeta - J_\xi)\omega_\zeta\omega_\xi &= M_\eta \\ J_\zeta\dot{\omega}_\zeta - (J_\xi - J_\eta)\omega_\xi\omega_\eta &= M_\zeta \end{aligned}}\,,\quad \Phi = \begin{bmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix}_{\{\xi\eta\zeta\}}$$

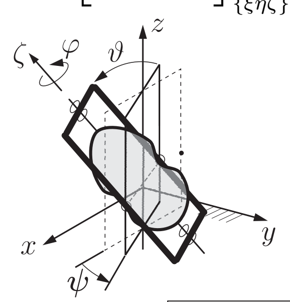
b) Nicht körperfestes, rotierendes Koordinatensystem mit: $\boxed{{}^I\underset{\sim}{\omega}^B = \underset{\sim}{\Omega} \neq {}^I\underset{\sim}{\omega}^K}$

sinnvoll bei rotationssymmetrischem Kreisel, wenn auch hier Φ zeitunabhängig.
Dann direkte Auswertung von $(*)$. Siehe bspw. 3.

3. **Rotationssymmetrische Kreisel: Euler-Winkel, Kreiselmoment**

$$\boxed{\underset{\sim}{M}_T = \left[A\dot{\varphi} + (A-B)\,\dot{\psi}\cos\vartheta\right](\underset{\sim}{e}_\varphi \times \underset{\sim}{\Omega})} \qquad \text{mit } \underset{\sim}{M}^{(P)} + \underset{\sim}{M}_T = \underset{\sim}{0} \qquad \Phi = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{\{\xi\eta\zeta\}}$$

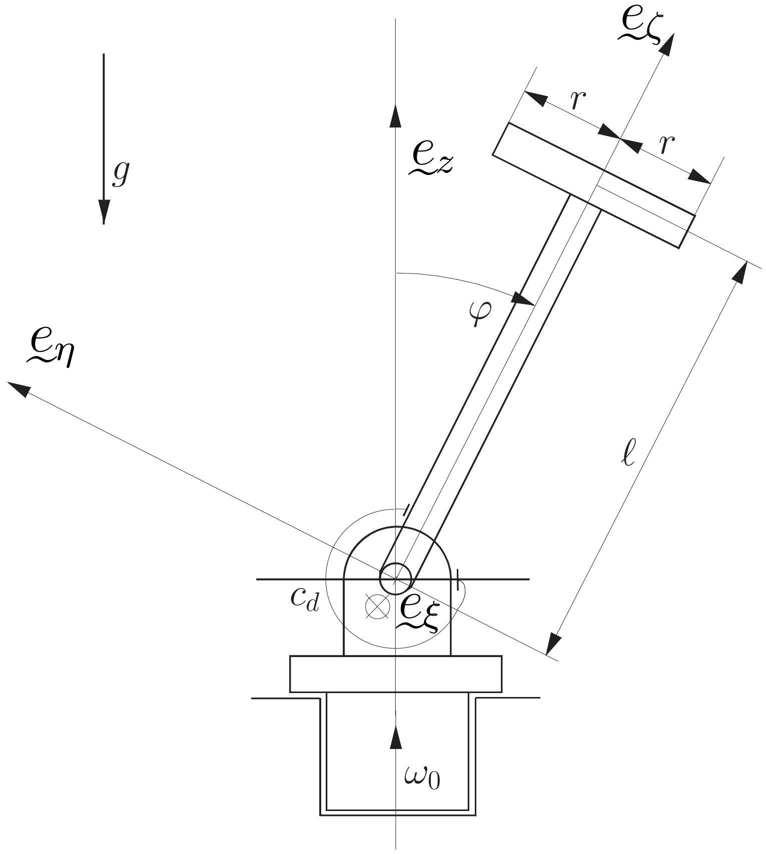
$\underset{\sim}{M}_T$	= Kreiselmoment (von Kreisel auf Umgebung bzw. im Sinne d'Alemberts als Trägheitsmoment)
$A = J_\zeta$	= Massenträgheitsmoment bzgl. Figurenachse ζ
$B = J_\xi = J_\eta$	= Massenträgheitsmomente senkrecht zur Figurenachse
$\underset{\sim}{e}_\varphi = \underset{\sim}{e}_\zeta$	= Einheitsvektor in Richtung der Figurenachse ζ
$\underset{\sim}{\Omega} = \dot{\psi}\underset{\sim}{e}_z$	= Präzessionsdrehung um raumfeste Achse z
ϑ	= Winkel zwischen Figurenachse und Präzessionsachse z
$\dot{\varphi}$	= Drehung um Figurenachse
Voraussetzung:	$\ddot{\varphi} = \ddot{\psi} = \dot{\vartheta} = 0$



