Die Hausaufgaben müssen rechtzeitig eingereicht werden. Die Korrektur ist nur notwendig, wenn die Hausaufgaben nicht bestanden wurden. Unter Korrektur dürfen keine Hausaufgaben verspätet eingereicht werden! Wenn Sie keine Hausaufgaben einreichen, wird die Übung als nicht bestanden gewertet! Sie erhalten für jede Übung von einem Tutor einen Laufzettel, der ihre Ergebnisse dokumentiert.	Abgabe **Hausaufgaben** bis: **Mo, 31.05.2021** 19:00 Uhr (MESZ) Abgabe **Korrektur** bis: **Mo, 14.06.2021** 19:00 Uhr (MESZ)

Technische Mechanik IV, SS 2021
Übungsblatt 2

Thema: **Ebene Bewegung von Starrkörpersystemen: Prinzip von d'Alembert, Arbeits- und Energiesatz.**

Formelsammlung:

1. Prinzip von d'Alembert (Schwerpunktsätze):

$$\boxed{\begin{aligned} \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{T} &= \underset{\sim}{0} \\ M_E + M_Z + M_T &= 0 \end{aligned}}$$

$\underset{\sim}{F}$	– eingeprägte Kräfte	M_E	– eingeprägte Momente bzgl. S
$\underset{\sim}{Z}$	– Zwangskräfte	M_Z	– Zwangsmoment bzgl. S
$\underset{\sim}{T}$	– Trägheitskräfte	M_T	– Trägheitsmoment bzgl. S

allg. Vorgehen:
– Freischneiden der Systembestandteile im Sinne d'Alemberts
– Kräftegleichgewichte
– Elimination der durch die Schnitte eingeführten Schnittkräfte

alternativ ist auch die Auswertung im Sinne Newtons möglich. Einem entsprechenden Freischnitt (ohne d'Alembertsche Trägheitsterme) folgt dabei kein Kräfte-/ Momentengleichgewicht, sondern die Auswertung des 2. Newtonschen Axioms bzw. des Drallsatzes.

2. Arbeit und Energie (vgl. TMIII Blatt 5, 6)

– Energie des Gesamtsystem setzt sich additiv aus den Energien der Systembestandteile zusammen

ges. kinetische Energie $T = \sum\limits_i T^{(i)}$, kin. Energie $T^{(i)}$ von Körper i: $T^{(i)} = \dfrac{m_i}{2} v_{S,i}^2 + \dfrac{J_{S,i}}{2} \omega_i^2$

ges. potentielle Energie $V = \sum\limits_i V^{(i)}$, pot. Energie $V^{(i)}$ von Körper i: (siehe TMIII Blatt 6)

– Arbeit am System setzt sich additiv aus den an den Systembestandteilen geleisteten Arbeitsanteilen zusammen

ges. Arbeit am System $W = \sum\limits_i W^{(i)}$, Arbeit $W^{(i)}$ an Körper i: $W^{(i)} = \int\limits_{\underset{\sim}{r}_{i,0}}^{\underset{\sim}{r}_{i,1}} \underset{\sim}{F}_i \cdot d\underset{\sim}{r} + \int\limits_{\varphi_{i,0}}^{\varphi_{i,1}} M_i d\varphi$

Achtung: Herleitung von Arbeits- / Energiesatz aus dem 2. Newtonschen Axiom
→ Integration der Trägheitsterme liefert die Differenz der kinetischen Energien, in die Arbeits-/ Potentialterme gehen nur eingeprägte Kräfte und Zwangskräfte ein!

a) Arbeitssatz:

