Математический анализ 2

Georgy
@georgyshamteev

Содержание

1 Лекция

1.1 Ряды

Опр. сходимости ряда.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $a_n \in \mathbb{R}$. $A_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ - частичная сумма ряда. Тогда ряд сходится, если существует конечный предел частичных сумм: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} = \lim\limits_{k\to\infty} A_k = a$.

Критерий Коши.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\ k, m \in \mathbb{N} \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\sum\limits_{n=k}^{k+m} a_n\right| < \varepsilon$.

Необходимое условие сходимости ряда.

$\sum\limits_{n=k}^{k+m} a_n$ - сх $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

1.2 Операции над рядами

Сложение: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$

Умножение на скаляр: $\lambda \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot a_n$

Группировка без перестановки (группировка).

Пусть:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - числовой ряд

b) $\{K_n\}^{\infty} \subseteq \mathbb{N} : \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_i < k_{i+1} \end{cases}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \underbrace{\left(a_1 + ... + a_{k_2 - 1}\right)}_{b_1} + \underbrace{\left(a_{k_2} + ... + a_{k_3 - 1}\right)}_{b_2} + b_3 + ...$

Тогда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = a$.

2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$ и $\exists\ m : k_{n+1} - k_n < m\ \forall n$ (т.е. группировка не более чем по m слагаемых), то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = b$.

Proof:

$\Rightarrow$:

$B_N = b_1 + ... + b_N = |$раскрываем $b_i| = a_1 + ... + a_{k_{N+1}-1} = A_{k_{N+1}-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{B_N\}$ подпоследовательность $\{A_N\} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = a$

$\Leftarrow$:

$\tilde{a}_i = \max\left\{\left|a_{k_i}\right|, ..., \left|a_{k_{i+1}-1}\right|\right\}$

$A_n = a_1 + ... + a_n$

$\exists!\ k_i : n \in [k_i, k_{i+1} - 1]$

$A_n = b_1 + ... + b_{i-1} + a_{k_i} + ... + a_n = B_{i-1} + a_{k_i} + ... + a_n \leq B_{i-1} + \tilde{a}_i \cdot m$

$B_{i-1} - \tilde{a}_i \cdot m \leq A_n$

При $n \to \infty \Rightarrow i \to \infty \Rightarrow \tilde{a}_i \Rightarrow 0$.

$B_{i-1} - \tilde{a}_i \cdot m \leq A_n \leq B_{i-1} + \tilde{a}_i \cdot m \Rightarrow$
$b - 0 \cdot m \leq A_n \leq b + 0 \cdot m \Rightarrow$
$A_n \to b$

Замечание:
Если нет доп. условий, то в обратную сторону неверно. Контрпример:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n : (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n : 0 + 0 + 0 + \ldots$

Ряд b_n сходится, а a_n – расходится.

Если добавить в условие, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$ то всё еще неверно.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n : (1-1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \ldots$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n : 0 + 0 + 0 + \ldots$

Ряд a_n расходится по Коши.

1.3 Знакопостоянные ряды

Опр. знакоположительный ряд.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \ a_n \geq 0\ \forall n$ - знакоположительный ряд.

Теорема Лобачевского-Коши.

Пусть:

a) $a_n \geq 0$
b) $a_n \geq a_{n+1}$

Тогда:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim$ по сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$

Proof:

$a_2 \leq a_2 \leq a_1$
$2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2$
$4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4$
...
$2^n a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^{n+1}} \leq 2^n a_{2^n}$
$\frac{S_{n+1}-a_1}{2} \leq A_{2^{n+1}} - a_1 \leq S_n$

Если исходная сходится, то $\frac{S_{n+1}-a_1}{2}$ - неубывающая и ограниченная сверху последовательность $\Rightarrow$ сходится. Аналогично, если сходится конденсированная, то $A_{2^{n+1}} - a_1$ - неубывающая и ограниченная сверху последовательность $\Rightarrow$ сходится.

