Institut für Technische Mechanik – Teilinstitut Dynamik/Mechatronik

Die Hausaufgaben müssen rechtzeitig und vollständig eingereicht werden. Die Korrektur ist nur notwendig, wenn die Hausaufgaben nicht bestanden wurden. Unter Korrektur dürfen keine Hausaufgaben verspätet eingereicht werden! Wenn Sie keine Hausaufgaben einreichen, wird die Übung als nicht bestanden gewertet! Sie erhalten für jede Übung von einem Tutor einen Laufzettel, der ihre Ergebnisse dokumentiert.	Abgabe **Hausaufgaben** bis: **Mo, 17.05.2021** 19:00 Uhr (MEZ) Abgabe **Korrektur** bis: **Mo, 07.06.2021** 19:00 Uhr (MEZ)

Technische Mechanik IV, SS 2021

Übungsblatt 1

Thema: **Ebene Scheibenbewegung (III): Impulssatz, Anwendung auf Stoßvorgänge.**

I. Impulssatz für einen Körper:

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x \, \mathrm{d}t = m\,(V_x - v_x)$$
$$\int_{t_0}^{t_1} F_y \, \mathrm{d}t = m\,(V_y - v_y)$$

$\underset{\sim}{F}$ – stoßrelevante Kräfte

$v_x,\, v_y$ – Schwerpunktsgeschwindigkeiten zur Zeit t_0

$V_x,\, V_y$ – Schwerpunktsgeschwindigkeiten zur Zeit t_1

Drehimpulssatz für einen Körper:

$$\int_{t_0}^{t_1} M^{(S)} \, \mathrm{d}t = J_S\,(\Omega - \omega)$$

$M^{(S)}$ – stoßrelevante Momente (bzgl. S)

S – Schwerpunkt oder fester Drehpunkt

ω – Winkelgeschwindigkeit des Körpers zur Zeit t_0

Ω – Winkelgeschwindigkeit des Körpers zur Zeit t_1

Anmerkung:
- Gewähltes Koordinatensystem (rechtshändig!) definiert positive Richtungen für Geschwindigkeiten, Kräfte und Momente. Diese Größen entsprechend vorzeichenrichtig in die Impulsgleichungen einsetzen.
- Herleitung durch Zeitintegration des 2. Newtonschen Axioms → $\underset{\sim}{F}$, M enthalten keine Trägheitsterme im Sinne d'Alemberts!

II. Stoßvorgänge (ebene Bewegung, vgl. TM III Blatt 12)

Impulssatz und Drehimpulssatz auf jeden Körper getrennt anwenden.

Anwendung der Impulssätze über den Stoßzeitpunkt hinweg liefert unterdeterminierte Gleichungssysteme.

Beispiel: ebene Bewegung, 2 Körper, reibungsfreier Stoß, 1 Kontakt
2×3 skalare Impulsgleichungen $\leftrightarrow$ 7 Unbekannte
(1 Kontaktnormalkraft + 2×3 unbek. Geschwindigkeiten)

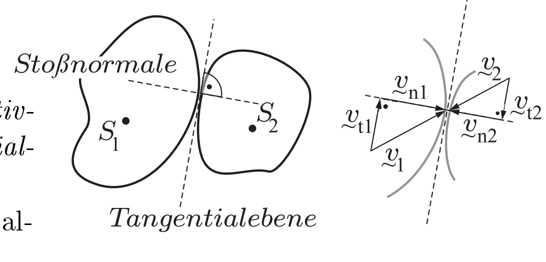
Zur Lösbarkeit des Gleichungssystems fehlende Gleichung für den

