Institut für Technische Mechanik – Teilinstitut Dynamik/Mechatronik

Technische Mechanik IV, SS 2021
Übungsblatt 10

Thema:
1. **Schwinger mit 1 FHG: Zwangsschwingungen, Frequenzgangrechnung**
2. **Schwinger mit endlich vielen FHG: Eigenkreisfrequenzen, Resonanz/Tilgung**

1. Schwinger mit 1 Freiheitsgrad: Zwangsschwingungen, Frequenzgangrechnung

Differentialgleichung: $\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = y(t)$

vollständige Lösung: $x_{\text{ges}}(t) = x_{\text{h}} + x_{\text{p}}$ (siehe TM IV, Blatt 8)

a) Ansatz vom Typ der rechten Seite (reell) (siehe TM IV, Blatt 8)

Anregung: $y(t) = y_0 \begin{cases} \sin\Omega t \\ \cos\Omega t \end{cases}$

Lösungsansatz: $x_p = \bar{A}\cos\Omega t + \bar{B}\sin\Omega t \mathrel{\hat{=}} \bar{C}\begin{cases} \sin(\Omega t - \varepsilon) \\ \cos(\Omega t - \varepsilon) \end{cases}$

ε – Phasenverschiebung
$\bar{C}$ – Amplitude der Antwort

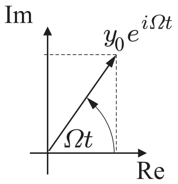
Übertragungsverhalten vollständig beschrieben durch *Vergrößerungsfunktion* $V(\Omega) = \frac{\bar{C}}{y_0}$ und *Phasenverschiebung* $\varepsilon = \varepsilon(\Omega)$.

b) Frequenzgangrechnung (komplex)

Anregung (reell!): $y(t) = y_0 \begin{cases} \sin\Omega t \\ \cos\Omega t \end{cases} \mathrel{\hat{=}} \begin{cases} \mathrm{Im}\,\{\underbrace{y_0 e^{i\Omega t}}_{=\bar{y}}\} \\ \mathrm{Re}\,\{y_0 e^{i\Omega t}\} \end{cases}$

Lösungsansatz (reell!): $x_p = \underbrace{y_0 V(\Omega)}_{=\bar{C}} \begin{cases} \mathrm{Im}\,\{e^{-i\varepsilon}e^{i\Omega t}\} \\ \mathrm{Re}\,\{e^{-i\varepsilon}e^{i\Omega t}\} \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{Im}\,\{V(\Omega)e^{-i\varepsilon}y_0 e^{i\Omega t}\} \\ \mathrm{Re}\,\{V(\Omega)e^{-i\varepsilon}y_0 e^{i\Omega t}\} \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{Im}\,\{F(i\Omega)\,\bar{y}(t)\} \\ \mathrm{Re}\,\{\underbrace{F(i\Omega)\,\bar{y}(t)}_{=\bar{x}}\} \end{cases}$

mit dem *komplexen Frequenzgang* $F(i\Omega) = V(\Omega)e^{-i\varepsilon}$.
Ermittlung von $F(i\Omega)$ für harmonische Erregungen über den verallgemeinerten komplexen Ansatz



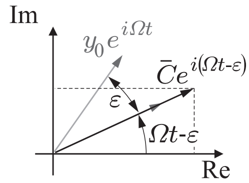
Erregung (komplex)

$\bar{y}(t) = y_0 e^{i\Omega t}$
$\dot{\bar{y}}(t) = i\Omega y_0 e^{i\Omega t}$
$\dots$

$\xrightarrow{\text{Eingang}}$ System $\boxed{F(i\Omega)}$ kompl. Frequenzgang $\xrightarrow{\text{Ausgang}}$

Systemantwort (komplex)

$\bar{x}_p(t) = F(i\Omega)\,y_0 e^{i\Omega t} = F(i\Omega)\,\bar{y}(t)$
$\dot{\bar{x}}_p(t) = i\Omega F(i\Omega)\,y_0 e^{i\Omega t} = F(i\Omega)\,\dot{\bar{y}}(t)$
$\ddot{\bar{x}}_p(t) = -\Omega^2 F(i\Omega)\,y_0 e^{i\Omega t} = F(i\Omega)\,\ddot{\bar{y}}(t)$



