Die Hausaufgaben müssen rechtzeitig eingereicht werden. Die Korrektur ist nur notwendig, wenn die Hausaufgaben nicht bestanden wurden. Unter Korrektur dürfen keine Hausaufgaben verspätet eingereicht werden! Wenn Sie keine Hausaufgaben einreichen, wird die Übung als nicht bestanden gewertet! Sie erhalten für jede Übung von einem Tutor einen Laufzettel, der ihre Ergebnisse dokumentiert.	Abgabe **Hausaufgaben** bis: **Mo, 14.06.2021** 19:00 Uhr (MESZ) Abgabe **Korrektur** bis: **Mo, 28.06.2021** 19:00 Uhr (MESZ)

Technische Mechanik IV, SS 2021
Übungsblatt 4

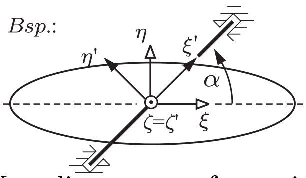
Thema: **Trägheitsmatrix, Kinetische Energie (allgemein)**
Drehung um feste Achsen, Kreiselmoment.

Formelsammlung:

I. Trägheitsmatrix (Koordinaten des Trägheitstensors in (ξ', η', ζ')-Koordinaten)

$$\boxed{\Phi = \begin{pmatrix} J_{\xi'\xi'} & J_{\xi'\eta'} & J_{\xi'\zeta'} \\ J_{\eta'\xi'} & J_{\eta'\eta'} & J_{\eta'\zeta'} \\ J_{\zeta'\xi'} & J_{\zeta'\eta'} & J_{\zeta'\zeta'} \end{pmatrix}_{\{\xi'\eta'\zeta'\}}}$$

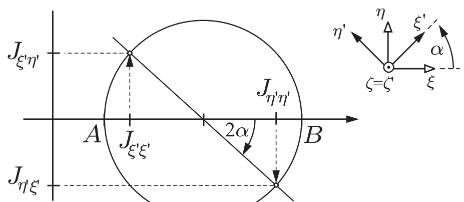
$J_{\xi'\xi'} = \int\limits_{(m)} (\eta'^2 + \zeta'^2)\,\mathrm{d}m$	$J_{\xi'\eta'} = J_{\eta'\xi'} = -\int\limits_{(m)} \xi'\,\eta'\,\mathrm{d}m$
$J_{\eta'\eta'} = \int\limits_{(m)} (\zeta'^2 + \xi'^2)\,\mathrm{d}m$	$J_{\xi'\zeta'} = J_{\zeta'\xi'} = -\int\limits_{(m)} \xi'\,\zeta'\,\mathrm{d}m$
$J_{\zeta'\zeta'} = \int\limits_{(m)} (\xi'^2 + \eta'^2)\,\mathrm{d}m$	$J_{\eta'\zeta'} = J_{\zeta'\eta'} = -\int\limits_{(m)} \eta'\,\zeta'\,\mathrm{d}m$



Koordinatentransformation des Trägheitstensors Φ zwischen zwei Koordinatensystemen analog zur Transformation von Spannungs-/Verzerrungstensoren (siehe TM II, Hütte E62/E67, usw.)!

Beispiel: Koordinatenmatrix $\Phi = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\{\xi\eta\zeta\}}$, $A < B$,

des Trägheitstensors im $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta, \underset{\sim}{e}_\zeta\}$−Hauptachsensystem. Transformation in ein um die $\underset{\sim}{e}_\zeta$−Achse um den Winkel α gedrehtes $\{\underset{\sim}{e}_{\xi'}, \underset{\sim}{e}_{\eta'}, \underset{\sim}{e}_{\zeta'}\}$−System.



$$J_{\xi'\xi'} = \tfrac{1}{2}(B + A) - \tfrac{1}{2}(B - A)\cos 2\alpha$$
$$J_{\eta'\eta'} = \tfrac{1}{2}(B + A) + \tfrac{1}{2}(B - A)\cos 2\alpha$$
$$J_{\xi'\eta'} = J_{\eta'\xi'} = \tfrac{1}{2}(B - A)\sin 2\alpha$$

II. Auswertung des Drehimpulssatzes: für – allgemeines körperfestes $\{\underset{\sim}{e}_{\xi'}, \underset{\sim}{e}_{\eta'}, \underset{\sim}{e}_{\zeta'}\}$−System (i.a. kein HAS)