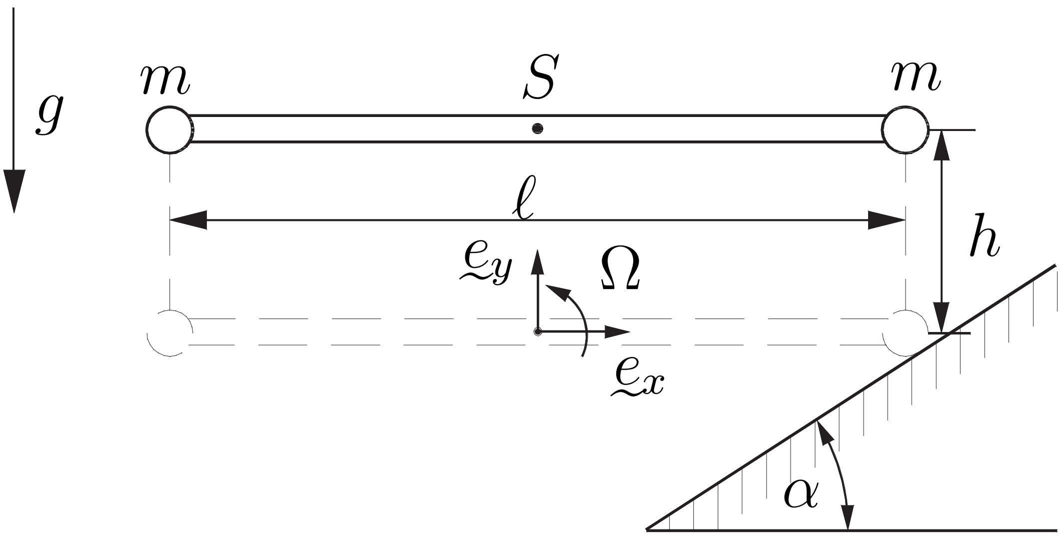
a) voll-elastischen Stoß ($\varepsilon = 1$) durch den Energieerhaltungssatz.

b) voll-plastischen Stoß ($\varepsilon = 0$) durch eine zusätzliche kinematische Beziehung.

c) realen Stoß ($0 < \varepsilon < 1$) durch die kinematische Stoßzahlgleichung $\boxed{\varepsilon = -\dfrac{V_{n_2} - V_{n_1}}{v_{n_2} - v_{n_1}}}$

- V_{n_i}/v_{n_i} = Geschwindigkeitskomponenten des Stoßpunktes auf Körper i in Richtung der gemeinsamen Stoßnormalen nach / vor dem Stoß.
- Stoßzahlgleichung verknüpft nur die Komponenten der *Relativgeschwindigkeiten* der Kontaktpunkte *normal zur Tangentialebene* vor und nach dem Kontakt.
- Bei Stößen gilt stets Impulserhaltung im System, Energieerhaltung jedoch nur im Sonderfall $\varepsilon = 1$.



