Die Hausaufgaben müssen rechtzeitig eingereicht werden. Die Korrektur ist nur notwendig, wenn die Hausaufgaben nicht bestanden wurden. Unter Korrektur dürfen keine Hausaufgaben verspätet eingereicht werden! Wenn Sie keine Hausaufgaben einreichen, wird die Übung als nicht bestanden gewertet! Sie erhalten für jede Übung von einem Tutor einen Laufzettel, der ihre Ergebnisse dokumentiert.	Abgabe **Hausaufgaben** bis: **Mo, 12.07.2021** 19:00 Uhr (MESZ) Abgabe **Korrektur** bis: **Mo, 26.07.2021** 19:00 Uhr (MESZ)

Technische Mechanik IV, SS 2021
Übungsblatt 9

Thema: **Lineare Schwinger mit *einem* Freiheitsgrad**

I. **Lineare Schwingungsdifferentialgleichung (allg.)** $\boxed{m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F(t)}$

II.

Freie Schwingungen (homogene Lösung)	ungedämpft ($k = 0$)	gedämpft ($k \neq 0$)
Bewegungsgleichung	$m\ddot{x} + cx = 0$	$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0$
Eigenkreisfrequenz	$\omega_0 = \left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\omega_d = \left(\omega_0^2 - \delta^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\delta = \frac{k}{2m} = D\omega_0$
Schwingungsdauer	$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0}$	$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{1}{f_d}$
allgemeine Lösungsansätze ((1), (2) gleichwertig)	(1) $x(t) = C\sin(\omega_0 t + \alpha)$ (2) $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$	$x(t) = Ce^{-\delta t}\sin(\omega_d t + \alpha)$ $x(t) = e^{-\delta t}(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t)$

mit $\omega_0 = 2\pi f_0$ – ungedämpfte Eigenkreisfrequenz [s^{-1}]
f_0 – ungedämpfte Eigenfrequenz [Hz]
C – Amplitude der freien Schwingung
α – Nullphasenwinkel

$\omega_d = 2\pi f_d$ – gedämpfte Eigenkreisfrequenz [s^{-1}]
f_d – gedämpfte Eigenfrequenz [Hz]
δ – Abklingmaß [s^{-1}]
D – LEHRsches Dämpfungsmaß [–]
T – Schwingungsdauer [s]

Integrationskonstanten A, B bzw. C, α durch Anpassung an Anfangsbedingungen (siehe IV.):
$x(t = 0) = x_0$, $\dot{x}(t = 0) = v_0$.

III.

Zwangsschwingungen (Partikulärlösung) harmonische Anregung $F(t) = \begin{cases} F_0\sin\Omega t \\ F_0\cos\Omega t \end{cases}$	(1) $x_p(t) = \begin{cases} \overline{C}\sin(\Omega t - \varepsilon) \\ \overline{C}\cos(\Omega t - \varepsilon) \end{cases}$ (2) $x_p(t) = \overline{A}\cos\Omega t + \overline{B}\sin\Omega t$	Umrechnung: $\overline{A} = \begin{cases} -\overline{C}\sin\varepsilon \\ +\overline{C}\cos\varepsilon \end{cases}$ $\overline{B} = \begin{cases} \overline{C}\cos\varepsilon \\ \overline{C}\sin\varepsilon \end{cases}$

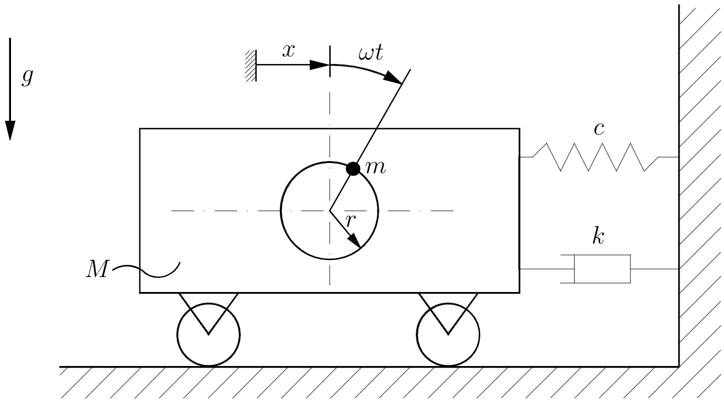
Parameter $\overline{A}, \overline{B}$ bzw. $\overline{C}, \varepsilon$ des Partikuläransatzes eindeutig aus Anregung bestimmbar.
Bezeichnung: $\overline{C}(\Omega)$ = Amplitude der Zwangsschwingung, $\varepsilon(\Omega)$ = Phasenverschiebung, Nullphasenwinkel
Anmerkung: Ansätze (1), (2) äquivalent, durch trigonometrische Umformung umzurechnen, entsprechend Konstanten $\overline{A}, \overline{B} \longleftrightarrow \overline{C}, \varepsilon$ bzw. $A, B \longleftrightarrow C, \alpha$.