Der *komplexe Frequenzgang* ist durch Einsetzen des komplexen Ansatzes in die Differentialgleichung einfach zu ermitteln und beinhaltet alle Informationen des linearen Systems:

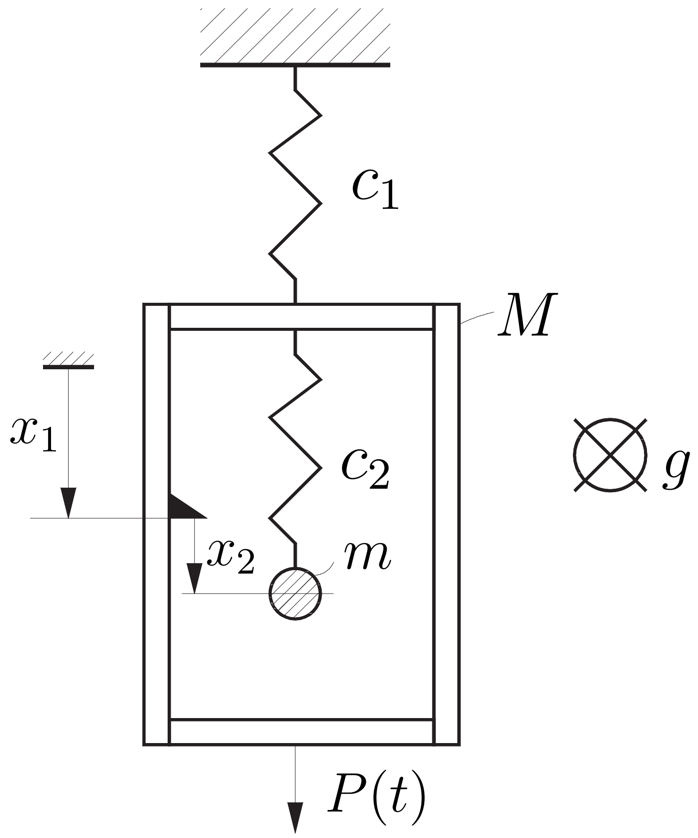
Vergrößerungsfunktion $V(\Omega) = |F(i\Omega)|$ Phasenverschiebung $\tan(\varepsilon(\Omega)) = -\frac{\mathrm{Im}\{F(i\Omega)\}}{\mathrm{Re}\{F(i\Omega)\}}$

Die Rückkehr aus dem Komplexen erfolgt durch Projektion der komplexen Zeiger $\bar{x}$ auf die Real- bzw. Imaginärachse durch die Operatoren $\mathrm{Re}\,\{\}$ ($\hat{=}\cos\angle$) bzw. $\mathrm{Im}\,\{\}$ ($\hat{=}\sin\angle$).

2. Schwinger mit endlich vielen Freiheitsgraden: Eigenkreisfrequenzen, Resonanz / Tilgung

System: matriziell, ungedämpft $\boxed{\mathbf{M}\ddot{\underset{\sim}{x}} + \mathbf{K}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}(t)}$ mit $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}_h + \underset{\sim}{x}_p = (x_1, \dots, x_f)^T$, f – Anzahl FHG

Anregung:	*freie Schwingung* $\underset{\sim}{y}(t) = \underset{\sim}{0}$	*Zwangsschwingung* $\underset{\sim}{y}(t) = \underset{\sim}{y}_0 e^{i\Omega t}$
Ansatz:	$\underset{\sim}{x}_h = \underset{\sim}{C}e^{i\omega t} \rightarrow \ddot{\underset{\sim}{x}}_h = -\omega^2\underset{\sim}{C}e^{i\omega t}$	$\underset{\sim}{x}_p = \bar{\underset{\sim}{C}}e^{i\Omega t} \rightarrow \ddot{\underset{\sim}{x}}_p = -\Omega^2\bar{\underset{\sim}{C}}e^{i\Omega t}$
	in DGl $\rightarrow$ Eigenwertproblem: $\underbrace{\left(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}\right)}_{=\mathbf{A}}\underset{\sim}{C}e^{i\omega t} = \underset{\sim}{0}$	Einsetzen in DGL liefert kein EWP, da Ω geg.! $\rightarrow$ inhomog. LGS für Amplituden $\bar{C}_k$ $(k = 1, ..., f)$. $\mathbf{A}\bar{\underset{\sim}{C}} = \underset{\sim}{y}_0$, $\bar{\underset{\sim}{C}} = (\bar{C}_1, ..., \bar{C}_k)$
Lösungen:	1. Eigenwerte ω_k (Eigenkreisfrequenzen): $\Delta = \Delta(\omega) = \det(A) \stackrel{!}{=} 0$	1. Amplituden: z.B. Cramersche Regel $\bar{C}_k = \frac{\Delta_k(\Omega)}{\Delta(\Omega)}$
	2. Schwingformen (Eigenvektoren): ω_k in $\mathbf{A}\underset{\sim}{C}_k = \underset{\sim}{0}$ $\rightarrow$unterbest. LGS für $\underset{\sim}{C}_k$	2. Resonanz: wenn $\bar{C} \rightarrow \pm\infty$, also $\Delta(\Omega) \rightarrow 0$ für $\Omega \rightarrow \omega_\ell$ (ℓ=1, ..., f)
		3. Tilgung: wenn $\bar{C} \rightarrow 0$, also $\Delta_k(\Omega) \rightarrow 0$ $(k = 1, ..., f)$



