Die Hausaufgaben müssen rechtzeitig eingereicht werden. Die Korrektur ist nur notwendig, wenn die Hausaufgaben nicht bestanden wurden. Unter Korrektur dürfen keine Hausaufgaben verspätet eingereicht werden! Wenn Sie keine Hausaufgaben einreichen, wird die Übung als nicht bestanden gewertet! Sie erhalten für jede Übung von einem Tutor einen Laufzettel, der ihre Ergebnisse dokumentiert.	Abgabe **Hausaufgaben** bis: **Mo, 05.07.2021** 19:00 Uhr (MESZ) Abgabe **Korrektur** bis: **Mo, 19.07.2021** 19:00 Uhr (MESZ)

Technische Mechanik IV, SS 2021
Übungsblatt 7

Thema: **Lagrangesche Gleichungen 2. Art für die räumliche Bewegung von Starrkörpersystemen**

Formelsammlung:

1. Winkelgeschwindigkeitsvektor ${}^I\underset{\sim}{\omega}_i^K$ des i–ten Körpers:

$$\boxed{{}^I\underset{\sim}{\omega}_i^K = \underset{\sim}{\omega}_{F,i} + \underset{\sim}{\omega}_{E,i}}$$

$\underset{\sim}{\omega}_{F,i}$ – Winkelgeschwindigkeit der Führungsbewegung

$\underset{\sim}{\omega}_{E,i}$ – Winkelgeschwindigkeit der Eigendrehung

$i = 1 \dots n$ – Körperindex (n = Anzahl Körper)

Zweckmäßig: Darstellung im körperfesten (ξ, η, ζ)–Hauptachsensystem:

$$\boxed{{}^I\underset{\sim}{\omega}_i^K = \left\{\omega_\xi\, \underset{\sim}{e}_\xi + \omega_\eta\, \underset{\sim}{e}_\eta + \omega_\zeta\, \underset{\sim}{e}_\zeta\right\}_i}$$

$\{\cdot\}_i$–Größen in Klammer für i–ten Körper

2. Kinetische Energie T des Systems:

allgemeines Bezugssystem:

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} m \underset{\sim}{v}_{S,i}^2 + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\Omega}_i \cdot \Phi_i^{(S)}\, \underset{\sim}{\Omega}_i\right)}$$

häufig günstig: Darstellung in (ξ, η, ζ)–HAS:

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} m \underset{\sim}{v}_{S,i}^2 + \frac{1}{2} \left\{J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2\right\}_i\right)}$$

$\underset{\sim}{v}_{S,i}$ – Schwerpunktsgeschwindigkeit des i–ten Körpers

$\Phi_i^{(S)}$ – Trägheitsmatrix des i–ten Körpers bzgl. Schwerpunkt

Hinweis: Kinetische Energie für Bewegung um allg. körperfesten Punkt (nicht Schwerpunkt), siehe TM IV Übungsblatt 4