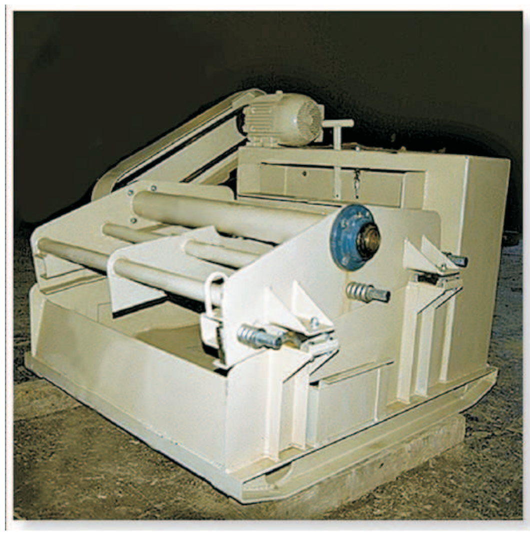
IV.

Vollständige Lösung	
Anfangswertproblem bestehend aus Bewegungsgleichung und Anfangsbedingungen	$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = \begin{cases} F_0\sin\Omega t \\ F_0\cos\Omega t \end{cases}$ $x(t = 0) = x_0, \quad \dot{x}(t = 0) = v_0$
Lösung durch Superposition von allgemeiner homogener Lösung (II) und Zwangsschwingung (III). Anpassung der Integrationskonstanten A, B bzw. C, α zu (II) erst anschließend. *Anmerkung:* Das Superpositionsprinzip gilt nur bei linearen DGL.	$x_{ges}(t) = x_{hom}(t) + x_p(t)$

Aufgabe TMIV-09/02

— Beispiel —





Rütteltisch zum Trennen von Granulaten (*Hibbeler, Technische Mechanik 3*)

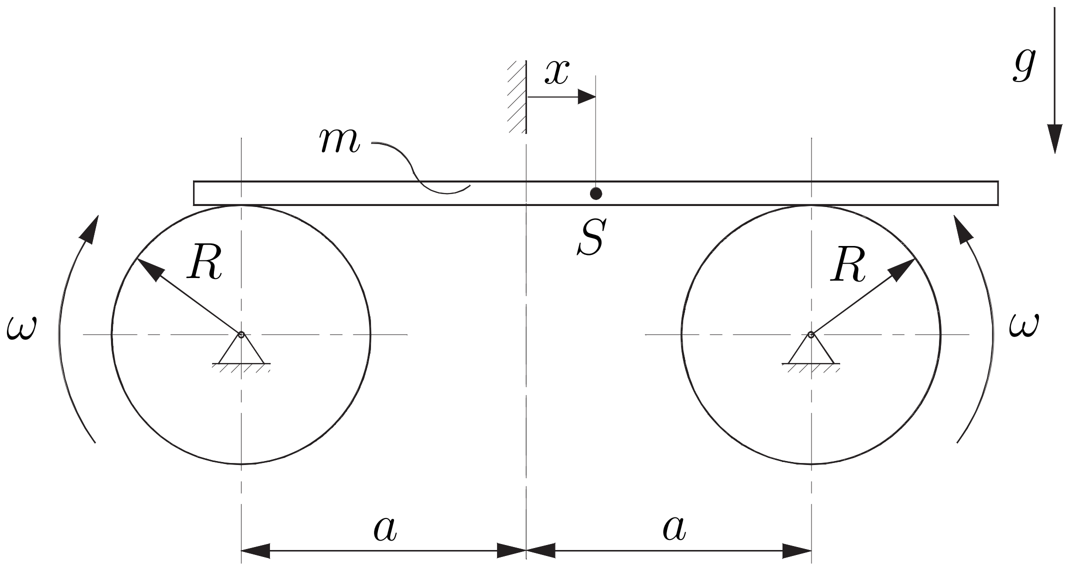
Ein Rütteltisch kann sich auf horizontaler Unterlage frei bewegen und wird durch einen Motor mit Unwucht angetrieben. Der Tisch ist mit der festen Umgebung über eine masselose Feder c und einen masselosen, geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer k verbunden. Tisch und Motor haben zusammen die Masse M, die Unwuchtmasse ist m; sie rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn mit dem Radius r. Die Feder ist in der Ruhelage $x = 0$ spannungslos.