Ein Rahmen der Masse M ist über ein elastisches Element der Steifigkeit c_1 mit der festen Umgebung verbunden. In ihm befindet sich ein Massenpunkt m, der seinerseits elastisch (Steifigkeit c_2) mit dem Rahmen verbunden ist. Das System wird durch eine am Rahmen angreifende Kraft $P(t) = P_0 \sin \Omega t$ zu Schwingungen angeregt. Dabei wird mit x_1 die Auslenkung des Rahmenschwerpunktes und mit x_2 die Auslenkung des Massenpunktes relativ zum Rahmen bezeichnet. Beide Federn sind bei $x_1 = x_2 = 0$ spannungslos. Es gilt $c_1 = c_2 = c$ und $M = 2m$. Das Schwingungssystem führt translatorische Bewegungen quer zum Schwerefeld der Erde aus.

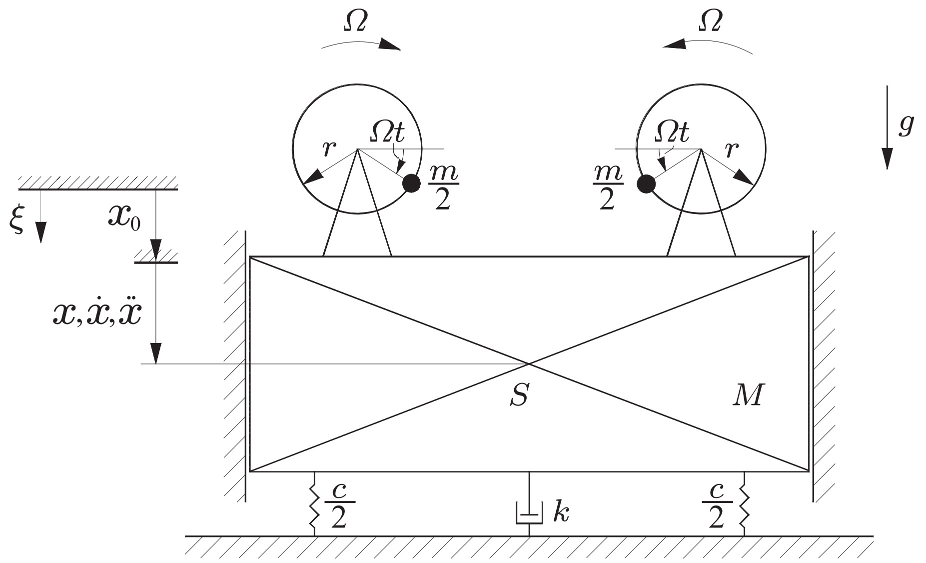
1. Ermitteln Sie mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips die Bewegungsgleichungen des Systems in x_1 und x_2.

2. Berechnen Sie die ungedämpften Eigenkreisfrequenzen ω_k $(k = 1, 2)$ des Systems sowie die Amplitudenverhältnisse μ_k der zugehörigen Eigenschwingungsformen.

3. Ermitteln Sie die Amplituden $\bar{C}_k$ $(k = 1, 2)$ der Zwangsschwingungen. Skizzieren Sie qualitativ den Amplitudengang der Zwangsschwingungen über Ω. Kennzeichnen Sie Resonanzstellen des Systems sowie Tilgungseffekte der Rahmenschwingungen.
   Hinweis: Wählen Sie als Parameter bspw. $P_0 = 1$ N, $c = 1\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$, $m = 1$ kg.