(siehe TMIV Blatt 3)
- Rotation um raumfeste $\underset{\sim}{e}_{\xi'}$−Achse: ${}^I\underset{\sim}{\omega}^B = {}^I\underset{\sim}{\omega}^K = \underset{\sim}{\omega} = \omega\,\underset{\sim}{e}_{\xi'}$
- $\underset{\sim}{e}_{\xi'}$ i.a. nicht kollinear zu einer Hauptachse
  → Deviationsmomente / Kreiselmomente

Auswertung des Drehimpulssatzes mit Hilfe von (∗) (TMIV Blatt 3) im körperfesten $\{\underset{\sim}{e}_{\xi'}, \underset{\sim}{e}_{\eta'}, \underset{\sim}{e}_{\zeta'}\}$−System:

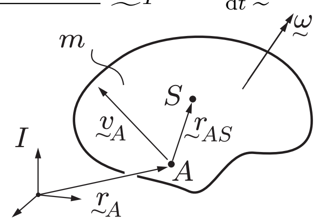
$$\boxed{\frac{{}^I\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\sim}{L} = \begin{pmatrix} J_{\xi'\xi'} \\ J_{\eta'\xi'} \\ J_{\zeta'\xi'} \end{pmatrix}_{\{\xi'\eta'\zeta'\}} \dot{\omega} + \begin{pmatrix} 0 \\ -J_{\zeta'\xi'} \\ +J_{\eta'\xi'} \end{pmatrix}_{\{\xi'\eta'\zeta'\}} \omega^2 = \underset{\sim}{M}}$$

oder im Sinne d'Alemberts $\boxed{\underset{\sim}{M}_T + \underset{\sim}{M} = 0}$

mit dem Kreiselmoment $\underset{\sim}{M}_T = -\frac{{}^I\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\sim}{L}$

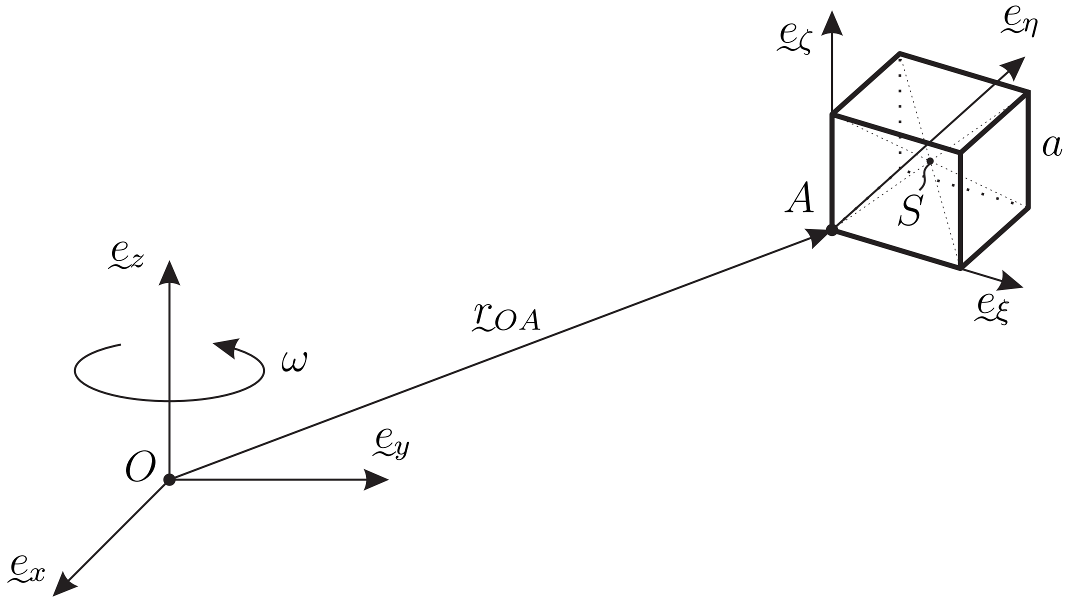
III. Kinetische Energie (allgemein)

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}\,m\,\underset{\sim}{v}_A \cdot \underset{\sim}{v}_A + m\,\underset{\sim}{v}_A \cdot (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{AS}) + \tfrac{1}{2}\,\underset{\sim}{\omega} \cdot \underset{\sim}{L}^{(A)}}$$



$\underset{\sim}{v}_A$	–	Geschwindigkeit des körperfesten Punktes A
$\underset{\sim}{\omega}$	–	Winkelgeschwindigkeitsvektor des Körpers
$\underset{\sim}{r}_{AS}$	–	Vektor von A zum Schwerpunkt S des Körpers
$\underset{\sim}{L}^{(A)}$	–	Drehimpuls $\underset{\sim}{L}^{(A)} = \Phi^{(A)} \cdot \underset{\sim}{\omega}$ bzgl. A, $\Phi^{(A)}$ − Trägheitsmatrix bzgl. A
$m\,\underset{\sim}{v}_A \cdot (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{AS})$	–	Wechselenergie (auch als Koppelenergie bezeichnet)