3. Lagrangesche Gleichungen 2. Art:

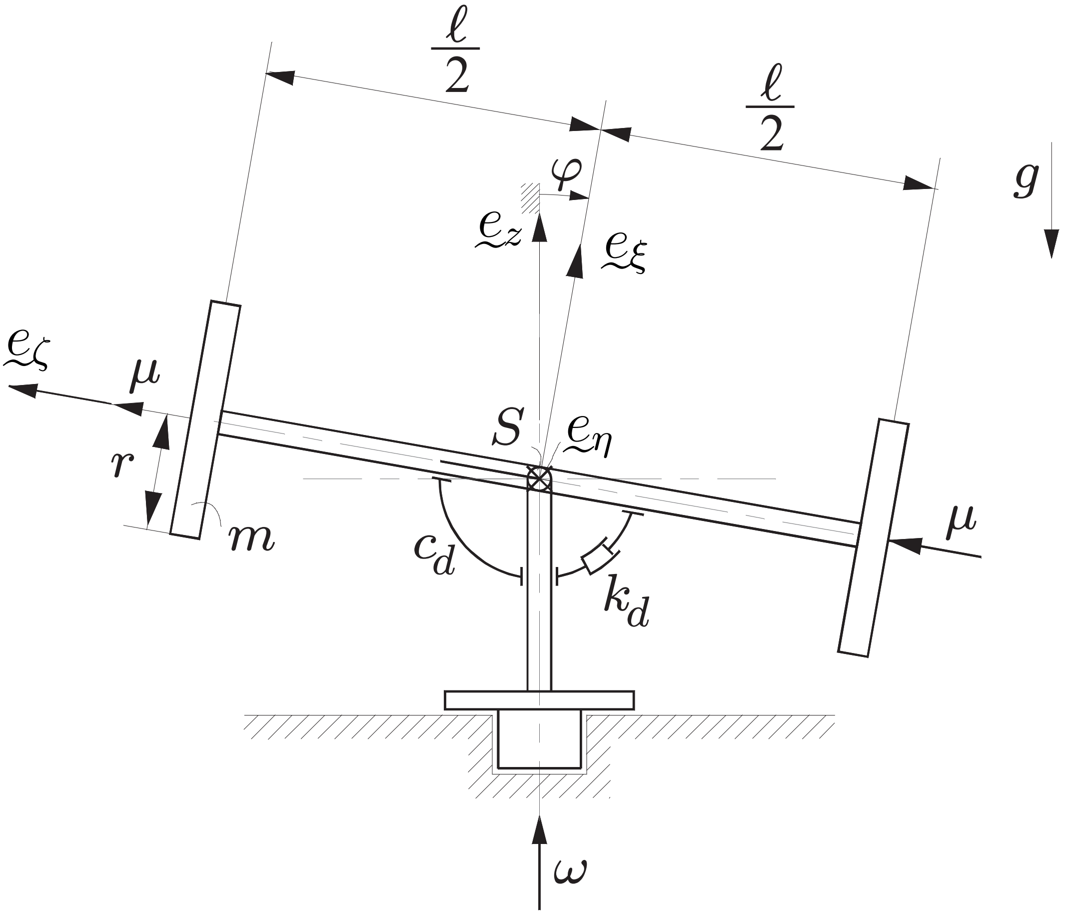
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i} \qquad i = 1, 2, \dots, f$$

mit kinetischem Potential $\boxed{L = T - V}$

und Q_i aus

$$\boxed{\delta W = \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{F}_j \cdot \delta \underset{\sim}{r}_j + \sum_{k=1}^{m} \underset{\sim}{M}_k \cdot \delta \underset{\sim}{\varphi}_k \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{f} Q_i \cdot \delta q_i}$$

(Bezeichnungen siehe TM IV Übungsblatt 6)

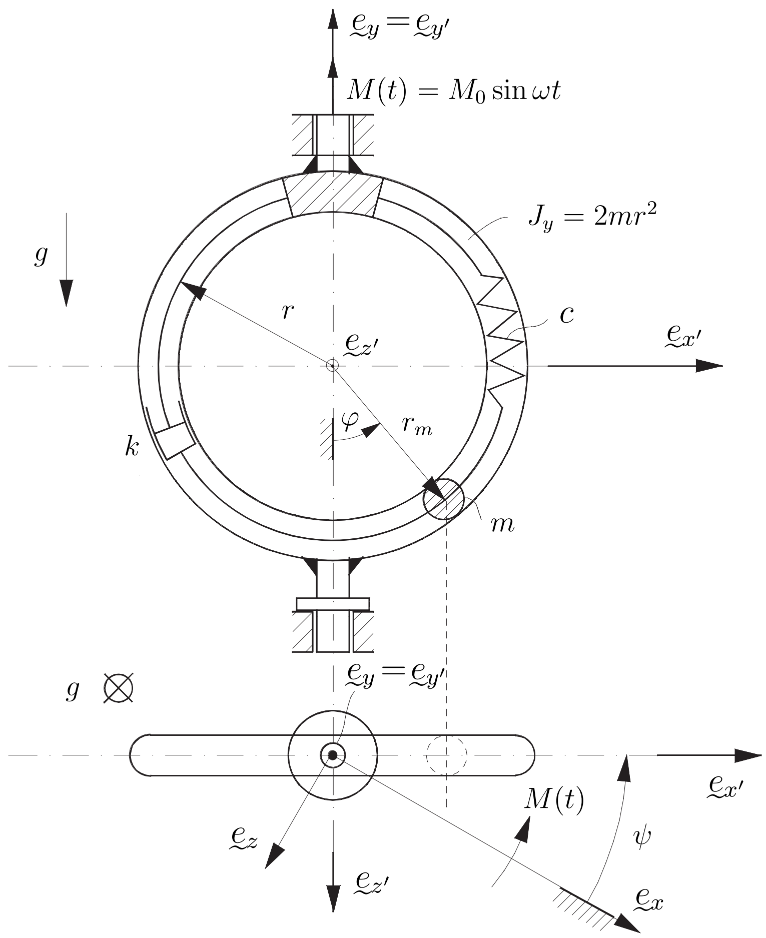


Ein Radsatz besteht aus zwei dünnen, homogenen Kreisscheiben (Masse m, Radius r) und einer masselosen Radachse der Länge ℓ. Die Scheiben rotieren mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit μ um die $\underset{\sim}{e}_\zeta$−Achse des fest mit der Radachse verbundenen (ξ, η, ζ)−Systems. Der Radsatz ist im Schwerpunkt S reibungsfrei drehbar gelagert und rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die Vertikale. Gleichzeitig führt er Pendelschwingungen φ um die Waagerechte aus, deren Ausschlägen eine Drehfeder c_d und ein Dämpfer k_d entgegenwirken. Die Feder sei ungespannt in der Lage $\varphi = 0$.