4. Mit welcher Frequenz Ω_T muss die Kraft $P(t)$ oszillieren, damit der Rahmen in Ruhe bleibt?

Aufgabe TMIV-10/04



Es werden Vertikalschwingungen eines Schwingungsfundamentes untersucht, die durch zwei gegenläufige, unwuchtige Rotoren auf dem Fundament erregt werden. Die Unwucht jedes Rotors wird durch einen Massenpunkt (Masse $\frac{m}{2}$) repräsentiert, der mit der Winkelgeschwindigkeit Ω auf einer Kreisbahn mit Radius r umläuft. Die Unwuchten beider Rotoren bewegen sich spiegelsymmetrisch, sodass sich die Horizontalanteile der Trägheitswirkungen aufheben und das resultierende Moment bzgl. S verschwindet. Das Fundament besitzt die Gesamtmasse M. Das Fundament führt Vertikalbewegungen im Schwerefeld der Erde durch. Die Lage des Schwerpunkts von M wird durch die Koordinate x beschrieben, die die Auslenkung aus der statischen Ruhelage $\xi = x_0$ $(x = 0)$ angibt. In der Lage $\xi = 0$ sind die Federn spannungslos.

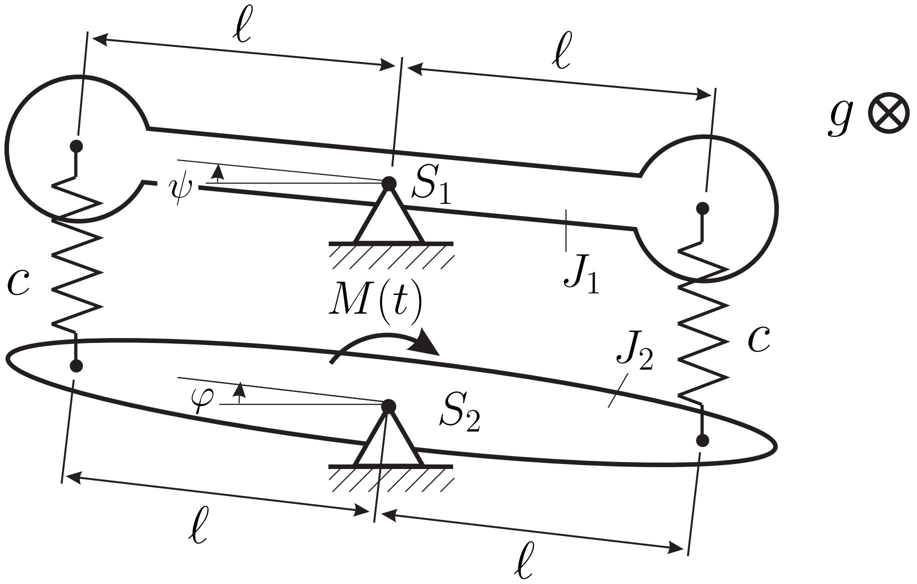
1. Stellen Sie für den stationären Betrieb ($\Omega =$ konst.) die Bewegungsgleichung des Fundaments in x auf. Geben Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften Schwingungssystems an.

2. Berechnen Sie den <u>komplexen Frequenzgang</u> $F(i\Omega)$. Geben Sie für das dimensionslose Frequenzverhältnis $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ den <u>bezogenen komplexen Frequenzgang</u> $F(i\eta)$ an. Wie lautet die zugehörige Vergrößerungsfunktion $V(\eta)$ und die zugehörige Phasenverschiebung $\varepsilon(\eta)$?

3. Zeichnen Sie für die Dämpfungswerte $D_0 = 0,\ 0 < D_1 < \frac{\sqrt{2}}{2},\ D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ qualitative Skizzen der Ortskurve des amplitudennormierten bezogenen Frequenzganges $F(i\eta)$, der Vergrößerungsfunktion $V(\eta)$ und des Nullphasenwinkels $\varepsilon(\eta)$.