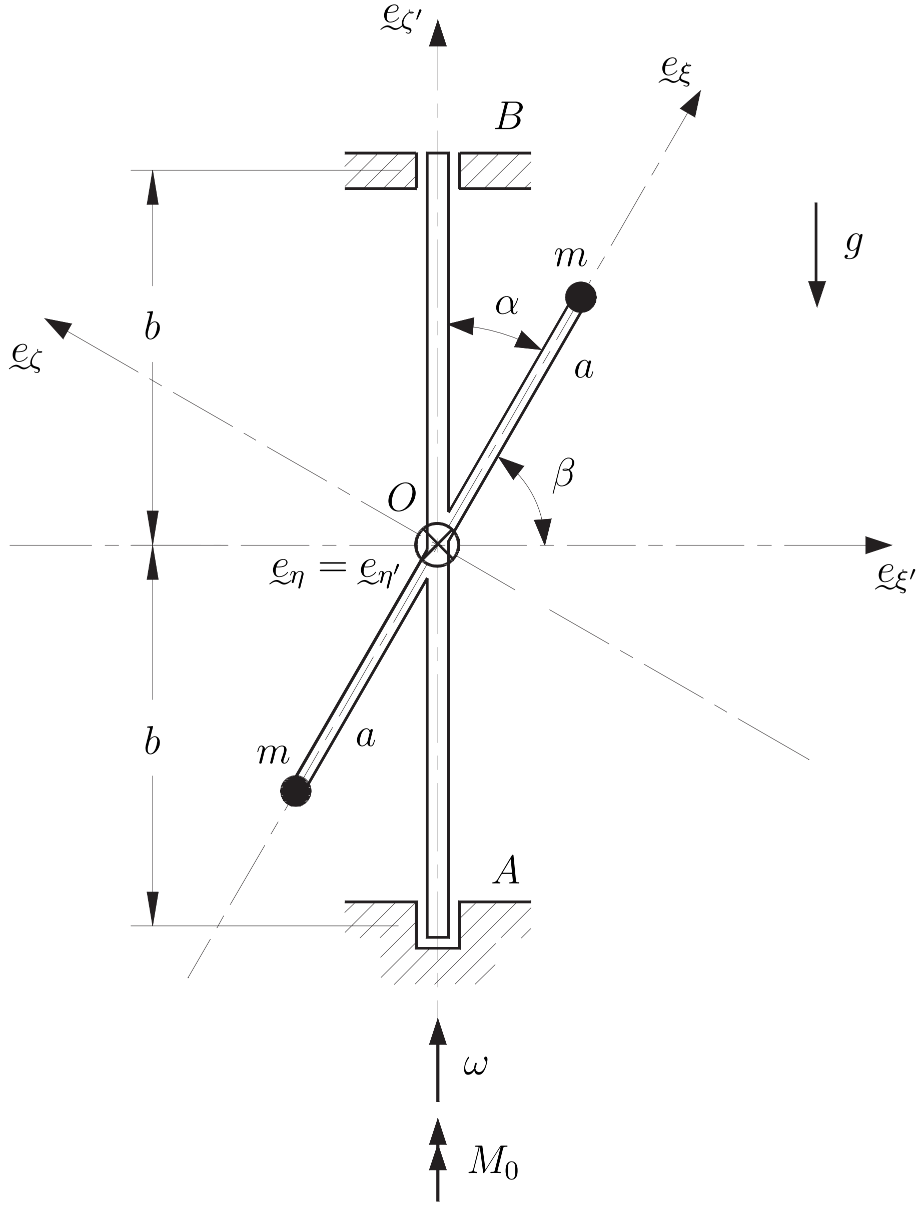
Aufgabe TMIV-04/01



Gegeben ist ein homogener Würfel der Masse m, der Kantenlänge a und dem Schwerpunkt S, der um die raumfeste $\underset{\sim}{e}_z$-Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Der Punkt A entfernt sich dabei vom Ursprung des raumfesten Koodinatensystems O mit der translatorischen Geschwindigkeit $\underset{\sim}{v}_A = (u, v, 0)^T$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind körperfestes und raumfestes Koordinatensystem deckungsgleich, d.h. es gilt $\underset{\sim}{r}_{OA} = \underset{\sim}{0}$ und $\underset{\sim}{e}_x = \underset{\sim}{e}_\xi$.