Eulerwinkel $\boxed{\psi \rightarrow \vartheta \rightarrow \varphi}$

Aufgabe TMIV-03/02

— Beispiel —



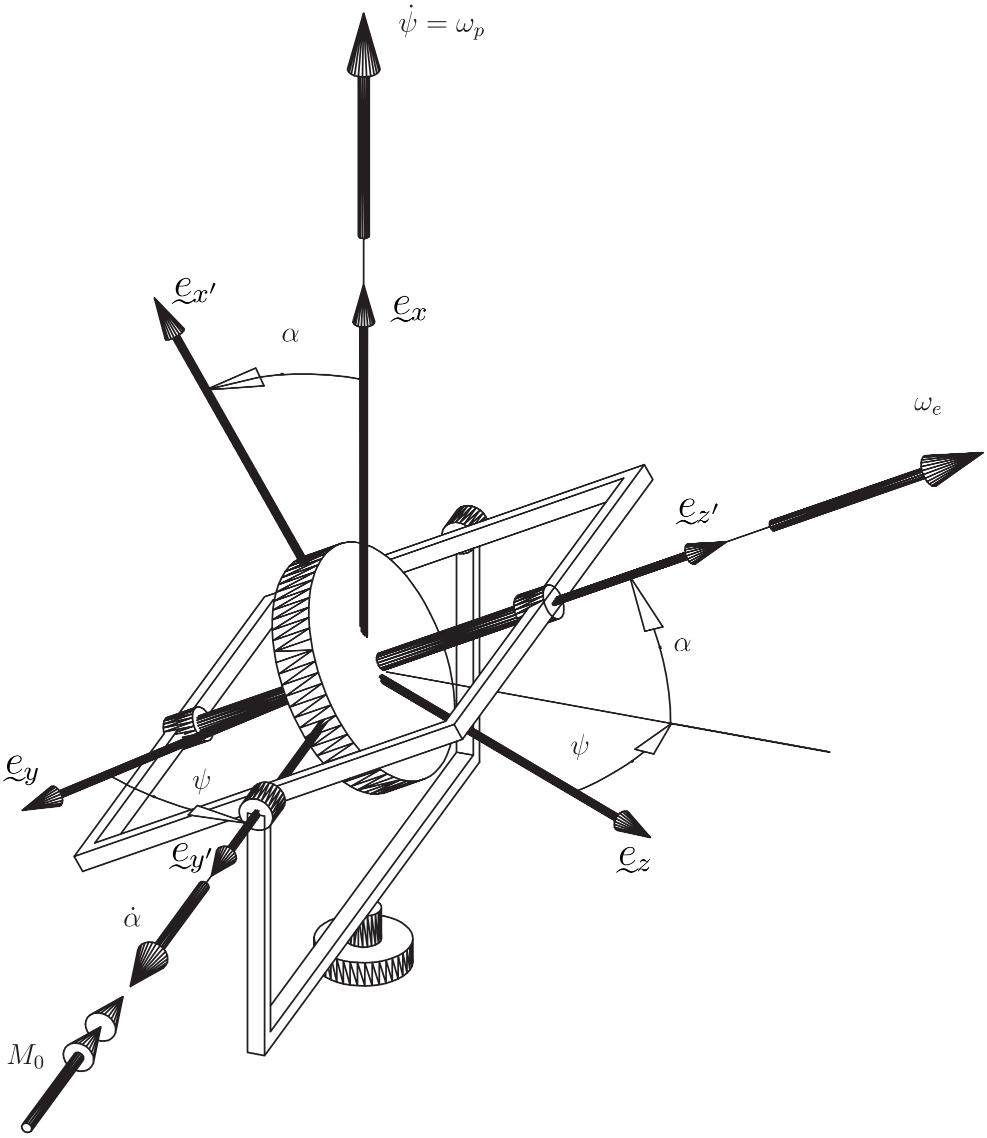
Ein Zapfen dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 um seine <u>vertikale</u> Achse $\underset{\sim}{e}_z$. In einem Drehlager des Zapfens ist ein starrer Körper reibungsfrei drehbar gelagert, der aus einer masselosen Stange der Länge ℓ und einer dünnen, homogenen Kreisscheibe der Masse m und dem Radius r besteht. Zwischen Stange und Zapfen ist eine masselose Drehfeder mit der Federkonstante c_d angebracht, die in der Lage $\varphi = 0$ spannungslos ist und die Drehbewegung φ des Körpers beeinflusst.

1. Ermitteln Sie für eine allgemeine Lage den Winkelgeschwindigkeitsvektor ${}^I\underset{\sim}{\omega}^K$ des starren Körpers in der körperfesten $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta, \underset{\sim}{e}_\zeta\}$-Basis.