1. Bestimmen Sie den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\underset{\sim}{\Omega}$ einer Scheibe im (ξ, η, ζ) −System.
2. Berechnen Sie das kinetische Potential L und die generalisierte Kraft Q_φ.
3. Stellen Sie mittels der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art für $\mu = 0$ die linearisierte Bewegungsgleichung in φ um die Ruhelage $\varphi = 0$ auf.
4. Wie groß muss ℓ gewählt werden, damit die Eigenkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems unabhängig von der Drehgeschwindigkeit ω wird? Wie groß ist dann ω_0?

Aufgabe TMIV-07/07

— Beispiel —



Ein kreisförmig gebogenes Rohr mit dem mittleren Radius r ist um die $\underset{\sim}{e}_y$−Achse frei drehbar gelagert und wird durch ein Moment $M(t)$ um diese Achse angetrieben. Das Rohr besitzt um die y−Achse das Massenträgheitsmoment J_y. Im Inneren des Rohres gleitet reibungsfrei ein Massenpunkt m, dessen Bewegung durch eine lineare Feder (Steifigkeit c) und einen linearen Dämpfer (Dämpfungskonstante k) beeinflusst wird. Der Dämpfer und die bei $\varphi = 0$ ungespannte Feder werden als masselos angesehen. Die Bewegung des Systems erfolgt im Schwerefeld der Erde. Zur Beschreibung werden die generalisierten Koordinaten $q_1 = \varphi$ und $q_2 = \psi$ gewählt.

1. Bestimmen Sie den Ortsvektor $\underset{\sim}{r}_m$ zum Massenpunkt in allgemeiner Lage im raumfesten (x, y, z)−Koordinatensystem und berechnen Sie daraus den Betrag der absoluten Geschwindigkeit $\dot{\underset{\sim}{r}}_m$.

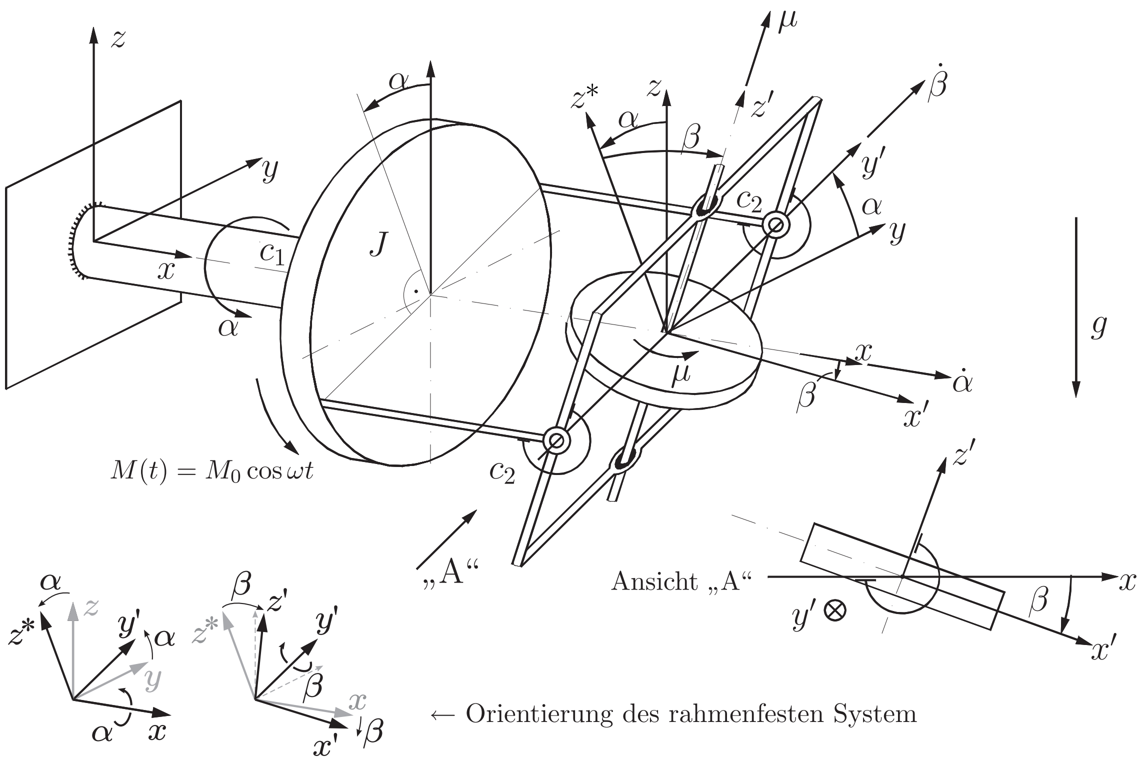
2. Ermitteln Sie die kinetische Energie $T(\dot{\varphi}, \dot{\psi})$ und die potentielle Energie $V(\varphi)$ des Systems und geben Sie die virtuelle Arbeit δW der potentiallosen Kräfte und Momente an.