$$\boxed{W = T_1 - T_0}$$

– gilt allgemein

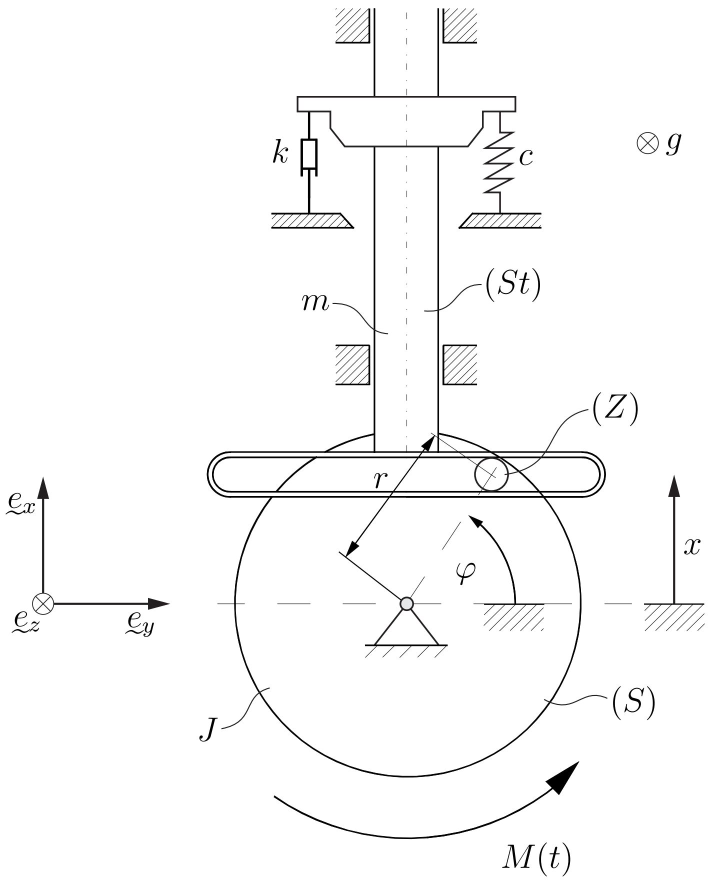
b) Energiesatz:

$$\boxed{T_0 + V_0 = T_1 + V_1}$$

– nur konservative System
(⇔ Kräfte besitzen eine Potentialfunktion)

Aufgabe TMIV-02/01

— Beispiel —



Ein Ventiltrieb bestehe aus einem senkrecht geführten Stößel St der Masse m, der gegen das Gehäuse über eine Feder c und einen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer k abgestützt ist. Die Feder ist für $x = \varphi = 0$ spannungslos. In einer Querführung des Stößels läuft reibungsfrei ein Zapfen Z, der die Vertikalbewegung des Stößels vorgibt. Der Zapfen ist an der Scheibe S angebracht, die mit dem Zapfen die Drehmasse J besitzt und durch ein äußeres Moment $M(t)$ angetrieben die Drehung φ ausführt.

1. Schneiden Sie beide Teilsysteme in einer allgemeinen Lage frei und tragen Sie sämtliche Kräfte und Momente einschließlich der Trägheitswirkungen in eine Skizze ein.

2. Geben Sie die kinematische Beziehung zwischen x und φ und daraus $\dot{x}\,(\dot{\varphi}, \varphi)$ und $\ddot{x}\,(\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, \varphi)$ an.

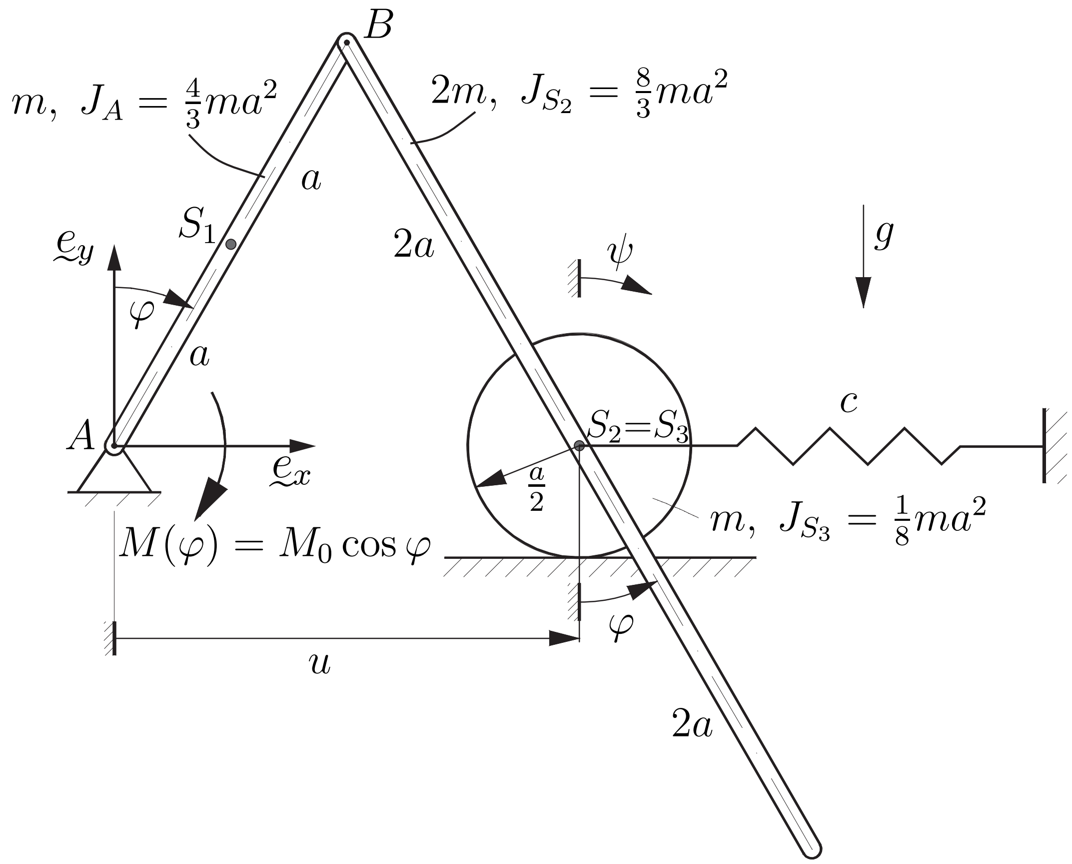
3. Bestimmen Sie mit dem Prinzip von d'Alembert die Bewegungsgleichung des Systems in φ.