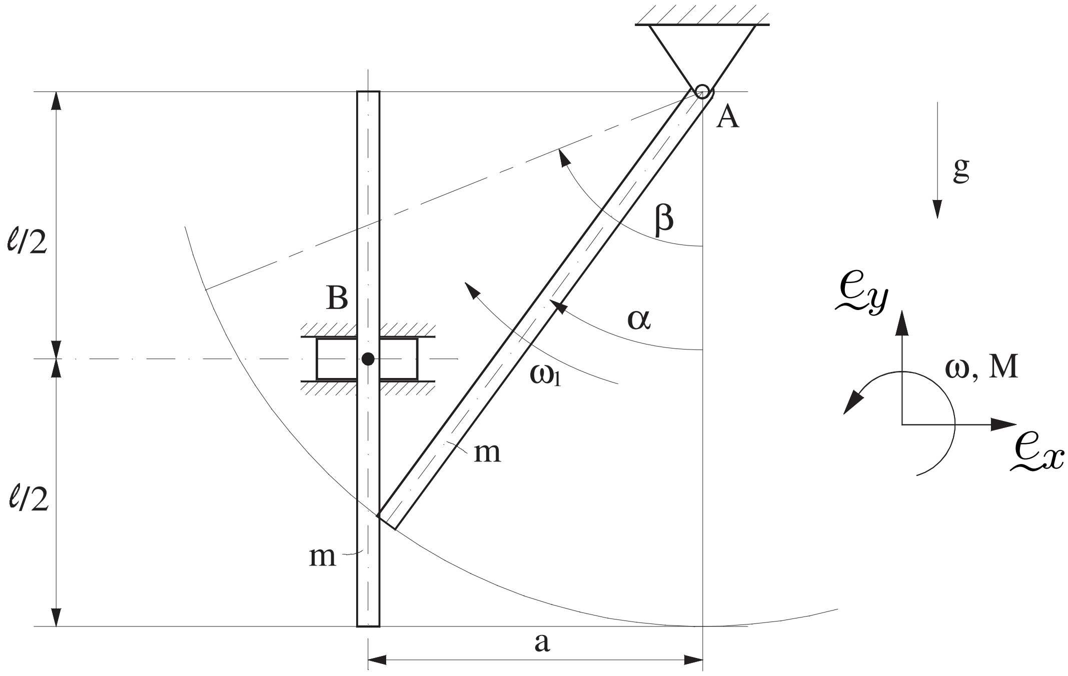


Ein starrer Körper, bestehend aus zwei Massenpunkten m und einer masselosen Verbindungsstange der Länge ℓ, fällt aus einer Höhe h ohne Anfangsgeschwindigkeit auf eine glatte Ebene. Der Stoßvorgang zwischen dem Körper und der unter dem Winkel α geneigten Ebene sei vollkommen elastisch.

1. Stellen Sie die Impulsgleichungen und den Energieerhaltungssatz für den Stoßvorgang auf.
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten V_x und V_y sowie die Winkelgeschwindigkeit Ω, die der Körper unmittelbar nach dem Stoß hat.

Aufgabe TMIV-01/19

— Beispiel —



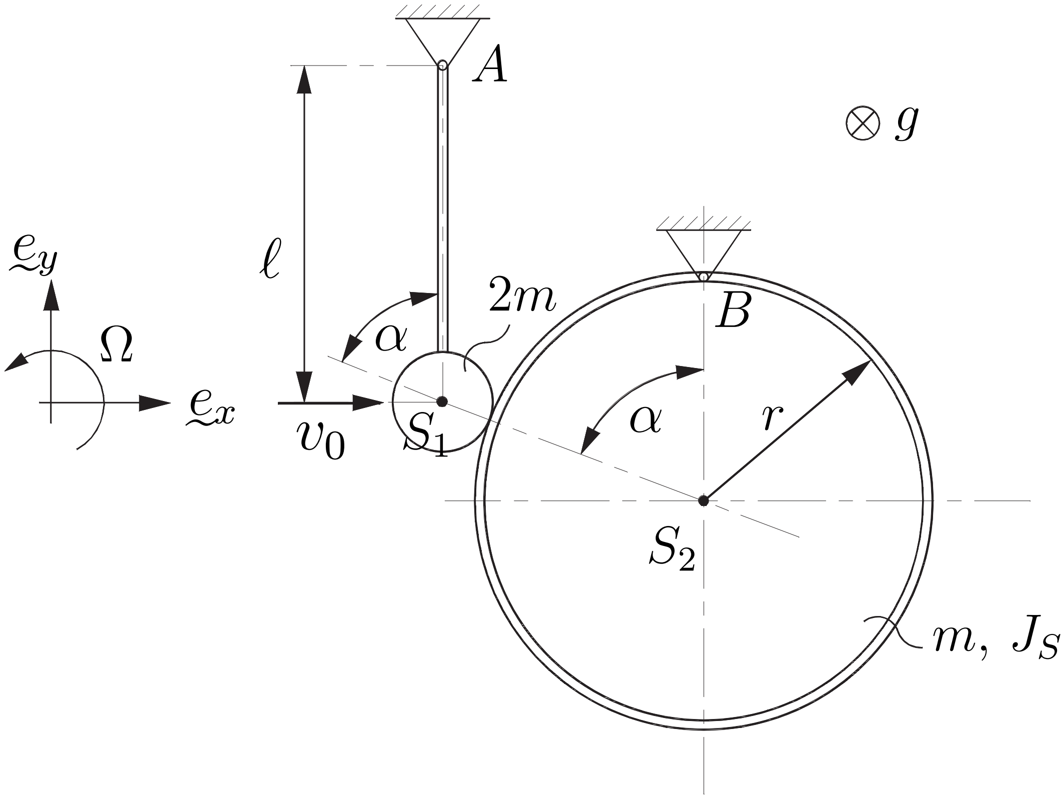
Ein dünner Stab der Länge ℓ und der Masse m, der im festen Lagerpunkt A frei drehbar gelagert ist, stoße - wie in der Skizze angegeben - mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 auf einen ruhenden zweiten Stab gleicher Bauart, der im Schwerpunkt B in x-Richtung geführt ist und sich außerdem um B drehen kann. Alle Vorgänge verlaufen <u>reibungsfrei</u>, der Stoß sei <u>vollelastisch</u>.