Aufgabe TMIV-10/01

— Hausaufgabe —



Ein Schwingungssystem besteht aus zwei starren Körpern (Massenträgheitsmomente J_1, J_2 bzgl. der Schwerpunkte S_1, S_2), die um ihre Schwerpunkte frei rotieren können. Über dehnelastische Elemente (Steifigkeit jeweils c), die im Abstand ℓ zum jeweiligen Schwerpunkt angreifen, sind beide Körper gekoppelt. Die Lage der Körper wird mittels der Winkelkoordinaten φ und ψ beschrieben, für $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sind die elastischen Kopplungen spannungslos. An Körper 2 greift im Schwerpunkt S_2 ein periodisches Moment $M(t) = M_0 \cos \Omega t$ an, das kleine Schwingungen des Systems bewirkt. Das System führt ebene Bewegungen quer zum Schwerefeld der Erde durch.

Die linearisierten Bewegungsgleichungen des Systems sind gegeben durch:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2cl^2}{J_1} & -\frac{2cl^2}{J_1} \\ -\frac{2cl^2}{J_2} & \frac{2cl^2}{J_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{M(t)}{J_2} \end{pmatrix}$$

1. Geben Sie die Eigenkreisfrequenzen $\omega_{1/2}$ des Systems an. Ermitteln Sie die Amplitudenverhältnisse $\mu_{1/2}$ und skizzieren Sie damit qualitativ die Eigenschwingungsformen des Systems.

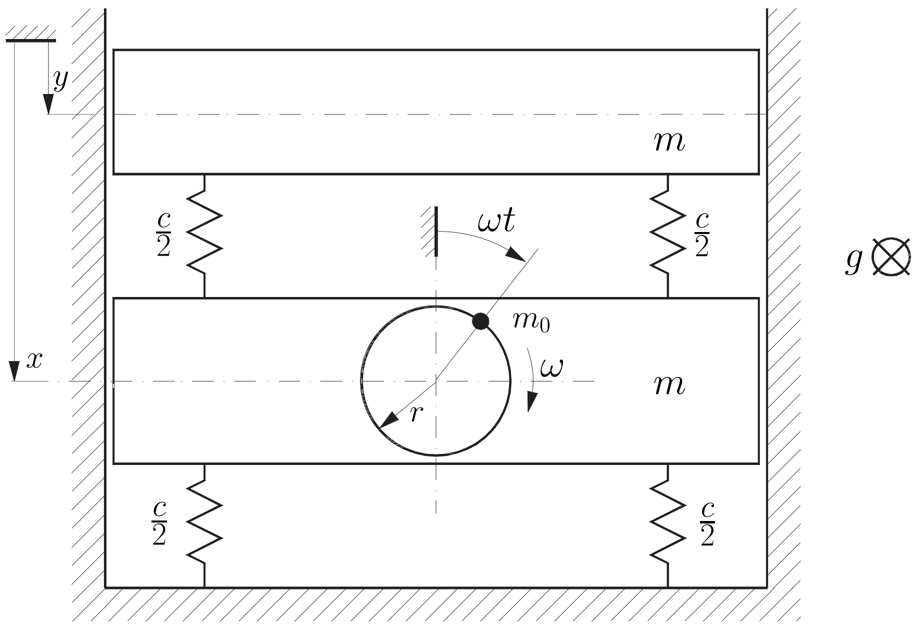
2. a) Skizzieren Sie den Amplitudengang der erzwungenen Schwingungen.

   b) Bei welcher Anregungsfrequenz Ω_A liegt vollständige Tilgung der Schwingungen von Körper 2 vor?

   c) Welche Anregungsfrequenzen sollte man im Betrieb vermeiden?

Aufgabe TMIV-10/02

$$\begin{bmatrix} m+m_0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_0 r \omega^2 \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$



Ein federnd gelagertes Rotorgehäuse mit der Masse m beinhaltet einen unwuchtigen Rotor. Die Unwucht des Rotors ist durch einen Massenpunkt m_0 modelliert, der mit der Exzentrizität r und der Kreisfrequenz ω umläuft. Die unwuchterregten Schwingungen sollen durch eine Tilgermasse unterdrückt werden. Hierzu ist auf dem Rotorgehäuse eine zweite Masse m elastisch gelagert. Alle Federn sind als masselos zu betrachten, haben jeweils die Federkostante $\frac{c}{2}$ und sind in der Ruhelage $x = y = 0$ spannungslos. Reibungsverluste werden ebenso wie der Schwerkrafteinfluss vernachlässigt.