Сходимость ряда вида $\sum \frac{1}{n^p}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},\ \ p > 0$

По теореме Лобачевского-Коши исходный ряд эквивалентен:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$ - геометрическая прогрессия, где $q = 2^{1-p}$

Тогда ряд сходится $\Leftrightarrow |q| < 1$

$2^{1-p} < 1 \Rightarrow p > 1$

Ряд Бертрана.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ - сходится $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha>1 \\ \alpha=1,\ \beta>1 \end{cases}$

1.4 Признаки сравнения рядов

Первый признак сходимости.

Пусть:

a) $a_n, b_n \geq 0$
b) $a_n \leq b_n$ финально

Тогда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — расходится.

Второй признак сходимости.

Пусть:

a) $a_n, b_n > 0$
b) $\exists\ m, M > 0 : m \leq \frac{a_n}{b_n} \leq M$ финальною

Тогда:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\sim$ по сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

Следствие:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\sim$ по сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

Третий признак сходимости.

Пусть:

a) $a_n, b_n > 0$ b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$

Тогда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - сх $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх.
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расх $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - расх.

2 Лекция

2.1 Другие признаки знакопостоянных рядов

Усиленный радикальный признак Коши.

Пусть:

a) $a_n \geq 0 \; \forall n$
b) $L = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n^{\frac{1}{n}}$

Тогда:

1) $L < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится
2) $L > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится

Proof:

1) $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n^{\frac{1}{n}} = L < 1 \Rightarrow \exists\, q \in (0,1) \; \exists\, N : \forall n \geq N \to a_n^{\frac{1}{n}} \leq q \Leftrightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ - сходится $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.
2) $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n^{\frac{1}{n}} = L > 1 \Rightarrow \forall N \; \exists\, n \geq N : a_n^{\frac{1}{n}} > 1 \Rightarrow a_n > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

Признак Даламбера.

Пусть:

a) $a_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$

b) $d = \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$; $D = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Тогда:

1) $D < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится
2) $D > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится

Proof:

$\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Ссылаемся на Коши.

Замечание

Признак Коши сильнее признака Даламбера. Пример ряда, к которому применим Коши, но не применим Даламбер:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$

Интегральный признак.

Пусть:

a) $f : [1, \infty] \to \mathbb{R};\;\; f(x) \geq 0;\;\; f(x)$ не возрастает.

Тогда:

Если сходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, то сходится $\int_1^{\infty} f(x)dx$

Признак Куммера.

Пусть:

a) $a_n, b_n > 0\ \forall n$

b) Положим $c_n = b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}$

Тогда:

1) $\exists L > 0\ \exists N: \ \forall n \geq N \to c_n \geq L \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

Проще говоря, если c_n финально отделены от 0, то ряд a_n сходится.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ - расходится и $\exists N: \forall n \geq N \to c_n \leq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

Проще говоря, если ряд $\frac{1}{b_n}$ расходится и $c_n \leq 0$ финально, то ряд a_n расходится.

Proof:

1) Пусть $N = 1$

$c_n \geq L\ \forall n \Rightarrow a_n \cdot b_n - b_{n+1} \cdot a_{n+1} \geq L \cdot a_{n+1}$

$A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{L} \sum\limits_{k=1}^{n} L \cdot a_k = \frac{1}{L}\left(La_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} L \cdot a_{k+1}\right) \leq a_1 + \frac{1}{L} \sum\limits_{k=1}^{n-1} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = a_1 +$

$+\frac{1}{L} \cdot (a_1 b_1 - a_n b_n) \leq a_1 + \frac{a_1 b_1}{L} \Rightarrow A_n \leq a_1 + \frac{a_1 b_1}{L} \Rightarrow \{A_n\} \nearrow$ и ограничен $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

2) $c_n \leq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{b_n}}{\frac{1}{b_{n+1}}}$

По 3 признаку сравнения , т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ - расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - тоже расходится.

Признак Бертрана.

Пусть:

a) $a_n > 0\ \forall n$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \ln(n)\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) = B \in [-\infty; \infty]$

Тогда:

1) Если $B > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

2) Если $B < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

Proof:

1) Возьмем в признаке Куммера $b_n = n \ln(n)$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ - расходится

$c_n = n \ln(n) \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) = \underbrace{\ln(n)\left(\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right)}_{\to B > 1} - \underbrace{(n+1)(\ln(n+1) - \ln(n))}_{\to 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Выражение $\to L > 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится по Куммеру.