1. Berechnen Sie die Trägheitsmatrix des Würfels bezüglich A im körperfesten $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta, \underset{\sim}{e}_\zeta\}$−System.
2. Geben Sie den Vektor $\underset{\sim}{r}_{AS}$ in <u>raumfesten</u> Koordinaten an.
3. Bestimmen Sie die kinetische Energie des Würfels.

Aufgabe TMIV-04/07



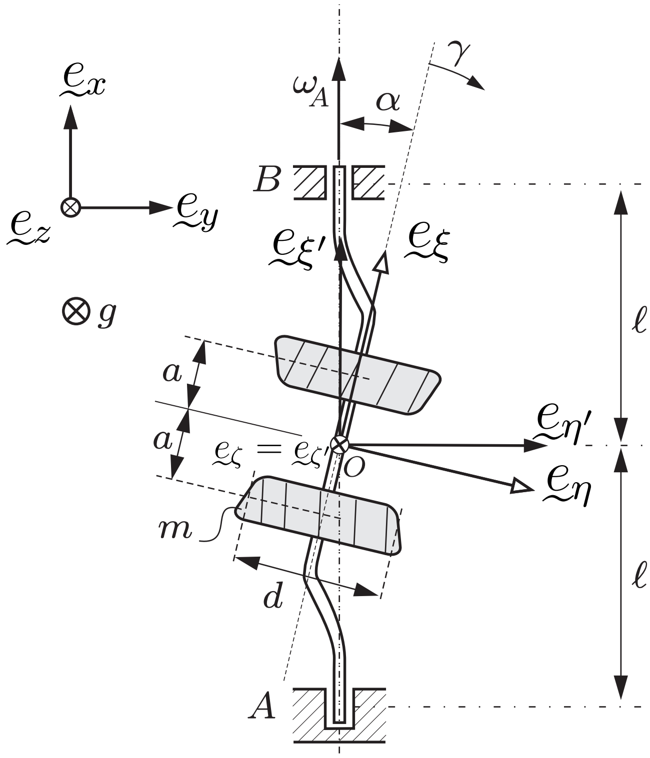
Ein starres, masseloses Winkelkreuz, an dessen Enden zwei Massenpunkte m befestigt sind, wird aus der Ruhelage durch ein konstantes Moment M_0 um die lotrechte Achse AB vollkommen reibungsfrei in Drehung versetzt. Das Bezugssystem $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta, \underset{\sim}{e}_\zeta\}$ geht durch eine Drehung um β aus dem mitdrehenden System $\{\underset{\sim}{e}_{\xi'}, \underset{\sim}{e}_{\eta'}, \underset{\sim}{e}_{\zeta'}\}$ hervor.

1. Ermitteln Sie mit dem Prinzip von d'Alembert die Bewegungsgleichung des Systems.
2. Berechnen Sie mit dem Drallsatz die Momente $M_{\xi'}$ und $M_{\eta'}$, die auf das System einwirken, im mitdrehenden $\{\underset{\sim}{e}_{\xi'}, \underset{\sim}{e}_{\eta'}, \underset{\sim}{e}_{\zeta'}\}$–System.
3. Ermitteln Sie über einen Freischnitt des Rotors die Lagerkräfte in A und B.

Aufgabe TMIV-04/09

— Hausaufgabe —

$$A_{\eta'} = -\frac{M_{\zeta'}}{2l} - mg\sin(\omega_A t)$$



Mit Hilfe eines einfachen mechanischen Modells soll der Einfluss von Fabrikationsfehlern auf die Lagerbelastung schnellaufender Turbinenrotoren (z.B. in Turboladern) untersucht werden.
Der Turbinenläufer besteht aus einer masselosen Welle, die mit der konstanten Antriebswinkelgeschwindigkeit ω_A um die lotrechte $\underset{\sim}{e}_x$−Achse rotiert. Der Mittelteil der Welle hat gegenüber der Ideallinie eine konstante Schiefstellung α. Auf diesem Mittelteil ist ein Rotor montiert, der aus zwei Schaufelkränzen besteht, die als Scheiben der Masse m und des mittleren Durchmessers d betrachtet werden können. Der gesamte Turbinenläufer ist punktsymmetrisch zum Ursprung O des mit dem Rotor mitdrehenden Systems $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta, \underset{\sim}{e}_\zeta\}$.