1. Stellen Sie die Impulsgleichungen und die Stoßzahlgleichung für den Stoßvorgang auf.
2. Ermitteln Sie daraus die Geschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit der beiden Stäbe nach dem Stoß .
3. Wie muss der Winkel α gewählt werden, damit die Winkelgeschwindigkeit des stoßenden Stabes unmittelbar nach dem Stoß zu Null wird?
4. Ermitteln Sie mit dem Energiesatz den maximalen Ausschlagwinkel β des stoß enden Stabes nach dem Stoß in Abhängigkeit des Winkels α.

Aufgabe TMIV-01/05

— Hausaufgabe —

$\Omega_1 = \dfrac{v_0}{2\ell}, \quad \Omega_2 = \dfrac{v_0}{2r}$



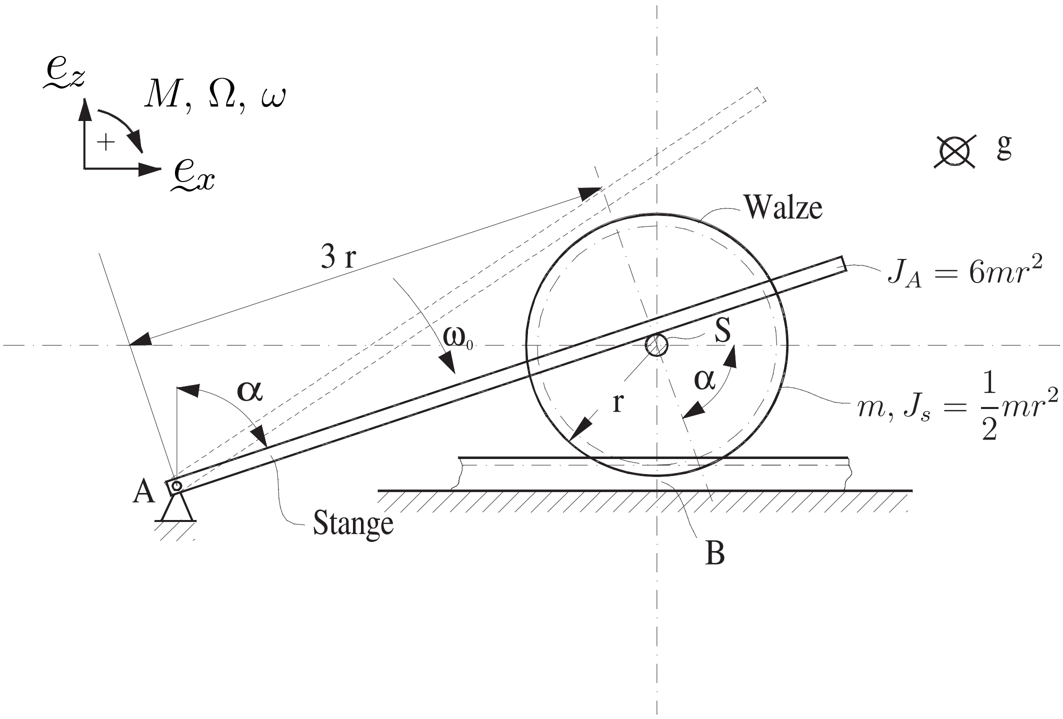
Eine Punktmasse ($2m$) ist an einer masselosen Stange der Länge ℓ im Punkt A reibungsfrei pendelnd aufgehängt und stößt mit der Geschwindigkeit v_0 vollplastisch gegen einen Kreisring mit der Masse m, dem Radius r und der auf den Schwerpunkt S_2 bezogenen Drehmasse $J_S = mr^2$, der an seinem Umfang im Punkt B reibungsfrei drehbar gelagert ist. Der Ring befinde sich vor dem Stoß in Ruhe. Punktmasse und Ring seien glatt.