2)
$c_n = n\ln(n)\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) = \underbrace{\ln(n)\Big(\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) - 1\Big)}_{\to B<1} - \underbrace{(n+1)(\ln(n+1) - \ln(n))}_{\to 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Выражение $\to L < 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится по Куммеру.

Признак Раабе.

Пусть:

$\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = R$

Тогда:

1) $R > 1 \Rightarrow$ сходится

2) $R < 1 \Rightarrow$ расходится

Proof:

Подставляем в $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n)\Big(n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) - 1\Big) = B$ - из признака Бертрана очевидным образом следуют пункты 1 и 2.

Признак Гаусса.

Пусть:

a) $a_n > 0, \exists\lambda \in \mathbb{R}, \exists\mu \in \mathbb{R}, \exists\varepsilon > 0$

b) $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\gamma}{n^{1+\varepsilon}}$, где $\{\gamma\}_1^N$ ограничено.

Тогда:

1) $\begin{cases} \lambda>1 \\ \lambda=1 \text{ и } \mu>1 \end{cases} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2) $\begin{cases} \lambda<1 \\ \lambda=1 \text{ и } \mu\leq1 \end{cases} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится

Proof:

Возьмём Бертрана.

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n)\Big(n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) - 1\Big) = B$

1) Если $\lambda > 1$, то $B = +\infty$

Если $\lambda = 1$ и $\mu > 1$, то:

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n)\big(n\big(\big(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\gamma}{n^{1+\varepsilon}}\big) - 1\big) - 1\big) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n)\big(n\big(\frac{\mu}{n} + \frac{\gamma}{n^{1+\varepsilon}}\big) - 1\big) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n)\underbrace{\big(\mu + \frac{\gamma}{n^{\varepsilon}} - 1\big)}_{\text{const} > 0} = +\infty$

2) Если $\lambda < 1$, то $B = -\infty$

Если $\lambda = 1$ и $\mu < 1$, то $B = -\infty$ - аналогично 1 пункту.

Если $\lambda = 1$ и $\mu = 1$, то в итоге имеем $B = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\varepsilon}}\gamma_n \to 0$.

2.2 Признаки сравнения любых рядов

Признаки Абеля и Дирихле.

Пусть:

Дирихле	Абель
$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ $\left\lvert \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right\rvert \leq M$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.
$\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$	$\exists M > 0 : \forall n$ $\lvert b_n \rvert \leq M$
$\{b_n\} \nearrow$ или $\{b_n\} \searrow$	$\{b_n\} \nearrow$ или $\{b_n\} \searrow$

Тогда:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ - сходится.

Примечание

Дирихле $\Longrightarrow$ Абель

Преобразование Абеля.

Пусть:

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательности вещественных чисел.

Тогда:

$\forall n, k \in \mathbb{N}$ выполнено:

$\sum\limits_{i=n+1}^{n+k} a_i b_i = A_{n+k} b_{n+k} - A_n b_{n+1} + \sum\limits_{i=n+1}^{n+k-1} A_i (b_i - b_{i+1})$, где $A_m = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$

3 Лекция

3.1 Операции над числовыми рядами

Абсолютная и условная сходимость.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

- сходится абсолютно, если сходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$
- сходится условно, если сходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, но расходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Перестановка без группировки.

Пусть:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится абсолютно.

$\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - биекция, задает перестановку ряда.

Тогда:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Proof:

Пусть $a_n \geq 0$, тогда докажем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$

$N = \max(\tau(1), ..., \tau(n))$

$B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} \leq \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \leq a \Longrightarrow \{B_n\}$ - ограничена и не убывает $\Longrightarrow B_n \to b \leq a$

Применим τ^{-1} и аналогичными рассуждениями получим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau^{-1}\circ\tau(k)} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a \leq b$

Отсюда $a \leq b \leq a \Rightarrow b = a \Rightarrow B_n \to a$

Возьмём теперь $p_k = \frac{a_k + |a_k|}{2} \geq 0$, $q_k = \frac{|a_k| - a_k}{2} \geq 0$.