1. a) Geben Sie die Trägheitsmatrix $\mathbf{\Phi}^{(O)}$ sowie den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\underset{\sim}{\omega}$ und den Winkelbeschleunigungsvektor $\dot{\underset{\sim}{\omega}}$ des Rotors im körperfesten $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta, \underset{\sim}{e}_\zeta\}$−System an.
   b) Formulieren Sie den Drehimpulsvektor $\underset{\sim}{L}$ im mitdrehenden Koordinatensystem.
   c) Die Lage des Drehimpulsvektors $\underset{\sim}{L}$ relativ zur körperfesten $\underset{\sim}{e}_\xi$−Achse sei durch den Winkel γ beschrieben. Finden Sie mit den Abkürzungen $A = J_\xi$ bzw. $B = J_\eta$ einen Zusammenhang zwischen $\tan\alpha$ und $\tan\gamma$. Stellen Sie ω_A in der $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta\}$−Ebene des körperfesten Systems dar und skizzieren Sie relativ dazu $\underset{\sim}{L}$ für $\frac{B}{A}\,\{= 0, < 1, = 1, > 1\}$.

2. Ermitteln Sie mit Hilfe der Eulerschen Kreiselgleichungen die Momente M_ξ, M_η, M_ζ, die von außen auf den Rotor einwirken.

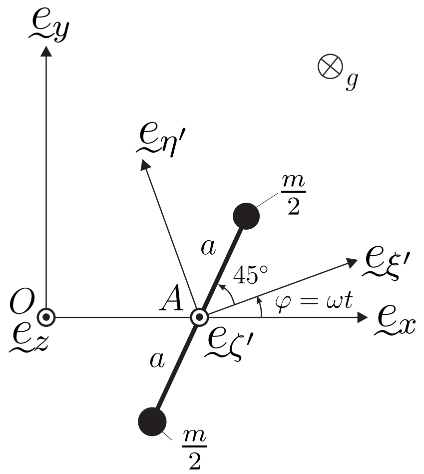
3. Ermitteln Sie damit im körperfesten System die in der $\{\underset{\sim}{e}_y, \underset{\sim}{e}_z\}$−Ebene des raumfesten System umlaufenden Lagerkräfte A und B.

Aufgabe TMIV-04/08

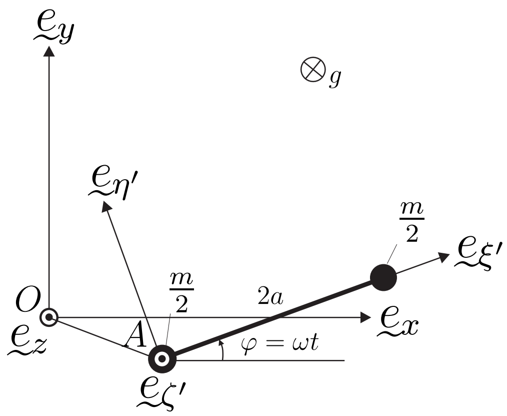
— Hausaufgabe —

$$T_1 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}ma^2\omega^2$$

Variante 1



Variante 2



Ein hantelförmiges Objekt ist beschrieben durch zwei Massenpunkte (jeweils der Masse $\frac{m}{2}$), die mittels einer Stange (Länge $2a$, vernachlässigbare Masse) verbunden sind. Das System bewegt sich im raumfesten $\{\underset{\sim}{e}_x, \underset{\sim}{e}_y, \underset{\sim}{e}_z\}$-System. Das körperfeste System $\{\underset{\sim}{e}_{\xi'}, \underset{\sim}{e}_{\eta'}, \underset{\sim}{e}_{\zeta'}\}$ dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega$ gegenüber dem raumfesten System um die $\underset{\sim}{e}_{\zeta'}$–Achse.
Es sollen zwei unterschiedliche Varianten der Wahl des körperfesten Systems betrachtet werden (siehe Skizze):

Variante 1: Der Ursprung A des körperfesten Koordinatensystems liegt im Schwerpunkt der Anordnung (Mittelpunkt der Stange). Die Stange ist gegenüber der $\underset{\sim}{e}_{\xi'}$–Achse um 45° gedreht. Der Vektor von O nach A ist gegeben als $\underset{\sim}{r}_{OA} = vt\underset{\sim}{e}_x$.

Variante 2: Der Ursprung A des körperfesten Koordinatensystems liegt auf einer der Massen (siehe Skizze). Die Stange ist parallel zur $\underset{\sim}{e}_{\xi'}$–Achse. Der Vektor von O nach A lautet:
$\underset{\sim}{r}_{OA} = (vt - a\cos\varphi)\underset{\sim}{e}_x - a\sin\varphi\underset{\sim}{e}_y$.