4. Geben Sie für das Gesamtsystem in allgemeiner Lage die kinetische Energie $T(\dot{x}, \dot{\varphi})$ und potentielle Energie $V(x)$ an.

5. Bestimmen Sie mit dem Energiesatz und den kinematischen Beziehungen aus Punkt 2. die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}\,(\varphi)$, wenn das äußere Moment $M(t)$ und die Dämpfung verschwinden und wenn gilt: $\dot{\varphi}\,(\varphi = 0) = \omega_0$.

Aufgabe TMIV-02/02

— Beispiel —



Eine Stange der Masse m und Länge $2a$ ist in A drehbar gelagert und in B mit einer Stange der Masse $2m$ und Länge $4a$ gelenkig verbunden. Der Schwerpunkt S_2 dieser Stange ist mit dem Schwerpunkt S_3 einer Walze mit Masse m und Radius $\frac{a}{2}$ gelenkig verbunden. Dort greift eine Dehnfeder mit der Federkonstante c an, die für $u = 0$ spannungslos ist. Die Koordinate ψ beschreibt die Drehung der rollenden Walze. Aus der Anfangslage $u = \psi = \varphi = 0$ wird das System durch das Moment $M(\varphi) = M_0 \cos\varphi$ ohne Anfangsgeschwindigkeit nach rechts in Bewegung gesetzt.

1. Geben Sie die Zusammenhänge $\dot{u}(\varphi, \dot{\varphi})$ und $\dot{\psi}(\varphi, \dot{\varphi})$ und den Ortsvektor $\underset{\sim}{r}_{S_1}(\varphi)$ sowie $\dot{\underset{\sim}{r}}_{S_1}(\varphi, \dot{\varphi})$ an.

2. Schneiden Sie das Gesamtsystem in einer allgemeinen Lage frei, und tragen Sie alle eingeprägten Kräfte und Momente sowie die Zwangskräfte in eine Skizze ein.