$B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{\tau(k)} - \sum\limits_{k=1}^{n} q_{\tau(k)}$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_{\tau(k)} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_{\tau(k)}$ (т.к. ряды p_k и q_k сходятся) $=$ |по доказанному выше| $=$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k - \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Теорема Римана.

Пусть:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится условно.

Тогда:

1) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\ \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биекция : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = a$

2) $\exists\ \tau_1, \tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биекция : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\tau_1}(n) = +\infty$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\tau_2}(n) = -\infty$

3) $\exists\ \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биекция : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ - расходится

Proof:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

α_n - n-ый неотрицательный член,

β_n - n-ый отрицательный член.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится условно $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty; \sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k = -\infty$

Допустим это неверно.

Если оба ряда α и β сходятся. Тогда оценим $\sum\limits_{k=1}^{m} |a_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k + \sum\limits_{k=1}^{m} |\beta_k| \leq C \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$ сходится абсолютно. Противоречие.

Пусть ряд α сходится, ряд β расходится. Тогда частичные суммы будут расходиться при стремлении к бесконечности. Если записать формально, то если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k = \beta > -\infty$, то $\forall E > 0 \ \exists N(E) : \forall m \geq N(E) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k > E - \beta$.

Пусть M настолько велико, что в $\{a_1, ..., a_M\}$ лежат все $\{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$, тогда:

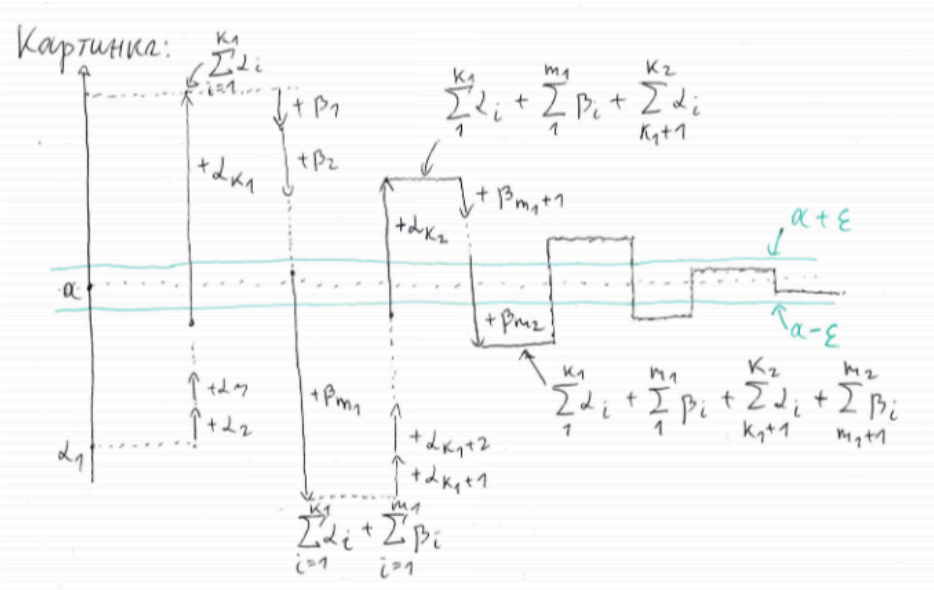
$\sum\limits_{k=1}^{M} a_k \geq \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k + \beta > E$ - в силу произвольности E частичные суммы не ограничены, а значит ряд a_n расходится. Противоречие.

1) Пусть $a \in \mathbb{R}$ произвольно. Будем делать следующее:

Прибавляем α_i, пока сумма не будет больше a. Как только сумма стала больше a, начинаем прибавлять β_i, как только сумма стала меньше a, снова начинаем прибавлять α_i и так далее.