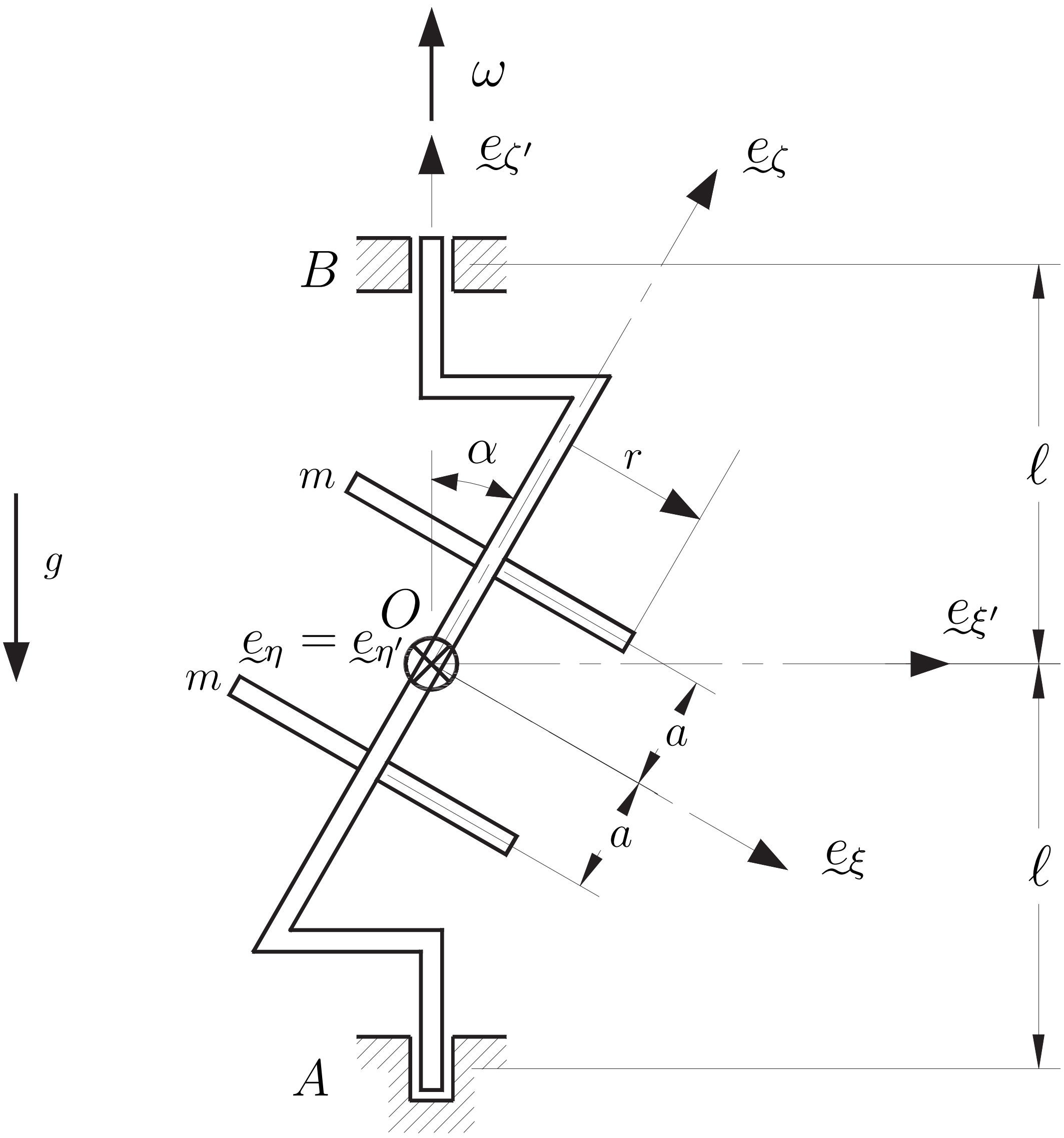
1. a) Machen Sie sich klar, dass in beiden Varianten ein und dieselbe Bewegung betrachtet wird. Skizzieren Sie hierzu qualitativ für beide Fälle die Bewegung des Systemschwerpunktes und des jeweiligen Bezugspunktes A.
   b) Berechnen Sie die Gesamtmasse M und geben Sie für beide Varianten die Trägheitsmatrix $\boldsymbol{\Phi}$ im körperfesten Koordinatensystem sowie die Winkelgeschwindigkeit $\underset{\sim}{\omega}$ an. Ermitteln Sie zudem die Vektoren $\underset{\sim}{r}_{AS}$ und $\underset{\sim}{v}_A$ im raumfesten Koordinatensystem.
2. Zeigen Sie, dass die kinetische Energie T in beiden Fällen gleich ist.