2. Bestimmen Sie mit Hilfe der Eulerschen Kreiselgleichungen die Bewegungsgleichung des starren Körpers in φ, sowie die Momente M_η und M_ζ, die von außen auf den Körper einwirken.

3. Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung um die Ruhelage $\varphi = 0$.

Aufgabe TMIV-03/06



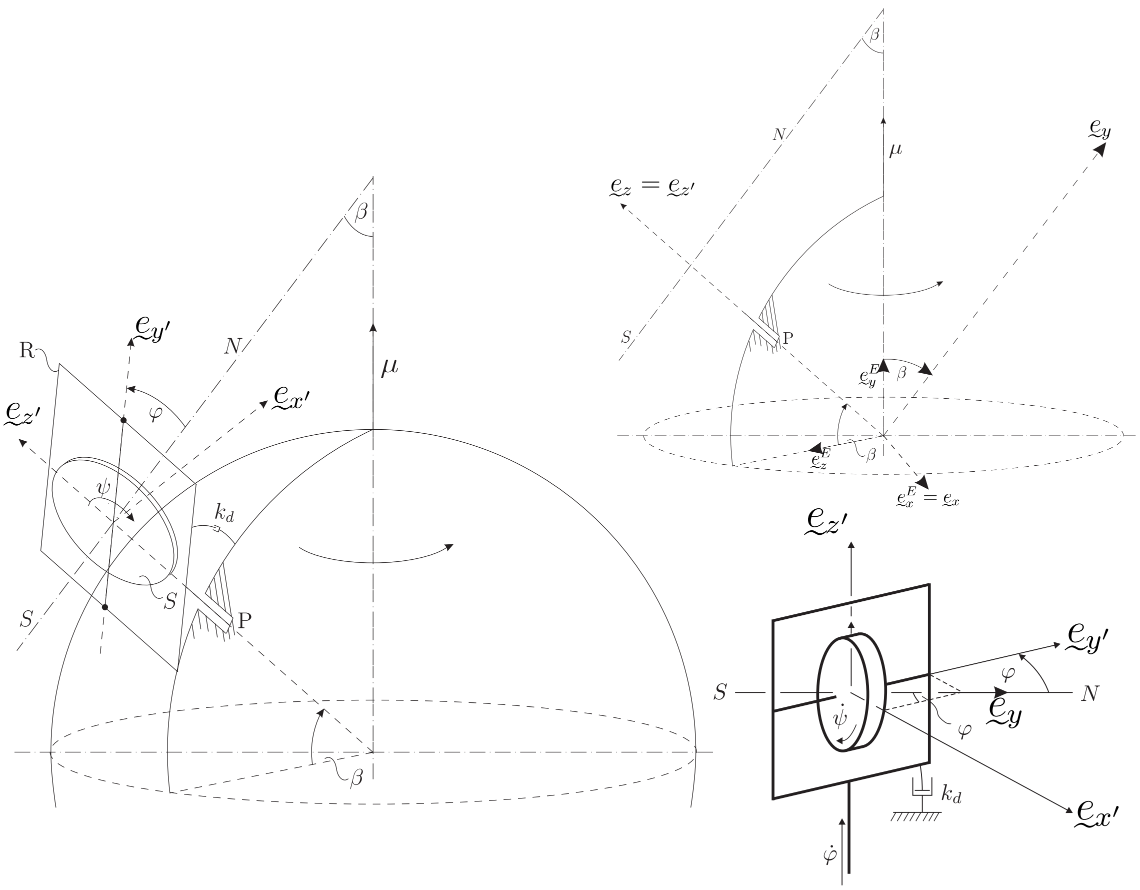
Eine kardanisch gelagerte Kreisscheibe mit den Massenträgheitsmomenten $J_{x'} = J_{y'} = B$ und $J_{z'} = A$ dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_e um ihre Figurenachse ($\underset{\sim}{e}_{z'}$–Achse). Ein konstantes äußeres Moment M_0, das immer in die negative Richtung der rahmenfesten $\underset{\sim}{e}_{y'}$–Achse zeigt, bewirkt eine Präzessionsdrehung ω_p um die $\underset{\sim}{e}_x$–Achse. Drehungen um die $\underset{\sim}{e}_{y'}$–Achse werden mit α, Drehungen um die $\underset{\sim}{e}_x$–Achse mit ψ gekennzeichnet.

1. Werten Sie den Drehimpulssatz im rahmenfesten $\{\underset{\sim}{e}_{x'}, \underset{\sim}{e}_{y'}, \underset{\sim}{e}_{z'}\}$-System aus.
2. Berechnen Sie für den Sonderfall $\alpha = 0$ die sich einstellende Präzessionswinkelgeschwindigkeit ω_p.
3. Bestimmen Sie mit dem Prinzip von d'Alembert $\underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{M}_T = \underset{\sim}{0}$ und der Formel für das Kreiselmoment $\underset{\sim}{M}_T$ für diesen Sonderfall ($\alpha = 0$) erneut die Präzessionswinkelgeschwindigkeit ω_p.