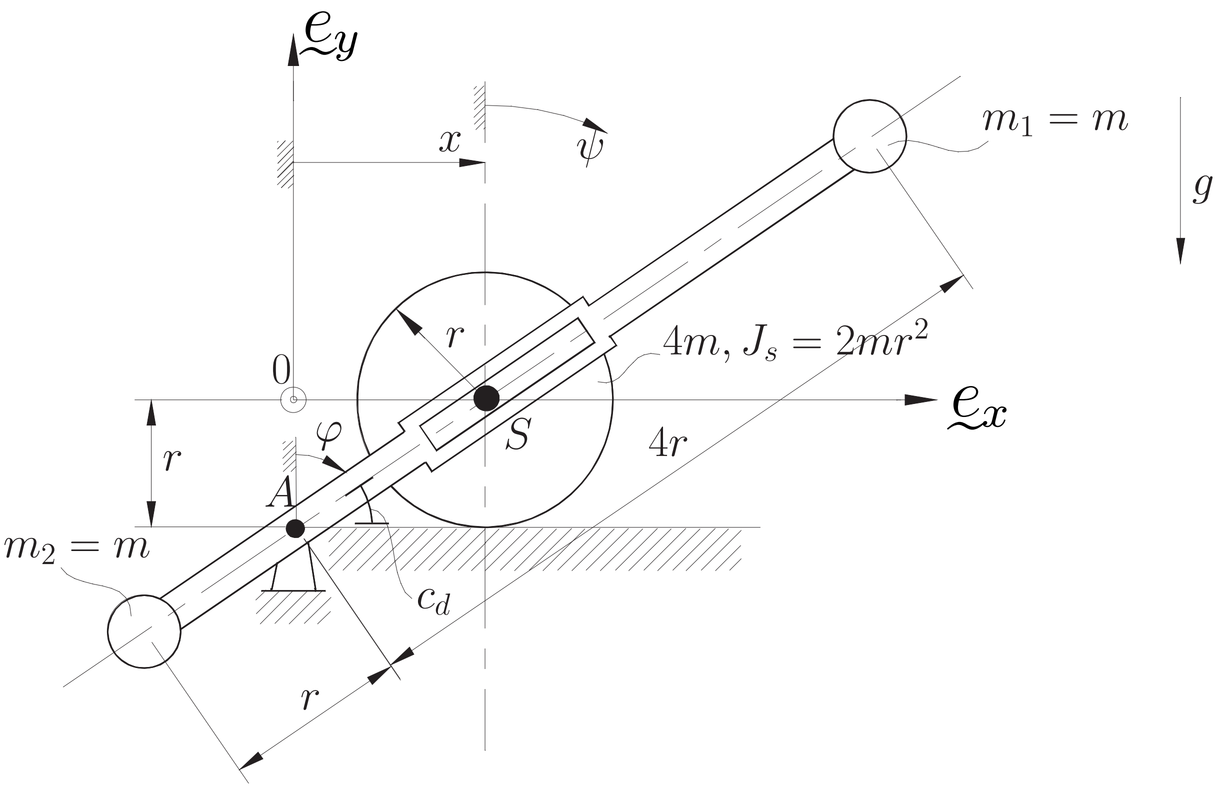
3. Berechnen Sie die Arbeit W der eingeprägten Kräfte und Momente bei einer Lageänderung von $\varphi = 0$ bis φ und bestimmen Sie die kinetische Energie des Systems in allgemeiner Lage.

4. Berechnen Sie unter Verwendung des Arbeitssatzes die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}\,(\varphi)$.

Aufgabe TMIV-02/04

— Hausaufgabe —

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{\frac{6}{cos^4\varphi}+17}[6\frac{g}{r}(1-cos\varphi) - \frac{c_d}{mr^2}\varphi^2 + 23\dot{\varphi}_0^2]$$



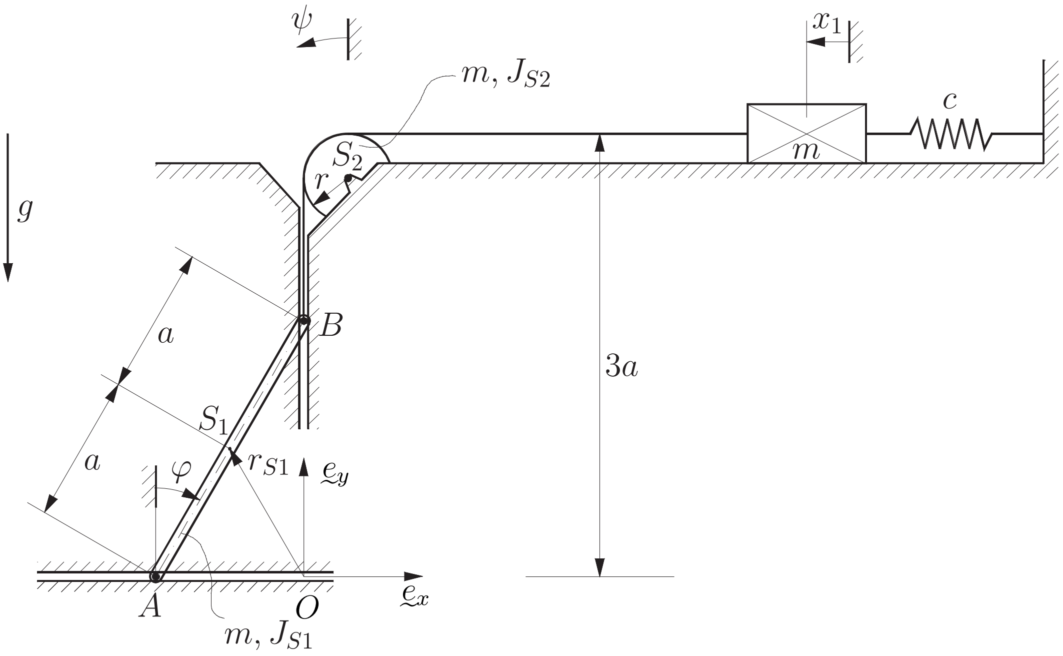
Eine homogene Walze mit dem Radius r der Masse $4m$ und der Drehmasse J_S rollt im Schwerkraftfeld auf einer waagerechten Unterlage ab. Ihr Schwerpunkt S wird über einen masselosen Zapfen in der Nut eines in A drehbar gelagerten, ebenfalls masselosen Stabes reibungsfrei geführt. Der Stab besitzt zwei punktförmige Endmassen m und ist über eine Drehfeder c_d mit der festen Umgebung verbunden. In der Ausgangslage $x = \psi = \varphi = 0$ ist die Feder spannungslos, der Stab besitzt die Anfangswinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$.