1. Stellen Sie für den stationären Betrieb ($\omega =$ konst.) die Bewegungsgleichung des Rütteltisches in $x-$Richtung auf. Verwenden Sie dabei die Abkürzungen:

$$\omega_0^2 = \frac{c}{M+m}\ ,\ 2D\omega_0 = \frac{k}{M+m}\ ,\ p = \frac{mr}{M+m}$$

2. Berechnen Sie die Amplitude X der Zwangsschwingung sowie den Nullphasenwinkel ε in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ zwischen Anregung und Eigenkreisfrequenz.

3. Zeichnen Sie für die Dämpfungswerte $D_0 = 0$, $0 < D_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ qualitative Skizzen der Zwangsschwingungsamplitude $X(\eta)$ und des Nullphasenwinkels $\varepsilon(\eta)$.



Ein starres Brett der Masse m kann sich auf zwei sehr schnell mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gegenläufig rotierenden Walzen mit dem Radius R in horizontaler Richtung bewegen. Der Abstand der fest gelagerten Walzenmittelpunkte beträgt $2a$. Es sei stets $|\dot{x}| < R\omega$, so dass das Brett auf den Walzen nur rutschen kann. Die maßgebende Gleitreibungsziffer sei μ.

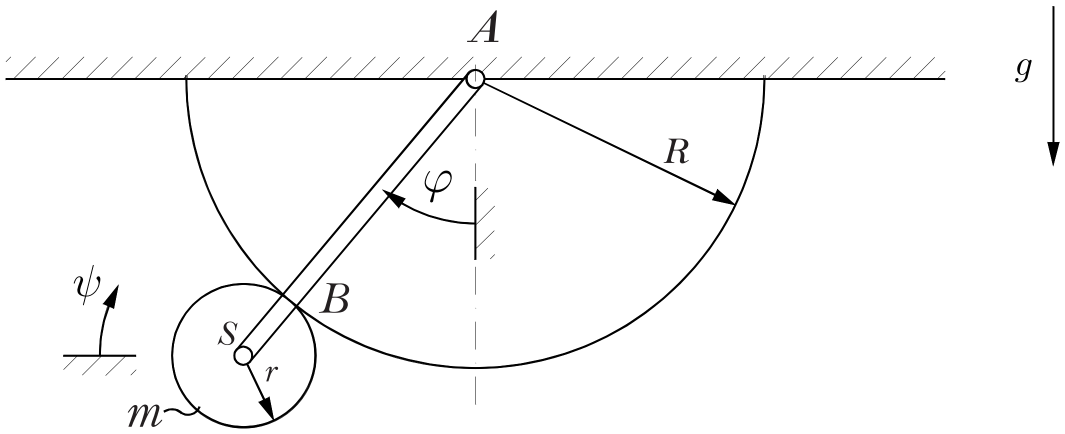
1. Mit dem Prinzip von d'Alembert ermitteln Sie die Bewegungsgleichung des Brettes und daraus die Eigenkreisfrequenz des Systems.

2. Wie groß darf die Schwingungsamplitude maximal werden, damit die Bedingung $|\dot{x}| < R\omega$ wie angenommen stets erfüllt ist?