Aufgabe TMIV-03/04

— zu bearbeiten —

$$\ddot{\varphi} + \mu\cos\beta[\tfrac{C}{A}(\dot{\psi} + \mu\cos\beta) - \mu\cos\beta]\varphi + \tfrac{k_d}{A}\dot{\varphi} = 0$$



Der erste Kreiselkompass wurde von Foucault entwickelt und ist in der obigen Skizze dargestellt. Er besteht aus einer reibungsfrei drehbar gelagerten mit $\dot{\underset{\sim}{\psi}} = \dot{\psi}\underset{\sim}{e}_{y'}$ schnell rotierenden Scheibe S (Massenträgheitsmomente $J_{y'} = C, J_{x'} = J_{z'} = A$) und einem Kreiselrahmen R. Der Kreiselrahmen ist an einem festen Punkt P der Erde, dessen Breitengrad durch den Winkel β gegeben ist, frei drehbar aufgestellt. Die Erddrehung wird durch die konstante Winkelgeschwindigkeit μ um die $\underset{\sim}{e}_y^E$-Achse beschrieben. Der Kreiselrahmen wird nach einer Anfangsauslenkung durch die Kreiselwirkung zu Drehschwingungen angeregt, die durch den Winkel φ zwischen der Nord-Süd-Achse ($\underset{\sim}{e}_y$-Achse) und der y'-Achse beschrieben wird. Infolge des kreisförmig gebogenen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfers der Dämpferkonstante k_d klingt die Drehschwingung mit der Zeit ab.

1. Ermitteln Sie die Winkelgeschwindigkeiten ${}^I\underset{\sim}{\omega}^S$der Scheibe und ${}^I\underset{\sim}{\omega}^R$ des Rahmens im mitbewegten $\{\underset{\sim}{e}_{x'}, \underset{\sim}{e}_{y'}, \underset{\sim}{e}_{z'}\}$-System.

2. Geben Sie das auf den Kreisel wirkende äußere Moment $\underset{\sim}{M}$ und den Drehimpuls $\underset{\sim}{L}$ an.

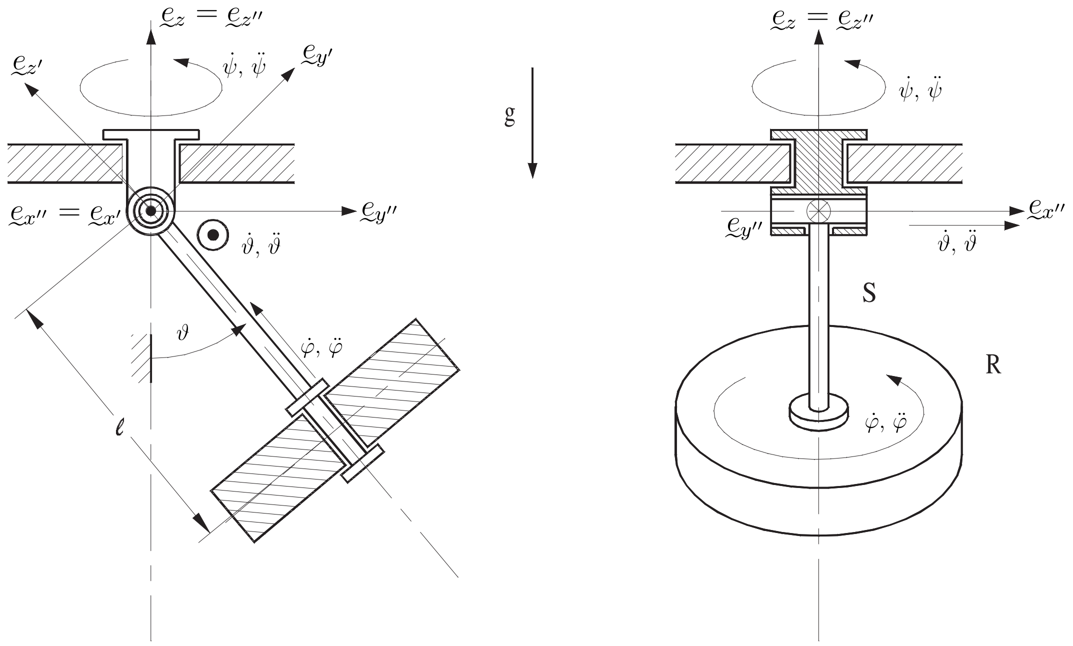
3. Stellen Sie mit Hilfe des Drehimpulssatzes die Bewegungsgleichungen des Kreiselkompasses in den Winkelkoordinaten ψ und φ auf.

4. Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für den Kreiselrahmen für kleine Ausschläge ($\varphi \ll 1$). Warum versagt der Kreiselkompass am Nordpol ($\beta = \frac{\pi}{2}$)?

Aufgabe TMIV-03/05

— zu bearbeiten —

$$J_2\ddot{\psi}\sin\vartheta + (J_2 - J_1)\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + J_2\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - J_1\dot{\vartheta}\dot{\varphi} = M_{y''}\cos\vartheta$$



Ein masseloser Zapfen Z dreht sich frei um seine vertikale Achse $\underset{\sim}{e}_z$. In dem Zapfen ist eine masselose Stange S so gelagert, dass sie sich um die $\underset{\sim}{e}_{x'}$–Achse des stangenfesten $\{\underset{\sim}{e}_{x'}, \underset{\sim}{e}_{y'}, \underset{\sim}{e}_{z'}\}$-Systems um den Winkel ϑ drehen kann. Am Ende der Stange ist ein Rotor R der Masse m gelagert, der sich um die $\underset{\sim}{e}_{z'}$–Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ dreht.

1. Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit ${}^{I}\underset{\sim}{\omega}^{R}$ des Rotors im stangenfesten $\{\underset{\sim}{e}_{x'}, \underset{\sim}{e}_{y'}, \underset{\sim}{e}_{z'}\}$-System an.

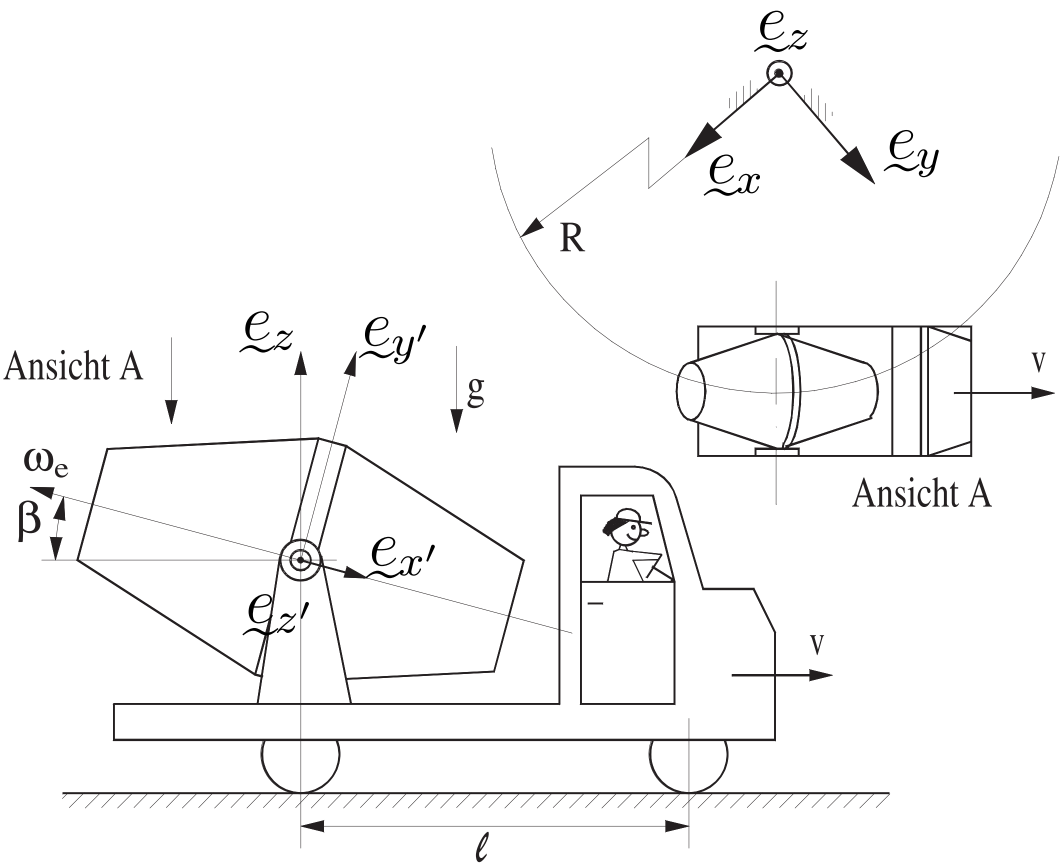
2. Schneiden den Rotor R samt Stange S im Sinne des 2. Newtonschen Axioms frei.