1. Schneiden Sie in einer allgemeinen Lage das System als Ganzes von seiner Umgebung frei. Tragen Sie alle eingeprägten Kräfte und Momente sowie die Zwangskräfte in die Skizze ein.
2. Ermitteln Sie die kinematischen Zusammenhänge $\dot{x}(\varphi, \dot{\varphi})$ und $\dot{\psi}(\varphi, \dot{\varphi})$.
   Hinweis: $\frac{d}{d\varphi}\tan\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$
3. Bestimmen Sie
   a) die kinetische Energie $T(\varphi, \dot{\varphi})$ des Systems in einer allgemeinen Lage
   b) sowie die Arbeit $W(\varphi)$ der eingeprägten Kräfte und Momente bei einer Lageänderung von $\varphi = 0$ bis φ.
4. Ermitteln Sie mit dem Arbeitssatz die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi)$ des Stabes.

Aufgabe TMIV-02/07

— Hausaufgabe —

$c = \frac{mg}{2a}$



Ein Stab der Masse m, Länge $2a$ und Drehmasse $J_{S_1} = \frac{m}{3}a^2$ ist in seinen Endpunkten A und B horizontal bzw. vertikal geführt. In B ist ein masseloses undehnbares Seil angebracht, das ohne Schlupf über eine Umlenkrolle der Masse m, Radius r und Drehmasse $J_{S_2} = \frac{m}{2}r^2$ läuft und dessen Ende an einer horizontal geführten Masse m befestigt ist. An dieser Masse greife außerdem eine Schraubenfeder mit der Federkonstanten c an, die für $x_1 = 0$ spannungslos ist. Aus der Anfangslage $\varphi = \psi = x_1 = 0$ setzt sich das System durch eine kleine Störung vollkommen reibungsfrei in Bewegung.

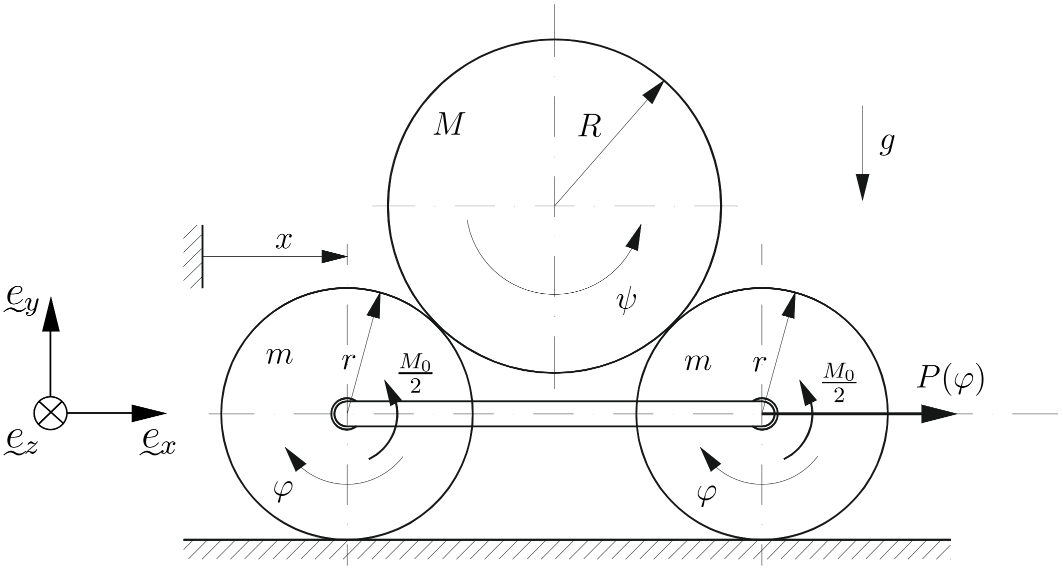
1. Ermitteln Sie in der gezeichneten allgemeinen Lage im angegebenen $\{\underset{\sim}{e}_x, \underset{\sim}{e}_y\}$–System den Ortsvektor $\underset{\sim}{r}_{S_1}$ in Abhängigkeit von φ und bestimmen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie V des Systems als Funktion von $\dot{\varphi}, \varphi, \dot{\psi}, \dot{x}_1, x_1$.