Aufgabe TMIV-09/05

— Hausaufgabe —

$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{g}{R+r}\sin\varphi = 0$



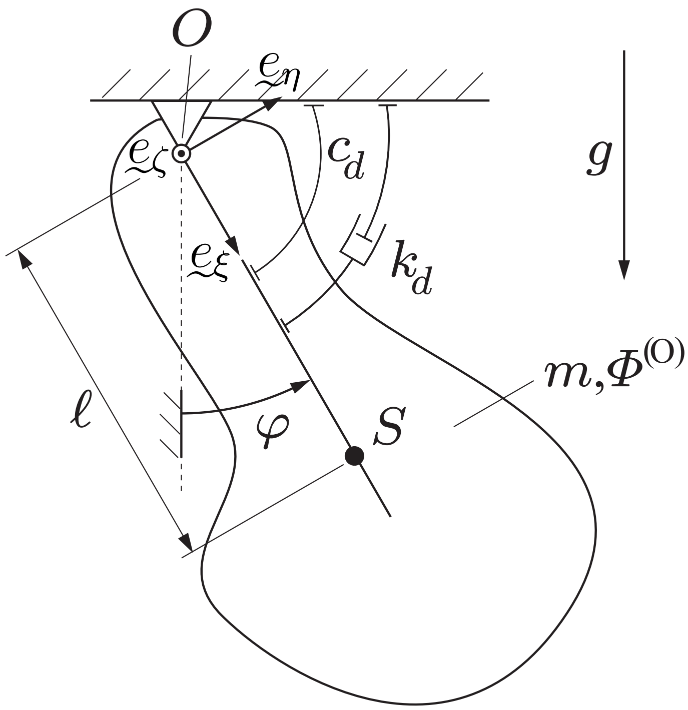
Ein Zahnrad mit dem Teilkreisradius r und der Masse m ist an einer masselosen Pendelstange reibungsfrei drehbar aufgehängt. Das Zahnrad steht in Eingriff mit einem festen Zahnkranz vom Teilkreisradius R und wälzt sich bei Pendelschwingungen auf diesem ab. Das Zahnrad habe die gleiche Drehmasse wie eine volle, homogene Kreisscheibe vom Radius r.

1. Ermitteln Sie, mithilfe des Prinzips von d'Alembert sowie der kinematischen Beziehung zwischen $\dot{\psi}$ und $\dot{\varphi}$, die Bewegungsgleichung des Zahnrades in der Koordinate φ.
2. Wie groß ist die Schwingungsdauer T des Pendels bei kleinen Schwingungen φ?
3. Berechnen Sie den nichtlinearen Zusammenhang der am Zahnrad angreifenden Zahnkraft K als Funktion des Winkels φ.
4. Bestimmen Sie für die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(t=0) = 0$ die Lösung $\varphi(t)$ der linearisierten Bewegungsgleichung.

Aufgabe TMIV-09/09

— Hausaufgabe —

$\varphi(t) = \exp(-\delta t)(\varphi_0 \cos\omega_d t + \frac{\varphi_0 \delta}{\omega_d} \sin\omega_d t)$



Ein physikalisches Pendel besteht aus einem starren Körper (Masse m, Massenträgheitsmatrix $\Phi^{(O)}$ im körperfesten $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta, \underset{\sim}{e}_\zeta\}-$System bzgl. O), der im raumfesten Punkt O reibungsfrei drehbar aufhängt ist. Der Bewegung wirkt eine winkelproportionale lineare Feder (Steifigkeit c_d, entspannt für $\varphi = 0$) und ein winkelgeschwindigkeitsproportionaler viskoser Dämpfer (Dämpfungskonstante k_d) entgegen. Das Pendel führt ebene Bewegungen im Schwerefeld der Erde aus, dabei wird die Lage zur Senkrechten durch den Winkel φ beschrieben.

Die Massenträgheitsmatrix lautet: $\Phi^{(O)} = \begin{bmatrix} J_\xi & J_{\xi\eta} & J_{\xi\zeta} \\ J_{\eta\xi} & J_\eta & J_{\eta\zeta} \\ J_{\zeta\xi} & J_{\zeta\eta} & J_\zeta \end{bmatrix}_{\{\xi\eta\zeta\}}$.