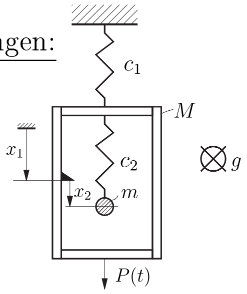
1. Ermitteln Sie mit Hilfe des Prinzips von d'Alembert die Bewegungsgleichungen des Systems für $\omega = \text{konst.}$

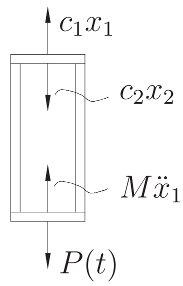
2. Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenzen $\omega_{0,i}$ des Systems.

3. Ermitteln Sie den Arbeitspunkt ω_T des Rotors, bei dem infolge des Tilgers das Rotorgehäuse in Ruhe bleibt.

Lösung zu Aufgabe TMIV-10/03

1. Bewegungsgleichungen:

   Massenpunkt: 

   Rahmen: 

   d'Alembertsches Prinzip: $\underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$ (mit $\underset{\sim}{T} = -m\underset{\sim}{a}_{\text{abs}}$)

   $$\left.\begin{array}{r} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + c_2x_2 = 0 \\ M\ddot{x}_1 + c_1x_1 - c_2x_2 = P(t) \end{array}\right., \quad \left.\begin{array}{r} \text{mit } M = 2m \\ c_1 = c_2 = c \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} m & m \\ 2m & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & -c \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P(t) \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array}$$

2. Modalanalyse: Eigenkreisfrequenzen, Eigenformen (freie Schwingungen)

   $$\left.\text{Ansätze: } \underset{\sim}{x}_1 = \underset{\sim}{X}e^{i\omega t} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}\right\} \text{ damit in (1) und (2), mit } P(t) \equiv 0 \text{ und } \mathrm{e}^{i\omega t} \neq 0$$

   $$\hookrightarrow \left.\begin{array}{r} -m\omega^2X_1 - m\omega^2X_2 + cX_2 = 0 \\ -2m\omega^2X_1 + cX_1 - cX_2 = 0 \end{array}\right\}, \quad \text{LGS matriziell } \underbrace{\begin{bmatrix} -m\omega^2 & c - m\omega^2 \\ c - 2m\omega^2 & -c \end{bmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} (3) \\ (4) \end{array}$$

   Eigenkreisfrequenzen: (Eigenwerte)

   nichttriviale $X_{1/2}$ wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet: $\Delta = \Delta(\omega^2) \overset{!}{=} 0$:

   $$\hookrightarrow \quad \Delta(\omega^2) \overset{!}{=} 0 = \omega^4 - \omega^2\frac{2c}{m} + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{m}\right)^2 \quad \text{quadr. Gleichung für } \omega^2$$

   $$\hookrightarrow \quad \omega_{1/2}^2 = \frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{m}\right)^2} = \frac{c}{m} \pm \frac{c}{m}\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_{1/2}^2 = \frac{c}{m}\left[1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right]}$$

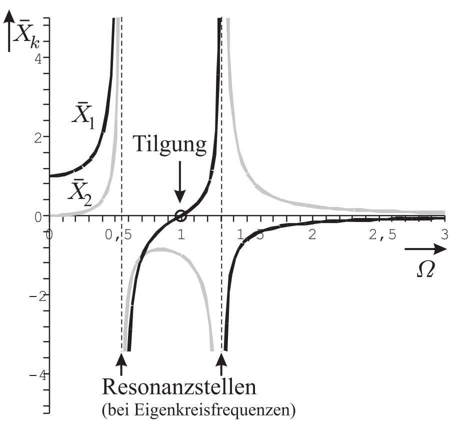
   zugehörige Eigenformen: (Eigenvektoren)

   Bedingung für Ermittlung der EW war $\Delta = \det A \overset{!}{=} 0$.
   Wegen $\det A = 0 \leftrightarrow \operatorname{Rang} A < n$ (für $A = n \times n$) folgt, dass das vorliegende Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix A unterbestimmt (unter*determiniert*) ist! Ein X_k kann damit nur abhängig vom anderen bestimmt werden. Z.B. liefert Addition Gl. (3) + (4):

   $$X_{1,k} = \frac{m\omega_k^2}{c - 3m\omega_k^2}X_{2,k} \quad \text{bzw. die sog. Amplitudenverhältnisse } \boxed{\mu_k = \frac{X_{1,k}}{X_{2,k}} = \frac{m\omega_k^2}{c - 3m\omega_k^2}} \quad (k = 1, 2)$$