3. Berechnen Sie mit den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen in φ und ψ.

Aufgabe TMIV-07/05

— Hausaufgabe —

$$(J + B\cos^2\beta + A\sin^2\beta)\ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta(A - B) + A\mu\dot{\beta}\cos\beta + c_1\alpha = M(t)$$
$$B\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2(B - A)\sin\beta\cos\beta - A\mu\dot{\alpha}\cos\beta + 2c_2\beta = 0$$



Ein Drehschwinger besteht aus einer Drehmasse des Massenträgheitsmomentes $J_x = J$ um die $x-$Achse sowie aus einer Torsionsfeder der Steifigkeit c_1. Er wird durch ein harmonisches Drehmoment $M(t) = M_0\cos\omega t$ zu Torsionsschwingungen $\alpha(t)$ um seine Ruhelage $\alpha = 0$ angeregt. Zur Beruhigung dieser Bewegungen wird ein Kreiseltilger aufgesetzt, dessen mit $\mu =$ konst. rotierende Kreisscheibe die Drehmassen $J_{z''} = A$ und $J_{x''} = J_{y''} = B$ bzgl. des körperfesten (x''-y''-z'')$-$Systems besitzt. Der Kreisel ist über einen Rahmen und zwei Drehfedern (Steifigkeit jeweils c_2), die für $\beta = 0$ entspannt sind, elastisch gelagert. Er kann daher Drehbewegungen β um die Gleichgewichtslage $\beta = 0$ ausführen.
Hinweis: Die Lage des rahmenfesten (x'-y'-z')$-$Systems ergibt sich durch konsekutive Drehungen. Das (x-y-z)$-$System wird um die $x-$Achse (Winkel α) und anschließend um die neu entstandene $y'-$Achse (Winkel β) gedreht. Das körperfest mitdrehende (x''-y''-z'')$-$System ergibt sich durch Drehung des rahmenfesten Systems um die $z'-$Achse (siehe Skizze).

1. Geben Sie den Winkelgeschwindigkeitsvektor ${}^{I}\underset{\sim}{\omega}^{K}$ der Kreisscheibe im rahmenfesten (x'-y'-z')$-$System an. Berechnen Sie damit die kinetische Energie T.

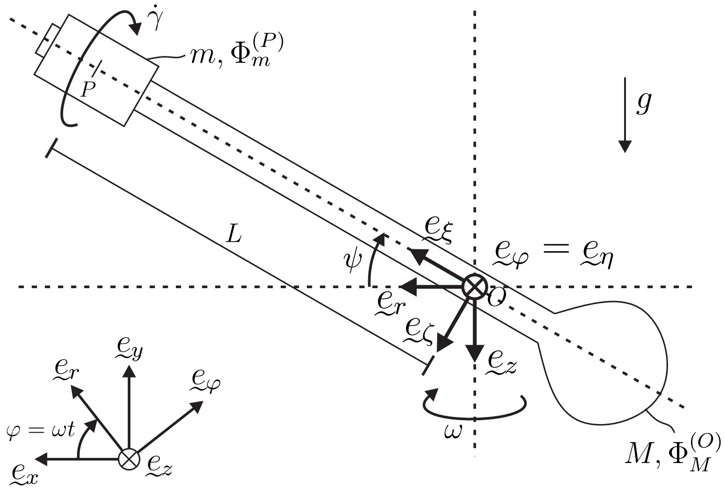
2. Formulieren Sie das kinetische Potential L für das Gesamtsystem sowie eventuell vorhandene generalisierte Kräfte und ermitteln Sie hieraus mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen in den Winkelkoordinaten α und β.