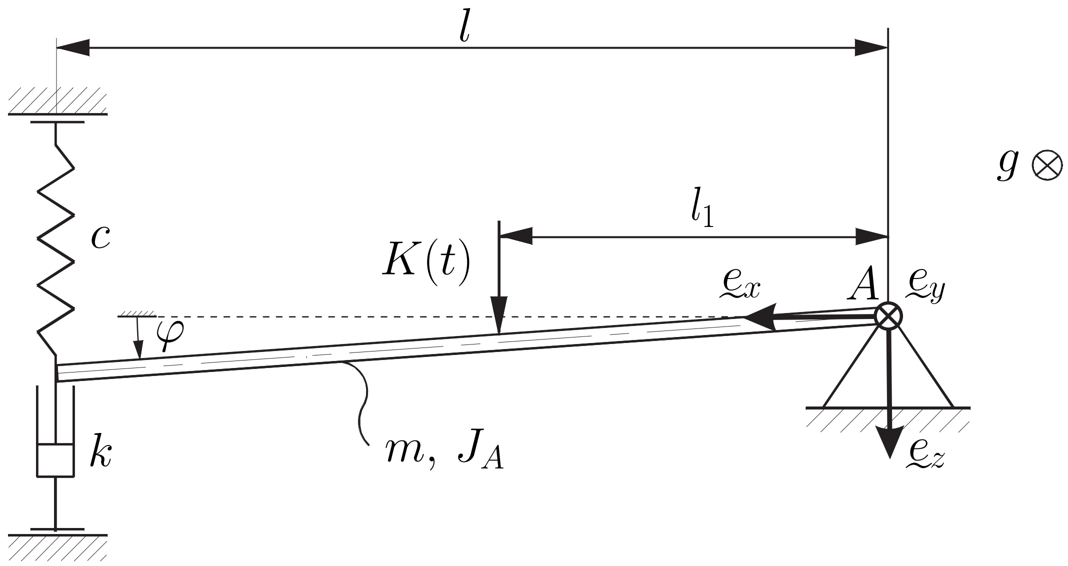
1. Ermitteln Sie mit dem Prinzip von d'Alembert die Bewegungsgleichung des Pendels.
2. a) In der Hängelage $\varphi_{stat} = 0$ befindet sich das Pendel in Ruhe. Ermitteln Sie für kleine Auslenkungen φ aus dieser Ruhelage die linearisierte Bewegungsgleichung. Geben Sie die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_0 sowie die gedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_d in Abhängigkeit von den Systemparametern an.

   b) Skizzieren Sie qualitativ den Zeitverlauf der sich für eine Anfangsauslenkung $\varphi(t = 0) = \varphi_0$ und verschwindende Anfangsgeschwindigkeit einstellenden Schwingung. Kennzeichnen Sie im Diagramm die Anfangsauslenkung sowie die Schwingungsdauer.
3. Geben Sie den homogenen und den partikulären Lösungsanteil in allgemeiner Form an und bestimmen Sie die offenen Parameter für die Anfangsbedingungen $\varphi(t = 0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$.
   Hinweis: Nutzen Sie für eine kompaktere Darstellung die Abkürzungen ω_0, ω_d, δ wie auf dem Deckblatt angegeben.

Aufgabe TMIV-09/08

— freiwillig —

$$\varphi_p(t) = p \frac{cos(\omega t - \varepsilon)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$



Das um den festen Lagerpunkt A frei drehbare System besteht aus einem dünnen Balken der Länge ℓ und der Masse m, einer Feder c, die für $\varphi = 0$ entspannt ist und einem geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer k. Auf den Balken wirkt im Schwerpunkt (Abstand $\ell_1 = \ell/2$ vom Lager A) die periodische Kraft $K(t) = K_0 \cos \omega t$, die den Balken zu kleinen Schwingungen φ anregt.

1. Stellen Sie mit dem Prinzip von d'Alembert die Bewegungsgleichung des Balkens in φ auf und bringen Sie diese unter Verwendung des Dämpfungsparameters D, der ungedämpften Eigenkreisfrequenz ω_0, sowie der Erregeramplitude p auf die Form: $\ddot{\varphi} + 2D\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = p \cdot \cos \omega t$.