3. Zwangsschwingungen: harm. Erregungsfunktion $P(t) = P_0 \sin \Omega t \hat{=} P_0\mathrm{e}^{i\Omega t}$
   Erregung (komplex): $P(t) = P_0\mathrm{e}^{i\Omega t}$, Lösungsansatz (komplex): $\underset{\sim}{x}_p = \underset{\sim}{\bar{C}}\mathrm{e}^{i\Omega t}$
   $\rightarrow$ Einsetzen in (1),(2) ergibt ein inhomogenes LGS für die Amplituden $\bar{X}_k$:

   $$\begin{bmatrix} -m\Omega^2 & c - m\Omega^2 \\ c - 2m\Omega^2 & -c \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \end{pmatrix} e^{i\Omega t} = \begin{pmatrix} 0 \\ P_0 \end{pmatrix} e^{i\Omega t}$$



   Lösung von (5) z.B. über Cramersche Regel

   $$\boxed{\begin{aligned} \bar{C}_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{c - m\Omega^2}{(c - 2m\Omega^2)(c - m\Omega^2) - cm\Omega^2}P_0 = \frac{Z_1}{N_1}P_0 \\ \bar{C}_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{m\Omega^2}{(c - 2m\Omega^2)(c - m\Omega^2) - cm\Omega^2}P_0 = \frac{Z_2}{N_2}P_0 \end{aligned}}$$

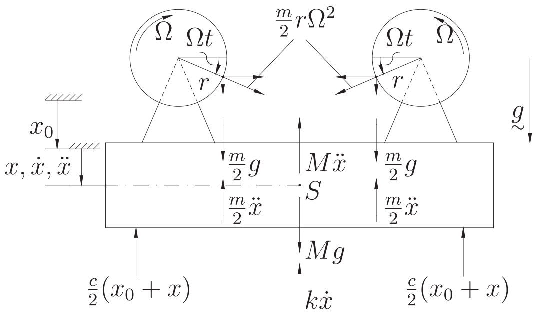
   Resonanzen: $N_k = 0$: für beide $\bar{C}$ gleich! (Polstellen bei $\omega_{1/2}$)
   Tilgung: $Z_k = 0$ keine Tilgung für $\bar{C}_2$

4. Tilgerfrequenz (Arbeitspunkt, opt. Tilgerwirkung)

   Bedingung $Z_1 \overset{!}{=} 0$ oder $\left\{x_1 \overset{!}{=} 0,\ \dot{x}_1 \overset{!}{=} 0,\ \ddot{x}_1 \overset{!}{=} 0\right\} \rightarrow \boxed{\Omega_T^2 = \frac{c}{m}}$

Lösung zu Aufgabe TMIV-10/04

1. Bewegungsgleichung:



statisches Kräftegleichgewicht:

$(M+m)g - cx_0 = 0 \qquad (1)$

d'Alembertsches Prinzip für eine allg. Lage ($x-$Richtung):

$$-M\ddot{x}-m\ddot{x}-k\dot{x}-c(x_0+x)+(M+m)g+mr\Omega^2\sin\Omega t = 0$$

mit $\dfrac{k}{M+m} = 2D\omega_0$, $\dfrac{c}{M+m} = \omega_0^2$ und Gleichung (1)

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{mr}{M+m}\Omega^2\sin\Omega t \qquad (2)$$

2. Frequenzgang, Vergrößerungsfunktion:

meist übersprungen

Grundidee:

Darstellung der harm. Anregung mittels eines komplexen Zeigers: $y(t) = \mathrm{Im}\left\{\Omega^2\, y_0 e^{i\Omega t}\right\}$ $\left(y_0 = \frac{mr}{M+m}\right)$.
Damit komplexe Ansätze für die Lösungen $x(t) = \mathrm{Im}\left\{F(i\Omega)y_0\, e^{i\Omega t}\right\}$, $\dot{x}(t) = \mathrm{Im}\left\{i\Omega F(i\Omega)e^{i\Omega t}\right\}, \ldots$
Gl. (2) führt damit zu: $\quad \mathrm{Im}\left\{\left[(i\Omega)^2 + 2D\omega_0(i\Omega) + \omega_0^2\right] y_0 F(i\Omega)e^{i\Omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\Omega^2 y_0 e^{i\Omega t}\right\}$ $(*)$
Gleichung $(*)$ kann nur für alle Zeiten t gelten, falls die Argumente des Im-Operators gleich sind. Dies rechtfertigt das Weglassen der Im-Klammern und das Gleichsetzen der Argumente, falls nur die Bestimmung von $F(i\Omega)$ verlangt ist.