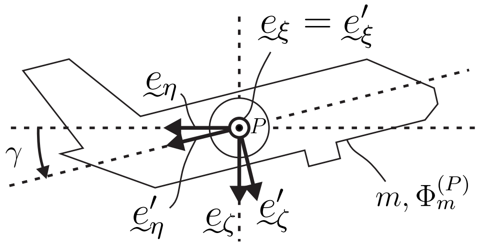
3. Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen. Sie können annehmen, dass die Auslenkungen α bzw. β, Geschwindigkeiten $\dot{\alpha}$ bzw. $\dot{\beta}$ sowie Beschleunigungen $\ddot{\alpha}$ bzw. $\ddot{\beta}$ klein sind.

Aufgabe TMIV-07/09

— Hausaufgabe —

$$(mL^2 + 11J)\ddot{\psi} + (mL^2 + 9J)\omega^2 \cos\psi \sin\psi + mgL\cos\psi = 0$$





Bei einer gemütlichen Runde *Looping Louie* in seiner Lieblingskneipe möchte Benni seinen Mitspielern einen Schritt voraus sein. Dazu will er die Bewegungsgleichungen des Spiels bestimmen.
Der Träger mit der Masse M dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die raumfeste $\underset{\sim}{e}_z$-Achse bezüglich des Inertialsystems. Bezüglich des mitdrehenden $\{\underset{\sim}{e}_r, \underset{\sim}{e}_\varphi, \underset{\sim}{e}_z\}-$Systems kann sich der Träger zusätzlich mit dem Winkel ψ um die $\underset{\sim}{e}_\varphi$-Achse bewegen. Die Trägheitskomponenten des Trägers bezüglich des Ursprungs O, der mit seinem Schwerpunkt zusammenfällt, sind $J_{M,\xi\xi} = 2J$, $J_{M,\eta\eta} = 10J$, $J_{M,\zeta\zeta} = 10J$ (Hauptachsensystem). Am Ende des Trägers befindet sich der Flugkörper mit der Masse m, der sich mit dem Winkel γ um die $\underset{\sim}{e}_\xi$-Achse drehen kann. Der Schwerpunkt des Flugkörpers liegt auf der Drehachse und wird durch den Ortsvektor $\underset{\sim}{r}_P = L\underset{\sim}{e}_\xi$ beschrieben. Die Trägheitskomponenten des Flugkörpers bezüglich seines Schwerpunkts P sind $J_{m,\xi'\xi'} = 2J$, $J_{m,\eta'\eta'} = J$, $J_{m,\zeta'\zeta'} = J$ (Hauptachsensystem). Das System befindet sich im Gravitationsfeld der Erde.

1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\underset{\sim}{v}_P$ des Punktes P bezüglich des raumfesten $\{\underset{\sim}{e}_x, \underset{\sim}{e}_y, \underset{\sim}{e}_z\}-$Systems. Ermitteln Sie zudem den Winkelgeschwindigkeitsvektor des Trägers ${}^I\underset{\sim}{\omega}^T$ im $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta, \underset{\sim}{e}_\zeta\}-$System und den Winkelgeschwindigkeitsvektor des Flugkörpers ${}^I\underset{\sim}{\omega}^F$ im $\{\underset{\sim}{e}_{\xi'}, \underset{\sim}{e}_{\eta'}, \underset{\sim}{e}_{\zeta'}\}-$ System.

2. Formulieren Sie das Potential $V(q)$ sowie die kinetische Energie $T(\dot{q}, q)$. Geben Sie damit das kinetische Potential L an.