1. Schneiden Sie zum Stoßzeitpunkt die Punktmasse und den Kreisring frei und bringe sämtliche Stoß- und Lagerkräfte an.
2. Geben Sie die Drehimpulsgleichung bezüglich der Lagerpunkte A und B für den Stoß an.
3. Geben Sie eine zusätzliche kinematische Beziehung für die Winkelgeschwindigkeit Ω_1 (Pendel) und Ω_2 (Kreisring) unmittelbar nach dem Stoß an.
4. Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit Ω_1 und Ω_2 für Punktpendel und Ring.

Aufgabe TMIV-01/10

— Hausaufgabe —

$\Omega_S = \frac{4\cos^2\alpha}{9+4\cos^2\alpha}\omega_0$



Eine in A frei drehbar gelagerte Stange mit der Drehmasse $J_A = 6mr^2$ stößt in der gezeichneten Lage mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 vollplastisch auf den Zapfen einer ruhenden Walze. Die homogene Walze mit der Masse m soll nach dem Stoß über eine an ihrem Umfang befindlichen Verzahnung in B auf einer Zahnstange abrollen. Der fest mit der Walze verbundene Zapfen hat einen vernachlässigbaren Durchmesser. Zwischen ihm und der Stange tritt keine Reibung auf.

1. Schneiden Sie die beiden Körper zum Stoßzeitpunkt frei und bringen Sie alle für den Stoßvorgang maßgebenden Kräfte an.

2. Geben Sie die Impulsgleichungen für den Stoßvorgang an, wobei für die Stange die Drehimpulsgleichung bezüglich des festen Drehpunktes A genügt.

3. Ermitteln Sie synthetisch

   a) zwei kinematische Beziehungen für die Geschwindigkeiten des Walzenschwerpunktes S mithilfe der kinematischen Grundgleichung und

   b) mithilfe der Stoßzahlgleichung eine weitere kinematische Beziehung für die Geschwindigkeit des Walzenschwerpunktes S in Richtung der Stoßnormalen,

   die unmittelbar nach dem Stoß gültig sind.