Стоит оговорить три момента:

1. Мы всегда можем брать α_i, которые будут нас «поднимать», потому что их бесконечно много и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$. Аналогично с β_i.
2. Почему мы действительно сойдёмся к a? Исходный ряд сходится условно $\Rightarrow a_k \to 0 \Rightarrow \alpha_i \to 0; \beta_i \to 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow \alpha_i < \frac{\varepsilon}{2}; |\beta_i| < \frac{\varepsilon}{2}$. В момент, когда все α_i и β_i с номерами меньше N войдут в сумму - мы начнём отклоняться от a не больше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. В силу произвольности ε ряд сходится к a по Коши.



3. Почему ряд перестановка исходного? По построению - ряд включает в себя все члены исходного и только их.

2) Чтобы уйти в бесконечность будем брать так:

Берём альфы до 1, потом одну бету, альфы до 2, потому одну бету и т.д.

3) Чтобы сумма расходилась будем набирать так, чтобы получилась последовательность вида $\{1, -1, 2, -2, 3, -3...\}$.

опр. Произведение рядов по Коши.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ряда, тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, где $c_k = a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + ... + a_k b_1$ называется произведением рядов по Коши.

Теорема Тёплица.

Пусть:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & & & & \\ t_{21} & t_{22} & & & \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & & \\ ... & ... & ... & & \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & ... & t_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

a) $\forall j \to \lim\limits_{i\to\infty} t_{ij} = 0$

b) $\exists K : \forall i \to \sum\limits_{j=1}^{i} \left|t_{ij}\right| \leq K$ - для любой строки сумма модулей элементов меньше К.

c) $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = 1$, где $t_i = t_{i1} + ... + t_{ii}$

Тогда:

1) $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{i\to\infty} z_i = 0$, где $z_i = x_1 t_{i1} + ... + x_i t_{ii}$

2) $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{i\to\infty} z_i = x$, где $z_i = x_1 t_{i1} + ... + x_i t_{ii}$

Теорема Коши о суммировании по Чезаро.

Для любых $x_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$ выполнено:

$\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x \Longrightarrow \lim\limits_{i\to\infty} z_i = x$, где $z_i = \frac{x_1+x_2+...+x_i}{i}$.

Proof:

Положим $t_{i1} = t_{i2} = ... = t_{ii} = \frac{1}{i}\ \forall i \in \mathbb{N}$

Данные t_{ij} удовлетворяют всем пунктам теоремы Тёплица $\Rightarrow$ наше утверждение следует из 2 пункта теоремы.

Лемма 1

$$\begin{cases} \lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0 \\ \lim\limits_{i\to\infty} y_i = 0 \\ \sum\limits^{\infty} y_i \text{ - сх. абс.} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{i\to\infty} z_i = 0, \text{ где } z_i = x_1 y_i + ... + x_i y_1$$

Лемма 2

$$\begin{cases} \lim\limits_{i\to\infty} x_i = x \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{i\to\infty} y_i = y \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{i\to\infty} z_i = xy, \text{ где } z_i = \frac{x_1 y_i + ... + x_i y_1}{i}$$

Теорема Мертинса.

Пусть:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a \in \mathbb{R}, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = b \in \mathbb{R}$

b) Хотя бы один сходится абсолютно

Тогда:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = ab, \;\; c_k = a_1 b_k + \ldots + a_k b_1$

Proof:

Пусть ряд a_k сходится абсолютно без потери общности.

$C_n = a_1 B_n + \ldots + a_n B_1$, где $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k, \;\; B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Положим также $\beta_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \beta_k$.

$C_n = a_1(b - \beta_n) + a_2(b - \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(b - \beta_1)$, т.к. $B_n + \beta_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = b$

$C_n = b(a_1 + \ldots + a_n) - (a_1\beta_n + \ldots + a_n\beta_1)$

Положим $x_i = \beta_i$ и $y_i = a_i$ Тогда:

1. $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0$, т.к. $x_i = \beta_i = b - B_i = b - b = 0$
2. $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = 0$, необходимый признак сходимости
3. $\forall i \sum\limits_{j=1}^{i} |y_j| \le K = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j|$ - K существует, т.к. мы предположили, что ряд a_i сходится абсолютно.

Тогда по лемме 1 имеем $a_1\beta_n + \ldots + a_n\beta_1 \to 0$ при $n \to \infty$.