3. Werten Sie den Drehimpulssatz für $J_{z'} = J_1$ und $J_{x'} = J_{y'} = J_2$ im stangenfesten $\{\underset{\sim}{e}_{x'}, \underset{\sim}{e}_{y'}, \underset{\sim}{e}_{z'}\}$-System aus. Wählen Sie hierzu den raumfesten Koordinatenursprung $O = O'$ als Bezugspunkt. Ermitteln Sie für $\dot{\varphi} = \text{const}$ die beiden Bewegungsgleichungen des Systems in ψ und ϑ.

Aufgabe TMIV-03/03

— freiwillig —

$$\underset{\sim}{M}_T = -J_\xi \omega_p \cos\beta \left(\omega_e + \tfrac{1}{2}\omega_p \sin\beta\right) \underset{\sim}{e}_{z'}$$



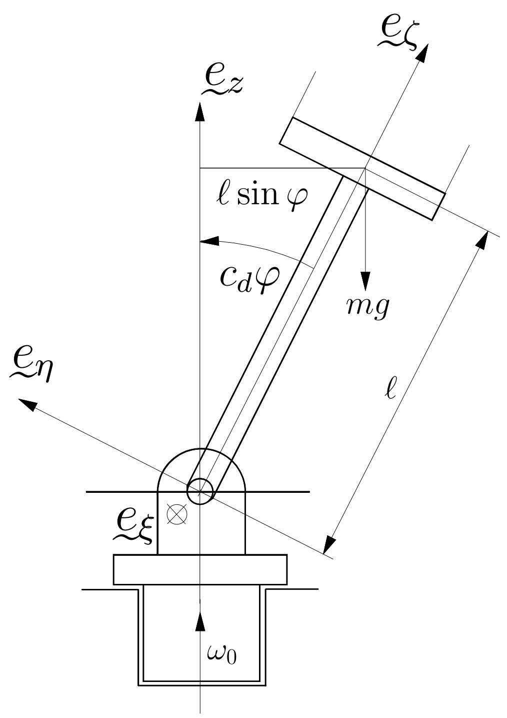
Ein Zementtransporter, dessen Mischtrommel sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_e bei einer konstanten Schrägstellung dreht, durchfährt in horizontaler Ebene eine Linkskurve vom Radius R mit der konstanten Geschwindigkeit v. Die Mischtrommel habe bezüglich ihrer körperfesten Achsen $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta, \underset{\sim}{e}_\zeta\}$ die Trägheitsmomente $J_\eta = J_\zeta = \frac{1}{2} J_\xi$.

1. Im körperfesten $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta, \underset{\sim}{e}_\zeta\}$-Koordinatensystem bestimmen Sie den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\underset{\sim}{\Omega}$. Mit Hilfe der Eulerschen Kreiselgleichungen bestimmen Sie hiermit das Moment $\underset{\sim}{M}_T$, welches bei der Kurvenfahrt durch die Trommel hervorgerufen wird.

2. Berechnen Sie $\underset{\sim}{M}_T$ mit der Gleichung für das Kreiselmoment.

3. Wie groß sind die aus diesem Kreiselmoment resultierenden zusätzlichen Achslasten?

Lösung zu Aufgabe TMIV-03/02



1. Winkelgeschwindigkeitsvektor ${}^I\underset{\sim}{\omega}^K$:

$${}^I\underset{\sim}{\omega}^K = \omega_0\, \underset{\sim}{e}_z + \dot\varphi\, \underset{\sim}{e}_\xi$$

mit $\quad \underset{\sim}{e}_z = \underset{\sim}{e}_\eta \sin\varphi + \underset{\sim}{e}_\zeta \cos\varphi$

$\hookrightarrow \quad {}^I\underset{\sim}{\omega}^K = \dot\varphi\, \underset{\sim}{e}_\xi + \omega_0 \sin\varphi\, \underset{\sim}{e}_\eta + \omega_0 \cos\varphi\, \underset{\sim}{e}_\zeta$

2. Eulersche Kreiselgleichungen:

allgemein:
$$\begin{aligned} J_\xi\dot\omega_\xi - (J_\eta - J_\zeta)\,\omega_\eta\omega_\zeta &= M_\xi \\ J_\eta\dot\omega_\eta - (J_\zeta - J_\xi)\,\omega_\zeta\omega_\xi &= M_\eta \\ J_\zeta\dot\omega_\zeta - (J_\xi - J_\eta)\,\omega_\xi\omega_\eta &= M_\zeta \end{aligned}$$

mit $\quad J_\xi = J_\eta = m\ell^2 + \frac{1}{4}mr^2\ , \quad J_\zeta = \frac{1}{2}mr^2$

$\quad \dot\omega_\xi = \ddot\varphi\ , \quad \dot\omega_\eta = \omega_0\dot\varphi\cos\varphi\ , \quad \dot\omega_\zeta = -\omega_0\dot\varphi\sin\varphi$