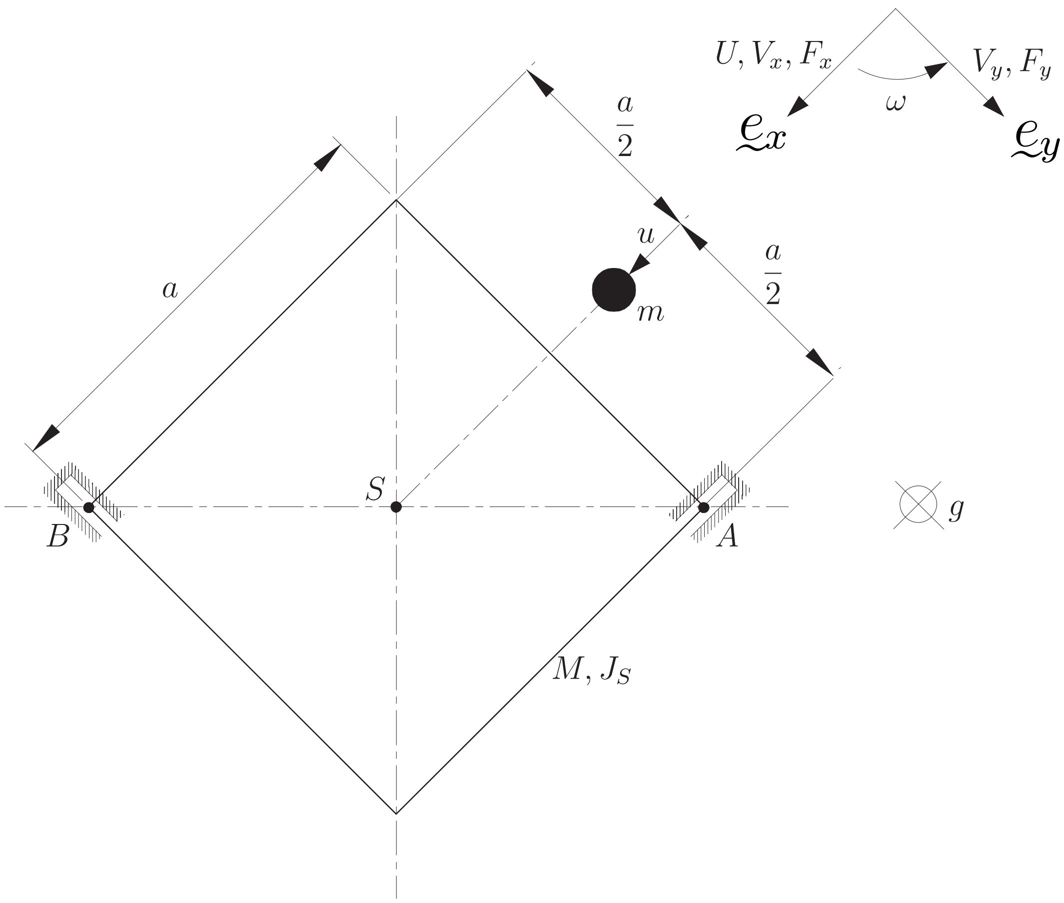
4. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Walzenschwerpunktes S in x-Richtung nach dem Stoß, sowie die Winkelgeschwindigkeit Ω_S der Stange.

5. Gibt es einen Winkel $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, bei dem die Walze nach dem Stoß in Ruhe bleibt? Begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe TMIV-01/08

— freiwillig —

$U = -\frac{u}{3}$



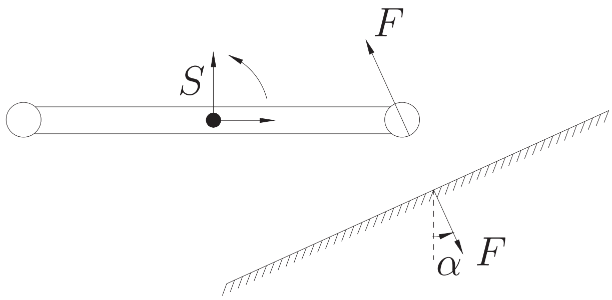
Gegeben sei eine quadratische Scheibe mit der Kantenlänge a, der Masse $M = \frac{3}{4}m$ sowie der auf ihren Schwerpunkt S bezogenen Drehmasse $J_S = \frac{1}{8}ma^2$. Sie ist an ihren Eckpunkten A und B reibungsfrei in zwei Nuten geführt, die je 45° zur Vertikalen geneigt sind.

Im Abstand $\frac{a}{2}$ von A trifft ein Massenpunkt m mit der Geschwindigkeit u auf die ruhende Scheibe auf. Der stattfindende Stoß sei vollelastisch.

1. Stellen Sie den Energieerhaltungssatz für den stattfindenden Stoß auf.
2. Schneiden Sie den Massenpunkt und die Scheibe frei und stellen Sie die Impulsgleichungen für den Stoß auf.
3. Geben Sie aus der Querunverschieblichkeit des Punktes A bzw. des Punktes B die beiden kinematischen Beziehungen zwischen den Schwerpunktsgeschwindigkeiten V_x bzw. V_y und der Winkelgeschwindigkeit Ω der Scheibe nach dem Stoß auf.
4. Ermitteln Sie aus 1., 2. und 3. die Geschwindigkeit U des Massenpunktes m nach dem Stoß.