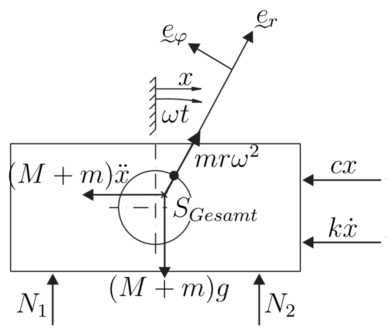
2. Berechnen Sie die Zwangsamplitude Φ sowie den Nullphasenwinkel ε in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$.

3. Geben Sie die Partikulärlösung $\varphi_p(t)$ an.

4. Zeichnen Sie für die Dämpfungswerte $D_0 = 0$, $0 < D_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$, und $D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ qualitative Skizzen der Zwangsamplitude $\Phi(\eta)$ und des Nullphasenwinkels $\varepsilon(\eta)$.

Lösung zu Aufgabe TMIV-09/02

1. Bewegungsgleichung:



$\underset{\sim}{r}_s = \frac{1}{m_{ges}} \sum_i m_i \underset{\sim}{r}_i = \frac{1}{M+m} \left(m\underset{\sim}{r}_m + M\underset{\sim}{r}_M \right) = x\underset{\sim}{e}^I_x + \frac{mr}{M+m}\underset{\sim}{e}_r$

$\to \ddot{r}_s = \ddot{x}\underset{\sim}{e}^I_x - \frac{m}{M+m} r\omega^2 \underset{\sim}{e}_r$

$\to \underset{\sim}{F}_T = -(M+m)\,\ddot{r}_s = -(M+m)\,\ddot{x}\underset{\sim}{e}^I_x + mr\omega^2\underset{\sim}{e}_r$

d'Alembert-Gleichgewicht in x-Richtung:

$-(M+m)\ddot{x} - k\dot{x} - cx + mr\omega^2 \sin\omega t = 0$

$\hookrightarrow (M+m)\ddot{x} + k\dot{x} + cx = mr\omega^2 \sin\omega t$

mit $\quad \dfrac{k}{M+m} = 2D\omega_0\ , \quad \dfrac{c}{M+m} = \omega_0^2\ , \quad \dfrac{mr}{M+m} = p$

Bewegungsgleichung: $\boxed{\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = p\omega^2 \sin\omega t}$ (1)

2. Zwangsschwingung:

Erregung: $u(t) = p\omega^2 \sin\omega t = p\omega^2 \sin(\omega t - \varepsilon + \varepsilon)$
$= p\omega^2(\sin(\omega t - \varepsilon)\cos\varepsilon + \cos(\omega t - \varepsilon)\sin\varepsilon)$

Ansatz: $x_p(t) = \bar{c}\sin(\underbrace{\omega}_{\text{wie Erregung}} t - \varepsilon)\ , \quad \dot{x}_p = \omega\bar{c}\cos(\omega t - \varepsilon)\ , \quad \ddot{x}_p = -\omega^2 x_p$

eingesetzt in (1)

$-\omega^2\bar{c}\sin(\omega t - \varepsilon) + 2D\omega_0\omega\bar{c}\cos(\omega t - \varepsilon) + \omega_0^2\bar{c}\sin(\omega t - \varepsilon)$
$= p\omega^2\cos\varepsilon\,\sin(\omega t - \varepsilon) + p\omega^2\sin\varepsilon\cos(\omega t - \varepsilon)$

Koeffizientenvergleich:

$\sin(\omega t - \varepsilon): \quad -\omega^2\bar{c} + \omega_0^2\bar{c} = p\omega^2\cos\varepsilon$

$\cos(\omega t - \varepsilon): \quad 2D\omega_0\omega\bar{c} = p\omega^2\sin\varepsilon$