äußeres Moment M_ξ : $\quad M_\xi = mg\ell\sin\varphi - c_d\varphi$

Eulersche Kreiselgleichungen:

$$M_\xi = \underline{\underline{\left(m\ell^2 + \frac{1}{4}mr^2\right)\ddot\varphi - \left(m\ell^2 - \frac{1}{4}mr^2\right)\omega_0^2\sin\varphi\cos\varphi = mg\ell\sin\varphi - c_d\varphi}}$$

$$M_\eta = 2m\ell^2\omega_0\dot\varphi\cos\varphi$$

$$M_\zeta = -\frac{1}{2}mr^2\omega_0\dot\varphi\sin\varphi$$

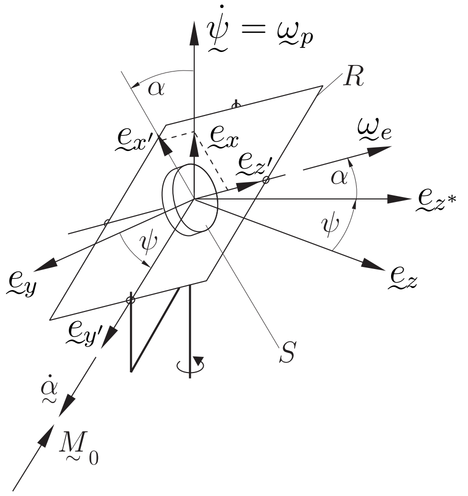
3. Linearisierte Bewegungsgleichung:

Mit $\quad \sin\varphi \approx \varphi\ , \quad \cos\varphi \approx 1$

$$\hookrightarrow \left(m\ell^2 + \frac{1}{4}mr^2\right)\ddot\varphi + \left[c_d - mg\ell - \omega_0^2\left(m\ell^2 - \frac{1}{4}mr^2\right)\right]\varphi = 0$$

Lösung zu Aufgabe TMIV-03/06

1. Drehimpulssatz auf rahmenfestes (x'-y'-z')-Koordinatensystem bezogen:



Drehimpulssatz:

$$\frac{{}^R d}{dt}\underset{\sim}{L} + {}^I\underset{\sim}{\omega}^R \times \underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{M} \qquad (1)$$

Drehimpuls:

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\approx}{\Theta} \cdot {}^I\underset{\sim}{\omega}^S = J_{x'}\omega_{x'}\underset{\sim}{e}_{x'} + J_{y'}\omega_{y'}\underset{\sim}{e}_{y'} + J_{z'}\omega_{z'}\underset{\sim}{e}_{z'}$$

Winkelgeschwindigkeit der Scheibe:

$$ {}^I\underset{\sim}{\omega}^S = \dot{\psi}\underset{\sim}{e}_x + \dot{\alpha}\underset{\sim}{e}_{y'} + \omega_e\underset{\sim}{e}_{z'} \quad \text{mit} \quad \underset{\sim}{e}_x = \cos\alpha\ \underset{\sim}{e}_{x'} + \sin\alpha\ \underset{\sim}{e}_{z'}$$

$$\rightsquigarrow {}^I\underset{\sim}{\omega}^S = \dot{\psi}\cos\alpha\ \underset{\sim}{e}_{x'} + \dot{\alpha}\ \underset{\sim}{e}_{y'} + (\omega_e + \dot{\psi}\sin\alpha)\ \underset{\sim}{e}_{z'}$$

und damit:

$$\underset{\sim}{L} = B\dot{\psi}\cos\alpha\ \underset{\sim}{e}_{x'} + B\dot{\alpha}\ \underset{\sim}{e}_{y'} + A(\omega_e + \dot{\psi}\sin\alpha)\ \underset{\sim}{e}_{z'}$$

$$\begin{aligned} \frac{{}^R d}{dt}\underset{\sim}{L} = \ & B(\ddot{\psi}\cos\alpha - \dot{\psi}\dot{\alpha}\sin\alpha)\underset{\sim}{e}_{x'} + B\ddot{\alpha}\underset{\sim}{e}_{y'} \\ & + A(\ddot{\psi}\sin\alpha + \dot{\psi}\dot{\alpha}\cos\alpha)\underset{\sim}{e}_{z'} \qquad (2) \end{aligned}$$