2. Berechnen Sie aus der Geometrie des Systems, der konstanten Seillänge und der Kinematik an der Umlenkrolle $x_1, \dot{x}_1, \dot{\psi}$ jeweils in Abhängigkeit von φ und $\dot{\varphi}$.

3. Bestimmen Sie mit dem Energiesatz die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi)$.

4. Wie muss c gewählt werden, damit das System die Lage $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ mit der Geschwindigkeit Null erreicht?

Aufgabe TMIV-02/05



Zwei volle, homogene Walzen der Masse m und dem Radius r sind durch einen masselosen Rahmen starr miteinander verbunden. Auf die beiden Walzen ist eine dritte Walze der Masse M und dem Radius R gesetzt, die auf ihnen <u>rollt</u>.
Das Gefährt wir durch eine Kraft

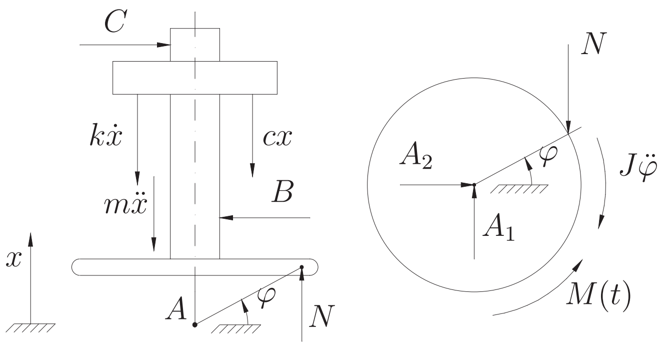
$$P(\varphi) = \left\{ \begin{array}{ll} P_0 \cos\varphi; & 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \qquad ; & \varphi > \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

rollend in Bewegung gesetzt, wobei in den Lagern jeweils ein konstantes Reibungsmoment $\frac{M_0}{2}$ auftritt.

1. Ermitteln Sie die kinematische Beziehungen $\dot{\psi}(\dot{\varphi})$ und $\dot{x}(\dot{\varphi})$.
2. Ermitteln Sie die kinetische Energie des Systems $T(\dot{\varphi})$ in allgemeiner Lage.
3. Ermitteln Sie mit dem <u>Arbeitssatz</u> die Geschwindigkeit $\dot{x}(\varphi)$ während des Beschleunigungsvorgangs.
4. Nach welcher Strecke kommt das Gefährt wieder zur Ruhe?

Lösung zu Aufgabe TMIV-02/01

1. Freischnitt:



2. Kinematik:
   Es gilt: $x = r\sin\varphi$
   $\dot{x} = r\dot{\varphi}\cos\varphi$
   $\ddot{x} = r(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)$

3. Prinzip von D'Alembert:
   Stößel: $\underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$
   Auswertung in x-Richtung: $-m\ddot{x} - k\dot{x} - cx + N = 0$ (1)
   Scheibe: $M + M_T = 0$
   Auswertung um A: $M(t) - J\ddot{\varphi} - Nr\cos\varphi = 0$ (2)