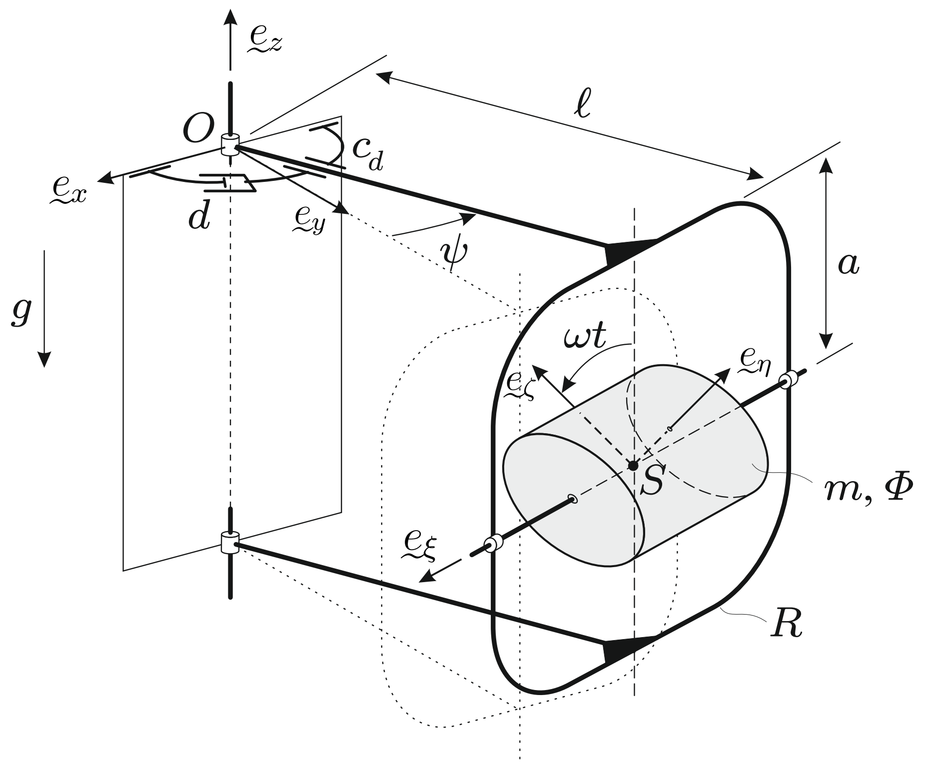
3. Berechnen Sie mittels der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichungen des Systems in ψ und γ.

4. Bestimmen Sie für $\dot{\gamma}(\psi = 0) = 0$ durch Integration der Bewegungsgleichung in γ eine entkoppelte Bewegungsgleichung, die nur noch von ψ abhängt.

Aufgabe TMIV-07/08

— freiwillig —

$$[ml^2 + J_\eta \sin^2(\omega t) + J_\zeta \cos^2(\omega t)]\ddot{\psi} + [2\omega(J_\eta - J_\zeta)\sin(\omega t)\cos(\omega t) + d]\dot{\psi} + c_d\psi = 0$$



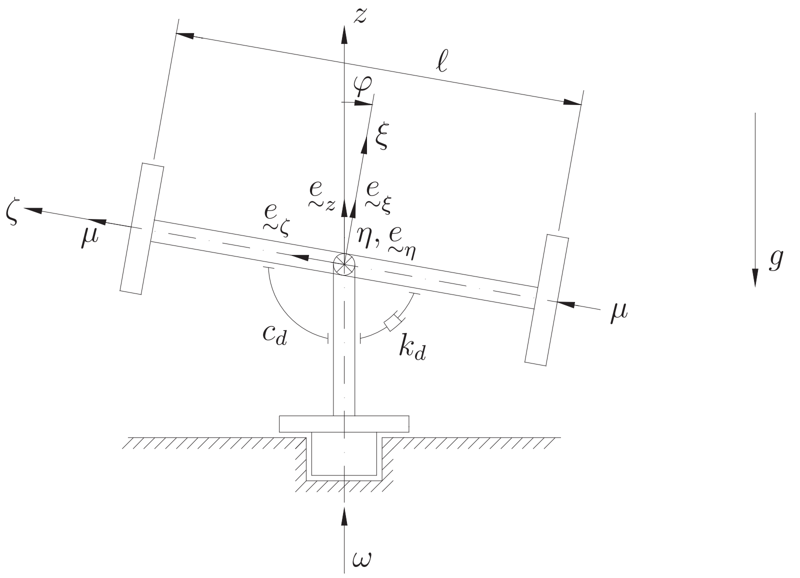
Untersucht werden soll die Bewegung eines unsymmetrischen Rotors (Masse m, Trägheitstensor Φ), der in einem masselosen Rahmen R derart horizontal gelagert ist, dass er reibungsfrei um die $\underset{\sim}{e}_\xi-$Achse seines körperfesten Hauptachsensystems $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta, \underset{\sim}{e}_\zeta\}$ rotieren kann. Der Rahmen selbst kann im Abstand ℓ um die $\underset{\sim}{e}_z-$Achse des $\{\underset{\sim}{e}_x, \underset{\sim}{e}_y, \underset{\sim}{e}_z\}-$Inertialsystems drehen. Die $\underset{\sim}{e}_\xi-$Achse bleibt dabei stets in einer Ebene parallel zur $\{\underset{\sim}{e}_x, \underset{\sim}{e}_y\}-$Ebene des Inertialsystems. Der Rotation des Rahmens wirkt eine linear-elastische Drehfeder c_d (entspannt für $\psi = 0$) sowie ein linear-viskoser Drehdämpfer d entgegen.
Der Rotor rotiert infolge eines Antriebes mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die $\underset{\sim}{e}_\xi-$Achse. Das System führt räumliche Bewegungen im Gravitationsfeld $\underset{\sim}{g}$ der Erde durch, das antiparallel zur $\underset{\sim}{e}_z-$Achse des Inertialsystems gerichtet ist. Das System hat einen Freiheitsgrad und soll durch die generalisierte Koordinate $q = \psi$ beschrieben werden.
Der Trägheitstensor Φ hat bzgl. des körperfesten Hauptachsensystems die Hauptträgheitsmomente J_ξ, J_η und J_ζ.