Winkelgeschwindigkeit des rahmenfesten (x'-y'-z')-Koordinatensystems:

$${}^I\underset{\sim}{\omega}^R = \dot{\psi}\cos\alpha\underset{\sim}{e}_{x'} + \dot{\alpha}\underset{\sim}{e}_{y'} + \dot{\psi}\sin\alpha\underset{\sim}{e}_{z'}$$

und damit:

$${}^I\underset{\sim}{\omega}^R \times \underset{\sim}{L} = \begin{vmatrix} \underset{\sim}{e}_{x'} & \underset{\sim}{e}_{y'} & \underset{\sim}{e}_{z'} \\ \dot{\psi}\cos\alpha & \dot{\alpha} & \dot{\psi}\sin\alpha \\ B\dot{\psi}\cos\alpha & B\dot{\alpha} & A(\omega_e + \dot{\psi}\sin\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= [A(\omega_e + \dot{\psi}\sin\alpha)\dot{\alpha} - B\dot{\alpha}\dot{\psi}\sin\alpha]\underset{\sim}{e}_{x'} - [A(\omega_e + \dot{\psi}\sin\alpha)\dot{\psi}\cos\alpha - B\dot{\psi}^2\sin\alpha\cos\alpha]\underset{\sim}{e}_{y'} + 0\ \underset{\sim}{e}_{z'} \quad (3)$$

Äußere Momente: $\underset{\sim}{M} = M_{x'}\ \underset{\sim}{e}_{x'} - M_0\ \underset{\sim}{e}_{y'} + 0\ \underset{\sim}{e}_{z'}$ (4)

Mit (2),(3) und (4) folgt aus (1) :

$$\left\Vert \begin{array}{rcl} B(\ddot{\psi}\cos\alpha - 2\dot{\psi}\dot{\alpha}\sin\alpha) + A(\omega_e + \dot{\psi}\sin\alpha)\dot{\alpha} & = & M_{x'} \\ B(\ddot{\alpha} + \dot{\psi}^2\sin\alpha\cos\alpha) - A(\omega_e + \dot{\psi}\sin\alpha)\dot{\psi}\cos\alpha & = & -M_0 \\ A(\ddot{\psi}\sin\alpha + \dot{\psi}\dot{\alpha}\cos\alpha) & = & 0 \end{array} \right\Vert \quad \begin{array}{c} (5) \\ (6) \\ (7) \end{array}$$

aus (7) folgt: $\ddot{\psi}\sin\alpha + \dot{\psi}\dot{\alpha}\cos\alpha = \frac{d}{dt}\left(\dot{\psi}\sin\alpha\right) = 0 \rightsquigarrow \underline{\dot{\psi}\sin\alpha = \text{const.}}$

Damit ist eine mögliche Lösung:

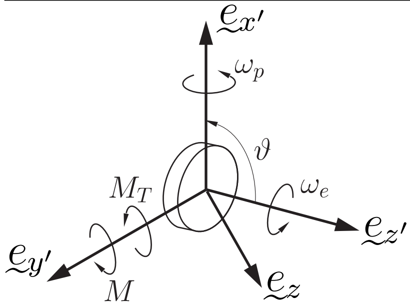
$\underline{\underline{\dot{\psi} = \omega_p = \text{const.}}}$ und $\underline{\underline{\alpha = \text{const.}}}$ $\rightsquigarrow \ddot{\psi} = \dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0 \rightsquigarrow M_{x'} = 0$

Und damit folgt aus (6): $\underline{(A - B)\omega_p^2\sin\alpha\cos\alpha + A\omega_e\omega_p\cos\alpha = M_0}$ (8)

2. Präzessionswinkelgeschwindigkeit ω_p bei $\alpha = 0$:

Aus (8) folgt: $A\omega_e\omega_p = M_0 \rightsquigarrow \underline{\underline{\omega_p = \frac{M_0}{A\omega_e}}}$

3. Präzessionswinkelgeschwindigkeit ω_p :



Kreiselmoment: $\underset{\sim}{M}_T = (A\omega_e + (A - B)\omega_p\cos\vartheta)\ \underset{\sim}{e}_\varphi \times \underset{\sim}{\omega}_p$

mit $\alpha = 0 \rightsquigarrow \vartheta = 90° \rightsquigarrow \cos\vartheta = 0,\ \underset{\sim}{e}_\varphi = \underset{\sim}{e}_{z'}$, $\underset{\sim}{\omega}_p = \omega_p\ \underset{\sim}{e}_{x'}$

$\underset{\sim}{M}_T = A\omega_e\omega_p\ \underset{\sim}{e}_{z'} \times \underset{\sim}{e}_{x'} \Rightarrow \underline{\underline{\underset{\sim}{M}_T = A\omega_e\omega_p\ \underset{\sim}{e}_{y'}}}$

D'Alembert: $\underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{M}_T = \underset{\sim}{0}$; $\underline{\underline{\underset{\sim}{M} = -M_0\ \underset{\sim}{e}_{y'}}}$

und damit: $-M_0\ \underset{\sim}{e}_{y'} + A\omega_e\omega_p\ \underset{\sim}{e}_{y'} = \underset{\sim}{0} \rightsquigarrow \underline{\omega_p = \frac{M_0}{A\omega_e}}$