Hinweis: Indizieren Sie die Größen für Variante 1 mit $(\ )_1$ und für Variante 2 mit $(\ )_2$.

Aufgabe TMIV-04/06

— freiwillig —

$A_{\xi'} = \frac{-m\omega^2}{2\ell}\left(\frac{r^2}{4} - a^2\right)\sin(2\alpha)$



Auf eine z-förmig gekröpfte, masselose Kurbelwelle, die mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die $\underset{\sim}{e}_{\zeta'}$–Achse umläuft, sind im gleichen Abstand a von ihrer Mitte O zwei dünne Kreisscheiben mit Radius r und Masse m aufgekeilt.

1. Geben Sie die Drehmassen J_ξ, J_η, J_ζ sowie die Deviationsmomente $J_{\xi\zeta}$, $J_{\eta\zeta}$, $J_{\xi\eta}$ des Systems an.

2. Berechnen Sie unter Angabe der entsprechenden Deviationsmomente die auf das System wirkenden Komponenten $M_{\xi'}$, $M_{\eta'}$ des Kreiselmomentes im $\{\underset{\sim}{e}_{\xi'}, \underset{\sim}{e}_{\eta'}, \underset{\sim}{e}_{\zeta'}\}$–System.

3. Bestimmen Sie Hilfe eines Freischnittes die Lagerkräfte in A und B.

4. Wie lautet der Zusammenhang zwischen r und a, bei dem die Lagerbelastung minimal wird?

Lösung zu Aufgabe TMIV-04/01

1. Trägheitsmatrix Φ und Winkelgeschwindigkeit $\underset{\sim}{\omega}$

$$J_{()} = \int_{(m)} ...dm$$

$$dm = \rho\, dV, \quad \rho = \frac{m}{V}, \quad V = \int_{(V)} dV, \quad dV = d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$\rightarrow \quad V = \int_0^a \int_0^a \int_0^a d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad V = a^3$$

damit

$$J_{()} = \frac{m}{a^3} \int_0^a \int_0^a \int_0^a ...d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

Trägheitsmatrix

$$\Phi^{(A)} = m\, a^2 \begin{bmatrix} +2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & +2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & +2/3 \end{bmatrix}_{\xi\eta\zeta}$$

2. Vektor $\underset{\sim}{r}_{AS}$

... im körperfesten Koordinatensystem

$$\underset{\sim}{r}_{AS} = \frac{1}{2} a \left(\underset{\sim}{e}_\xi + \underset{\sim}{e}_\eta + \underset{\sim}{e}_\zeta \right)$$

Transformation der Basisvektoren

$$\underset{\sim}{e}_\xi = \cos(\omega\, t)\, \underset{\sim}{e}_x + \sin(\omega\, t)\, \underset{\sim}{e}_y, \qquad \underset{\sim}{e}_\eta = -\sin(\omega\, t)\, \underset{\sim}{e}_x + \cos(\omega\, t)\, \underset{\sim}{e}_y, \qquad \underset{\sim}{e}_\zeta = \underset{\sim}{e}_z$$

... ergibt
Aber: Kreuzprodukte stets im gleichen System! im raumfesten Koordinatensystem

$$\underset{\sim}{r}_{AS} = \frac{1}{2} a \left([\cos\omega t - \sin\omega t]\, \underset{\sim}{e}_x + [\sin\omega t + \cos\omega t]\, \underset{\sim}{e}_y + \underset{\sim}{e}_z \right)$$

3. Kinetische Energie T

Winkelgeschwindigkeit

$$\underset{\sim}{\omega} = \omega\, \underset{\sim}{e}_\zeta = \omega\, \underset{\sim}{e}_z$$

$$T = \frac{1}{2} m\, \underset{\sim}{v}_A{}^2 + m\, \underset{\sim}{v}_A \cdot \left(\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{AS} \right) + \frac{1}{2}\, \underset{\sim}{\omega} \cdot \underset{\sim}{L}, \qquad \underset{\sim}{L} = \Phi^{(A)} \cdot \underset{\sim}{\omega}$$

Einsetzen liefert

$$T = \frac{1}{2} m(u^2 + v^2) + \frac{1}{2} m a \omega \left(-u[\sin(\omega t) + \cos(\omega t)] + v[\cos(\omega t) - \sin(\omega t)] \right) + \frac{1}{3} m a^2 \omega^2$$

hier: Berechnung der Skalarprodukte teilweise im raumfesten, teilweise im körperfesten System:
- zulässig, da kinetische Energie (Skalar!) unabhängig vom verwendeten System ist.
- abhängig davon, in welchem System die jeweils beteiligten Größen praktischer auszudrücken sind.