1. Bestimmen Sie den Ortsvektor $\underset{\sim}{r}_S$ des Schwerpunktes sowie dessen Geschwindigkeit $\dot{\underset{\sim}{r}}_S$. Ermitteln Sie zudem den Winkelgeschwindigkeitsvektor ${}^I\underset{\sim}{\omega}^K$ des Rotors im körperfesten $\{\underset{\sim}{e}_\xi, \underset{\sim}{e}_\eta, \underset{\sim}{e}_\zeta\}-$Hauptachsensystem.

2. Formulieren Sie das Potential $V(q)$ sowie die kinetische Energie $T(\dot{q}, q)$. Geben Sie damit das kinetische Potential L an.

3. Berechnen Sie mittels der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichung des Systems.

Lösung zu Aufgabe TMIV-07/01



1. $\underset{\sim}{\Omega} = \omega \underset{\sim}{e}_z + \dot\varphi \underset{\sim}{e}_\eta + \mu \underset{\sim}{e}_\zeta \quad ; \qquad \underset{\sim}{e}_z = \cos\varphi \underset{\sim}{e}_\xi + \sin\varphi \underset{\sim}{e}_\zeta$
   $\underline{\underline{\underset{\sim}{\Omega} = \omega\cos\varphi \underset{\sim}{e}_\xi + \dot\varphi \underset{\sim}{e}_\eta + (\mu + \omega \sin\varphi)\, \underset{\sim}{e}_\zeta}}$

2. $$T = \frac{1}{2} J_\xi \omega_\xi^2 + \frac{1}{2} J_\eta \omega_\eta^2 + \frac{1}{2} J_\zeta \omega_\zeta^2 \qquad \text{mit} \begin{cases} J_\xi = J_\eta = 2\left(\frac{1}{4} m r^2 + m \frac{\ell^2}{4}\right) = \frac{m}{2}(r^2 + \ell^2) \\ J_\zeta = 2 \frac{1}{2} m r^2 = m r^2 \end{cases}$$
   $$\hookrightarrow \; T = \frac{m}{4}(r^2 + \ell^2)(\omega^2 \cos^2\varphi + \dot\varphi^2) + \frac{1}{2} m r^2 (\mu + \omega \sin\varphi)^2$$
   $$V = \frac{1}{2}\; c_d \; \varphi^2$$
   $$L = \frac{m}{4}(r^2 + \ell^2)(\omega^2 \cos^2\varphi + \dot\varphi^2) + \frac{1}{2} m r^2 (\mu + \omega \sin\varphi)^2 - \frac{c_d}{2}\; \varphi^2$$
   $$\delta W = -k_d \; \dot\varphi \; \delta\varphi = Q_\varphi \; \delta\varphi \qquad \rightarrow \qquad Q_\varphi = -k_d \; \dot\varphi$$

3. Lagrangesche Gleichungen: $n = 1, \quad \mu = 0, \quad \varphi_1 = \varphi$
   $$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{m}{4}(r^2 + \ell^2)(-2\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi) + m r^2 \omega^2 \sin\varphi \cos\varphi - c_d \; \varphi$$
   $$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{m}{2}(r^2 + \ell^2)\dot\varphi \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{m}{2}(r^2 + \ell^2)\ddot\varphi \quad \rightarrow \quad \text{mit} \quad \varphi, \dot\varphi \ll 1 \text{ folgt:}$$
   $$\underline{\underline{\frac{m}{2}(r^2 + \ell^2)\ddot\varphi + k_d \; \dot\varphi + [c_d - \frac{m}{2}(r^2 - \ell^2)\omega^2]\varphi = 0}}$$

4. ω_0 unabhängig von ω:
   für $\underline{r = \ell}$; $\rightarrow$ $\underline{\underline{\omega_0^2}} = \dfrac{2 c_d}{m(r^2 + \ell^2)} = \underline{\underline{\dfrac{c_d}{m r^2}}}$