   (1) in (2): $M(t) = J\ddot{\varphi} + (m\ddot{x} + k\dot{x} + cx)r\cos\varphi$
   mit Kinematik:
   $$\underline{\underline{M(t) = (J + mr^2\cos^2\varphi)\ddot{\varphi} - mr^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi + kr^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi + cr^2\sin\varphi\cos\varphi}}$$

4. Kinetische und potentielle Energie:
   $T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$; $V = \frac{1}{2}cx^2$

5. Energiesatz:
   $k = M(t) \overset{!}{=} 0$
   $T_0 + V_0 = T + V$ hier: $T_0 = \frac{1}{2}J\omega_0^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega_0^2$
   $V_0 = 0$

   $$\hookrightarrow \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \frac{1}{2}cr^2\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(J + mr^2)\omega_0^2$$

   $$\underline{\underline{\dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{(J + mr^2)\omega_0^2 - cr^2\sin^2\varphi}{J + mr^2\cos^2\varphi}}}}$$

Lösung zu Aufgabe TMIV-02/02

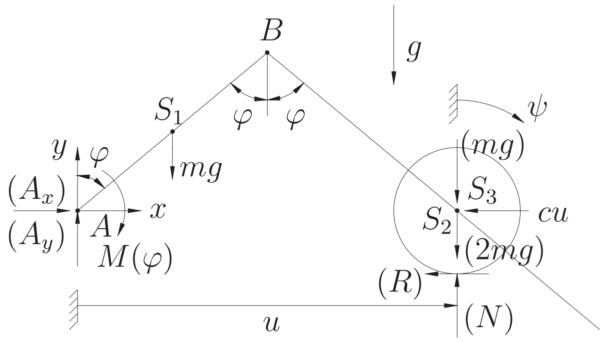
1. Kinematische Zusammenhänge,Ortsvektor $\underset{\sim}{r}_{S_1}$:

   Geometrie: $u = 2(2a\sin\varphi)$ (1) $\rightarrow$ $\underline{\dot{u} = 4a\dot{\varphi}\cos\varphi}$ (2)

   Rollen: $\dot{u} = \frac{1}{2}a\dot{\psi}$ $\rightarrow$ $\underline{\dot{\psi} = 8\dot{\varphi}\cos\varphi}$ (3)

   Ortsvektor: $\underline{\underset{\sim}{r}_{S_1} = a\begin{pmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}}$ $\rightarrow$ $\underline{\dot{\underset{\sim}{r}}_{S_1} = a\dot{\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\end{pmatrix}}$ (4)

2. Freischneiden:



   (...):=keine Arbeit !

3. Arbeiten,kinetische Energie:

   $M(\varphi):\quad W_1 = \int_0^{\varphi} M(\bar{\varphi})d\bar{\varphi} = \int_0^{\varphi} M_0\cos\bar{\varphi}d\bar{\varphi} = \underline{M_0\sin\varphi}$

   $mg:\quad W_2 = \int_0^{\varphi}\begin{pmatrix}0\\ -mg\end{pmatrix}\cdot d\underset{\sim}{r}_{S_1}$; aus (4) : $d\underset{\sim}{r}_{S_1} = ad\varphi\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\end{pmatrix}$

   $$\rightarrow W_2 = \int_0^{\varphi}\begin{pmatrix}0\\ -mg\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\bar{\varphi}\\ -\sin\bar{\varphi}\end{pmatrix}ad\bar{\varphi} = \int_0^{\varphi} amg\sin\bar{\varphi}d\bar{\varphi} = \underline{mga(1-\cos\varphi)}$$

   cu: $W_3 = \int_0^{u} -c\bar{u}d\bar{u} = -\frac{1}{2}cu^2,$ mit (1): $\underline{W_3 = -8ca^2\sin^2\varphi}$

   Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}J_A\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_{S_2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}2m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}J_{S_3}\dot{\psi}^2,$ mit (2),(3):

   $\underline{T = 2ma^2\dot{\varphi}^2(1 + 14\cos^2\varphi)}$

4. Arbeitssatz: $W = T - T_0$; $T_0 = 0$; T aus 3.)

   $W = W_1 + W_2 + W_3$

   $$\hookrightarrow \quad \underline{\underline{\dot{\varphi}(\varphi) = \pm\sqrt{\frac{M_0\sin\varphi + mga(1-\cos\varphi) - 8ca^2\sin^2\varphi}{2ma^2(1+14\cos^2\varphi)}}}}$$