Lösung zu Aufgabe TMIV-01/02

1. Impulsgleichungen:



Geschwindigkeiten vor dem Stoß:

$v_x = \omega = 0, \quad v_y = -\sqrt{2gh}$ (aus Energiesatz)

Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

V_x , V_y , Ω

x-Richtung: $-\int\limits_{t_0}^{t_1} F \sin\alpha \, dt = 2mV_x \qquad (1)$

y-Richtung: $\int\limits_{t_0}^{t_1} F \cos\alpha \, dt = 2m\left(V_y + \sqrt{2gh}\right) \qquad (2)$

um S: $\int\limits_{t_0}^{t_1} F \cos\alpha \, \frac{\ell}{2} \, dt = 2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Omega \qquad (3)$

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}\, 2m\, 2gh = \frac{1}{2}\, 2m\left(V_x^2 + V_y^2\right) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} m\ell^2\Omega^2 \qquad (4)$

2. Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$\cos\alpha\ (1) + \sin\alpha\ (2):\ 2mV_x\cos\alpha + 2m\left(V_y + \sqrt{2gh}\right)\sin\alpha = 0 \qquad (I)$

$\frac{\ell}{2}(2) - (3):\qquad 2m\frac{\ell}{2}\left(V_y + \sqrt{2gh}\right) - \frac{1}{2}m\ell^2\Omega = 0 \qquad (II)$

$\frac{2}{\ell}\sin\alpha\ (II) - (I):\ m\ell\Omega\sin\alpha + 2mV_x\cos\alpha = 0$

$\hookrightarrow V_x = -\frac{\ell}{2}\tan\alpha\ \Omega \qquad$ und aus (II) $V_y = \frac{\ell}{2}\Omega - \sqrt{2gh}$

V_x und V_y in (4):

$$2mgh = m\left[\frac{\ell^2}{4}\tan^2\alpha\ \Omega^2 + \left(\frac{\ell}{2}\Omega - \sqrt{2gh}\right)^2\right] + \frac{m\ell^2}{4}\Omega^2$$

$$2mgh = \frac{m\ell^2}{4}\tan^2\alpha\ \Omega^2 + \frac{m\ell^2}{4}\Omega^2 - m\ell\Omega\sqrt{2gh} + 2mgh + \frac{m\ell^2}{4}\Omega^2$$

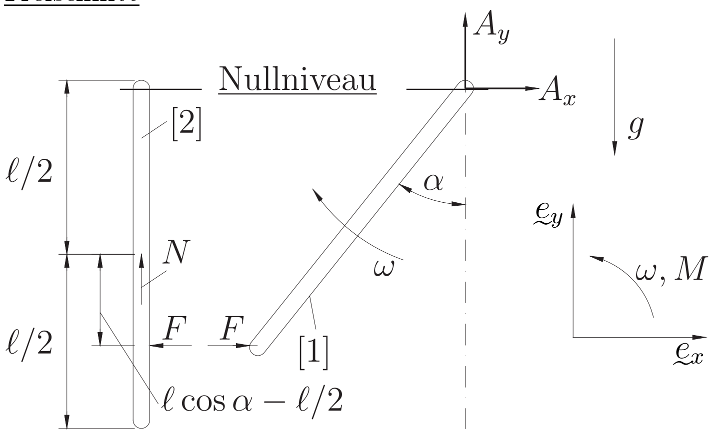
$$\underline{\underline{\Omega = \frac{4}{\ell(2+\tan^2\alpha)}\sqrt{2gh}}} \qquad \underline{\underline{V_x = -\frac{2\tan\alpha}{2+\tan^2\alpha}\sqrt{2gh}}}$$

$$\underline{\underline{V_y = \left(\frac{2}{2+\tan^2\alpha} - 1\right)\sqrt{2gh}}}$$