Lösung zu Aufgabe TMIV-07/07

1. Ortsvektor, Absolutgeschwindigkeit:

$$\underset{\sim}{r}_m = r\sin\varphi\,\underset{\sim}{e}_{x'} - r\cos\varphi\,\underset{\sim}{e}_{y'} \qquad \underset{\sim}{e}_{y'} = \underset{\sim}{e}_y, \qquad \underset{\sim}{e}_{x'} = \cos\psi\,\underset{\sim}{e}_x - \sin\psi\,\underset{\sim}{e}_z$$

$$\underset{\sim}{r}_m = r\sin\varphi(\cos\psi\,\underset{\sim}{e}_x - \sin\psi\,\underset{\sim}{e}_z) - r\cos\varphi\,\underset{\sim}{e}_y$$

$$\underline{\underset{\sim}{r}_m = r\sin\varphi\cos\psi\,\underset{\sim}{e}_x - r\cos\varphi\,\underset{\sim}{e}_y - r\sin\varphi\sin\psi\,\underset{\sim}{e}_z}$$

$$\dot{\underset{\sim}{r}}_m = \underset{\sim}{v}_m = r(\dot\varphi\cos\varphi\cos\psi - \dot\psi\sin\varphi\sin\psi)\underset{\sim}{e}_x + r\dot\varphi\sin\varphi\,\underset{\sim}{e}_y - r(\dot\varphi\cos\varphi\sin\psi + \dot\psi\sin\varphi\cos\psi)\underset{\sim}{e}_z$$

$$|\underset{\sim}{v}_m|^2 = v_m^2 = r^2(\dot\varphi^2\cos^2\varphi\cos^2\psi - 2\dot\varphi\dot\psi\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi\sin\psi + \dot\psi^2\sin^2\varphi\sin^2\psi) + r^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi$$
$$+r^2(\dot\varphi^2\cos^2\varphi\sin^2\psi + 2\dot\varphi\dot\psi\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi\cos\psi + \dot\psi^2\sin^2\varphi\cos^2\psi)$$

$$v_m^2 = r^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi + r^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi + r^2\dot\psi^2\sin^2\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v_m^2 = r^2(\dot\varphi^2 + \dot\psi^2\sin^2\varphi)}$$

2. Kinetische Energie , potentielle Energie , virtuelle Arbeit:

$$T = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}J_y\dot\psi^2 \qquad \Rightarrow \qquad \text{mit } v_m^2 \text{ siehe oben}, \quad J_y = 2mr^2$$

$$T = \frac{1}{2}mr^2(\dot\varphi^2 + \dot\psi^2\sin^2\varphi) + \frac{1}{2}2mr^2\dot\psi^2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{T = \frac{1}{2}mr^2[\dot\varphi^2 + \dot\psi^2(2+\sin^2\varphi)]}$$

$$\underline{\underline{V = \frac{1}{2}cr^2\varphi^2 - mgr\cos\varphi}} \qquad \text{(Nullniveau im Koordinatenursprung)}$$

$$\delta W = -kr\dot\varphi r\;\delta\varphi + M(t)\delta\psi \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\delta W = -kr^2\dot\varphi\delta\varphi + M_0\sin\omega t\delta\psi}$$

3. Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1,2; \qquad q_1 = \varphi, \qquad q_2 = \psi$$

$$\underline{\delta W = Q_\varphi\delta\varphi + Q_\psi\delta\psi} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{Q_\varphi = -kr^2\dot\varphi}, \quad \underline{Q_\psi = +M_0\sin\omega t}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}mr^2[\dot\varphi^2 + \dot\psi^2(2+\sin^2\varphi)] - \frac{1}{2}cr^2\varphi^2 + mgr\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = mr^2\dot\varphi, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = mr^2\ddot\varphi, \qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi} = mr^2\dot\psi^2\sin\varphi\cos\varphi - cr^2\varphi - mgr\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = mr^2\dot\psi(2+\sin^2\varphi), \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = mr^2\ddot\psi(2+\sin^2\varphi) + 2mr^2\dot\psi\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi, \qquad \frac{\partial L}{\partial\psi} = 0$$

$$\underline{\underline{\text{Damit}: \qquad \left|\begin{array}{l} mr^2\ddot\varphi - mr^2\dot\psi^2\sin\varphi\cos\varphi + cr^2\varphi + mgr\sin\varphi = -kr^2\dot\varphi \\ mr^2\ddot\psi(2+\sin^2\varphi) + 2mr^2\dot\psi\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi = +M_0\sin\omega t \end{array}\right|}}$$