Lösung zu Aufgabe TMIV-04/07

1.) Prinzip von d'Alembert:

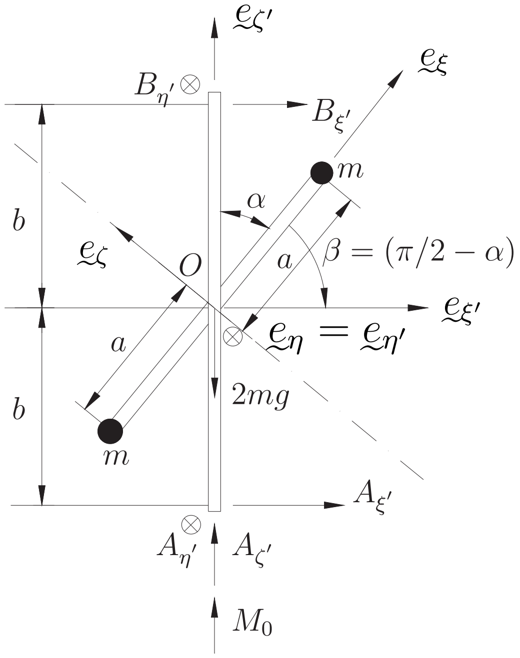
$$\zeta' : M + M_T = 0 \quad \text{mit} \quad M = M_0 \quad \text{und} \quad M_T = -J_{\zeta'}\ddot{\varphi} = -2ma^2 \sin^2 \alpha \dot{\omega}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\dot{\omega} = \frac{M_0}{2ma^2 \sin^2 \alpha}}} \qquad (1)$$

2.) Kreiselmomente:

$$M_{\xi'} = \dot{\omega} J_{\xi'\zeta'} - \omega^2 J_{\eta'\zeta'} \qquad ;$$

$$M_{\eta'} = \dot{\omega} J_{\eta'\zeta'} + \omega^2 J_{\xi'\zeta'}$$



$$J_{\xi'\zeta'} = -\int\limits_{(m)} \xi' \zeta' dm$$

$$= -ma \sin \alpha a \cos \alpha 2$$

$$= \underline{\underline{-ma^2 \sin 2\alpha = J_{\xi'\zeta'}}}$$

$$\underline{\underline{J_{\eta'\zeta'}}} = -\int\limits_{(m)} \eta' \zeta' dm = \int\limits_{(m)} 0 dm = \underline{\underline{0}}$$

$J_{\xi'\zeta'}$ auch über ebene Transformation aus Haupt-trägheitsmomenten: $J_\xi = 0$

$$J_\eta = J_\zeta = 2ma^2$$

$$J_{\zeta'\xi'} = J_{\xi'\zeta'} = \frac{1}{2}(J_\xi - J_\zeta) \sin 2\beta$$

$$= -\frac{1}{2}(2ma^2) \sin(\pi - 2\alpha)$$

$$= -ma^2 \sin 2\alpha$$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{M_{\xi'} = -\dot{\omega} ma^2 \sin 2\alpha}} \quad ; \quad \underline{\underline{M_{\eta'} = -\omega^2 ma^2 \sin 2\alpha}}$$

3.) Lagerkräfte:

$$\sum F_{\xi'} = 0 = A_{\xi'} + B_{\xi'} \quad (2) \quad ; \quad \sum F_{\eta'} = 0 = A_{\eta'} + B_{\eta'} \quad (3)$$

$$\sum F_{\zeta'} = 0 = A_{\zeta'} - 2mg \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A_{\zeta'} = 2mg}} \quad (4)$$

$$M_{\xi'} = -\dot{\omega} ma^2 \sin 2\alpha \stackrel{!}{=} (A_{\eta'} - B_{\eta'})b \quad (5)$$

$$M_{\eta'} = -\omega^2 ma^2 \sin 2\alpha \stackrel{!}{=} (B_{\xi'} - A_{\xi'})b \quad (6)$$

$$(2), (6) \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A_{\xi'} = -B_{\xi'} = \omega^2 ma^2 \sin 2\alpha \frac{1}{2b}}}$$

$$(3), (5) \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A_{\eta'} = -B_{\eta'}}} = -\dot{\omega} ma^2 \sin 2\alpha \frac{1}{2b} \stackrel{(1)}{=} \underline{\underline{\frac{-M_0}{2b \tan \alpha}}}$$