Lösung zu Aufgabe TMIV-01/19

1. Impulsgleichungen,Energiesatz:

   Freischnitt



Impulsgleichungen:
[1] : $-\omega_1$ (vor Stoß)
Ω_1 (nach Stoß)
$J_A = \frac{1}{3}m\ell^2$
[2] : $\omega_2 = v_x = 0$ (vor Stoß)
Ω_2, V_x (nach Stoß)
$J_B = \frac{1}{12}m\ell^2$

$$[1]: \int_{t_0}^{t_1} M_A dt = \int_{t_0}^{t_1} F\ell\cos\alpha dt = J_A(\Omega_1 + \omega_1) \quad (1)$$

$$[2]: \int_{t_0}^{t_1} M_B dt = \int_{t_0}^{t_1} -F\ell\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)dt = J_B(\Omega_2 - 0) \quad (2); \quad \int_{t_0}^{t_1} -Fdt = m(V_x - 0) \quad (3)$$

Stoßzahlgleichung: $\epsilon = -\dfrac{V_{n2} - V_{n1}}{v_{n2} - v_{n1}} = -\dfrac{\left[V_x + \Omega_2\ell(\cos\alpha - \frac{1}{2})\right] - \left[\Omega_1\ell\cos\alpha\right]}{0 - \left[-\omega_1\ell\cos\alpha\right]} = 1 \quad (4a)$

Energiesatz: $\frac{1}{2}J_A\omega_1^2 = \frac{1}{2}J_A\Omega_1^2 + \frac{1}{2}J_B\Omega_2^2 + \frac{1}{2}mV_x^2 \quad (4b)$

2. Geschwindigkeiten nach dem Stoß: 4 Gleichungen, 4 Unbekannte $\rightarrow$ Lösung:

$$\left.\begin{array}{lll} (3)(\ell\cos\alpha) + (1): & \Omega_1 = -\dfrac{m}{J_A}\ell V_x\cos\alpha - \omega_1 & (5) \\ (3)\left(\frac{\ell}{2}\right) + (1) + (2);\ \text{with } (5): & \Omega_2 = +\dfrac{m\ell}{J_B}V_x\left(\cos\alpha - \dfrac{1}{2}\right) & (6) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{in (4a) oder} \\ \text{in (4b), mit } V_x \neq 0 \text{, da } F \neq 0.\end{array}$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{V_x = \dfrac{-2\ell\omega_1\cos\alpha}{A}}}$ (7) with $A = 15\cos^2\alpha - 12\cos\alpha + 4$ stets $A > 0$ (keine reellen Nullstellen!)

Mit (7) in (5), (6): $\underline{\underline{\Omega_1 = -\dfrac{\omega_1}{A}\left(9\cos^2\alpha - 12\cos\alpha + 4\right)}}$ (8), $\underline{\underline{\Omega_2 = \dfrac{-24\omega_1\cos\alpha}{A}\left(\cos\alpha - \dfrac{1}{2}\right)}}$ (9)

3. Winkel α für $\Omega_1 = 0$:

   Aus (8): $\quad 9\cos^2\alpha - 12\cos\alpha + 4 \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad (\cos\alpha)_{1,2} = +\dfrac{2}{3} \pm \sqrt{\dfrac{4}{9} - \dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$

   $\underline{\underline{(\cos\alpha)_{1,2} = \dfrac{2}{3}}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha_{1,2} \approx 48,19^\circ}}$

   (Grundsätzlich gilt stets: $9\cos^2\alpha - 12\cos\alpha + 4 \geq 0$ $\Rightarrow$Mit (8) gilt somit immer: $\Omega_1 \leq 0$, d.h. der Stab schwingt nie abwärts unmittelbar nach dem Stoß.)

4. Ausschlagwinkel β:

   Energiesatz: $\quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ (Nullniveau siehe Skizze)

   $T_1 = \frac{1}{2}J_A\Omega_1^2, \qquad V_1 = -mg\frac{\ell}{2}\cos\alpha, \qquad T_2 = 0, \qquad V_2 = -mg\frac{\ell}{2}\cos\beta$

   in Energiesatz, aufgelöst: $\quad \underline{\underline{\cos\beta = \cos\alpha - \dfrac{\ell}{3g}\Omega_1^2}} = \cos\alpha - \dfrac{\ell\omega_1^2}{3g}\left(\dfrac{9\cos^2\alpha - 12\cos\alpha + 4}{15\cos^2\alpha - 12\cos\alpha + 4}\right)^2$