Bestimmung des komplexen Frequenzganges: (direkte Anwendung des komplexen Zeigers)

$$\left[(i\Omega)^2 + 2D\omega_0(i\omega) + \omega_0^2\right] F(i\Omega)y_0 e^{i\Omega t} = \frac{mr}{M+m}\Omega^2 e^{i\Omega t} \quad \text{und da} \quad e^{i\Omega t} \neq 0$$

$$\to F(i\Omega) = \frac{\Omega^2}{(i\Omega)^2 + 2D\omega_0(i\Omega) + \omega_0^2} \quad \text{und mit } \eta = \frac{\Omega}{\omega_0} \text{ folgt} \quad F(i\eta) = \frac{\eta^2}{(1-\eta^2) + i2D\eta}$$

Vergrößerungsfunktion $V(\Omega) = |F(i\Omega)|$ $\quad\to$ Umschreiben von $F(i\Omega)$ zur Berechnung des Betrages:

$$F(i\eta) = \frac{\eta^2}{(1-\eta^2) + i\,2D\eta}\,\frac{(1-\eta^2) - i2D\eta}{(1-\eta^2) - i2D\eta} = \frac{\eta^2(1-\eta^2) - i\,2D\eta^3}{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2} = \mathrm{Re}\{F\} + i\,\mathrm{Im}\{F\}$$

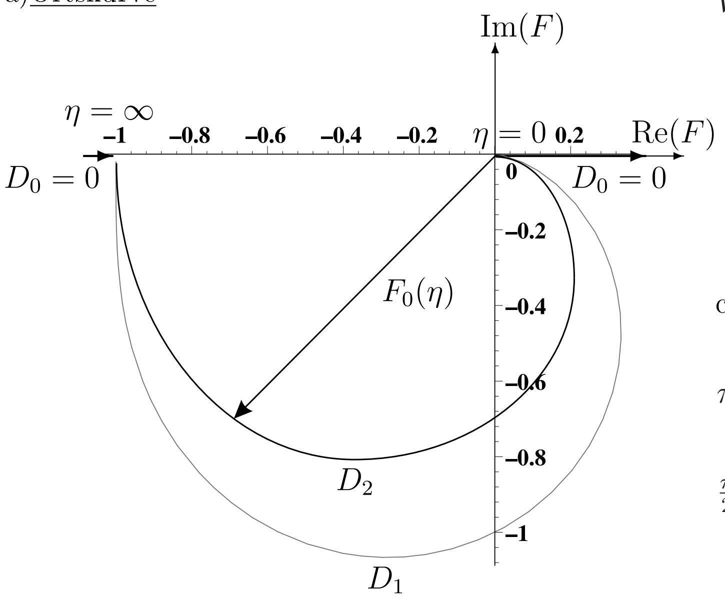
$$\rightsquigarrow V(\eta) = |F(i\eta)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2} \qquad \Rightarrow V(\eta) = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

Nullphasenwinkel $\varepsilon(\Omega)$

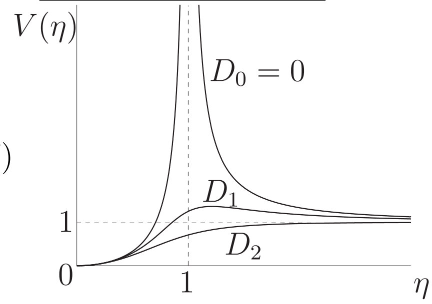
$$\tan(\varepsilon(\eta)) = -\frac{\mathrm{Im}(F)}{\mathrm{Re}(F)} \quad \Rightarrow \quad \tan\varepsilon = -\frac{\mathrm{Im}(F)}{\mathrm{Re}(F)} = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

3. Skizzen:

a) Ortskurve



b) Vergrößerungsfunktion



c) Nullphasenwinkel