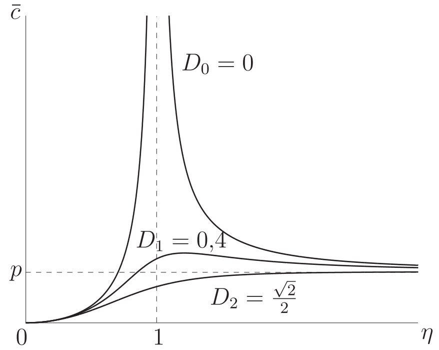
bzw. mit $\underline{\eta = \dfrac{\omega}{\omega_0}}$: $\quad \bar{c}\,(1-\eta^2) = p\eta^2\cos\varepsilon \qquad$ (2)

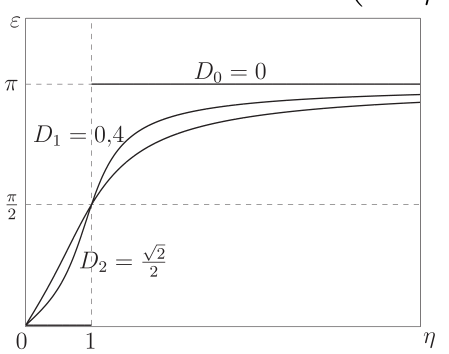
$\bar{c}\,2D\eta = p\eta^2\sin\varepsilon \qquad$ 3)

(3)/(2) : $\underline{\underline{\tan\varepsilon = \dfrac{2D\eta}{1-\eta^2}}}$ Phase der Zwangsschwingung

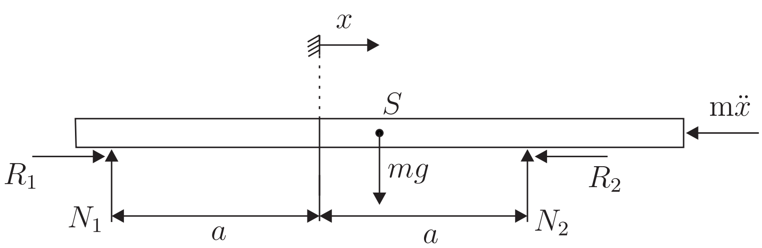
$(2)^2 + (3)^2$: $\underline{\underline{\bar{c} = \dfrac{p\,\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}}}$ Zwangsamplitude

3. Auftragung: $\quad D_1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad \varepsilon = \arctan\left(\dfrac{2D\eta}{1-\eta^2}\right)$





Lösung zu Aufgabe TMIV-09/06



1. Bewegungsgleichung und Eigenfrequenz
   d'Alembert:
   $\rightarrow$: $\quad -m\ddot{x} + R_1 - R_2 = 0 \quad (1)$
   $\uparrow$: $\quad -mg + N_1 + N_2 = 0 \quad (2)$
   $\curvearrowleft_S$: $\quad -N_1(a+x) + N_2(a-x) = 0 \quad (3)$

   aus (2): $\quad N_2 = mg - N_1$
   und damit in (3): $\quad N_1(a+x) - mg(a-x) + N_1(a-x) = 0$
   daraus folgt: $\quad N_1 = \frac{a-x}{2a} mg \quad$ und $\quad N_2 = mg - N_1 = \frac{a+x}{2a} mg$
   Mit Coulomb-Reibung $R_{1,2} = \mu N_{1,2}$ folgt aus (1):
   $m\ddot{x} - \mu \frac{a-x}{2a} mg + \mu \frac{a+x}{2a} mg = 0$
   $\ddot{x} - \mu \frac{a-x-a-x}{2a} g = 0$
   $\Rightarrow \quad \underline{\underline{\ddot{x} + \frac{\mu g}{a} x = 0}}$
   Also: freie Schwingung mit der Kreisfrequenz $\underline{\underline{\omega_0^2 = \frac{\mu g}{a}}}$

2. max. Schwingungsamplitude
   Lösung der homogenen Schwingungsdifferentialgleichung (s. Deckblatt):
   $x = \hat{x}\sin(\omega_0 t + \alpha) \rightsquigarrow \dot{x} = \omega_0 \hat{x} \cos(\omega_0 t + \alpha)$
   $\rightsquigarrow |\dot{x}|_{max} = \omega_0 \hat{x} = \sqrt{\frac{\mu g}{a}} \hat{x} \overset{!}{<} R\omega$
   $\rightsquigarrow \hat{x} < R\omega \sqrt{\frac{a}{\mu g}}$