Соответственно, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = b\underbrace{(a_1 + \ldots + a_n)}_{\to a} - \underbrace{(a_1\beta_n + \ldots + a_n\beta_1)}_{\to 0} = ab - 0 = ab$.

Теорема Абеля.

Пусть:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = b$

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = c$, где $c_k = a_1 b_k + \ldots + a_k b_1$

Тогда:

$c = ab$

Proof:

Положим $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i, \;\; B_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i, \;\; C_n = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i$. Несложно заметить и проверить, что $C_1 + \ldots + C_n = A_1 B_n + \ldots + A_n B_1$

Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = a, \; \lim\limits_{n\to\infty} B_n = b$ при $x_i = A_i, y_i = B_i$ по лемме 2 имеем:

$\frac{C_1 + \ldots + C_n}{n} = \frac{A_1 B_n + \ldots + A_n B_1}{n} \to ab$ при $n \to \infty$

С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = c$, поэтому в силу теоремы Коши имеем $\frac{C_1+\ldots+C_n}{n} \to c$, при $n \to \infty$.

Из полученных выше равенств заключаем $c = ab$.

Замечание

Пусть есть два числовых ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$. Как можно определить их произведение:

$\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i\right) \ = \ ?$

Такое произведение можно определить как сумму ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$, где каждый элемент $a_i b_j$ встречается ровно один раз. Но в каком порядке брать эти слагаемые? Как только мы фиксируем какой-либо порядок мы получаем умножение рядов, однако несложно заметить, что таких порядков столько же, сколько биекций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, т.е. несчетное количество. Следующая теорема Абеля показывает, что если ряды сходятся абсолютно, то порядок не важен.

Теорема Абеля об умножении абсолютно сходящихся рядов.

Пусть:

a) Ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходятся аболютно.

b) $i \mapsto (m_i, n_i)$ - биекция $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$.

c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = a$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = b$

Тогда:

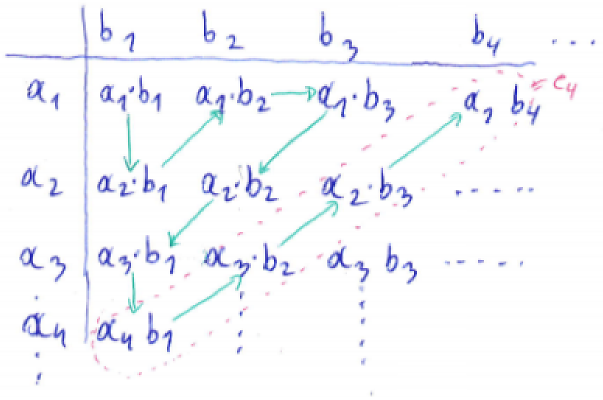
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{m_i} \cdot b_{n_i} = ab$

Proof:

$\sum\limits_{i=1}^{N} \left|a_{m_i} b_{n_i}\right| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{K} |a_i|\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{K} |b_i|\right)$, где $K = \max\{m_1, m_2, ..., m_N, n_1, n_2, ..., n_N\}$ т.к. любое слагаемое левой суммы присутствует в правой сумме и все слагаемые правой суммы неотрицательны.

$\sum\limits_{i=1}^{N} \left|a_{m_i} b_{n_i}\right| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{K} |a_i|\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{K} |b_i|\right) \leq \hat{a}\hat{b} \in \mathbb{R}$, где $\hat{a} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$, $\hat{b} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |b_i| \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{N} \left|a_{m_i} b_{n_i}\right|$ сходится абсолютно.

В силу теоремы о перестановке членов ряда сходящегося абсолютно перестановка на сумму не влияет. Переставим члены ряда следующим образом:



На i диагонали лежат c_i. Сгруппируем члены по диагоналям. Легко увидеть, что получившийся после группировки ряд - это произведение рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ по Коши. Т.к. ряд сходился до группировки, то сходится и после, причем к тому же числу.

Т.к. сходятся ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$, а также сходится полученный ряд, то по т. Абеля сумма ряда равна ab, что и требовалось доказать.